

z_k с k

Целите $\neq \pm 1$ са z -кратни ~~полноми~~
~~полноми~~. 0-и на z -кратни $f(z)$ и на
са 0-и на числ.
 $\Rightarrow$ те са z -кратни z -кратни $f(z)$
 ± 1 -двукратни z -кратни $f(z)$
полноми :))

12.05.2014г.

Лекция

Тн на Лоран: Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ и
 f -холоморфна във венчу
 $V = V(z_0, r, R) = \{z: 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty\}$

$$\text{Тогава } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad \text{за } \forall z \in V$$

Редът е абс. сх. във V и коеф.
са еднозначно определени.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$\gamma_\rho = \{ |z - z_0| = \rho, \quad r < \rho < R \}$$

$$f^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n - \text{правилна}$$

Връзка с редове на Фурие:

$\varphi(t): [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (*)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos nt \, dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin nt \, dt \quad n=0, 1, 2, \dots$$

$\varphi'(t)$ - непр. $\Rightarrow$ може да се развие в
ред на Фурие

$$\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$$

$$\sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

Заместваме в (*) и получаваме

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \quad \text{в/у ед. окр.}$$

Нека f е холоморфна в

$$r < |z| < R \quad \text{и} \quad r < 1 < R$$

Тогава $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ се развива

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n t}{n!}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

HeKa $\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n t}{n!}$

$$\cos n t = \frac{e^{i n t} + e^{-i n t}}{2}$$

$$\Rightarrow \psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i n t} + e^{-i n t}}{2 n!} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{1}{n! z^n} \right), \quad z = e^{i t}$$

HeKa $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{1}{n! z^n} \right)$ — $\frac{1}{2} \frac{e^z + e^{\frac{1}{z}}}{\text{холоморфна}}$

~~$e^{i t}$~~

$$0 < |z| < +\infty$$

$$\text{и } f(z) = \frac{e^z + e^{\frac{1}{z}}}{2}$$

Тодоба $\psi(t) = f(e^{i t}) = \frac{e^{e^{i t}} + e^{e^{-i t}}}{2}$

$$e^{i t} = \cos t + i \sin t$$

$$e^{-i t} = \cos t - i \sin t$$

... (га ce чверне)

$$\textcircled{3} \quad f_3(z) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}, \quad \sin \frac{\pi}{z} = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{n}, \quad n = \pm 1, \dots$$

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0$$

0 е неизомрана особ. точка на f_3

Изомрани особенни точки - класификация

Нека $z_0 \in \mathbb{C}$ е изомрана особена точка на f , т.е. f е холоморфна в $0 < |z - z_0| < R$. Нека

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

развитието в реда Лоран на f в $0 < |z - z_0| < R$

Дед. 3 1) z_0 се нарича отстраняема особеност на f , ако

$$a_{-n} = 0, \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

2) z_0 се нарича m -кратен полюс ($m=1$ - прост полюс) на f , ако

$$a_{-n} \neq 0 \text{ и } a_{-n} = 0 \text{ за } \forall n > m.$$

3) z_0 се нарича съществена особ. т.

$$f_3(z) = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

$$a_n \neq 0 \quad \forall n$$

$\Rightarrow$ обществена особена точка

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \leftarrow \frac{1}{z} \rightarrow 0 \leftarrow \frac{1}{z} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} + \frac{1}{z} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{z} \rightarrow 0 \end{array}$$

$$f_3\left(\frac{1}{z}\right) = e^z \xrightarrow{z \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$f_3\left(-\frac{1}{z}\right) = e^{-z} \xrightarrow{z \rightarrow -\infty} 0$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{z \rightarrow 0} f_3(z)$$

Поведение на холоморфна ф-я в
околност на изолирана особена
точка

I $z_0 \in \mathbb{C}$ е отстранена особена
точка

Th 1 (Риман) Нека $f(z)$ е
холоморфна в
продължение кръг $0 < |z - z_0| < R$

$$(2) \Rightarrow (3)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$$

$$(3) \Rightarrow (4) \text{ ж.ф.}$$

$$(4) \Rightarrow (1) \text{ Имаме, че } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}, \text{ като}$$

От тер. на Коши за коэф. в реда на Лоран имаме, че

$$|a_{-n}| \leq M \rho^n, \quad 0 < \rho < R_1$$

Оттук при $\rho \rightarrow 0$

$$a_{-n} = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

$\Rightarrow z_0$ е отстранима особена точка

- вид особ. т., резидиуми
- формула на Коши

13.04.2014г.

Лекция

II Полнос

Т₁₂: Нека f е холоморфна в $\{0 < |z - z_0| < R\}$.

Тогава от Th 2 (3) $\Rightarrow z_0$ е
полюс на $f(z)$.

