04.VII.2013г. Консултация – Галя

$\boxed{2.38}$ F – числово поле

$G = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in F, a \neq 0, b \neq 0\}$

$(a_1, b_1, c_1) \circ (a_2, b_2, c_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2, a_1 c_2 + c_1 b_2)$

а) G – неабелева група

б) множ. $H = \{(1,b,c) \mid b,c \in F, b \neq 0\}$ е неабелева нормална група на G и $G/H \cong F^*$

в) множеството $K = \{(a,a,c) \mid a,c \in F, a \neq 0\}$ е нормална подгрупа на G, която е изоморфна на групата M (от $\boxed{2.37}$ и $G/K \cong F^*$

а) $(a_1,b_1,c_1)(a_2,b_2,c_2) = (a_1a_2, b_1b_2, a_1c_2 + c_1b_2)$ – неабелева, защото са $\neq$

$(a_2,b_2,c_2)(a_1,b_1,c_1) = (a_2a_1, b_2b_1, a_2c_1 + c_2b_1)$

$(b_2,a_2,c_2)(b_1,a_1,c_1) = (b_2b_1, a_2a_1, c_1b_2 + c_2a_1)$

$a,b,c \in F \Rightarrow (aa, bb, ac+cb) \in F$

$a_1a_2 \in F$

$b_1b_2 \in F$

$a_1c_2 \in F$ $a_1c_2 +$

$b_2c_1 \in F$ $b_2c_1 \in F$

1) $((a_1,b_1,c_1) \circ (a_2,b_2,c_2)) \circ (a_3,b_3,c_3) =$

$= (a_1a_2, b_1b_2, a_1c_2 + c_1b_2) \circ (a_3,b_3,c_3) = (a_1a_2a_3, b_1b_2b_3, a_1a_2c_3 + (a_1c_2 + c_1b_2)b_3)$

$(a_1,b_1,c_1) \circ ((a_2,b_2,c_2) \circ (a_3,b_3,c_3)) =$

$= (a_1,b_1,c_1) \circ (a_2a_3, b_2b_3, a_2c_3 + c_2b_3) =$

$= (a_1a_2a_3, b_1b_2b_3, (a_2c_3 + c_2b_3)a_1 + c_1b_2b_3)$

0) $a,b,c \in F$

$a_1a_2 \in F$ $b_1b_2 \in F$ $a_1c_2 \in F$ $c_1b_2 \in F$ $a_1c_2 + c_1b_2 \in F$

2) $\exists$ ~~нулев~~ единичен елемент $\in F$

(x_1, x_2, x_3) ~~нулев~~ единичен $\circ (a_1,b_1,c_1) = (a_1,b_1,c_1)$

$a_1 \cdot x_1 = a_1 \Rightarrow x_1 = 1$

$b_1 \cdot x_2 = b_1 \Rightarrow x_2 = 1$

$x_1 \cdot c_1 = c_1 \Rightarrow x_1 = 1$

$x_3 \cdot b_1 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$\exists$ нулев елемент $(1,1,0)$

3) $\exists$ обратен елемент $\in F$

$(a_1, b_1, c_1) \circ (x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$

$a_1 \cdot x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_1}$

$b_1 \cdot x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{b_1}$

$\exists$ обратен елемент $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{b_1}, -\frac{c_1}{b_1 a_1}\right)$

$a_1 x_3 + c_1 \cdot x_2 = 0$

$a_1 \cdot x_3 = -c_1 \cdot x_2 = -\frac{c_1}{b_1}$

$x_3 = -\frac{c_1}{b_1 a_1}$

б) $\circ)\ (1, b_1, c_1) \circ (1, b_2, c_2) = (1, b_1 b_2, c_2 + b_2 c_1) \in H$

1) ~~$(1, b_1, c_1) \circ \left(1, \frac{1}{b_1}, -\frac{c_1}{b_1}\right) =$~~

$$\left.\begin{array}{l} 1 \in G \\ \frac{1}{b_1} \in G \\ -\frac{c_1}{b_1} \in G \end{array}\right\} \Rightarrow \in H$$

