

○ Д: | $K \subset \mathbb{C}$ е нар. компакт, ако K е отр.
(т.е. $K \subset \{z \mid |z| < R\}$) и затворено.

Тв. 1: | $K \subset \mathbb{C}$ е компакт $\Leftrightarrow$ от $\forall$ редица от точки
 $\{z_n \in K\}$ може да се избере сходяща
подредица $\{z_{n_k}\}$, $z_{n_k} \rightarrow z: z \in K$
(т.е. всяка редица е т. от K)

Д: | Отворено покритие на $M \subset \mathbb{C}$ е нар.

○ свободност от отворени множества
 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, такава че $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

(аналог. крайно покритие, подпокритие,
кр. подпокритие)

Тв: | (Хайне-Борел)

$K \subset \mathbb{C}$ е компакт $\Leftrightarrow$ от $\forall$ отворено

покритие на K може да се избере

крайно подпокритие.

○ (т.е. ако $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, то $\exists U_1, \dots, U_n: K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$)

(Ако успеем да док. нещо за отр., ще прена-
семе тези св-ва и за компакт).

Свързани нн. в $\mathbb{C}$. Област.

Д: | K , че $M \subset \mathbb{C}$ е свързано, ако $\nexists$

непресичащи се отворени множества

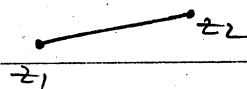
○ U и V със сл. св-ва: $U \cap V \neq \emptyset$, $V \cap M \neq \emptyset$
и $M \subset U \cup V$

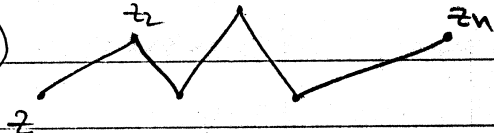
Ако M е отворено:

M е свързано, ако $\nexists$ отворени мн. U и V , такива че $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$ и $M = U \cup V$.

! ($\uparrow$ Ако M е свързано и $M = U \cup V$,
 U, V - отворени мн., $U \cap V = \emptyset$,
то или $U = \emptyset$, или $V = \emptyset$.)

Примери: 1) $\{ \cdot \}$ - свързано;
2) $\{ \cdot, \cdot \}$ - не е свързано;

3)  - свързано;

4)  - свързано;
 $[z_1, \dots, z_n]$

Д.1 Път (крива) в $\mathbb{C}$ е нар. всяко
непрерывното изображение $f: t \mapsto f(t): [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$.
т.е. това е ф-ция $z = f(t) = x(t) + i \cdot y(t)$,
 $x(t), y(t)$ са непр. в $[a, b]$.

Д.2 $M \subseteq \mathbb{C}$ е многократно свързано, ако за $\forall$
2 точки $z_1, z_2 \in M$, $\exists$ крива (път) $\gamma \subset M$, която
и свързва, т.е. $\exists z = \gamma(t): [a, b] \rightarrow M$, та
 $\gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$.

Тв.1 Ако M е отворено мн. $M \subseteq \mathbb{C}$,
следните тв. са еквивалентни:

1) M е свързано мн.

2) M е мнестно-свързано мн.

3) $\forall$ $z, w \in M$ могат да се свършат с нагупена мнния $[z, z_1, \dots, z_{n-1}, w]$ с M .

Пр.: 1) $\mathbb{C}$ - свързано мн.

2) $\forall$ отворен сръг $k(z_0, R)$ е свързано

Тв.: Единствените едновременно отворени и затворени мн. в $\mathbb{C}$ са $\mathbb{C}$ и $\emptyset$.

Од-во: Нека $U \subseteq \mathbb{C}$ е едновр. отворено и затворено. Токмва $\mathbb{C} \setminus U$ е отворено мн. и $C = (C \setminus U) \cup U$. Т.е. $\mathbb{C}$ е свързано, то или $C \setminus U = \emptyset \Rightarrow U = \mathbb{C}$, или $U = \emptyset$.

