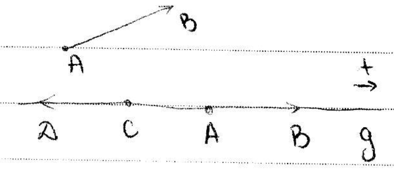
Лекции - АГ - Чавдар Лозанов

05.10.2005г.

Геометричен вектор

Насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$



дължина $|\overrightarrow{AB}|$

посока + → от първия към втория край

$\overset{+}{\rightarrow}$ ос

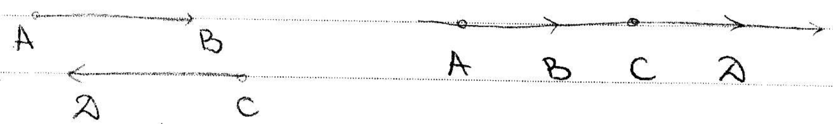
алгебрична мярка $\overline{AB} = \varepsilon|\overrightarrow{AB}|$

$\varepsilon|\overrightarrow{AB}| = -\varepsilon|\overrightarrow{BA}|$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$, $\overline{AB} = -BA$

$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

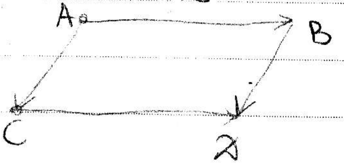
нулева насочена отсечка $\overrightarrow{AA}$ → няма посока

колинеарни вектори - $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ => или са $\parallel$ или $\equiv$



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ и еднопосочни

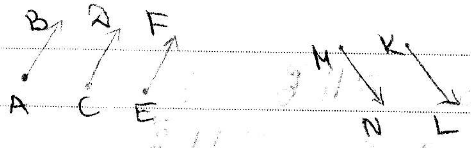
Ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$



1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow A\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$



клас на еквивалентност - равни групи множества, които не се пресичат

геометричен вектор - класа на еквивалентност на дадена насочена отсечка

$\vec{a} = \{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \dots\}$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ - представител на $\vec{a}$

$\vec{a}$, т.О $\Rightarrow \exists!$ т.А т $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$\vec{0} = \{\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} \dots\}$ нулев вектор

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $-\vec{a} = \overrightarrow{BA}$; $\vec{a}, -\vec{a}$ - противоположни

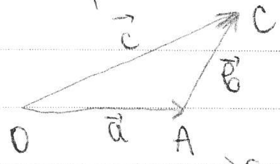
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни $\Leftrightarrow$ 2 техни представителя са колинеарни $\vec{a} \parallel \vec{b}$

$\vec a, \vec b, \vec c$ - компланарни (равнинни) $\Leftrightarrow$ имат представители, които лежат в една равнина

Афинни операции с геометрични вектори

→ сбор : $\vec c = \vec a + \vec b$

т. O - произволна , $\vec a = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC} = \vec b \Rightarrow \vec c = \overrightarrow{OC}$



т. O_1 , $\overrightarrow{O_1A_1} = \vec a$, $\overrightarrow{A_1C_1} = \vec b$; ? $\overrightarrow{O_1C_1} = \vec c$

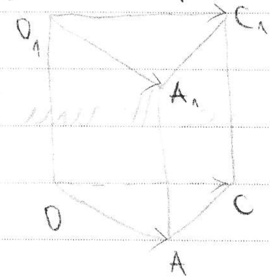
$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O_1A_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AA_1}$ (1)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ $\Rightarrow \overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$ (2)

$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O_1C_1} \Rightarrow$ изп. е!



Свойства: 1) $(\vec a + \vec b) + \vec c = \vec a + (\vec b + \vec c) = \vec a + \vec b + \vec c$!

