

02.06.2014г.

КА - лек.

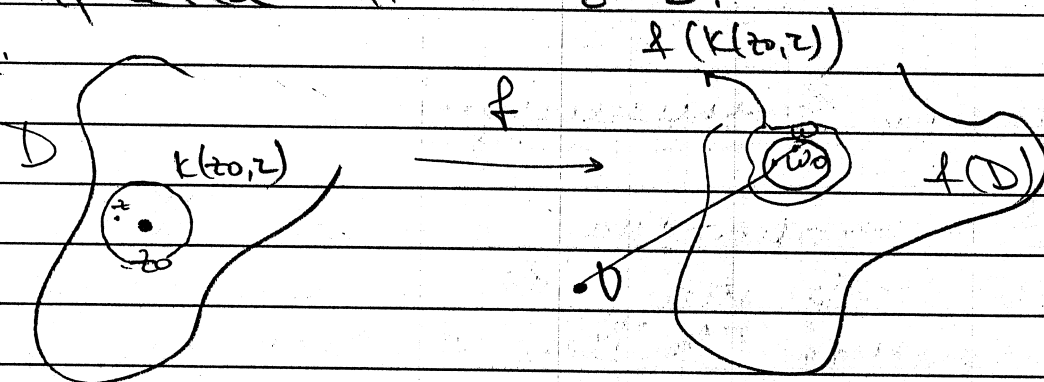
Принцип за запазване на областите

Ако f е холоморфна в област $D \subseteq \mathbb{C}$
и $f \neq \text{const}$, то $f(D)$ е област
(от мин. мекция).

Сл. Принцип за максимума на модула

Ако f е холоморфна и $f \neq \text{const}$ в
област $D \subseteq \mathbb{C}$, то $|f(z)|$ няма
локален максимум в D и в частност
не приема НГС в D .

г-во:



Нека $z_0 \in D$ е произволна точка и $\overline{K(z_0, r)} \subset D$.

От принципа за запазване на областите

$\neg f(K(z_0, r))$ е отворено нн. (и е $\subset f(D)$)

и щом е отв. нн. около w_0 можем

да опишем кръг $K(w_0, R) \subset f(K(z_0, r))$,
където $w_0 = f(z_0)$

Тогав в кръга $K(w_0, R)$ $\exists \omega : |\omega| > |w_0|$,
откъдето сл. че $\exists z \in K(z_0, r) : |f(z)| > |f(z_0)|$.
= $|f(z)|$ няма локален макс. в D .

Т2: | Нека $D \subset \mathbb{C}$ е ограничена област и f е холоморфна в D и непрекъсната в $\bar{D}$. Тогава $|f|$ достига $\pm M$ върху ∂D .

Д-во: 1) Ако $f \equiv \text{const}$ в D , то твърдението е вярно.

2) Ако $f \neq \text{const}$, то $|f|$ достига $\pm M$ в $\bar{D}$, защото $|f|$ е непр. в $\bar{D}$.
Тя не е и достига в D (Т.1)

$\Rightarrow |f|$ достига $\pm M$ в ∂D ,
 $m \leq |f(z)| \leq \max_{z \in \bar{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)|, \forall z \in \bar{D}$.

Сл.1: | Принцип за минимума

Ако $f \neq \text{const}$ в D и $f(z) \neq 0, z \in D$, то $|f|$ няма локален минимум в D и в частност не достига $\pm m$ в D .

Д-во: Прилагаме пр. за максимума към ф-цията $g(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Сл.2: | Ако $f \neq 0$ в ограничена област D , непрекъсната е в $\bar{D}$, то тя достига $\pm M$ в ∂D .

Д-во: Прилагаме Т2 за ф-цията $\frac{1}{f(z)}$.