Д.: Област в $\mathbb{C}$ е нар. всяко отворено и свързано мн.

ОД.: Компонента на свързаност на $M \subseteq \mathbb{C}$ е нар. всяко свързано подмн. на M , което не се обръща в ниско свързано подмн. на M , т.е. ако $K \in$ комп. на св. на M и $K \subseteq K_1 \subseteq M$ K_1 е свързано, то $K = K_1$. (K е максималното свързано подмн.)

Тв.: Всяко мн. $M \subseteq \mathbb{C}$ се представя по начин като обединение на компонентите си на свързаност.

Сл.: Ако M е отворено мн., $M \subseteq \mathbb{C}$,
компонентите на свързаност са обяснени
и са изброино много.

Д-во: Нека $M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$

и нека $z_0 \in U_\alpha$. Поненне M е отворено и $z_0 \in M$,
($\Rightarrow$ $\exists$ цяло кръго, z_0 е свързана в M)
 $\Rightarrow \exists K(z_0, \delta) \subset M$, но $K(z_0, \delta) \in$ свързано мн.
 $\Rightarrow U_\alpha \cup K(z_0, \delta)$ също е свързано,
и $U_\alpha \subset U_\alpha \cup K(z_0, \delta)$, U_α е компонента на об.
 $\Rightarrow$ това е възможно когато

$$U_\alpha = U_\alpha \cup K(z_0, \delta) \Rightarrow K(z_0, \delta) \subset U_\alpha$$

$\Rightarrow U_\alpha$ е отворено и свързано, т.е. е област.

Разг. $\mathbb{C}_\mathbb{Q} = \{z: z = x + iy: x, y \in \mathbb{Q}\}$ - изброино и
навсякъде гъсто в $\mathbb{C}$.
 $\hookrightarrow$ Д-во за изброино мнот.

За контр: множество, зададено аналитично,
да се нарисува и дами е област

Разширената комплексна равнина. Сфера
на Риман

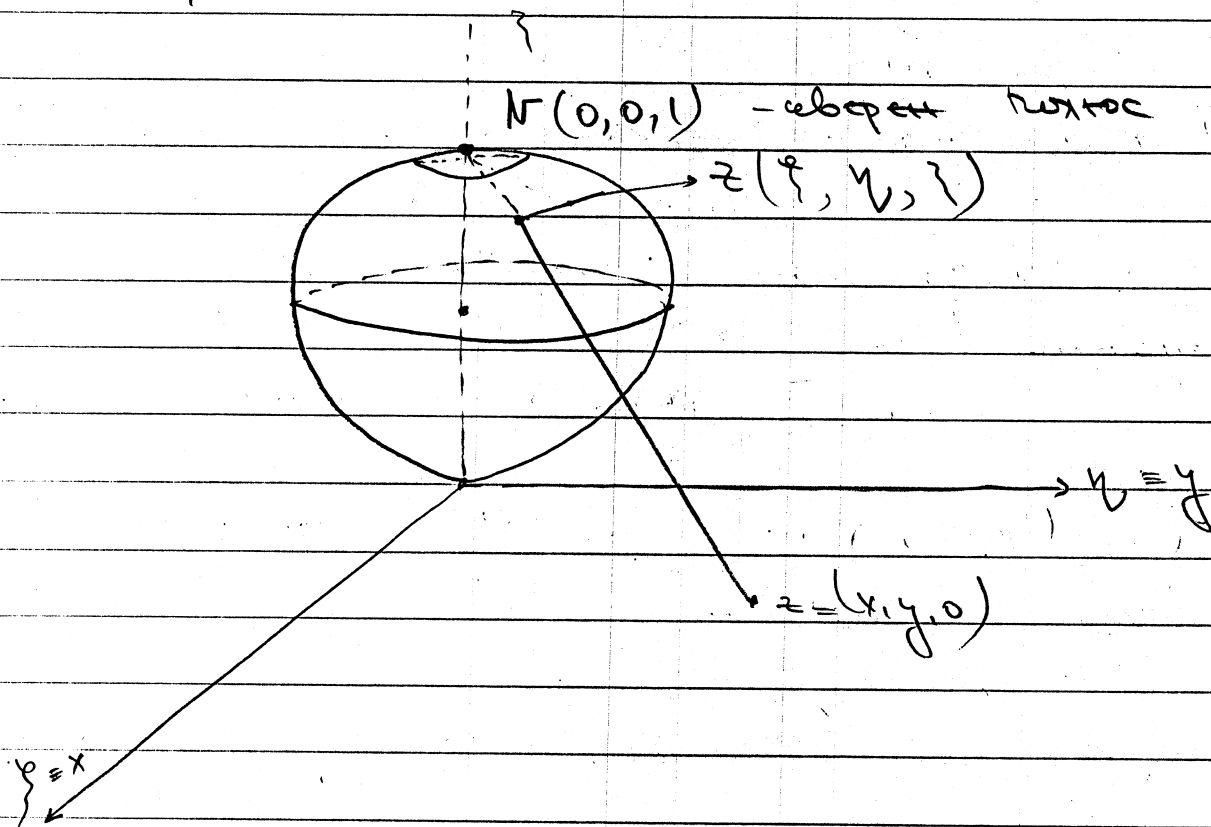
Д.: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ - разширена компл. равн

