1. Намерете общите решения на уравненията

$a)\ \ 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)=y'\sqrt{x^2-y}$ $\qquad h)\ \ 2y'=\frac{xy}{x^2-1}+\frac{x}{y}$

$b)\ \ y\,dx=(x+y^2\sin y)\,dy$ $\qquad i)\ \ y'=\frac{y}{x}+\ln x\frac{2xy}{x^2+y^2}$

$c)\ \ x^3y''=(y-xy')(y-xy'-x)$ $\qquad j)\ \ y'=x\sqrt{y}+\frac{xy}{x^2+1}$

$d)\ \ yy''-(y')^2+(y')^3=0$ $\qquad k)\ \ (y^2+x^2)\,y'=y^2$

$a)\ \ y'=\frac{x}{2x^2+x^3e^y}$ $\qquad b)\ \ (2x^2y\ln y-x)y'=y$

2. Намерете общите решения на уравненията

$c)\ \ y'y'''-(y'')^2=(y')^2y''$ $\qquad d)\ \ x(y''+(y')^2)=(y')^2+y'$

$e)\ \ 2yy''-y^3=2(y')^2$ $\qquad f)\ \ x(y''-(y')^2)-yy'=y\sqrt{(y')^2+x^2y^2}$

3. Намерете общите решения на линейните уравнения с постоянни коефициенти

$a)\ \ y''+2y'-3y=-10xe^{-3x}+6\cos x$ $\qquad b)\ \ y''-4y'+5y=2e^{2x}+2e^{2x}\cos x$

$c)\ \ y''-5y'+6y=4e^{2x}\cos^2 x$ $\qquad d)\ \ y'''-6y''+9y'=6e^{3x}+50\cos x$

4. Решете системите $x'=Ax$ за

$$A=\begin{pmatrix}-30 & 24\\ -48 & 38\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}7 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 0\\ -4 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}15 & 4\\ -25 & -5\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}23 & -31 & -7\\ 11 & -15 & -3\\ 13 & -17 & -5\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}4 & 15 & 5\\ -2 & -7 & -2\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 2 & 4 & -2\\ 6 & 6 & -4\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -6 & -3\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}-7 & 5 & 4\\ -9 & 6 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 6\\ -1 & -3 & 3\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

5. Решете системите или уравненията

$a)\ \ t^2x''+\frac{5}{2}tx'=x$ $\qquad b)\ \ (\cos 2t+1)\,x''+(\cos 2t-3)\,x=0$

$c)\ \ \left|\begin{array}{l} x'=\dfrac{2x}{t}-4y\\ y'=x+\left(\dfrac{2}{t}-5\right)y\end{array}\right.$ $\qquad d)\ \ (\sin t-\cos^2 t)\,x'=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\cos t} & -1\\ -\sin t & \dfrac{\sin^2 t}{\cos t}\end{pmatrix}x\,.$

6. Докажете, че за всяко фиксирано $\omega\in\mathbb{R}$, уравнението

$$x'''+3x''+3x'+x=\sin\omega t$$

има единствено периодично решение и намерете това решение.

7. Да се нарисува фазовия портрет на консервативните системи

а) $U=\pm\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)$

б) $U=\pm\left(\frac{x^6}{6}-\frac{5x^4}{2}+\frac{9x^2}{2}\right)$

8. Да се нарисува фазовия портрет на консервативните системи

$$\text{а) } \ddot{x} = x^5 - 12x^3 + 2x^2 + 27x - 18$$
$$\text{б) } \ddot{x} = -(x^5 - x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 8x - 12)$$

9. Върху повърхноста на цилиндъра $(x \bmod 2\pi, x')$ нарисувайте фазовите криви на махалото, върху което действа постоянен въртящ момент: $x'' = 1 + 2\sin x$.

10. Нарисувайте фазовия портрет на консервативната система, зададена с уравнението $x'' = 2x^{-3}$. Определете времето T, за което решението $x(t)$ с начални условия $x(0) = x'(0) = 1$ достига до $x(T) = 2$. Посочете с по–дебела линия съответната част от фазовата крива.