III Съществена точка

Th 3 (Казорати-Сохотски - Вайерштрас)

Нека f е холоморфна в
продължена околност $0 < |z - z_0| < R$
Следните твърдения са $(\Leftrightarrow)$

(1) z_0 е съществена особена

точка на f ;

(2) за $\forall U = \{0 < |z - z_0| < R_1 \leq R\}$
 $f(U)$ е навсякъде гъсто в $\mathbb{C}$;

(3) $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

D-во: Заб. $f(U)$ е навсякъде гъсто
в $\mathbb{C}$: $\forall w_0 \in \mathbb{C} \exists \{z_n \in U\}$
 $z_n \rightarrow z_0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w_0.$$

(1) $\Rightarrow$ (2)

① $\infty = w_0$ Той като z_0 е същ. ос. т.
 f не може да е огр. в ок-т на z_0
Тогава $\exists z_1 \in U$, т. че

$|f(z_1)| > 1$. Също $\exists z_2$:

$$|z_2 - z_0| < \frac{R_1}{2} \text{ и}$$

z_0 е или отстранена, ако $g(z_0) \neq 0$ или полюс, ако $g(z_0) = 0 \Rightarrow \tilde{x} :))$

(2) $\Rightarrow$ (3) очевидно

(3) $\Rightarrow$ (1) ясно

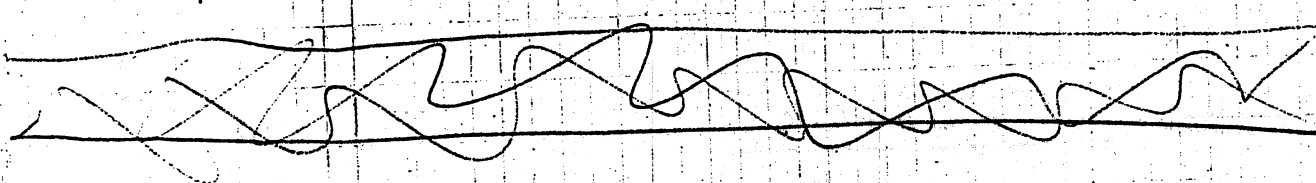
Голяма Th на Пикар

Ако z_0 е съществена особена точка на f , то $\forall \delta \forall f$ продуцирана ок-т на z_0 приема $\forall$ комплексна ст-т, с евентуални изключения на един Малка Th. цели ф-ции без 1 т. (особен. т. е ∞)

Пример: $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, $z_0 = 0$ - съществена особена точка

$e^{\frac{1}{z}} = c$, $c \neq 0$ има безброй много реш.

♥ Крайво D-во ☺ 



ТЕОРЕМА ЗА РЕЗУДУУЩИТЕ

D: (1) Ако $z_0 \in \mathbb{C}$ е изолуирана ос. т. на f и

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \begin{matrix} \text{(корак)} \\ \text{(проб. ок-ст.)} \end{matrix} \quad 0 < |z-z_0| < R$$

то $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} f(z) dz$,



$$\gamma_f = \{ |z-z_0| = \rho, \rho < R \}$$

Ако f е хороу. в z_0 , то $\text{Res}(f, z_0) = 0$

○ (смысл: да сметаме интеграл без да интегралваме)

2) (в безкр. т.)

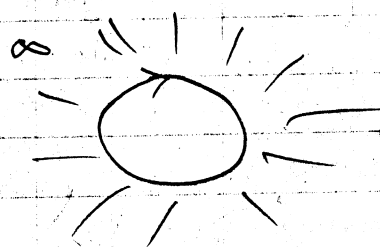
Ако f е хороу. в $|z| > R$ и

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| > R$$

$$\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f} f(z) dz =$$

($\rho > R$)

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_f^-} f(z) dz$$



Ако f е хороу. в ∞ , то $\text{Res}(f, \infty) = 0$

пр.: $f(z) = \frac{1}{z} \rightarrow$ та е хороу. в ∞ ,
 Ако f е хороу. в ∞ : $\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{z} \\ \text{Res}(f, \infty) = -1. \end{matrix} \right.$
 $f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots$

○ $\text{Res}(f, \infty) \in \text{коэф. пред } \frac{1}{z}$
 $\text{Res}(f, \infty) = -\lim_{z \rightarrow \infty} z(f(z) - f(\infty))$
 -1-

Пр.: 1) $f(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$

особенности: $\cos z = 0$

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Те са прости полюси.

$$\operatorname{Res}(\operatorname{tg} z, z_n) = \frac{\sin z_n}{(\cos z)'_{z_n}} = \frac{\sin z_n}{-\sin z_n} = -1.$$

Везер. Т.: Те не е изоморфна

$z_n \rightarrow \infty = \infty$ е неизомира ос. Т.