Приложение на принципа за максимума

Лема на Шварца

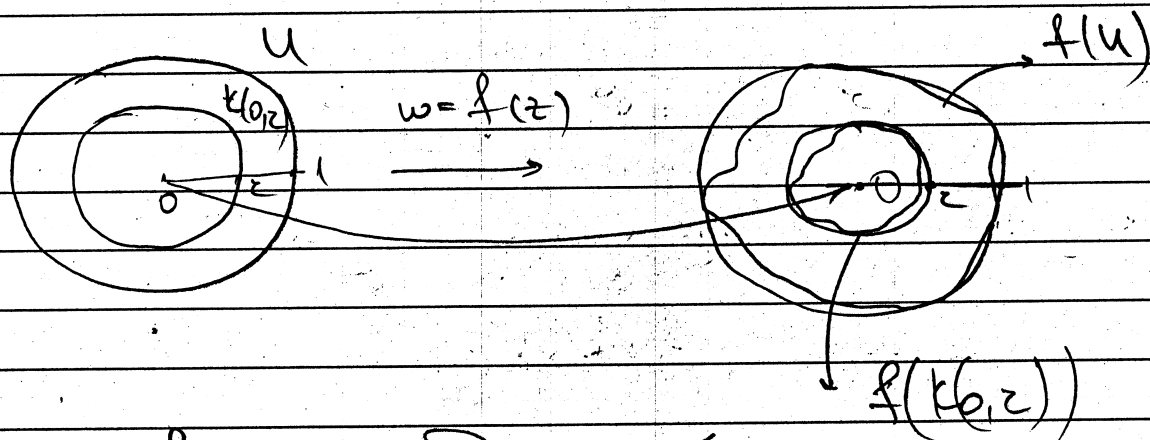
Нека $f \in \text{holomorphic}$ в $U = \{ |z| < 1 \}$,
 $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1, z \in U$.

Тогав (1) $|f(z)| \leq |z|, z \in U$.

(2) $|f'(0)| \leq 1$.

При това, ако в (1) или (2) имаме
 равенство, то $f(z) = e^{i\theta} \cdot z, \theta \in \mathbb{R}$.

Доказ.



Разложение $f(z)$ в ред на Тейлор

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots, z \in U,$$

$$a_0 = f(0) = 0, a_1 = f'(0)$$

Тогав $f(z) = z \cdot g(z)$, където $g(z) = a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1} + \dots$

$g(z) \in \text{holomorphic}$ в U като

$$g(0) = a_1 = f'(0).$$

Нека $z \in U$ и $|z| < 1$

от принципа за максимума

(T2) следва, че $|g(z)| \leq \max_{|z|=r} |g(z)| = \max_{|z|=r} |f(z)| =$

$$= \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}. \quad \text{От тук, при } r \rightarrow 1 \rightarrow$$

$\Rightarrow |f(z)| \leq 1 \stackrel{\text{при } z \neq 0}{\Leftarrow} |f(z)| \leq |z|, z \in U.$
 Също така $|f(0)| \leq 1 \Rightarrow |f'(0)| \leq 1.$
 Ако в (1) или (2) имаме " $=$ "; то

или $\exists z_0 \in U \setminus \{0\} : |f(z_0)| = 1$ или $|f(0)| = 1.$
 От принципа за максимума (T_2)
 $\Rightarrow$ могава $|f(z)| \equiv 1 \Leftrightarrow |f(z)| = |z|$
 $\Rightarrow f(z) = e^{i\theta} \cdot z \quad \theta \in \mathbb{R}$
 (целите модули са " $=$ " можем да имаме само въртене $e^{i\theta}$)

Д: Ако $D \subseteq \mathbb{C}$, конформен
 автоморфизъм на D нах. $\forall$ конформно
 взаимноеднозначно изображение:
 $f: D \rightarrow D.$
 означение: $\text{Aut}(D).$

Доказателство следното тв.: (в наг. на курс)
 Мног. от всички двойно-линейни
 автоморфизми на $U = \{ |z| < 1 \}$ е
 съставено от всички λ, τ от вида

$$T(z) = \frac{e^{i\theta} z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \quad \theta \in \mathbb{R}, z_0 \in U.$$

Тв 1: $\text{Aut } U = \left\{ z \rightarrow \frac{e^{i\theta} z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}, \theta \in \mathbb{R}, z_0 \in U \right\}.$

Д-во: Нека $f \in \text{Aut}(U)$

Тогава f е холоморфна ф-ция в U . де
 Нека $f(0) = \alpha$ и $\lambda(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \in \text{Aut}(U),$

$\lambda(\alpha) = 0.$

Да си образуваме ф-ята $g(z) = k_0 \cdot f(z)$. $\in \text{Aut}(U)$

То е холоморфна в U и $g(0) = k(f(0)) = 0$.