11. В зависимост от стойностите на реалния параметър a, определете типа на особените точки на линейните системи

$a)$ $\left|\begin{array}{l} x' = ax - y \\ y' = 4x + y \end{array}\right.$ $\qquad b)$ $\left|\begin{array}{l} x' = 2ax - a^2 y \\ y' = a^2 x - 2ay \end{array}\right.$

$c)$ $\left|\begin{array}{l} x' = (a^2-2)x + (a^2-2a)y \\ y' = (a^2-2a)x + (a^2-2)y \end{array}\right.$ $\qquad d)$ $\left|\begin{array}{l} x' = 2x + 3y \\ y' = ax - 4y \end{array}\right.$

$e)$ $\left|\begin{array}{l} x' = ax + y \\ y' = -(2a+1)x + ay \end{array}\right.$ $\qquad f)$ $\left|\begin{array}{l} x' = 2ax + 3y \\ y' = -2ax + ay \end{array}\right.$

За всеки от типичните случаи, изберете по едно a и нарисувайте съответния фазов портрет.

12. Решете задачата на Коши

$$y^2 y''' - 3yy'y'' + 2(y')^3 + \frac{y}{x}(yy'' - (y')^2) = \frac{y^3}{x}$$
$$y(1) = y'(1) = 1, y''(1) = 2$$

13. Намерете три члена от развитието по степените на малкия параметър μ на решенията на уравненията със съответните начални условия:

$a)$ $\ddot{x} = x + \mu(\dot{x})^2, \qquad x(0) = 1, \dot{x}(0) = \mu.$

$b)$ $y' = \mu x + \frac{1}{2y}, \qquad y(1) = 1 - 2\mu, x > 0.$

$c)$ $y' = y - x + \mu x e^{2y}, \qquad y(1) = 2 - \mu.$

$d)$ $\ddot{x} + x = \mu(\sin t + x^2), \qquad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0.$

$e)$ $\ddot{x} - x = \sin(\dot{x}^2), \qquad x(0) = \mu, \dot{x}(0) = \mu^2.$

14. Дадена е автономната система диференциални уравнения

$$\dot{x} = y^3, \qquad \dot{y} = -x$$

а) да се намерят положенията на равновесие и се изследва устойчивостта им

б) да се намери производната на решението с начално условие $x(0) = y(0) = \mu$ по μ при $\mu = 0$.

15. Да се намери приближено периодично решение с период, равен на периода на дясната част на уравнението

$$a) \quad \ddot{x} + 3x - \mu x^3 = \mu \cos t \qquad O(\mu^3)$$

$$b) \quad \ddot{x} + x - \mu x^2 = \sin 2t - \sin 3t \qquad O(\mu^3)$$

16. В зависимост от реалните параметри a, b и c, изследвайте за устойчивост решението $x(t) \equiv 0$ на уравненията

$$a)\ \ x'' + ax' + bx = 0\ , \qquad b)\ \ x''' + ax'' + bx' + cx = 0\ .$$

17. В зависимост от реалния параметър a , намерете и изследвайте за устойчивост положенията на равновесие на системите

$$a)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^3 - x^2 - 2x + ay \end{array}\right. , \qquad b)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a + x^2 - xy\ . \end{array}\right.$$

За всеки от типичните случаи, изберете по едно a и b и нарисувайте съответните фазови портрети в околности на неподвижните точки.

18. Намерете и изследвайте за устойчивост положенията на равновесие на системите

$$a)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = 2 + y - x^2 \\ \dot{y} = 2y(x - y) \end{array}\right. , \qquad b)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = x^2 + y^2 - 5 \\ \dot{y} = (x - 1)(x + 3y - 5)\ . \end{array}\right.$$

19. Намерете особените точки на системата и изследвайте тяхната устойчивост в зависимост от параметъра а

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin(x + ay) \end{array}\right. ,$$

20. В зависимост от реалните параметри a и b, изследвайте за устойчивост положението на равновесие $(0,0)$ на системите

$$a)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = ln(1 + a^2x) - ye^{y^2} \\ \dot{y} = x + b^2tgy \end{array}\right. , \qquad b)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = x + ay + y^2 \\ \dot{y} = bx - 3y - x^2\ . \end{array}\right.$$

$$c)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = -y - x\ln(1 + x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + by - y\ln(1 + x^2 + y^2) \end{array}\right. , \qquad d)\ \left|\begin{array}{l} \dot{x} = y + ax + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2)\ . \end{array}\right.$$

21. В зависимост от $\mu \in \mathbb{R}$, изследвайте за устойчивост решението $(0,0)$ на системата

$$\dot{x} = y\ ,$$

$$\dot{y} = -x - \mu(x^2 - 1)y - x^3.$$

Да се определи също така типа на особената точка в зависимост от μ.