**Примерни решения и критерий за оценяване на контролна работа № 2**
спец. Приложна математика

**Задача 1.** (2,5т.)

Нека $I$ е главният идеал, породен от $3+2i$, в пръстена на целите гаусови числа $\mathbb{Z}[i]$.
а) Да се докаже, че
$I = \{a+bi \in \mathbb{Z}[i] \mid 2a-3b \equiv 0(\text{mod}13)\}$;
б) Да се докаже, че $\mathbb{Z}[i]/I \cong \mathbb{Z}_{13}$.

**Решение**:

а) Нека $I = (3+2i),\ J = \{a+bi \in \mathbb{Z}[i] \mid 2a-3b \equiv 0(\text{mod}13)\}$. Целта е да докажем, че $I \equiv J$.

1) $I \subseteq J$. Нека $a+bi \in \mathbb{Z}[i],\ a,b \in \mathbb{Z}$. Имаме $(3+2i)(a+bi) = (3a-2b)+(2a+3b)i \in I$. Нека $A = 3a-2b$ и $B = 2a+3b$. Тогава получаваме $2A-3B = 2(3a-2b)-3(2a+3b) = -13b \equiv 0(\bmod 13)$, т. е. $(3+2i)(a+bi) = A+Bi \in J \Rightarrow I \subseteq J$.

2) $J \subseteq I$. Нека $a+bi \in J,\ a,b \in \mathbb{Z}$ и $2a-3b \equiv 0(\text{mod}13)$. Нека $a = 3x-2y,\ b = 2x+3y$. Очевидно тази система има единствено решение. Последователно получаваме $x = \frac{3a+2b}{13} \in \mathbb{Z}$ (тъй като $2a-3b \equiv 0(\text{mod}13) \Leftrightarrow 3a+2b \equiv 0(\text{mod}13)$), $y = -\frac{2(2a-3b)}{26} \in \mathbb{Z}$. Получихме, че за всеки елемент $a+bi \in J$, можем да намерим единствени цели числа $x$ и $y$, такива че $(3+2i)(x+yi) = a+bi \in I$, т. е. $J \subseteq I$.

От 1) и 2), следва че $I \equiv J$.

б) От предходната подточка, получихме че $I = \{a+bi \in \mathbb{Z}[i] \mid 2a-3b \equiv 0(\text{mod}13)\}$. Трябва да покажем, че $\mathbb{Z}[i]/I \cong \mathbb{Z}_{13}$. Ще приложим теоремата за хомоморфизми на пръстени.
Първо ще проверим кога два произволни елемента $a_1+b_1i,\ a_2+b_2i \in \mathbb{Z}[i]$ попадат в един и същи клас на $\mathbb{Z}[i]/I$. Имаме: $a_1+b_1i+I = a_2+b_2i+I \Leftrightarrow (a_1+b_1i)-(a_2+b_2i) \in I \Leftrightarrow (a_1-a_2)+(b_1-b_2)i \in I \Leftrightarrow 2(a_1-a_2)-3(b_1-b_2) \equiv 0(\text{mod}13) \Leftrightarrow 2a_1-3b_1 \equiv 2a_2-3b_2(\text{mod}13)$. Забелязваме също, че $2a-3b \equiv 0(\text{mod}13) \Leftrightarrow a+5b \equiv 0(\text{mod}13)$. Сега, на базата на горните бележки, конструираме изображението:

$$\varphi\colon \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_{13}$$
$$\varphi(a+bi) \to \overline{a+5b}$$

Правим проверка дали $\varphi$ е хомоморфизъм на пръстени:

1) $\varphi((a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)) = \varphi((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i) = \overline{(a_1+a_2)+5(b_1+b_2)} = \overline{a_1+5b_1}+\overline{a_2+5b_2} = \varphi(a_1+b_1i)+\varphi(a_2+b_2i)$.

