9. Векторно произведение на два вектора

Дефинициия.1: Векторното произведение на векторите **a**,**b** е векторът **a**×**b**, дефиниран по спедния начин:
1) ако **a** и **b** са колинеарни, то **a**×**b**=0.
2) ако **a** и **b** не са колинеарни, то **a**×**b** е единствения вектор със следните свойства:
• $|\mathbf{a}\ \mathbf{x}\ \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\angle(\mathbf{a},\mathbf{b})$;
• **a**×**b** $\perp$ **a**,**b**;
• **a**,**b** и **a**×**b** образуват положително ориентиран базис.

Лесно се забелязва, че **a**,**b** са колинарни, тогава и само тогава, когато **a**×**b**=0, т.е следва директно от дефиницията.

Теорема.1: Ако **a**,**b** не са колинеарни, то лицето на успоредника построен върху тях е дължината на **a**×**b**, а лицето на триъгълника построен върху тях е $\frac{1}{2}|\mathbf{a}\ \mathbf{x}\ \mathbf{b}|$.
Доказателство: Нека т.O е произволна точка, избираме $\overrightarrow{OA}$= **a**, $\overrightarrow{OB}$= **b**. Избираме т.C, така че $OABC$ да е успоредник.
Лицето на успоредника е:

$$S_{OABC} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle(\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}) = |\mathbf{a}\ \mathbf{x}\ \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\angle(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |axb|;$$

Лицето на триъгълника OAB се явява половината от лицето на успоредника. С това теоремата е доказана.

Теорема.2: Нека $K = Oe_1e_2e_3$ е положително ориентирана ортонормирана система и спрямо нея векторите **a**,**b** имат координати съответно (a_1, a_2, a_3) и $((b_1, b_2, b_3)$. Тогава координатите на **a**×**b** спрямо K, са $(a_2b_3 - a_3b_3, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.
Доказателство:
Нека означим с **c** векторас координати $(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$.
1сл.) Ако **a**=0. то $(a_1, a_2, a_3) = 0$ и следва, че **c=0** и **a**×**b=0**.
2сл.) Ако $\mathbf{a} \neq 0$, и **a**,**b** са колинеарни, то следва, че **b**= λ **a**, където $\lambda \in \mathbb{R}$. Оттук следва, че $b_i = \lambda a_i, i = 1, 2, 3$. От свойствата на векторното произведение **a**×**b=0**. **c**=$(\lambda a_2a_3 - \lambda a_3a_2, \lambda a_3a_1 - \lambda a_1b_3, \lambda a_1a_2 - \lambda a_2a_1) = 0$.
3сл.) Нека **a**,**b** не са колинеарни.

$$|c|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 =$$
$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = |a|^2|b|^2 - < \mathbf{a,b} >=$$
$$|a|^2|b|^2 - (|a||b| \cos\angle(\mathbf{a,b}))^2 = |a|^2|b|^2(1 - \cos\angle(a,b))^2 = |a|^2|b|^2 \sin\angle(\mathbf{a,b})^2,$$

т.е. $|c| = |a||b| \sin\angle(\mathbf{a,b})$.
Забележка:$a \perp c$, защото $<$**a,c**$>$=0. Аналогично от $<$**b,c**$>$=0 следва $b \perp c$.
За да докажем, че **a,b,c** образуват положително ориентиран базис трябва да проверим, дали матрицата на прехода от (e_1, e_2, e_3) към **(a,b,c)** има положителна детерминанта, т.е.:

$$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_2 & b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_3 & b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} > 0,$$

т.е.

$$(a_2b_3 - a_3b_2)det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} + (a_3b_1 - a_1b_3)det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} + (a_1b_2 - a_2b_1)det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} =$$
$$(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = |\mathbf{c}|^2.$$

Следователно наистина **c**=**a** $\times$**b**.
От по-горните сметки може да съобразим формула за намиране на координатите на вектора **c**=**a** $\times$**b**:
a $\times$b=$det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & e_3 \end{pmatrix} = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3.$
a $\times$b=(z_1, z_2, z_3).
Явна формула за z_1, z_2, z_3:
a $\times$b=$det \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} e_1 + det \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} e_2 + det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} e_3.$
Следователно $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$.

Теорема.3: Векторното произведение има следните свойства:
1)антисиметричност: **a** $\times$ **b**= - **b** $\times$**a**
2)дистрибутивност: $(a' +'') \times b = a' \times$ **b** $+ a'' \times$ **b**;
a $\times (b' + b'') = a \times b' + a \times b''$;
3)хомогеннност по два аргумента: λ (**a** $\times$ **b**)=(λ**a**)$\times$ **b**)=**a**$\times$(λ**b**), за всяко $\lambda \in \mathbb{R}$.
Доказателство:
1) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \left(\begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_3 & a_3 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} \right) = \left(- \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) =$

\- **a** $\times$ **b**.
2) Нека $a'(a_1', a_2', a_3')$, $a''(a_1'', a_2'', a_3'')$ и $b(b_1, b_2, b_3)$ спрямо K.
$a' + a''(a_1' + a_1'', a_2' + a_2'', a_3' + a_3''),$

$$(a'+a'')\times b=\left(\begin{vmatrix} a_2'+a_2'' & b_2 \\ a_3'+a_3'' & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3'+a_3'' & b_3 \\ a_1'+a_1'' & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1'+a_1'' & b_1 \\ a_2'+a_2'' & b_2 \end{vmatrix}\right)=$$
$$\left(\begin{vmatrix} a_2'+a_2'' & b_2 \\ a_3'+a_3'' & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3'+a_3'' & b_3 \\ a_1'+a_1'' & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1'+a_1'' & b_1 \\ a_2'+a_2'' & b_2 \end{vmatrix}\right)=$$
$$\left(\begin{vmatrix} a_2' & b_2 \\ a_3' & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2'' & b_2 \\ a_3'' & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3' & b_3 \\ a_1' & b_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_3'' & b_3 \\ a_1'' & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1' & b_1 \\ a_2' & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1'' & b_1 \\ a_2'' & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

Следователно $(a_1+a_2)\ \times b=a_1\times b+a_2\times b$.
$a\times(b_1+b_2)=-(b_1+b_2)\times a=-(b_1\times a+b_2\times a)=a\times b_1+a\times b_2$.
3) Нека $\lambda a(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$.

$$(\lambda a)\times b=\left(\begin{vmatrix} \lambda a_2 & b_2 \\ \lambda a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda a_3 & b_3 \\ \lambda a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 \\ \lambda a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)=$$
$$\left(\lambda\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \lambda\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \lambda\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

Следователно $(\lambda\mathbf{a}\ \times\ \mathbf{b})=\lambda\ (\mathbf{a}\ \times\ \mathbf{b})$.
$\mathbf{a}\ \times(\lambda\ \mathbf{b})=-(\lambda b)\times a=-\lambda(b\times a)=\lambda(a\times b)$.