От лемата на Шварц имаме, че

$$(1) |g(z)| \leq |z|, z \in U.$$

Да приложим лемата на Шварц и към $g^{-1} \in \text{Aut}(U)$.

$$\text{Имаме } |g^{-1}(w)| \leq |w|.$$

Заместваме $w = g(z)$ и получаваме:

$$(2) |z| \leq |g(z)|$$

От (1) и (2) $|g(z)| = |z|$ и пак

от лемата на Шварц

$$\Rightarrow g(z) = e^{i\theta} \cdot z, \text{ т.е.}$$

$$k(f(z)) = e^{i\theta} \cdot z$$

$$\Rightarrow f(z) = k^{-1}(e^{i\theta} \cdot z) \quad \underline{\Delta \text{ ЛФ.}}$$

Безкрайни произведения от комплексни числа и функции

D: Нека $\{z_n\}_1^\infty$, $z_n \in \mathbb{C}$, $z_n \neq 0$, $\forall n$ - р-ца от комп. числа.

$\prod_{n=1}^\infty z_n = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n \cdot \dots$ се нар. безкр. произв.

D: К., че $\prod_{k=1}^\infty z_k$ е сходящо, ако р-цата от парциални произв. $\{P_n = \prod_{k=1}^n z_k\}$ е ск.

$$\text{и } \lim P_n = P \neq 0.$$

ТЗ за сходимост:

Ако $\prod z_n$ е сходящо, то $z_n \rightarrow 1$.

$$z_n = \frac{p_n}{q_{n-1}} \rightarrow 1$$

$$p_{n-1}$$

Показател: тогава $z_n := 1 + u_n$, ($u_n \rightarrow 0$, ако $\prod (1 + u_n)$ е сх.)

примери: 1) $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ — разх.

$$p_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{(n-1) \cdot n} = n+1 \rightarrow \infty$$

② $\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$ — разх.

$$p_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)n-1}{(n-1)n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

③ $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ — сх.

$$p_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{n+1}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

ТЗ: $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n)$, $u_n \neq -1$ е сходящо

$$\Leftrightarrow \text{редът } \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + u_n) \text{ е сх.}$$

Д-во:

$\Leftarrow$: | Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n)$ (log-различен

за различните $u_n \in \mathbb{C}$ сходящ, т.е.
 функцията от партиципалните функции
 $S_n = \sum_{k=1}^n \log(1+u_k)$ е с.к. и

Ако $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Тогав ако разл. $p_n = \prod_{k=1}^n (1+u_k)$, то

$$p_n = e^{S_n} \rightarrow e^S \neq 0 \Rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) \in \text{с.к.}$$

$\Rightarrow$: | Ако $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) \in \text{с.к.}$ и

$$p_n = \prod_{k=1}^n (1+u_k) \rightarrow p \neq 0.$$

$$\text{Т.к. } \sum_{n=1}^{\infty} \log(1+u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln|1+u_n| + i \sum_{n=1}^{\infty} \arg(1+u_n)$$

$$\text{то тој ред е с.к.} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln|1+u_n| \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \arg(1+u_n)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln|1+u_n| \in \text{с.к.} ? \quad \text{са сходящ:$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln|1+u_k| = \ln \prod_{k=1}^n |1+u_k| = \ln p_n \rightarrow \ln p.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arg(1+u_n) \in \text{с.к.} ?$$

$$\text{Имаме, че } \arg(1+u_1) + \arg(1+u_2) + \dots + \arg(1+u_n)$$

$$\arg p_n$$

т.е. то $\arg p_n$ е един, постојано збогат,

аргументы на φ_n . Т.к. $\varphi_n \rightarrow \varphi \neq 0$, то
 $\exists \arg \varphi_n: \arg \varphi_n \rightarrow \arg \varphi$.

