18. Общо уравнение на равнина в пространството

Нека $K = Oxy$ е афинна координатна система.

Теорема.1: Всяка равнина π има спрямо координатната система K уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.
Обратното: Всяко уравнение от вида $Ax + By + Cz + D = 0$, където $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ е уравнение спрямо K на някоя равнина π.
Доказателство:
Нека т.$P_0(x_0, y_0, z_0)$ е точка от π и векторите $v_1(a_1, b_1, c_1)$ и $v_2(a_2, b_2, c_2)$ са компланарни с π и не са колинеарни помежду си. Нека т.$P(x, y, z) \in \pi$, тогава $\overrightarrow{P_0P}, v_1, v_2$ са компланарни.
От условието за компланарност следва:

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е.

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (y - y_0) \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

Нека да означим с $A = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ и $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.
Следователно от $P(x, y, z) \in \pi$ следва

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0, Ax+By+Cz-Ax_0-By_0-Cz_0 = 0, Ax+By+Cz+D = 0, \tag{2}$$

т.е. π има уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$.
Остана да докажем, че $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Да допуснем противното, т.е. $(A, B, C) = (0, 0,)$. В такъв случай минорите на натрицата $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$ са равни на нула, т.е. ранга на матрицата е по-малък или равен на 1. Това означава, че векторите v_1 и v_2 са колинеарни, което е противоречие. Следователно $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.
Сега ще докажем и обратната посока:

Тъй като $(A, B, C) \neq (0,0,0)$, то уравнението

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3}$$

има решение(например ако $A \neq 0$, то едно решение е $x = -\frac{D}{A}, y = 0, z = 0$).
Нека (x_0, y_0, z_0) е едно решение на уравнение (2), тогава $D = Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Нека т.P е с координати (x_0, y_0, z_0). От първата част на доказателството знаем, че е достатъчно да намерим некоолинеарни вектори $v_1(a_1, b_1, c_1)$, $v_2(a_2, b_2, c_2)$, такива че

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Без ограничение на общноста, можем да приемем $A \neq 0$. Нека вземем $b_1 = A, c_2 = 1, b_2 = 0, c_1 = 0, a_1 = -B, a_2 = -\frac{C}{A}$. Непосредствено проверяваме, че горните равенства са изпълнени. Така получихме векторите $v_1(-B, A, 0)$ и $v_2(-\frac{C}{A}, 0, 1)$, тези два вектора са неколинеарни.
Така т.P_0, v_1, v_2 задават равнина π и уравнението и е точно:

$$\pi : (x - x_0)\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + (y - y_0)\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + (z - z_0)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{4}$$

т.е. $Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0$ или $Ax + By + Cz + D = 0$.