не е абелева подгрупа, тъй като G не е абелева група

? ~~$g(1, b_1, c_1) = (1, b_1, c_1) \circ g =$~~

~~$(g, gb_1, gc_1 + gb_1) = (g, gb_1, g + c_1 g)$~~

$g^{-1} h g \in H$

$\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{b_1}, -\frac{c_1}{b_1 a_1}\right) \circ (1, b_2, c_2)(a_1, b_1, c_1) =$

$= \left(\frac{1}{a_1}, \frac{b_2}{b_1}, \frac{c_2}{a_1} - \frac{c_1 b_2}{b_1 a_1}\right) \circ (a_1, b_1, c_1) =$

$= \left(\frac{\cancel{a_1}}{\cancel{a_1}}, \frac{b_2 \cancel{b_1}}{\cancel{b_1}}, \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2 b_1}{a_1} - \frac{c_1 b_2 \cancel{b_1}}{\cancel{b_1} a_1}\right) \in H$

$\frac{a_3}{a_1} \in H \quad (a_1, a_3 \in H)$

~~$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in H$~~

~~$\frac{b_2 b_3}{b_1} \in H \quad (b_1, b_2, b_3 \in H)$~~ ~~$\Rightarrow$ всичките операции спрямо $+$ и $\cdot$ са в H.~~

2) $= \left(1, b_2, \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2 b_1}{a_1} - \frac{c_1 b_2}{a_1}\right) \in H$

в) $K = \{(a,a,c) \mid a,c \in F, a \neq 0\}$

? $K \trianglelefteq G$

$G \cong M = \{(a,c) \mid a,c \in F, a \neq 0\}$

$G/K \cong F^*$

$G/H \cong F^*$

φ_1 - ХММ

$h_1, h_2 \in H$

$\varphi(h_1) \circ \varphi(h_2) = \varphi(h_1 \circ h_2)$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = H$

$\varphi(G) \to H$

$\varphi(a,b,c) \to (1,b,c)$

$(x_1,x_2,x_3) \circ (a,b,c) = \underline{(1,b,c)}$ $\quad \varphi = (x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{1}{a}, 1, \frac{c}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)\right)$

$x_1 . a = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a}$

$x_2 . b = b \Rightarrow x_2 = 1$

$x_3 . b + x_1 c = c \Rightarrow x_3 b = c - \frac{c}{a}$

$x_3 = \frac{c}{b} - \frac{c}{ab} = \frac{c}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$

$H \subset G$

$H \trianglelefteq G$ $\quad G/H \cong \mathrm{Im}\,\varphi$ $\left(G/H \cong F^*\right)$

? $\mathrm{Ker}\,\varphi = H$ $\quad \cancel{\varphi: G \to G'}$

$\varphi: G \to F^*$

$\varphi((a,b,c)) = a$ $\quad \varphi(1,b,c) = 1$

1.4 е хомоморфизъм

$\varphi(\underline{(a_1,b_1,c_1) \cdot (a_2,b_2,c_2)}) = \varphi((a_1a_2, b_1b_2, c_2a_1 + b_2c_1)) = a_1a_2$

$\varphi(a_1,b_1,c_1) = a_1$

$\varphi(a_2,b_2,c_2) = a_2$

$\overline{a_1 . a_2}$

б) $(1, b_1, c_1) \circ (1, b_2, c_2) = (1, b_1 b_2, c_2 + c_1 b)$

$b_1, b_2, c_1, c_2 \in H$

$b_1 b_2 \in H$

$c_1 + b \in H$

$c_2 + c_1 b \in H$

$\Rightarrow H \trianglelefteq G$

Подгрупа:

