

Определение: $R \neq 0$ и R има 2 бинарни операции $+$ и $*$). Ще казваме, че R е пръстен, ако:

- Аксioms на адитивна група:
- 0) $a+b \in R \quad \forall a, b \in R$
 - 1) $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a, b, c \in R$
 - 2) $\exists \theta \in R: a+\theta = \theta+a = a \quad \forall a \in R$
 - 3) $\exists (-a) \in R: a+(-a) = (-a)+a = \theta \quad a \in R$
 - 4) $a+b = b+a$
- Аксioms на мултипликативна група:
- 5) $a \cdot b \in R \quad \forall a, b \in R$
 - 6) $(ab) \cdot c = a(bc) \quad \forall a, b \in R$
 - 7) $(a+b)c = ac+bc$
 - 8) $c(a+b) = ca+cb$

Ако имаме допълнително:

- 9) $\exists 1 \in R: a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in R$
- 10) $\exists a^{-1} \neq \theta, a^{-1} \in R: a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 \quad \forall a \in R$
- 11) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in R$

Ако е изпълнено:

- 1)-9), то R е пръстен с единица
- 1)-8) + 10) $\Rightarrow$ всеки ненулев елемент на R е обратим
- 1)-8) + 11) $\Rightarrow R$ е комутативен пръстен
- 1)-10) и $1 \neq 0 \Rightarrow R$ е тяло
- 1)-11) и $1 \neq 0 \Rightarrow R$ е поле

Идеал: Нека R е пръстен и I е непразно подмножество на R . Ще казваме, че I е ляв (десен) идеал на R , ако

1. $a, b \in I \Rightarrow a-b \in I$
2. $a \in I, r \in R \Rightarrow ra \in I$ (аг $\in I$)

Ако I е ляв и десен идеал $\Rightarrow I$ е двустранен идеал ($I \triangleleft R$)

Твърдение 1: R е комутативен пръстен с 1. Тогава R е поле $\Leftrightarrow R$ няма нетривиални идеали

Теорема за хомоморфизмите: Нека $\varphi: R \rightarrow R'$ е хомоморфизъм на пръстени и $I = \text{Ker } \varphi$. Тогава $I \trianglelefteq R$ и $R/I \cong \text{Im } \varphi$

Твърдение: Нека R е комутативен пръстен с 1. DCD,
а) M -идеал на R е максимален $\Leftrightarrow R/M$ е поле
б) P -идеал на R е прост $\Leftrightarrow R/P$ е област

Максимален идеал: I наричаме максимален идеал, ако не $\exists$ друг собствен идеал $J: I \subset J$

Прост идеал: е собствен идеал: ако $a, b \in R$, ако $ab \in I$ следва, че поне едно от a и b принадлежи на I

Главен идеал: е идеал породен от един елемент a на комутативен пръстен с единица R , делители на a
 $(a) = \{ar \mid r \in R\}$

Хомоморфизъм на пръстени:

$$\varphi: (R, +_1, \cdot_1) \rightarrow (H, +_2, \cdot_2)$$

$$\varphi(x_1 +_1 x_2) = \varphi(x_1) +_2 \varphi(x_2) \quad x_1, x_2 \in R$$

$$\varphi(x_1 \cdot_1 x_2) = \varphi(x_1) \cdot_2 \varphi(x_2) \quad x_1, x_2 \in R$$