2) $\vec a + \vec b = \vec b + \vec a$

3) $\vec a + \vec 0 = \vec a$

4) $\vec a + (-\vec a) = \vec 0$

→ Умножение на вектор с число

$\vec a$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda.\vec a = \vec b$, т $|\vec b| = |\lambda|.|\vec a|$

Ако $\lambda \neq 0$ и $\vec a \neq \vec 0$, то $\vec a \parallel \vec b$:

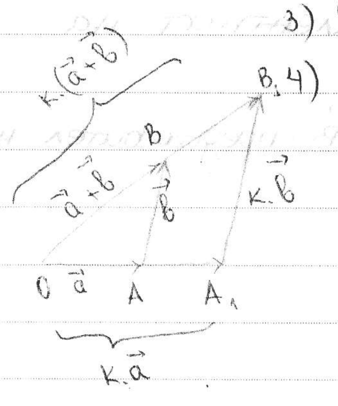
при $\lambda > 0$ $\vec a \uparrow\uparrow \vec b$; при $\lambda < 0$ $\vec a \uparrow\downarrow \vec b$

Свойства : 1) $1.\vec a = \vec a$

2) $(k+l).\vec a = k.\vec a + l.\vec a$

3) $(kl)\vec a = k.(l.\vec a)$

4) $k.(\vec a + \vec b) = k.\vec a + k.\vec b$



Т.Талес

Векторно (линейно) пространство

$\mathcal{V} = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \dots\}$ множество от вектори

$\vec{a} \in \mathcal{V}$, $\vec{a}$ - вектор ; $\mathbb{R} = \{\lambda, \mu, \dots\}$

На $\forall$ два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b} \in \mathcal{V}$ съпоставяме $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{c} \in \mathcal{V}$

За $\forall \vec{a}$ и $\forall \lambda \in \mathbb{R} \longmapsto \vec{b} = \lambda.\vec{a} \in \mathcal{V}$, п

Свойства: 2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; 1) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3) $\exists\ \vec{0} \in \mathcal{V}$: за $\forall \vec{a}$ $\quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) за $\forall \vec{a} \in \mathcal{V}\ \exists -\vec{a} \in \mathcal{V}$: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

5) $1.\vec{a} = \vec{a}$ за $\forall \vec{a} \in \mathcal{V}$

6) $(k.l)\vec{a} = k.(l.\vec{a})$

7) $(k + l)\vec{a} = k.\vec{a} + l.\vec{a}$

8) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k.\vec{a} + k.\vec{b}$

$\Rightarrow \mathcal{V}$ е векторно (линейно) пространство

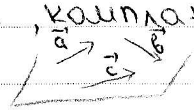
Примери за векторни пространства

1) $\mathcal{V}_1$ - совкупността от $\forall$ геометрични вектори, които са колинеарни с дадена права l

$\mathcal{V}_1 = \{\forall \text{геом. } \vec{a} \parallel l\}$ операциите са изпълними

2) $\mathcal{V}_2$ - $\forall$ геометрични вектори, компланарни с дадена р-на

$\mathcal{V}_2 = \{\forall \text{геом. } \vec{a} \parallel \alpha\}$



3) $\mathcal{V}_3$ - совкупността от $\forall$ геом. вектори

$\mathcal{V}_3 = \{\forall \text{ геом. вектори}\}$

4) $\mathcal{V}_4 = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R} = \{\lambda, \mu, \dots\}$

$\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{V}$

$\vec{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$\lambda.\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

$\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$

$-\vec{a} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

Линейна зависимост и независимост на вектори

$\mathcal{V} \rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$

$\mathbb{R} \to \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$\Rightarrow \vec{b} = \lambda_1.\vec{a}_1 + \lambda_2.\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n.\vec{a}_n \in \mathcal{V}$

$\vec{b}$ - линейна комбинация на $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ с coef $\lambda_1, \dots \lambda_n$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow$ комбин. е тривиална

Ако $\exists$ поне 1 $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow$ комбин. е нетривиална

ЛЗ: Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n$ се наричат линейно зависими, ако поне една тяхна линейна комбинация (нетривиална!) $= \vec{0}$!!!