$(1, b_1, c_1) \circ (1, b_2, c_2) = (1, b_1 b_2, c_2 + c_1 b_2)$

$(1, b_2, c_2) \circ (1, b_1, c_1) = (1, b_1 b_2, c_1 + c_2 b_1)$

$\Rightarrow H \trianglelefteq G$ - не е абелева група

$H \trianglelefteq G$ и $G/H \cong Im\varphi$

$\Rightarrow H = Ker\varphi$ и φ - ХММ

$G/H \cong F^*$ $\qquad F^* = Im\varphi$

$G/H \cong Im\varphi$ $\qquad \cancel{\varphi((a,b,c))}$ $\qquad \varphi((a,b,c)) = a$

$\cancel{\varphi((a,b,c)) =}$ $\qquad \cancel{\varphi((a,b,c)) = a}$

$\cancel{Ker\varphi(a,b,c) = (1,1,0)}$ $\qquad \varphi((1,b,c)) = \cancel{(1,1,0)}$

$\varphi((a_1, b_1, c_1)) \circ \varphi((a_2, b_2, c_2)) = a_1 \circ a_2 = a_1 a_2$

$\varphi((a_1, b_1, c_1) \circ (a_2, b_2, c_2)) = \varphi((a_1 a_2, b_1 b_2, a_1 c_2 + c_1 b_2)) =$

$= a_1 a_2$

$\Rightarrow \varphi$ е ХММ и $H = Ker\varphi$

Нормална подгрупа:

$g^{-1} h g$

$\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{b_1}, -\frac{c_1}{b_1 a_1}\right) \circ (1, b_2, c_2) \circ (a_1, b_1, c_1) =$

$= \left(\frac{1}{a_1}, \frac{b_2}{b_1}, \frac{c_2}{a_1} - \frac{c_1 b_2}{b_1 a_1}\right) \circ (a_1, b_1, c_1) = \left(1, b_2, \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2 b_1}{a_1} - \frac{c_1 b_2}{a_1}\right) \in H$

Обратен елемент $\in H$

$\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{b_1}, -\frac{c_1}{b_1 a_1}\right) \in H$ при $a_1 = 1$

4

в) $(a_1, a_1, c_1) \circ (a_2, a_2, c_2) = (a_1a_2, a_1a_2, a_1c_2 + c_1a_2) \in K$

$\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_1}, -\frac{c_1}{a_1a_1}\right) \in K$

Нормална подгрупа: $K \trianglelefteq G$

$g^{-1}hg = \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{b_1}, -\frac{c_1}{b_1a_1}\right) \circ (a_2, a_2, c_2) \circ (a_1, b_1, c_1) =$

$= \left(\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{c_2}{a_1} - \frac{c_1 \cdot a_2}{b_1a_1}\right) \circ (a_1, b_1, c_1) = \left(a_2, a_2, \frac{c_1a_2}{a_1} - \frac{c_2b_1}{a_1} - \frac{c_1a_2}{a_1}\right)$

и това е от порядъка на K (a_2, a_2, c_2)

$M = \{(a, c) \mid a, c \in F, a \neq 0\}$

$G/K \cong F^*$

$K \trianglelefteq G$ и $G/K \cong Im\varphi \Rightarrow Im\varphi = F^*$

$\varphi((a, b, c)) = (a, c)$

$\varphi((a, a, c))$

$\varphi(a, b, c) = (a, c)$

1) $x_1 = (a_1, a_1, c_1) \neq (a_2, a_2, c_2) = x_2$

$\Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$

$\varphi(a_1, a_1, c_1)$

$\parallel$

$(a_1, c_1) \neq (a_2, c_2) = \varphi(a_2, a_2, c_2)$

инекция

сюрекция

$(a, c) = \varphi((a, a, c))$

$\Rightarrow$ биекция

$\varphi((a_1,a_1,c_1)) \circ \varphi((a_2,a_2,c_2)) = (a_1,c_1)\circ(a_2,c_2) = \cancel{a_1c_2+a_2c_1}\ (a_1a_2,\ c_2a_1+c_1a_2)$

