29.04.2013г. ВА - лекция

Корени на полиномите

F - поле, $f(x) \in F[x]$, $\deg f > 0$

$x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ $\quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

$x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$

Тв $I = (f) \trianglelefteq F[x]$ $\quad F[x]/_I$ е поле

$\Leftrightarrow$ F е неразложим над F

Док

$\Rightarrow$ $F[x]/_I$ - поле

$(\bar{g} = g + I, \ \bar{g} = 0 \Leftrightarrow g \in I)$

Доп. че $f = gh \Rightarrow \underset{0}{\overset{\|}{\bar{f}}} = \bar{g}\bar{h}$

$\Rightarrow \bar{g} = 0$ или $\bar{h} = 0$, т.е $g \in I$ или $h \in I$, но това е >:<, защото $\deg g < \deg f$, $\deg h < \deg f$

$\Leftarrow$ f - неразложим (не дели)

$0 \neq \bar{g} \in F[x]/_I \Rightarrow g \notin I$, т.е $f \nmid g$, но

$\Rightarrow (f, g) = 1$ от Безу $\Rightarrow \exists\, u, v : u.f + v.g = 1$

$\bar{u}\bar{f} + \bar{v}.\bar{g} = 1$, но $\bar{f}$ е нулевия елемент $\Rightarrow \bar{v}.\bar{g} = 1$

Th F - поле, $f \in F[x]$, $\deg f > 0$. Тогава $\exists$ разширение K на F, в което f има корен.

Схема на док: Можем да считаме че f е неразложим над F

Озн. $F[x]/_{(f)}$ - поле (тв.) Нека $\pi : F[x] \to K = F[x]/_{(f)}$

$\pi(g) = \bar{g}$

<u>Озн.</u> $\alpha = \overline{\Pi}(x)$

<u>Сл.</u> $\exists$ разширение L на F, съдържащо всички корени на f (в L f се разпада на линейни)

<u>Док.</u> $F \leq K_1 \ni \alpha_1 \quad f(\alpha_1) = 0 \quad f = (x - \alpha_1)g, \; g \in K_1[x]$

$K_1 \leq K_2 \ni \alpha_2 : g(\alpha_2) = 0 . \quad g = (x - \alpha_2)h, \quad f = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)h$

<u>Опр</u> Поле на разпадане на f над F = сечението на $\forall$ подполета на $L \supset F$ и корените на полинома f.

<u>Зад.</u> $I = (x^2+1) \trianglelefteq \mathbb{R}[x]$. Док. $\mathbb{R}[x]/I \cong \mathbb{C}$

$\varphi : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$

$g(x) \longmapsto g(i)$

$\mathbb{Q}[x]/(x^2-2) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$\varphi : \mathbb{Q}(x) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$g(x) \longmapsto g(\sqrt{2})$

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\ldots(x - \alpha_n)$$

$a_1 = a_0(-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \ldots - \alpha_n) \qquad a_2 = a_0(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots)$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = -\dfrac{a_1}{a_0}$

$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_2}{a_0}$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \ldots = -\dfrac{a_3}{a_0}$

$\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n = (-1)^n \dfrac{a_n}{a_0}$

$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\dfrac{a_1}{a_0}$

$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{a_2}{a_0}$

$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\dfrac{a_3}{a_0}$

p - просто число, $p > 2$

$\mathbb{Z}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$ $x \in \mathbb{Z}_p$ $x^p = x$, $x \neq 0$ $x^{p-1} = \bar{1}$

$f(x) = x^{p-1} - \bar{1} \in \mathbb{Z}_p[x]$

Опр.1 α е k-кратен корен на f, ако $f = (x-\alpha)^k g$, $g(\alpha) \neq 0$ $k=1$ α - прост корен $f^{(0)} = f$

$f', f'', \dots$

Th. char $F = 0$ α е k-кратен корен на f $\Leftrightarrow$ $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$, но $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$

Док. $\Rightarrow$ $f = (x-\alpha)^k g$ $g(\alpha) \neq 0$. Индукция по k.

$k=1$ $f = (x-\alpha)g$, $g(\alpha) \neq 0$

$f' = g + (x-\alpha).g'$

$f'(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$

Нека $k > 1$

$f = (x-\alpha)^k g$, $g(\alpha) \neq 0$

$$f' = k(x-\alpha)^{k-1} g + (x-\alpha)^k . g' = (x-\alpha)^{k-1}[\underbrace{kg + (x-\alpha)g'}_{h}]$$

$h(\alpha) = kg(\alpha) \neq 0$ (char $F = 0$)

$f' = (x-\alpha)^{k-1} h$, $h(\alpha) \neq 0 \Rightarrow \alpha$ е $(k-1)$ кратен корен на f'

ИнхП $\Rightarrow$ α анулира производните на f' до $(k-2)$-рата и не анулира $(k-1)$ вата.

$\Leftarrow$ Дадено: $f(\alpha) = f'(\alpha) = \dots = f^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$

Нека α е l-кратен: $f(x) = (x-\alpha)^l g(x)$, $g(\alpha) \neq 0$.

Искаме да док., че $l = k$

Доп. че $l < k \Rightarrow l \leq k-1 \Rightarrow f^{(l)}(\alpha) = 0$ прот. с $\Rightarrow$ част.

доп. че $k < l \Rightarrow k \leq l-1$ от $\Rightarrow$ част $\Rightarrow f^{(k)}(\alpha) = 0$

кратен корен = поне двукратен (не е прост)

<u>Тв</u> Един полином f има кратен корен $\Leftrightarrow$ f има общ корен с f'