- Д.:
1. $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$, $z \in \mathbb{C}$
 2. $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$, $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$.
 3. $\frac{z}{\infty} = 0$, $z \in \mathbb{C}$
 4. $\frac{z}{0} = \infty$, $\forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$

$$|\infty| = +\infty$$

Сфера на Риман...

$$S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$



Д: (Стереогрфска проекция)

$$\pi : S^2/N \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \rightarrow z = N z' \cap \mathbb{C}$$

S^2/N - взаимно-однозначно съответствие

аналитично пресмятане:

$$N z' = (x, y, -1)$$

$$N z' : \begin{cases} z \in N \\ \|N z'\| \end{cases}$$

$$N z' = \begin{cases} x = s \cdot x \\ y = s \cdot y \\ z = 1 - s \end{cases}$$

$$\pi : z \in N z'$$

$$s^2 x^2 + s^2 y^2 + (1-s)^2 - 1 + s = 0$$

$$s^2 x^2 + s^2 y^2 + 1 - 2s + s^2 - 1 + s = 0$$

$$s^2 x^2 + s^2 y^2 + s^2 - 3s = 0$$

получихме $\lambda = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{1}{|z|^2 + 1}$ $z = x + i \cdot y$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{|z|^2 + 1} \cdot x \\ y = \frac{1}{|z|^2 + 1} \cdot y \\ z = \frac{1 - 1}{|z|^2 + 1} = \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1} \end{cases}$$

и сега обратната трансформация:

$$x = \frac{z}{1 - z^2}$$

$$y = \frac{z}{1 - z^2} = \frac{z}{1 - z^2} \quad \lambda = 1 - z^2$$

§. | (кометрично) ∞ :

$$\pi: \mathbb{N} \rightarrow \infty$$

∞ е равнопоставена точка с другите, тя е част от сферата.

(подобно към карта = отива в полярна коорд. θ на ϕ)

Тв.: | При стереографската проекция на правите в $\mathbb{C}$ съответстват окръжности през $\mathbb{N}$, а на окръжностите в $\mathbb{C}$ съответстват окръжности в S^2 неминаващи през $\mathbb{N}$.

→ правите в $\mathbb{C}$ ще отговаряват с окръжности през ∞ .
(стереопр. пр. запазва окръжностите).

Тв. 1 Стенор. пр. запозва вглите и/у
опрвнностите.

Малката → околност

Всичко от

опрвнността