1) особености + Res ;

2) интеграл;

$$\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0, m=0$$

$$! \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} !$$

0-lem: $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad | \cdot (z-z_0)$

$$\Rightarrow (z-z_0) f(z) = a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+1}$$

$z \rightarrow z_0 \rightarrow 0$

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

2) Ако $z_0 \in \mathbb{C}$ - критичен пункт на f .

то $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left[(z-z_0)^m \cdot f(z) \right]^{(m-1)}_{|z_0}$

(не е нужно да се помни)

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}, \varphi \text{ е слон. в } z_0, \varphi(z_0) \neq 0.$$

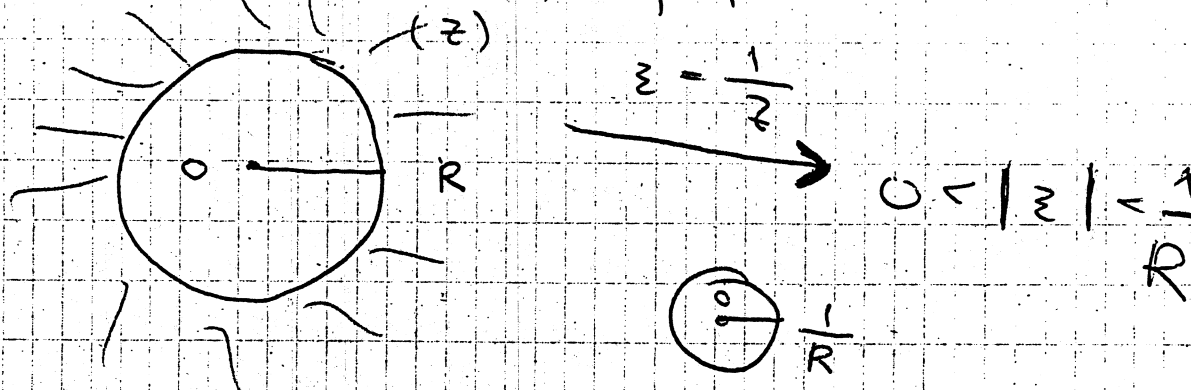
$$\varphi(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots + a_{m-1}(z-z_0)^{m-1} + \dots$$

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-z_0} + a_m + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) = a_{m-1} = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Безкрайната точка

Деф. ∞ е изолирана особена т. на
ако f е холоморфна в $|z| > R$



Деф. ∞ е отстраняема полюс
или съществена ос. т., ако 0
е съответно отстраняема,
полюс или същ. ос. т. на ϕ -та

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

Нека

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

редът на Лоран около $z=0$

1) ∞ е отстраняема ($b_n=0$) $\forall n$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

2) ∞ е м.кр. полюс

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} + b_1 z + \dots + b_m z^m, \quad b_m \neq 0$$

$$|f(z_2)| > 2 \text{ и т.т.} \quad \exists z_n :$$

$$|z_n - z_0| < \frac{R_1}{n}, \quad |f(z_n)| > n, \dots$$

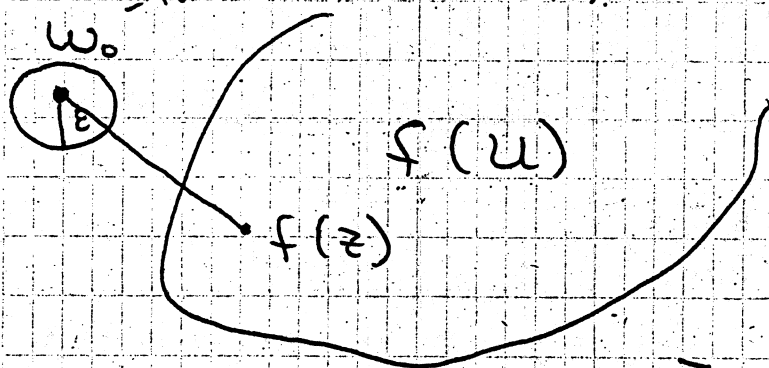
$$z_n \rightarrow z_0,$$

$$f(z_n) \rightarrow \infty$$

$$(2) \quad \underline{\omega_0 \in \mathbb{C}}$$

Да доп., че (2) не е изпълнено, т.е.
 $\exists U$, т.че $f(U)$ не е навсякъде
 гъсто в $\mathbb{C}$.

не е гъста навсякъде.



Това означава, че $\exists \omega_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon_0 > 0$,
 т.че $|f(z) - \omega_0| < \varepsilon_0, \forall z \in U$.

Тогава ф-ята $g(z) = \frac{1}{f(z) - \omega_0}$

холоморфна в U и

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\varepsilon_0}, \quad z \in U$$

от Тх (Ришан)

$\Rightarrow z_0$ е отстраняема ос.т. за g

Тъй като $f(z) = \frac{1}{g(z)} + \omega_0$, то

Следните твърдения са ($\Rightarrow$)

(1) z_0 е m -кратен полюс на f

(2) $\exists \phi, \psi(z)$ холоморфна в $0 < |z - z_0| < R$, т.е.