$\varphi((a_1,a_1,c_1)\circ(a_2,a_2,c_2)) = \varphi((a_1a_2,\ a_1a_2,\ a_1c_2+a_2c_1)) = (a_1a_2,\ a_1c_2+a_2c_1)$

$\Rightarrow K \cong M$ (изоморфона)

$G/K \cong F^*$; $K \trianglelefteq G$

$\Rightarrow G/K \cong \mathrm{Im}\,\varphi$? φ - ХМН и $K = \mathrm{Ker}\,\varphi$

$\varphi((a,b,c)) = (a,c)$

$\cancel{\varphi(a,}\ \varphi((a,a,c)) = (a,c)$

$\varphi((a_1,b_1,c_1)) \circ \varphi((a_2,b_2,c_2)) = (a_1,b_1^{-1}) \circ (a_2,b_2^{-1}) = (a_1a_2,\ b_1^{-1}b_2^{-1})$

$\varphi((a_1,b_1,c_1)\circ(a_2,b_2,c_2)) = \varphi((a_1a_2,\ b_1b_2,\ a_1c_2+c_1b_2)) =$

$= (a_1a_2,\ b_1^{-1}b_2^{-1})$

$\varphi((a,b,c)$

$\varphi : (G,\circ) \to (F^*, *)$

$(a,b,c) \longrightarrow \_\_$

$\varphi((a,a,c)) = 1 \qquad a \cdot a^{-1}$

$\varphi((a,b,c)) \neq +1$ при $a \neq b$

$a \cdot b^{-1}$

$\varphi \to *$

$\boxed{10}$ $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \right\} < GL_2(\mathbb{Q})$

на общата линейна група (GL_n) $*$

$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \right\}$ и $H = \left\{ \begin{pmatrix} b^{-2} & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \right\}$ нормални подгрупи

и с фактор-група $?\, G/N \cong \mathbb{Q}^*$, $?\, G/H \cong \mathbb{Q}^*$

$G/N \cong \mathbb{Q}^*$

$\cancel{\varphi\left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\right) \to 1 = (a \cdot a^{-1})}$

$\cancel{\varphi\left(\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) \to (a \cdot b)}$

~~Подгрупа~~

$\cancel{\varepsilon \leq N \quad N}$

$\cancel{g^{-1} h g = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} =}$

$\varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}\right) \circ \varphi\left(\begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\right) =$

$= a_1 b_1 \circ a_2 b_2 = a_1 a_2 b_1 b_2$

$\varphi\left(\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 c_2 + c_1 b_2 \\ 0 & b_1 b_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 \circ b_1 b_2 =$

$= a_1 a_2 b_1 b_2$

φ - ХМН $\quad N = \operatorname{Ker} \varphi \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$:

$\operatorname{Ker} \varphi$

$\operatorname{Ker} \varphi = \varphi\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix} = 1, \; \{ a \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \}$

$N = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Q}^*, c \in \mathbb{Q} \right\}$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : ab = 1, \ a \in \mathbb{Q}^*, \ b, c \in \mathbb{Q} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : b = a^{-1}, \ a \in \mathbb{Q}^*, \ b, c \in \mathbb{Q} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{Q}^*, \ b, c \in \mathbb{Q} \right\} = N$

$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Q}^*$

Нека $(a, b \in \mathbb{Q}^*$

$\Rightarrow \varphi \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = a.b \in \mathbb{Q}^*$

$\Rightarrow \mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Q}^*$

$G/H \cong \mathbb{Q}^*$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a.b^2 = 1, \ a \in \mathbb{Q}^*, \ b, c \in \mathbb{Q} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a = \frac{1}{b^2}, \ a \in \mathbb{Q}^*, \ b, c \in \mathbb{Q} \right\} =$

$= \left\{ \begin{pmatrix} b^{-2} & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : \right.$