$$\lambda_1.\vec{a}_1 + \lambda_2.\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n.\vec{a}_n = \vec{0} \qquad \lambda_i \neq 0$$

ЛНЗ: Векторите $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ се наричат линейно независими, ако ! тяхна линейна комбинация $= \vec{0}$ е тривиалната.

$$\lambda_1.\vec{a}_1 + \lambda_2.\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n.\vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

Паралелна дефиниция:

ЛЗ: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ са ЛЗ $\Leftrightarrow$ един от тях е линейна комбин. на останалите

$$\vec{a}_i = \mu_1.\vec{a}_1 + \dots + \mu_n.\vec{a}_n$$

$\lambda_i \neq 0 \Rightarrow \quad / : \lambda_i \quad \Rightarrow \qquad \mu_k = -\dfrac{\lambda_k}{\lambda_i}$

$$\lambda_1.\vec{a}_1 + \dots + \lambda_i\vec{a}_i + \dots + \vec{a}_n.\lambda_n = 0$$

$$\vec{a}_i = \mu_1.\vec{a}_1 + \dots + \mu_n.\vec{a}_n$$

$$\vec{a}_i = \mu_1.\vec{a}_1 + \dots + \mu_n.\vec{a}_n$$

$\Rightarrow \mu_1\vec{a}_1 + \dots + (-1).\vec{a}_i + \dots + \mu_n.\vec{a}_n = 0 \quad , -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ ЛЗ са вект. $\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n$

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots \vec{a}_n$ са ЛНЗ $\Leftrightarrow$

$\lambda_1.\vec{a}_1 + \lambda_2.\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n.\vec{a}_n = \mu_1.\vec{a}_1 + \dots + \mu_n.\vec{a}_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \mu_1, \; \lambda_2 = \mu_2, \dots, \lambda_n = \mu_n$

12.10.2005г.

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ са ЛНЗ:

$\vec{p} = \lambda_1.\vec{a}_1 + \dots + \lambda_n.\vec{a}_n$ и $\vec{q} = \mu_1\vec{a}_1 + \dots + \mu_n.\vec{a}_n$, ако

от $\vec{p} = \vec{q} \Rightarrow \lambda_i = \mu_i$

Линейна зависимост и независимост на геом. вектори

1) ЛЗ е $\vec{0}$: $1.\vec{0} = \vec{0}$

2) Два вектора са ЛЗ $\Leftrightarrow$ са колинеарни

$$\lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b} = \vec{0} \quad / : \lambda \neq 0$$

$$\vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda}.\vec{b} \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Ако $\vec{a} \parallel \vec{b}$, $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

$\Rightarrow |\vec{a}| = |\lambda| . |\vec{b}| \Rightarrow |\lambda| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$

$\lambda > 0 \Rightarrow \vec{a} = \lambda . \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$\lambda < 0 \Rightarrow \vec{a} = -\lambda . \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

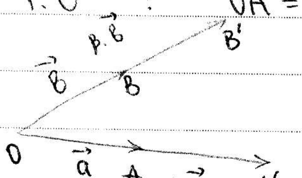
$\Rightarrow \vec{a} + \lambda . \vec{b} = 0$

3) Три геометрични вектора са ЛЗ $\Leftrightarrow$ са компланарни т.е. лежат в 1 р-на

Нека $\lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b} + \nu . \vec{c} = \vec{0}$, $\nu \neq 0$

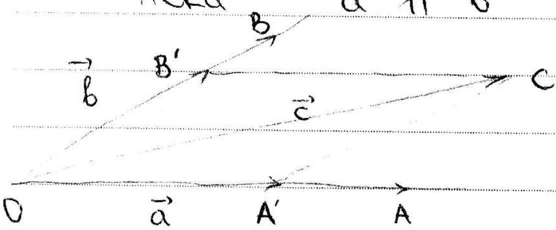
$\Rightarrow \vec{c} = \alpha . \vec{a} + \beta . \vec{b}$, където $\alpha = -\frac{\lambda}{\nu}$, $\beta = -\frac{\mu}{\nu}$