2) $\varphi((a_1+b_1i).(a_2+b_2i)) = \varphi((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i) = \overline{(a_1a_2-b_1b_2)+5(a_1b_2+a_2b_1)} = (\overline{a_1+5b_1})(\overline{a_2+5b_2}) = \varphi(a_1+b_1i)\varphi(a_2+b_2i)$

От 1) и 2), следва че $\varphi$ е хомоморфизъм на пръстени, очевидно върху.
Имаме: $\text{Ker}\varphi = \{a+bi \in \mathbb{Z}[i] \mid \varphi(a+bi) = \bar{0}\} = I$.
Тогава теоремата за хомоморфизми на пръстени ни дава $\mathbb{Z}[i]/I \cong \mathbb{Z}_{13}$.

**Забележка**: Това е решението за варианти 2 и 4, за варианти 1 и 3 действаме по аналогичен начин, като имаме за изображението $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}_5$; $\varphi(a+bi) = \overline{2a-b}$.

**Критерий**:
а) За доказване на всяко от 1) и 2) по 0,5т., т. е. общо 1т.
б) Общо 1,5т.

**Задача 2.** (2,5т.) а) Да се намери остатъкът при делението на полинома $f$ с полинома $g$, където: $f(x) = x^n - 1$, $g(x) = x^3 - 3x + 2$.

б) Да се изрази чрез $p$ и $q$ (когато има смисъл) симетричната функция $\Sigma$ от корените $x_1, x_2, x_3$ на полинома $u = x^3 + px + q$, където:

$$\Sigma = \frac{x_1^2}{3+x_1} + \frac{x_2^2}{3+x_2} + \frac{x_3^2}{3+x_3}$$

. Каква е стойността на $\Sigma$, ако $u = g$ ( от подточка а)).

**Решение**:

а) Теоремата за деление с остатък ни дава $f = gq + r$, $\deg r < \deg g$. Тогава остатъкът е от вида: $r = ax^2 + bx + c$. Корените на $g$ са $1, 1$ и $-2$. Получаваме: $f(-2) = g(-2)q(-2) + r(-2) \Rightarrow (-2)^n - 1 = 4a - 2b + c$, $f(1) = g(1)q(1) + r(1) \Rightarrow 0 = a + b + c$ и $f'(1) = g'(1)q(1) + g(1)q'(1) + r'(1) \Rightarrow n = 2a + b$. Решавайки системата, получаваме $a = \frac{(-2)^n + 3n - 1}{9}$, $b = \frac{(-2)^{n+1} + 3n + 2}{9}$, $c = \frac{(-2)^n - 6n - 1}{9}$. Окончателно получаваме:

$$r = \frac{((-2)^n + 3n - 1)x^2 + ((-2)^{n+1} + 3n + 2)x + (-2)^n - 6n - 1}{9}.$$

б) БОО да разгледаме например $\frac{x_1^2}{3+x_1} = \frac{x_1^2 - 9 + 9}{3+x_1} = \frac{(x_1-3)(x_1+3)+9}{3+x_1} = (x_1 - 3) + \frac{9}{3+x_1}$. Тогава, за симетричната функция получаваме: $\Sigma = (x_1 + x_2 + x_3 - 9) + 9\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3+x_i} = -9 - 9\frac{u'(-3)}{u(-3)} = -9(1 + \frac{27+p}{-27-3p+q}) = \frac{-18p+9q}{27+3p-q}$.

Тук използвахме: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ от формулите на Виет за полинома $u$, както и $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-x_i} = \frac{u'(a)}{u(a)}$ от решавана задача ($u(a) \neq 0$).

В случая $u = g$ имаме: $\Sigma = \frac{9}{2}$.

**Забележка**: Това е отговора за варианти 2 и 4, за варианти 1 и 3 по аналогичен начин получаваме:

а) $r = \frac{((3n+1)(-1)^{n+1} + 2^n)x^2 + ((3n-2)(-1)^n + 2^{n+1})x + (8+6n)(-1)^n + 2^n + 9}{9}$;

б) $\Sigma = \frac{8p - 6q}{-8 - 2p + q}$. При $u = g$ имаме: $\Sigma = 3$.

**Критерий**: За всяка от подточките по 1,25т.