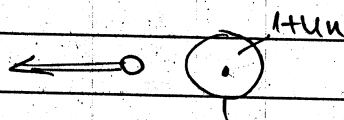
($\exists \arg$)

Числа, $\varphi_n = \arg \varphi_n = \arg * \varphi_n + 2k_n\pi$, $k_n \in \mathbb{Z}$, $n=1,2,\dots$
 (т.к. оба являются аргументами на комплексной плоскости)

$$\begin{aligned} \text{Следовательно } \varphi_n - \varphi_{n-1} &= \arg * \varphi_n - \arg * \varphi_{n-1} + 2(k_n - k_{n-1})\pi = \\ &= \arg(1 + u_n) + 2(k_n - k_{n-1})\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \varphi_n \in \text{сх.} \text{ и } \varphi_n - \varphi_{n-1} &\rightarrow 0 \\ \Rightarrow \arg(1 + u_n) + 2(k_n - k_{n-1})\pi &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует $u_n \rightarrow 0$



$$\begin{aligned} 1 + u_n &\rightarrow 1 \\ \arg(1 + u_n) &\rightarrow \arg 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k_n - k_{n-1} \rightarrow 0 \quad \text{и.е.} \quad k_n \equiv k \quad \forall n > N(\exists N)$$

Тогда $\arg * \varphi_n = \varphi_n - 2k\pi \in \text{сх.}$,

$$\text{и.е.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arg(1 + u_n) \in \text{сх.}$$

Безграничные произведения от комплексных чисел и функций

Д: $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) \in \text{абсолютно сходящ.}$, если
 $\in \text{сходящ.}$ $\prod_{n=1}^{\infty} (1+|u_n|)$.

Тв: Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\prod_{n=1}^{\infty} (1+u_n) \in \text{абс. сходящ.}$;

(2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \in \text{абс. с.к.}$;

(3) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \log_0(1+u_n) \in \text{абс. с.к.}$;

Доказ: 1. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Мы используем, что $e^x \geq 1+x$, $\forall x > 0$.

Укажем, что: $\prod_{n=1}^N (1+|u_n|) \leq e^{|u_1|+|u_2|+\dots+|u_N|}$
 $|u_1|+|u_2|+\dots+|u_N| \leq \epsilon = 1$

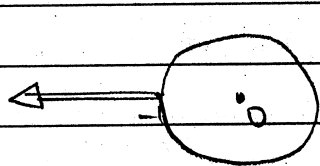
Отсюда $(1) \Leftrightarrow (2)$.

2. (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Мы докажем, что $\forall z: |z| < \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}|z| \leq |\log_0(1+z)| \leq 2|z| \quad (\text{или } \frac{3}{2}|z|)$$

Укажем, что $\log_0(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$, $|z| < 1$



интервал

Тогда $\forall z: |z| < \frac{1}{2}$.

$$|\log_0(1+z)| \leq |z| + \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} + \dots =$$

$$= |z| \cdot \left(1 + \frac{|z|}{2} + \frac{|z|^2}{3} + \dots \right) \leq$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots$$

$$\leq |z| \cdot \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \dots \right) \leq |z| \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots \right) =$$

$$= |z| \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 2|z|$$

$$|\log_0(1+z)| \geq |z| - \frac{|z|^2}{2} - \frac{|z|^3}{3} - \dots =$$

$$= |z| \cdot \left(1 - \frac{|z|}{2} - \frac{|z|^2}{3} - \dots \right) = |z| \cdot \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2^2 \cdot 3 \cdot 2} - \dots \right) \geq$$

$$\geq |z| \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots \right) = |z| \cdot \left(1 - \frac{1/4}{1 - 1/2} \right)$$

$$\stackrel{1}{=} \frac{1}{2} |z|$$

$$\text{От 2) и от 3)} \Rightarrow u_n \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow |u_n| < \frac{1}{2}, n > N.$$

Тогата от горното неравенство
 $\Rightarrow$ (2) и (3).