8

4. 3. $G = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

1\. $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1})$

ap) $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)$ ✓

1) $((x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)) \circ (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1}) \circ (x_3, y_3) =$

$= (x_1 + x_2 + x_3, (y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1}) e^{-x_3} + y_3 e^{x_1 + x_2})$

$(x_1, y_1) \circ ((x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)) = (x_1, y_1) \circ (x_2 + x_3, y_2 e^{-x_3} + y_3 e^{x_2}) =$

$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 e^{-x_2 - x_3} + (y_2 e^{-x_3} + y_3 e^{x_2}) e^{x_1}) =$

$= (x_1 + x_2 + x_3, y_1 e^{-x_2 - x_3} + y_2 e^{-x_3 + x_1} + y_3 e^{x_1 + x_2})$ ✓

2) ∃ неутрален ~~единичен~~ елемент

$(x_1, y_1) \circ (a_1, a_2) = (x_1, y_1)$

$x_1 + a_1 = x_1 \Rightarrow a_1 = 0$

$y_1 e^{-a_1} + a_2 e^{x_1} = y_1 \Rightarrow y_1 \cdot 1 + a_2 \cdot e^{x_1} = y_1 \Rightarrow a_2 = 0$

∃ неутрален елемент $\Rightarrow (a_1, a_2) = (0, 0) \in G$

3) ∃ обратен елемент

$(x_1, y_1) \circ (a_1, a_2) = (0, 0)$

$x_1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = -x_1$

$y_1 e^{-a_1} + a_2 e^{x_1} = 0 \Rightarrow y_1 \cdot e^{x_1} + a_2 e^{x_1} = 0 \Rightarrow e^{x_1}(y_1 + a_2) = 0$

$\Rightarrow y_1 = -a_2 \Rightarrow a_2 = -y_1$

∃ обратен елемент $(a_1, a_2) = (-x_1, -y_1) \in G$

б) $H=\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \trianglelefteq G$ (нормална група несъвпадаща с G)

$H \cong \mathbb{R}$ (изоморфна)

$G/H \cong \mathbb{R}$ (G факторизирано по H)

$\varphi((x,y)) = x$

Ще докажем, че φ е хомоморфизъм (ХММ)

$\varphi((x_1,y_1)) \circ \varphi((x_2,y_2)) = x_1 \circ x_2 = \underline{x_1+x_2}$

$\varphi((x_1,y_1)\circ(x_2,y_2)) = \varphi((x_1+x_2,\ y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1})) = \underline{x_1+x_2}$

$\Rightarrow \varphi$ е хомоморфизъм (ХММ)

$Ker\,\varphi = \{(x,y)\ \cancel{\in x} : \varphi(x,y) = x = 0 \mid x,y \in \mathbb{R}\} = H$

$\Rightarrow$ можем да приложим теоремата за хомоморфизмите и получаваме, че $H \trianglelefteq G$ и $G/H \cong Im\,\varphi$

Остава да покажем, че $Im\,\varphi = \mathbb{R}$

Нека $a, b \in \mathbb{R}$

$\cancel{Im}\ \varphi(\cancel{x}\,x, y) = x \in \mathbb{R} \Rightarrow Im\,\varphi = \mathbb{R}$

$a_1 = (x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) = a_2 \Rightarrow \varphi(\overset{a_1}{\cancel{x_1, y_1}}) \neq \varphi(a_2)$

$\cancel{\varphi(x_1, y_1)}$

φ

$H \cong \mathbb{R}$

$\psi(0, y) = y$

~~Нека~~ Нека $y_1 \neq y_2$

$\psi(0, y_1) = y_1 \neq y_2 = \psi(0, y_2)$

$\Rightarrow \psi(0, y_1) \neq \psi(0, y_2)$ инекция

$y = \psi(0, y) \rightarrow$ сюрекция

$\Rightarrow$ биекция и ХММ по очевидни причини

$\Rightarrow H \cong \mathbb{R}$ (изоморфно)