27.05.2013г. ВА - лекция за държавен изпит

Основна Th на алгебрата на комплексните числа

$x^2 - 2$ $x^2 + 1$ $\underline{\mathbb{Q}, \mathbb{R}}$ - не са такива

Опр. Едно поле F ще наричаме алгебрически затворено, ако всички корени на всеки неконстантен полином с коефициенти от F лежат също в F.

$f \in F[x]$ има $\alpha_1 \in F$, които е: $f(\alpha_1) = 0 \Rightarrow f(x) = (x - \alpha_1) f_1(x)$, (частствени)

$f_1(x) \in F[x]$

ако този полином не е затворен $\exists\ \alpha_2 \in F : f_1(\alpha_2) = 0 \Rightarrow f_1(x) = (x - \alpha_2) f_2(x)$,

$f_2(x) \in F[x] \Rightarrow f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) f_2(x)$

Th (Даламбер)

Полето на комплексните числа $\mathbb{C}$ е алгебрически затворено.

Док. (на Гаус)

Лема (на Гаус) $\forall$ неконстантен полином с $\mathbb{R}$ реални коефициенти има поне един комплексен корен.

Док на Лемата

Нека $f(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg f \geq 1$ и $\deg f = n$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ може да я представи $n = 2^m k$ k-нечетно, $m \geq 0$

Индукция по $\underline{\underline{m}}$

$m = 0 \Rightarrow n$ - нечетно число

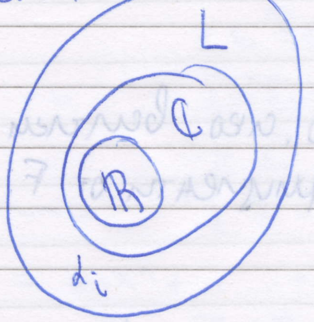
$\longrightarrow$ по Th на Кронинкер б-в. ~~винаги~~ ~~f~~ има ~~поне~~ един реален корен (при нечетна степен)

Нека $m > 0$, Доп. че Th. е вярно за $m-1$

Нека $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са $\forall$ корени на f

Нека $L \supset \mathbb{C}$ и $\alpha_1 \dots \alpha_n \in L$ също

Сметки



първо имаме $\mathbb{R}$
следователно $\mathbb{C}$
и накрая разширявам
до поле, което включва и α_i

$\rightsquigarrow$ Нека r е произволно $\mathbb{R}$ число. За $\forall$ $ij \le n$ означаваме с β_{ij} елемента $\boxed{\beta_{ij} = \alpha_i\alpha_j + r(\alpha_i + \alpha_j)} \in L$

изкуствен момент, да се запомни!

Броят на β_{ij} е ... $\frac{n(n-1)}{2}$

Разглеждаме полинома $g(x) = \prod_{i<j} (x - \beta_{ij}) \in L[x]$, $\deg g = \frac{n(n-1)}{2}$

! вярно ли е че $g(x) \in \mathbb{R}[x]$ (от Th за симетрични полиноми)

$\rightsquigarrow$ припомняне

Сл от осн. Th за сим. полин.

$f(x) \in F[x]$ и корени $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и $h(x_1, \dots, x_n)$ е симетр. (с коеф от F) $\Rightarrow h(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F$

$\rightsquigarrow$ От Виет $\Rightarrow$ коеф. на g са симетр. функции на корените β_{ij} и са някакви функции на α_i

ако направим пермутация на α тогава стане пермутация и с β но всяка пермутация на α_i води до пермутация на β_{ij} $\Rightarrow$ коеф на $g(x)$ не се променят при пермутация на α_i, следователно коеф. на g са симетрични функции на α-те.

пропускаме $g_1 \Rightarrow g(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(g) = \frac{n(n+1)}{2}$

знаменуваме $n = 2^m \cdot k$

$$\deg g = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^m k(2^m k - 1)}{2} = \frac{2^m k(2^m k-1)}{2} =$$

$$= 2^{m-1}(k^m k - 1)$$

от инд. предп. $\Rightarrow$ g има няколко 1 комплексни корен

доказахме че за $\forall\, r \in \mathbb{R}$ поне 1 β_{ij} е комплексно $\mathbb{C}$

да, но $\mathbb{R}$ са безк. мн., а β са безк. мн.

