4. Условия за колинеарност и компланарност на вектори

Дефиниция.1: Казваме, че векторът $\mathbf{a}$ е колинеарен на правата l, ако $\mathbf{a}$ има представител $\overrightarrow{AB}$, който лежи на l.
Друга еквивалентна дефиниция е: всеки представител на $\mathbf{a}$ да е успореден на l (пишем $\mathbf{a}\|l$).

Дефиниция.2: Казваме, че векторите $a_1, a_2, ..., a_n$ са колинеарни ако съществува права l, която е колинеарна с всеки един от тях (пишем $a_1\|a_2\|...\|a_n$).

Дефиниция.3: Казваме, че векторът $\mathbf{a}$ е компланарен с равнината π, ако $\mathbf{a}$ има представител $\overrightarrow{AB}$, който лежи в π.
Еквивалентна дефиниция е: всеки представител на $\mathbf{a}$ да е успореден на π (пишем $\mathbf{a}\|\pi$).

Дефиниция.4: Казваме, че векторите $a_1, a_2, ..., a_n$ са компланарни, ако съществува равнина, която е компланарна с всеки един от тях.

Дефиниция.5: Ъгъл между два ненулеви вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ е ъгълът между произволни техни представители с общо начало.
Ще покажем, че дефиницията е коректна. Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C'D'} = \mathbf{b}$. Тогава $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{CD} \upuparrows \overrightarrow{C'D'}$. Следователно $\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \angle(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'})$.

Теорема. 1: Нека $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ са вектори и $\mathbf{a}\neq 0$. Тогава $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ са колинеарни, тогава и само тогава, когато съществува единствено число $\lambda \in \mathbb{R}$, такова че $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$.
Доказателство:
$\Leftarrow$) Нека $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$. От дефинницията за умножение на вектор с число следва $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$.
Също така имаме $|\mathbf{b}| = |\lambda||\mathbf{a}| \Rightarrow |\lambda| = \dfrac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$.
Ако $\mathbf{b}=0$, то $\lambda = 0$. Ако $\mathbf{b} \neq 0$ и $\mathbf{b}\upuparrows\mathbf{a}$, то $\lambda > 0$. Ако $\mathbf{b} \neq 0$ и $\mathbf{b}\uparrow\downarrow\mathbf{a}$, то $\lambda < 0$. Следователно λ е единствено.
$\Rightarrow$) Нека $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$.

Нека

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{ако } \mathbf{b} = 0. \\ \dfrac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}, & \text{ако } \mathbf{b} \neq 0 \text{ и } \mathbf{b} \upuparrows \mathbf{a}. \\ -\dfrac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}, & \text{ако } \mathbf{b} \neq 0 \text{ и } \mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}. \end{cases} \tag{1}$$

Тогава, ако $\mathbf{b}$=0, то $\lambda = 0$ и $\mathbf{b}$=$\lambda\mathbf{a}$.
Ако $\mathbf{b} \neq 0$, то $|\mathbf{b}| = |\lambda||\mathbf{a}|$ и при $\lambda > 0 \Rightarrow \mathbf{b} \upuparrows \mathbf{a}$, при $\lambda < 0 \Rightarrow \mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$.
Следнте твърдения следват от горната теорема:
Следствие.1: Два вектора са линейно зависими, точно когато са колинеарни.
Следствие.2: Векторите, колинеарни с дадена права, образуват едномерно реално линейно пространство.

Теорема.2: Нека **a, b, c** са вектори, като **a** и **b** са неколинеарни.Тогава **a, b, c** са компланарни, тогава и само тогава, когато съществуват единствени числа λ и $\mu \in \mathbb{R}$, такива че $\mathbf{c}$=$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$.
$\Leftarrow$) Нека $\mathbf{c}$=$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$. Нека $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$.
От следствие.1 следва,че **a** и **b** са линейно независими. Ако един вектор е представен като линейна комбинация на линейно независими вектори, то коефициентите са еднозначно определени. **c** е изразен чрез линейна комбинация на векторите **a** и **b**, следователно λ и μ са единствени.
$\Rightarrow$) Нека **a,b,c** са компланарни.
Нека т.O е произволна точка, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Оттук следва ,че O, A, B, C лежат в една равнина.
Нека A' е пресечната точка на правата минаваща през т.C, успоредна е на OB и пресича правата OA, а B' е пресечната точка на правата минаваща през C, успоредна е на OA и пресича правата OB.
a'=$\overrightarrow{OA'}$ е колинеарен с **a**=**OA** и от Теорема.1 следва, че съществува $\lambda \in \mathbb{R}$, такова че **a'**=λ**a**. **b'**=$\overrightarrow{OB'}$ е колинеарен с **b**=**OB** и от Теорема.1 следва, че съществува $\mu \in \mathbb{R}$, такова че **b'**=μ**b**.
Оттук следва **c** = **a'**+**b'** = $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$.
Следствие.3: Три вектора в пространството са компланарни, тогава и само тогава, когато са линейно зависими.
Следствие.4: Векторите, компланарни с дадена равнина, образуват двумерно реално линейно пространство.

Теорема.3: Нека **a,b,c** са некомпланарни вектори. Тогава за всеки вектор **d** съществуват единствени числа $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$, такива че **d**=$\lambda$**a**+$\mu$**b**+$\nu$**c**.
Доказателство:
Нека т.O е произволна точка, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$.
Нека т.E е пресечната точка на правата l с равнината OAB, минаваща през т.D и е успоредна на OC.
Нека d_1=$\overrightarrow{OE}$ и d_2=$\overrightarrow{ED}$. d_1 е компланарен с **a** и]**b**. По Теорема.2 следва, че съществуват

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, такива че $d_1 {=} \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$.
d_2 е колинеарен с $\mathbf{c}$. По Теорема.1 следва че съществува $\nu \in \mathbb{R}$, такова че $d_2 {=} \nu \mathbf{c}$.
Следователно $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OD} = \mathbf{d} {=} d_1 + d_2 = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}$.
От следствие.3 следва, че **a,b,c,** са линейно независими. **b** е тяхна линейна комбинация, следователно, λ, μ, ν са единствени.
Следствие.5: Всеки четири вектора в пространтсвото са линейно зависими.
Следствие.6: Векторите в пространството образуват тримерно реално линейно пространство.