Д: $\prod_{n=1}^{\infty} z_n \in \text{сходящо, ако } \exists \nu: \forall n > \nu, z_n \neq 0$

и $\prod_{n=\nu+1}^{\infty} z_n \in \text{сходящо}$

$$(q = \prod_{n=\nu+1}^{\infty} z_n, q \neq 0)$$

$$\text{Тогата } \prod_{n=1}^{\infty} z_n := z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_{\nu} \cdot \prod_{n=\nu+1}^{\infty} z_n.$$

$$\text{Нека } f_n: M \rightarrow \mathbb{C}, n=1, 2, \dots$$

Д: $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z) \in \text{равномерно сх. в } M,$

$$\text{ако: (1) } \exists \nu: \forall n > \nu, f_n(z) \neq 0, z \in M.$$

$$(2) \prod_{n=\nu+1}^{\infty} f_n(z) \in \text{равномерно сх. в } M, \text{ и.е.}$$

$\{f_n = \prod_{k=1}^n f_k(z)\}$ е равност. ск. в M .

Тв. 1 (Критерий за равност. ск. на $\prod_{k=1}^{\infty}$)

Нека $f_n: M \rightarrow \mathbb{C}$, $n=1, 2, \dots$, $f_n(z) \neq 0, z \in M$,

и нека f е однозначна функ. на $\log f_n$ (различен за различните n).

Тогавта, ако $\sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z)$ е равност. ск. в

M и функцията е отпр. ф-ция в M ,
то $\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ е равномерно ск. в M .

г-во: Нека $S_n = \sum_{k=1}^n \log f_k(z)$ и $f_n = \prod_{k=1}^n f_k(z)$.

Укаже, че $f_n = e^{S_n}$.
Укаже, че $e^{S_n} \Rightarrow e^S$, $S = \sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z)$

(критерий за равномерност)

Укаже, че $|e^{S_n} - e^S| = |e^S| \cdot |e^{S_n - S} - 1|$

$$|e^w| = |1 + w + \dots| \leq 1 + |w| + \dots = e^{|w|}$$

$$|e^w - 1| = \left| \frac{w}{1!} + \frac{w^2}{2!} + \dots \right| \leq \frac{|w|}{1!} + \frac{|w|^2}{2!} + \dots = e^{|w|} - 1$$

$$\Rightarrow |e^{S_n} - e^S| \leq e^{|S|} (e^{|S_n - S|} - 1)$$

По ука. $|s| \leq A$, $\forall \delta > 0$, $\exists \nu: n > \nu \quad |s_n - s| < \delta$, $z \in M$.

$$\Rightarrow |e^{s_n - s} - e^s| < e^{|A|} \cdot (e^\delta - 1) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

↓
при $n \rightarrow \infty$

Зад. критерий:

Ако $M \in \mathbb{C}$ компакт и $\log f_n(z)$ с непер.
в M , $\bigcup f_n$,
то $|s| \leq A, z \in M$.

Теорема на Вайерштрасс за цели функции

① Нека $f(z)$ е целна ф-ция и $f(z) \neq 0, z \in \mathbb{C}$.
Тогда $\exists g(z)$ - целна: $f(z) = e^{g(z)}, z \in \mathbb{C}$
(зидара)

② Нека $f(z)$ е целна ф. и $f(z) = 0$ само
за $z = z_1, z_2, \dots, z_n$.

Тогда $f(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k) \cdot e^{g(z)}$, g - целна

$$\prod_{n=1}^{\infty} (z - z_n) \times \prod \left(\frac{1 - z}{z_n} \right)$$

Тл.: Нека $\{z_n \in \mathbb{C}\}, z_n \rightarrow \infty$.

