ВА - лекция 13. V. 2013г.

Симетрични полиноми

$A[x] = B$ $B[y] = C$

$C = A[x, y]$

$a x^i y^j$, $a \in A$

$A[x_1, x_2, \dots, x_n]$ $a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} = u$ ← полином на n променливи с коеф. от A

$\deg_{x_1} u = i_1$ $\deg u = i_1 + i_2 + \dots + i_n$

пример: просто степен на u - сумата на степените

$u = x_1^3 + x_2^2$ $\deg u = 5$

Лексикографска наредба

$u = a x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$

$v = b_0 x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$

$u > v$, ако $\exists$ $k \leq n$:

$i_1 = j_1, \dots, i_{k-1} = j_{k-1}$, но $i_k > j_k$

пример

$x_1 > x_2^2 x_3^2$

$x_1^1 x_2^0 x_3^0$ $x_1^0 x_2^2 x_3^2$ гледаме x_1 от ляво, на 1во от дясно на 0ва

$\Rightarrow$ ляво > дясно

$x_2^2 x_3^2 > x_2^2 x_3 x_4^3$

алгебра

алгоритъм

$u > v$, $v > w \Rightarrow u > w$

Лема (за старшия едночлен) $f, g \in A[x_1, \dots x_n]$
(полиноми на две променливи)

Старш. едночлен f е $u = ax_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$, а
старш. едночлен g е $v = bx_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$,
тогава старш. едночлен на $f.g$ е $u.v$.

Док. (скица)

$f \longrightarrow u' = a'x_1^{i_1'} \dots x_n^{i_n'}$

$g \longrightarrow v' = b'x_1^{j_1'} \dots x_n^{j_n'}$

? $uv > u'v'$ - при условие, че не е изп. едновременно
$u = u'$ и $v = v'$

Опр. Нека $f = f(x_1, \dots, x_n) \in A[x_1, \dots x_n]$. Ще казваме че
f е сим. полином на n променливи, ако $\forall \sigma \in S_n$ е
изпълнено $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots x_{\sigma(n)})$

(т.е. сим. група S_n и състои от всички биекции)

(симетричен, ако не се променя при пермутирането на
буквите)

примери:

$f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

$f(x_2, x_1) = x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2$

$f(x_1 x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2$

ако f - симетричен със старш. едночлен $u = ax_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$,
то $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n$

$x_1^2 x_2^3 x_3$

$x_2^2 x_1^3 x_3 = x_1^3 x_2^2 x_3$

Елементарни симетрични полиноми   старши

$\sigma_1 = \sigma_1(x_1, \dots x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n \longrightarrow x_1$

$\sigma_2 = \sigma_2(x_1, \dots x_n) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n \longrightarrow x_1 x_2$

$\sigma_3 = \sigma_3(x_1, \dots x_n) = x_1 x_2 x_3 + \dots + x_1 x_3 x_n \longrightarrow x_1 x_2 x_3$

$\vdots$

$\sigma_n = \sigma_n(x_1, \dots x_n) = x_1 x_2 \dots x_n \longrightarrow x_1 x_2 \dots x_n$

(целия полином е старши коефициент)

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \dots a_n$

с корени $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$\sigma_1(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) = \frac{a_1}{a_0}$ (Виет)

$\sigma_2(\alpha_1, \dots \alpha_n) = \frac{a_1}{a_0}$

$\vdots$

$\sigma_k(\alpha_1, \dots \alpha_n) = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$

Ако g е произв. полином на n променливи, то полиномът $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ - симетричен

Th (основна за симетричните полиноми)

Ако $f = f(x_1, \dots x_n)$ е симетричен полином, то $\exists$ (единствен) полином g на n променливи, такъв че

$f(x_1, \dots x_n) = g(\sigma_1, \dots \sigma_n)$

Док. Нека старшият едночлен на f е $u = a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$,

$k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$. Разгл. полинома $\cancel{f_1 = f - a}$

$$f_1 = f - \underbrace{a \sigma_1^{k_1 - k_2} \sigma_2^{k_2 - k_3} \ldots \sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \sigma_n^{k_n}}_{\text{ст. едночлен на}}$$

$$a \underbrace{x_1^{k_1 - k_2}}_{} \underbrace{(x_1 x_2)^{k_2 - k_3}}_{} \sigma \underbrace{(x_1 x_2 x_3)^{k_3 - k_4}}_{} \ldots \underbrace{(x_1 x_2 \ldots x_{n-1})^{k_{n-1} - k_n}}_{\sigma_{n-1}}$$

$$\underbrace{(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)^{k_n}}_{\sigma_n} = a x_1^{k_1}$$

$$= a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = u$$

Ст. едночлен на f_1 е по-малък от u

ако $f_1 \neq 0$, разгл. $f_2 = f_1 - \ldots = f_2$

ако $f_2 \neq 0$, разгл. $f_3 = f_2 - \ldots$

като съберем $\forall$ fове ще остава

само $f =$ полином на σ-те

Следствие (!) Нека $f(x) = a_0 x^n + \ldots + a_n \in F[x]$ и

(полином с коеф от F)

корени $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$

Нека $h = h(x_1, \ldots, x_n) \in F[x_1, \ldots, x_n]$ е симетричен

тогава $h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F$

(симетричната функция на корените на даден полином

Док) От основната Тh $\Rightarrow \exists$ g на f променливи с коеф от $F[x]$:

симетричният $h(x_1, \ldots, x_n) = g(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

$$h(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = g(\underbrace{\sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_{-\frac{a_1}{a_0}}, \ldots, \underbrace{\sigma_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_{(-1)^n \frac{a_n}{a_0}}) \in F \text{ (поле)}$$