т. O : $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$



Нека $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ са компланарни

Нека $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$



т. O : $\vec{OA} = \vec{a}$

$\vec{OB} = \vec{b}$

$\vec{OC} = \vec{c}$

$CA' \parallel OB$ $\quad$ $CB' \parallel OA$

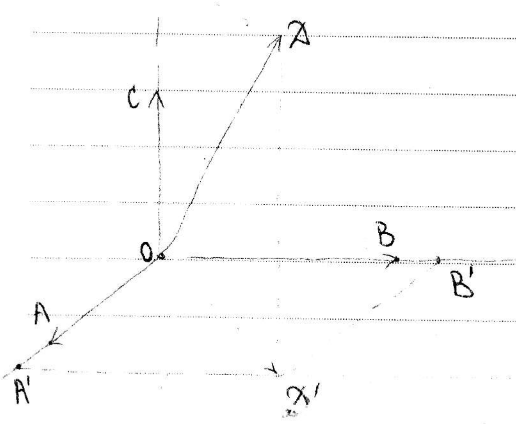
$\vec{OC} = \vec{OA'} + \vec{A'C}$

$\vec{OA'} = \lambda . \vec{a}$, $\vec{OB'} = \mu . \vec{OB} = \mu . \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{c} = \lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b}$

4) Четири вектора винаги са ЛЗ

с: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ - никои три не лежат в 1 р-на



$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$

$\vec{OC} = \vec{c}$, $\vec{OD} = \vec{d}$

Нека $DD' \parallel OC$, $D' \in (OAB)$

Постр. през $D' \parallel BO$:

$D'A' \parallel OB$ и $D'B' \parallel OA$

и $DC' \parallel OD'$

$\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$

$\overrightarrow{OA'} = \lambda.\vec{a}$, $\overrightarrow{OB'} = \mu.\vec{b}$

$\overrightarrow{OD'} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OC'}$

$\overrightarrow{OC'} = \nu.\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b} + \nu.\vec{c}$

$\Rightarrow \vec{d} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{b} + \nu.\vec{c}$

Афинни координати

$\mathcal{V}$ - векторно пространство

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ - ЛНЗ , такива че $\forall$ вектор на $\mathcal{V}$ се представя като линейна комбинация на тези вектори

$\vec{a} = \lambda_1.\vec{e}_1 + \lambda_2.\vec{e}_2 + \dots + \lambda_n.\vec{e}_n$

Такава n-торка вектори се нарича **база** на $\mathcal{V}$

$K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ - база на $\mathcal{V}$

$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ - тази n-торка е ! и се нарича афинни координати на $\vec{a}$ спрямо K

$\vec{a} \leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ - взаимно съответствие

Нека $\vec{a}$ е линейна комбинация т.е

$\vec{a} = k_1.\vec{b}_1 + k_2.\vec{b}_2 + \dots + k_s.\vec{b}_s$

$\vec{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ координ. с/о K

$\vec{b}_i(b_1^i, b_2^i, \dots, b_n^i)$ $i = \overline{1,s}$

Първата коорд. a_1 е линейна комб. на $k_1, k_2, \dots k_s$ на $b^1_{1\dots n}$: $a_1 = k_1.b_1^1 + k_2.b_2^1 + \dots + k_s.b_s^1$

...

