12. Общи уравнения на права в равнината

Нека фиксираме афинна координатна система $K = Oxy$ в равнината.

1. Теорема: Всяка права в равнината има спрямо K уравнение от вида $Ax+By+C = 0$, където $(A, B) \neq (0, 0)$ и обратното, всяко уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$, е уравнение спрямо K на някоя права от равнината.
Доказателство:
Нека l е права и т.$P_0(x_0, y_0)$ е точка от нея. Нека векторът $\mathbf{a}(_1, _2)$ е колинеарен на l. Точка $P(x, y)$ принадлежи на l, тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{P_0P} \| a$. Това също може да се запише и по този начин:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 \\ y - y_0 & a_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$a_2(x - x_0) - a_1(y - y_0) = 0,$$
$$a_2x - a_1y - a_2x_0 + a_1y_0 = 0.$$

Означаваме с $A = a_2, B = -a_1$ и с $C = -a_2x_0 + a_1y_0$.
Точката $P \in l$, тогава и само тогава, когато $Ax + By + C = 0$. Освен това $(A, B) \neq (0, 0)$, тъй като векторът $\mathbf{a}$ е ненулев.
Сега ще докажем и обратната страна.
Нека уравнението $Ax + By + C = 0$ има решение и нека (x_0, y_0) е едно такова, т.е:

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Нека т.P има за координати (x_0, y_0). Векторът $\mathbf{a}= (-B, A)$ е ненулев, защото $(A, B) \neq (0, 0)$. Построяваме правата определена от тази точка и векторът $\mathbf{a}$, т.е:

$$x = x_0 + \lambda(-B),$$
$$y = y_0 + \lambda A.$$

Като изключим λ от тези две уравнения получаваме:

$$\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}.$$

Следпвателно l има вида:

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0.$$

Използвайки, че $C = -Ax_0 - By_0$ получаваме:

$$l : Ax + By + C = 0.$$

1. Дефиниция: Нека l е права. Уравнение на l от вида $Ax + By + C = 0$, където $(A, B) \neq (0, 0)$, наричаме общо уравнение на правата l спрямо K.

1. Твърдение: Ако правата l е определена от т.$P(x_0, y_0)$ и векторът **a**$= (_1, _2)$, то l има общо уравнение:

$$l : \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 \\ y - y_0 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ако правата l е определена от точките $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$, $P_1 \neq P_2$, то l има общо уравнение

$$l : \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } l : \begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказателство: Нека т.$P(x, y)$ лежи на правата l. Тогава $\overrightarrow{P_0P} \| \mathbf{a}$. Тогава това условие е еквивалентно на:

$$l : \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 \\ y - y_0 & a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

. За втората част отново нека т.$P(x, y)$ лежи на правата l. $\overrightarrow{P_1P}(x - x_1, y - y_0)$ и $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Тогава от първата част на твърдението получаваме:

$$l : \begin{vmatrix} x - x_1 & x_2 - x_1 \\ y - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Твърдение: Нека правата l има уравнение $Ax + By + C = 0$, $(A, B) \neq (0, 0)$. Тогава:
1) Векторът $\mathbf{a}(-B, A)$ е колинеарен с l.
2) Векторът $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ е колинеарен с l, тогава и само тогава, когато $Ab_1 + Bb_2 = 0$.
Доказателство: Доказателството на 1) го показахме в доказателстовото на Теорема 1.
2) Векторът **b** е колинеарен с вектора **a**, следователно

$$\begin{vmatrix} b_1 & -B \\ b_2 & A \end{vmatrix} = 0 \text{ или } Ab_1 + Bb_2 = 0.$$

Обратното, от $Ab_1 + Bb_2 = 0$ следва

$$\begin{vmatrix} b_1 & -B \\ b_2 & A \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $\mathbf{b} \| \mathbf{a}$ или $\mathbf{b} \| l$.

Отрезово уравнение на права. Нека l е права, която не минава през началото на координатната система и не е успоредна на координатните оси. Нека l пресича абсцисата в т.$A(a, 0)$ и ординатната ос в т.$B(0, b)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, тък като $A \neq 0$ и $B \neq 0$. Тогава l има уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Това уравнение се нарича отрезово уравнение на правата l. Очевидно т.A и т.B удовлетворяват горното уравнение. Общото уравнение на l е

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

което е еквивалентно на отрезовото.