Тогда $\exists$ целна ф. $f(z)$ с нули точно
 $\{z_n\}$.

$$0, 0, \dots, 0, z_1, z_2, \dots$$

$$f(z) = z^m \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right) \cdot e^{P_n(z)}, \quad P_n(z) = z + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{z_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{k} \left(\frac{z}{z_n} \right)^k$$

gabo: ① Hera $z_n \neq 0, \forall n$ u $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$
Hera $R > 0$ u $\forall: |z_n| > 2R$ za $n > N$.

Уже локально, $\exists$ полином $P_n(z)$:
 $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - z^k) e^{-P_n(z)}$ $\in$ равном. с.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \cdot e^{P_n(z)} \in \text{рабном. с.к. в } |z| \leq R.$$

Предвид критерия за равномерна сходимость
дост. е да док. че редът $\sum_{n=0}^{\infty} \log_0 (1 - z) + P_n(z)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n(z)$$

е равномерно с.в. $|z| \leq R$.

$$3a \quad |z| \leq R, \quad \left| \frac{z}{z_n} \right| \leq \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 0$$

Тогда, $\forall z: |z| \leq R$ разложен в ряд по z .

$$\log(1-z) = -\frac{z}{z_0} - \frac{z^2}{2z_0^2} - \dots - \frac{z^n}{nz_0^n} - \dots$$

7. Here $P_n = \frac{z}{2n} + 1 \left(\frac{z}{2n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{2n} \right)^n$

Torala $|z_n(z)| = \left| - \binom{n+1}{z_n} \cdot \dots \right| \leq \frac{z}{z_n} |^{n+1}$

$$\cdot \left(1 + \frac{z}{z_n} \right) \cdot \frac{1}{n+2} + \left(\frac{z}{z_n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n+3} + \dots \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{k+1}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) \leq \frac{1}{2^{k+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} c_n(z) \in \rho\text{-BOTH. } C_X, \text{ for } |z| \leq 2$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{\frac{z}{z_n}} \quad \text{is a product. cr. for } |z| \leq R$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава} & \in \text{равн.св. и } \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \cdot e^{P_n(z)} = \\ & = \prod_{n=1}^{\nu} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \cdot e^{P_n(z)} \cdot \prod_{n=\nu+1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \cdot e^{P_n(z)}. \end{aligned}$$

Границата му $\in$ хорон. ф. и ма се
анутира само в межу $\{z_n\}_{n=1}^{\nu+1}$, за $\mathbb{C}$

$$|z_n| \leq R.$$

② Ако редукцията $\in$: $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_m, z_1, \dots, z_n, \dots$
то $f(z) = z^m \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \cdot e^{P_n(z)}.$

$$\deg P_n(z) = s, \forall n$$

T6: Ако р-тата $\{z_n \in \mathbb{C}, z_n \neq 0\}_{n=1}^{\infty}$ е т.т.е

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z_n|^{s+1}} < +\infty \quad (\text{е сходяща}),$$

за $\forall k \in \mathbb{N} \quad s \geq 1$, то $\forall n \quad \deg P_n = s, \forall n.$

T2: Ако $f(z) \in$ ула ф. с нули само в
 $\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_m, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots,$

то $\exists$ g -тата ф. и, з. $f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right).$

$$P_n(z) = \frac{z}{z_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{z_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{z_n}\right)^n.$$

г-во: Ом $\exists$ f_1 -уага с нум тогтоо
 $\underbrace{0, \dots, 0}_m, z_1, z_2, \dots$

$$f_1(z) = z^m \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \cdot e^{p_n(z)}$$

Тогата ϕ -уага $\frac{f(z)}{f_1(z)} \in \text{үзлэ}$ у

нүхэрлэ нэ с нумна, т.е. $\neq 0, z \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow \exists$ g -уага : $\frac{f(z)}{f_1(z)} = e^{g(z)}, m.e.$

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \cdot e^{p_n(z)}.$$