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^m}$$

$$\psi(z_0) \neq 0, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

(3) z_0 е m -кратна нула на $\frac{1}{f}$.

Следствие 1 Нека f е холоморфна

в $0 < |z - z_0| < R$. Точката z_0 е полюс на $f \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

$\Leftarrow$ Доказателство: Ако z_0 е полюс, то

(Th 2 (2))

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

Обратно, нека $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.
Тогда $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0 \Rightarrow z_0$ е

отстраняема особена точка на $\frac{1}{f}$

и $\frac{1}{f(z_0)} = 0$, т.е. z_0 е нула на $\frac{1}{f}$.

Следните твърдения са еквивалентни

- 1) z_0 е отстранжима вс. т. на f ;
2) f се продължава до холоморфна в z_0 ф-я, т.е. $\exists g(z)$ - хол. в $|z - z_0| < R$, такава че

$$g(z) = f(z), \quad 0 < |z - z_0| < R;$$

- 3) $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ - крайна граница;

- 4) $\exists R_1 \leq R$, т. че $|f(z)| \leq M$,
 $0 < |z - z_0| < R_1$.

D- z_0 : (1) $\Rightarrow$ (2) Имаме, че

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$0 < |z - z_0| < R$. Нека

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \text{ Тъй като}$$

редът е равномерно сх. (в/у компактния подинт. $|z - z_0| < R$), то $g(z)$ е холоморфна в $|z - z_0| < R$, като $g(z) = f(z)$, $0 < |z - z_0| < R$.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = a_0, \quad f(z_0) := a_0$$

Така

ако годеф. f в z_0 като

$f(z_0) = a_0$, то f става

холоморфна в $|z - z_0| < R$, т.е. отстранжихме особеността в z_0 .

ако $a_n \neq 0$ за безброй много n .

Примери: Нека $f_1(z) = \frac{\sin z}{z}$,
 $f_2(z) = \frac{\cos z}{z}$, $f_3(z) = e^{\frac{1}{z}}$

z_0 -особена точка на f_1, f_2, f_3 :

$$1) \sin z = z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\text{е } f_1(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

$\Rightarrow 0$ е отстранява ос. т.

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_1(z) = 1$$

$$2) \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

~~$\cos z$~~

$$f_2(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \dots$$

$\Rightarrow 0$ е прост полюс

$$\lim_{z \rightarrow 0} f_2(z) = +\infty$$

$$3) e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

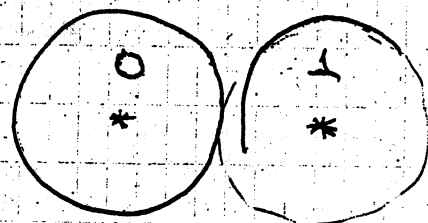
Изомирани особенни точки

(от еднозначен характер) на холоморфни функции. Γ_h на Риман и Γ_h на Сохоуки-Вайерштраас

Деф. 1 $z_0 \in \mathbb{C}$ се нарича особена точка на f , ако f не е холоморфна в z_0 , но във всяка ок-т на z_0 има точки, в които f е холоморфна.

Деф. 2 Изомирана особена точка на f , ако в произведена ок-т на т. z_0 f е холоморфна. Ако $\nexists$ така произведена ок-т - неизомирана (~~не~~ във всяка произведена ок-т на z_0 има особенни точки).

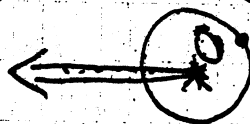
Пример: ① $f_1(z) = \frac{1}{z(z-1)}$



$z = 0$ и $z = 1$ са изомирани особенни точки на f

② $f_2(z) = \log z$

0 не е изомирана особенна точка на f_2



$\log z$ - не е от еднозн. х-р, не f_2 може да се отдели еднозн. клон

В ред на Лоран във $\epsilon < |z| < R$,
като

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, \dots$$

Нека $\psi(t) = f(e^{it})$, $t \in [0; 2\pi]$.
Тогава $\psi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \stackrel{z=e^{it}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{i(n+1)t}} i e^{it} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t) e^{-int} dt$$

точно реда на
Фурье :))

Пример: Да се пресметне

част в реда на Лоран на f

$f^+(z)$ е хол. в $|z - z_0| < R$

$f^-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ - знавна част

$f^-(z)$ е хол. в $|z - z_0| > r$

$$f(z) = f^+(z) + f^-(z)$$

В сила са нер. на Коши за
коэффициентите. Ако f е хол.

във $V = V(z_0, r, R)$, то

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

за $r < \rho < R$, където

$$M(\rho) = \max_{|z|=\rho} |f(z)|$$

