5. Координатни системи

Ще въведем първоначално някой означения:
Означаваме множеството от точките в пространството с P, а множеството от вектори в пространството с V.
Ако l е права, то ще означаваме множеството от точките върху l с P_1 и множеството от векторите колинеарни на l с V_1.
Ако π е равнина, ще означаваме множеството от точките върху π с P_2, а съответно множеството от векторите, които са компланарни на π с V_2.
Аналогично дефинираме P_n и V_n. От предния въпрос ни става ясно, че V_n, $n = 1, 2, ...$ е n-мерно реално линейно пространство.

Дефиниция.1: *Афинна координатна система* в P_n е двойка състояща се т.$O \in P_n$ и базис $(e_1, e_2, ..., e_n) \in V_n$ (пишем $K = Oe_1e_2...e_n$).
Точката се нарича начало на координатната система, а $(e_1, e_2, ..., e_n)$ се наричат координатни (базисни) вектори.
Ако е фиксирана единична отсечка за измерване, $|e_1| = |e_2| = ... = |e_n| = 1$ и $e_1 \perp e_2 \perp ... \perp e_n$, то координатната система се нарича *ортонормирана.*

Нека $v \in V_n$. Тъй като $(e_1, e_2, ..., e_n)$ е базис на V_n, то съществуват единствени $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, такива че $v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$. Числата $(x_1, x_2, ..., x_n)$ се наричат координати на v спрямо координатната система $K = Oe_1e_2...e_n$ и пишем $v(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Нека т. $\in P_n$. Тогава координатите $(x_1, x_2, ..., x_n)$ на вектора $\overrightarrow{OA}$, се наричат координати на т.A относно K (пишем $P(x_1, x_2, ..., x_n)$).

Правата през т.O, която е колинеарна с вектора e_1 и е ориентирана чрез e_1, се нарича абсцисна ос и се бележи с Ox_1. Правата през т.O, която е колинеарна с вектора e_2 и е ориентирана чрез e_2, се нарича ординатна ос и се бележи с Ox_2. Аналогично се определя Ox_3, която се нарича апликатна ос.

Сега ще си припомним някой факти от Линейната алгебра:
Нека $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ и $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ са два базиса на пространството V_n. Матрицата:

$$T = \left(\begin{array}{ccc} t_{11} & ... & t_{1n} \\ ... & ... & ... \\ t_{n1} & ... & t_{nn} \end{array} \right),$$

за която

$$\begin{aligned} l_1 &= t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + ... + t_{1n}e_n, \\ l_2 &= t_{21}e_1 + t_{22}e_2 + ... + t_{2n}e_n, \\ &... \\ l_n &= t_{n1}e_1 + t_{n2}e_2 + ... + t_{nn}e_n, \end{aligned}$$

се нарича матрица на прехода от от базиса e към базиса l. Тези равенства се пишат : $(l_1, l_2, ..., l_n)' = T(e_1, e_2, ..., e_n)'$ (тук с $'$ е означено действоето транспониране транспониране). Това може и по-кратко да се напише:

$$b' = Ta'.$$

В частност, ако $det(T) \neq 0$ матрицата T е обратина, т.е съществува матрица T^{-1}, такава че $TT^{-1} = E$, където E е единичната матрица.

Дефиниция.2: Нека и l са два базиса на V_n и нека е матрицата на прехода от към l. Казваме, че и l са еднакво ориентирани, ако $det(T) > 0$. Съответно, ако $det(T) < 0$, то казваме, че са противоположно ориентирани.

Твърдение: • Релацията "$\sim$" еднаква ориентираност на базиси е релация на еквивалентност в множеството от базисите на V_n.
• Класовете на еквивалентснот относно тази релация са два. Ако $e(_1, _2, ..., _n)$ е базис на V_n, то те са $l : l \sim e$ и $l : l \nsim e$.
Втората част на твърдение означава, че всички всевъзможни базиси на V_n, могат да се разделят на две множества (класове), единият клас съдържа тези базиси които са еднакво ориентиранни с e, а другият клас се състои от противоположно ориентираните на e базиси.
Доказателство:
Първо ще докажем, че $\sim$ е релация на еквивалентност.
1) Рефлексивно свойство: $e \sim e$.
Матрицата на прехода е единичната матрица E, защото $e' = Ee'$. $det(E) = 1 > 0$, следователно $e \sim e$.
2) Симетрично свойство: ако $e \sim l$, то $l \sim e$.
Нека $l' = Te'$ e и l са еднакво ориентирани, следователно $det(T) > 0$. Следователно $e' = T^{-1}l' \Rightarrow det(T^{-1}) = \dfrac{1}{det(T)} > 0$, т.е $l \sim e$.
3) Транзитивно свойство: трябва да докажем, че ако $e \sim h$ и $h \sim l$, то $e \sim l$.
Нека $h' = Se'$ и $l' = Th'$. Оттук следва, че $det(S) > 0$ и $det(T) > 0$.
$l' = Th' = TSe'$, т.е. матрицата TS е матрица на прехода от към l. Освен това имаме,

че $det(TS) = det(T)det(S) > 0$. Следователно $e \sim l$.
С това доказахме,че релацията еднаква ориентираност на базиси е релация на еквивалентност.
Сега ще докажем втората част на твърдението.
Нека e е базис. По дефиниция $l : l \sim e$ е клас на еквивалентност. Трябва да докажем, че и $l : l \nsim e$ е клас на еквивалентност.
Достатъчно е да докажем от $e \nsim h$ и $l \nsim h$ следва $e \sim l$.
Нека $h' = Se'$ и $l' = Th'$. Ясно е, че $det(S) < 0$ и $det(T) < 0$. $l' = Th' = TSe'$, $det(TS) = det(T)det(S) > 0$. Следователно $e \sim l$.
С това и втората част на твърдението е доказана.

Примери: Нека $e(e_1, e_2, ..., e_n)$ и $e(-e_1, e_2, ..., e_n)$ са базиси. Тогава те са противоположно ориентирани базиси.
$e(e_1, e_2, ..., e_n)$ и $e(e_2, e_1, ..., e_n)$ също са противоположно ориентирани.
$e(e_1, e_2, e_3)$ и $e(e_2, e_3, e_1)$ са еднакво ориентирани базиси.

Дефиниция.3: Ориентация в пространството V_n е клас на еквивалентност относно релацията еднаква ориентираност на базиси. Казваме, че V_n е ориентирано, ако е избрана едната от двете ориентации. Избраната ориентация я наричаме положителна, а другата отрицателна. Съответно избора се прави спрямо произволен базис .

Дефиниция.4: Афинна координатна система $K = Oe_1e_2...e_n$ в ориентираното пространство се начича положително ориентирана, ако базиса $e_1e_2...e_n$ задава положителната ориентация.