$\Rightarrow \exists\ r_1 \neq r_2 :$ $\alpha_i\alpha_j + r_1(\alpha_i + \alpha_j) = a \in \mathbb{C}$

$\alpha_i\alpha_j + r_2(\alpha_i + \alpha_j) = b \in \mathbb{C}$

(от Дирихле)

реш. системата

$$(\alpha_i + \alpha_j)(r_1 - r_2) = a - b$$

$$\alpha_i + \alpha_j = \frac{a-b}{r_1 - r_2} \in \mathbb{C}$$

сега се връщаме обратно

$$\alpha_i\alpha_j = a - r_1\frac{a-b}{r_1-r_2} \in \mathbb{C}$$

да разгледаме

$$x^2 - (\alpha_i + \alpha_j)x + \alpha_i\alpha_j = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \alpha_i \quad x_2 = \alpha_j$$

но кв. урав. с компл. коеф. има корени комплексни

$\Rightarrow \alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{C}$

Бележки $z = a + bi$

$\bar{z} = a - bi$

$\bar{\bar{z}} = z$

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = b$

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

$\rightsquigarrow$ $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

$f = a_0 x^n + \dots + a_n \in \mathbb{C}$

озн. $\bar{f} = \bar{a}_0 x^n + \dots + \bar{a}_n$

Зад. а) $f \bar{f} \in \mathbb{R}[x]$

б) $f \cdot \bar{f} = (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n)(\bar{a}_0 x_n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \dots \bar{a}_n)$

$a_0 \bar{a}_0 \in \mathbb{R}$

$a_0 \bar{a}_1 + a_1 \bar{a}_0 \in \mathbb{R}$

$a_0 \bar{a}_2 + a_1 \bar{a}_1 + a_2 \bar{a}_0$

$\mathbb{R}$ -сумата $\in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$

б) ако $\alpha \in \mathbb{C}$ и $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \bar{f}(\bar{\alpha}) = 0$

в частност. ако $f \in \mathbb{R}[x]$ (т.е $f = \bar{f}$) и

$f(\alpha) = 0$, то и $f(\bar{\alpha}) = 0$

$f(\alpha) = a_0 \alpha^n + \dots + a_n = 0$

$\rightsquigarrow$ $\overline{f(\alpha)} = \overline{a_0 \alpha^n + \dots + a_n} = 0$

$\overline{f(\alpha)} = \overline{a_0 \alpha^n} + \dots + \bar{a}_n = 0$

$\overline{f(\alpha)} = \bar{a}_0 \bar{\alpha}^n + \dots + \bar{a}_n = 0$

$\bar{f}(\bar{\alpha}) \Rightarrow \bar{f}(\bar{\alpha}) = 0$

Д-во на ОТнаКС

$f \in \mathbb{C}[x]$ Тогава $f \cdot \bar{f} \in \mathbb{R}[x] \xRightarrow{\text{Лема (Гаус)}} \exists\, \alpha \in \mathbb{C}:$

$(f \cdot \bar{f})(\alpha) = 0$, т.е $f(\alpha) \cdot \bar{f}(\alpha) = 0$

Ако $f(\alpha) = 0$ вс $\checkmark$

Ако $\bar{f}(\alpha) = 0 \xRightarrow{\text{от зад } \delta_1} f(\bar{\alpha}) = 0$ $\checkmark$

Тв/ извеждане (док.)

$f \in \mathbb{R}[x]$, нека $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ са $\forall$ реални корени на f

$f = (x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_t)\, g(x)$, g - няма реални корени $g \in \mathbb{R}[x]$

Ако $\deg g \geq 1$ (т.е g не е const и има С корен), $g \in \mathbb{R}[x]$

$\exists\, \alpha \in \mathbb{C}: g(\alpha) = 0 \xRightarrow{\text{зад } \delta} g(\bar{\alpha}) = 0 \Rightarrow g = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})\, h =$

$= x^2 - \underbrace{(\bar{\alpha}+\alpha)}_{\mathbb{R}} x + \underbrace{\alpha\bar{\alpha}}_{\mathbb{R}})\, h$,

$\Rightarrow h \in \mathbb{R}[x]$ и

освен това $D < 0$

формулировка

Тв/ $\forall$ неконстантен полином с реални коефициенти е произведение на полином с реални коефициенти, които са линейни или квадратни с отрицателна D.