22.04. 2013г. ВА - лекция

Аритметика в пръстена на полиномите над поле.

F - поле, $F[x]$ $\qquad f, g \in F[x]$, $g \neq 0$

$\exists !\ q, r \in F[x]$: $f = gq + r$, $\deg r < \deg g$

Опр. 1 g дели f $(g|f)$, ако $\exists$ $q \in F[x]$: $f = g.q$

$g|f$, $a \in F$, $a \neq 0 \Rightarrow ag|f$

$\rightsquigarrow$ $f = g.q$

$f = (5g).\left(\frac{1}{5}q\right)$

$\rightsquigarrow$

НОД $(f, g) = d$: $\quad$ (когато $(f, g) \neq 0$)

1) $d|f$, $d|g$

2) $d_1|f$, $d_1|g \Rightarrow d_1|d$

Тв) За $\forall$ два полинома f, g, поне един от които е ненулев $\exists$ НОД.

Док. 1-ви) $(f, g) = \{uf + vg \mid u, v \in F[x]\} \trianglelefteq F[x]$

$\exists$ $d \in F[x]$: $(f, g) = (d)$ ще док. че (d) изпълнява 1), 2) за НОД.

1) $(f, g) \subseteq (d) \Rightarrow f = d.f_1$, $g = dg_1$

2) $(d) \subseteq (f, g) \Rightarrow d = uf + vg$

Док 2-ри) Алгоритъм на Евклид.

$f = gq_1 + r_1$, $\deg r_1 < \deg g$

$g = r_1q_2 + r_2$, $\deg r_2 < \deg r_1$

$r_1 = r_2q_3 + r_3$, $\deg r_3 < \deg r_2$

$r_2 = r_3q_4 + r_4$, $\deg r_4 < \deg r_3$

$r_3 = r_4q_5$ $\qquad r_4 = (f, g)$

Взаимно прости $(f, g) = 1$

Тъждество на Безу:

Ако $d = (f, g)$ то $\exists\ u, v \in F[x]$

$uf + vg = d$

$f = d \cdot f_1$

$g = d \cdot g_1$

$udf_1 + vdg_1 = d$

$uf_1 + vg_1 = 1$

$\Rightarrow (u, v) = 1$ (НОД, 1)

$(f, g) = 1 \Leftrightarrow \exists\ u, v : uf + vg = 1$

Тв. $g \mid f_1 . f_2$ и $(g, f_1) = 1 \Rightarrow g \mid f_2$

Док.) $\exists\ ug + vf_1 = 1 \quad | . f_2$

$ugf_2 + vf_1f_2 = f_2$

$g \mid (ugf_2)$ защото $\ni ugf_2$

$g \mid (vf_1f_2)$ защото по условие $g \mid f_1 f_2$

$\Rightarrow$ ~~$g \mid$~~ $\Rightarrow g \mid f_2$

Зад. $g_1 \mid f$, $g_2 \mid f$ и $(g_1, g_2) = 1 \Rightarrow g_1 g_2 \mid f$

НОК $[f, g] = h$

1) $f \mid h$, $g \mid h \Rightarrow (f, g) = h$

2) $f \mid h_1$ $g \mid h_1 \Rightarrow h \mid h_1$

Опр $p \in F[x]$, неконстантен, е неразложим над F, ако p не може да се представи $p = p_1 . p_2$, $\deg p_1 < \deg p$, $\deg p_2 < \deg p$

$0 \neq a \in F$, ap

Пример $f(x) = x^2 - 2$ е неразложим над $\mathbb{Q}$, но е разложим над $\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ $f(x) = ax + b$ – нераз.

р-ие

$\rightsquigarrow$ ако p – неразложим

$(p, f) = 1 \iff p \nmid f$

Тв $\exists p$ – неразложим. Ако $p \mid f_1 f_2$ и $p \nmid f_1 \Rightarrow p \mid f_2$

$(f, g) = (d)$

$I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\} \trianglelefteq R$

$(f, g) = (f) + (g) = (d)$

$(f) \cap (g) = (h)$

1) $h \in (f) \Rightarrow h = fh$, т.е $f \mid h$

$h \in (g) \Rightarrow h = gh_2$, т.е $g \mid h$

2) $f \mid k$, $g \mid k$, т.е $k = f . k_1 \Rightarrow h \in (f)$; $k = g . k_1 \Rightarrow k \in (g)$ $\Rightarrow k \in (f) \cap (g) = (h) \Rightarrow$

$k = h . * \Rightarrow h \mid k$

Th (за еднозначно разлагане на неразложими полиноми) Всеки неконстантен полином $f \in F[x]$ се представя като произведение на неразложими над F полиноми. При това, ако $f = p_1 p_2 \ldots p_k$ са две такива представяния, то $k = s$ и (след евентуално преномериране)

$p_1 = a_1 q_1, \ldots, p_k = a_k q_k \quad (a_i \in F)$

Док.| 1) Съществуване на $n = \deg f > 0$. Индукция по n.

$n = 1 \quad (f = f) \qquad n > 1$

Ако f е неразложим над F, то $f = f$

Нека f е разложим: $f = f_1 \cdot f_2$,

$\deg f_1 < n$, $\deg f_2 < n$; Инд: $f_1 = \ldots$, $f_2 = \ldots$ и като заместим, получаваме такова разлагане на самият f.

2) Единственост $p_1 p_2 \ldots p_k = q_1 q_2 \ldots q_s$

$p_1 | q_1 q_2 \ldots q_s$ от. тв.! $\Rightarrow p_1 |$ (например) q_1

$\Rightarrow p_1 = a_1 q_1$

$a q_1 p_2 \ldots p_k = q_2 \ldots q_s$

по индукция $\Rightarrow$