$a_n = k_1.b_1^n + k_2.b_2^n + \dots + k_s b_s^n$

Използваме $\vec{p} = \vec{q} \Leftrightarrow \lambda_i = \mu_i$

За да съставим база използваме ЛНЗ $\vec{a}$

Афинни координати на $\mathcal{V}_1$

$\mathcal{V}_1 \rightarrow K^1 = \{\vec{e}\}$, $\vec{e} \neq \vec{0}$

за $\forall \vec{a}$ от V_1 : $\vec{a} = a_1 . \vec{e}$

$\Rightarrow \quad \vec{a}(a_1)$

$V_2 \to K^2 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $\vec{e}_1 \nparallel \vec{e}_2$

$\Rightarrow$ за $\forall \vec{a}$ от $V_2 \Rightarrow \vec{a} = a_1 . \vec{e}_1 + a_2 . \vec{e}_2$

$\Rightarrow \quad \vec{a}(a_1, a_2)$

$V_3 \to K^3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - некомпланарни

$\Rightarrow \vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 . \vec{e}_2 + a_3 . \vec{e}_3$

$\Rightarrow \quad \vec{a}(a_1, a_2, a_3)$

Координатни условия за колинеарност и компланарност на геометрични вектори

$V_2 : K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$, $\vec{0}(0,0)$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b} = \vec{0}$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

$$\lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b} = \vec{0} \iff \left| \begin{array}{l} \lambda . a_1 + \mu b_1 = 0 \\ \lambda . a_2 + \mu . b_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\exists (\lambda, \mu) \neq (0,0) \iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

т.е. $a_1 . b_2 - a_2 . b_1 = 0 \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

$V_3 : K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарни $\iff$ ЛЗ

$\lambda \vec{a} + \mu . \vec{b} + \nu \vec{c} = \vec{0}$

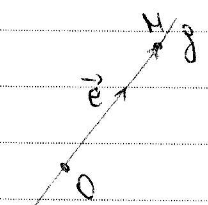
$(\lambda, \mu, \nu) \neq (0,0,0)$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda . a_1 + \mu . b_1 + \nu . c_1 = 0 \\ \lambda . a_2 + \mu . b_2 + \nu . c_2 = 0 \\ \lambda . a_3 + \mu . b_3 + \nu . c_3 = 0 \end{array} \right. \iff \lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b} + \nu . \vec{c} = \vec{0}$$

Щом $\exists (\lambda, \mu, \nu) \neq (0,0,0) \iff$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b} + \nu . \vec{c} = \vec{0}$$

Афинни координатни системи
(за геометричните вектори)



1) 1. g-права

2. т. $O \in g \Rightarrow \mathcal{V}_1$

$\mathcal{V}_1 : K = \{\vec{e}\}$

$K = \{O, \vec{e}\}$ - афинна координатна система в/у пр. g

Нека т. $M \in g$: $\vec{OM} = x.\vec{e} \Rightarrow \vec{OM}(x)$

$\Rightarrow$ т. M ще има координата x с/о $K = \{O, \vec{e}\}$

$\vec{OM}$ - радиус вектор на т. M

$M \leftrightarrow (x)$ - единствено съпоставяне

2) р-на $\alpha \to$ т. $O \in \alpha \leftrightarrow \mathcal{V}_2 \to K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ - афинна координатна система в α

т. $M \in \alpha$, $\vec{OM}$ - радиус вектор на т. M

$\vec{OM} = x.\vec{e}_1 + y.\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{OM}(x, y)$

т. $M(x_M, y_M)$ - координати на т. M с/о $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$M(x, y)$: $M \leftrightarrow (x, y)$

3) т. O, $\mathcal{V}_3 \to K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$\Rightarrow K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - афинна координатна с-ма в пространството

т. $M \to \vec{OM}(x, y, z)$

т. $M(x, y, z)$ - афинни координати с/о $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$M \leftrightarrow (x, y, z)$

Афинно пространство

$\mathcal{A}$ - множество, елементите на което са нар. точки

$\mathcal{A} = \{A, B, \dots\}$, $A, B, \dots$ - точки

1) $\mathcal{V}$ - асоциирано (съответно) векторно пространство

2) Съответствие φ, при което за $\forall$ две точки A и $B \in \mathcal{A}$ съпоставяме чрез φ $\vec{AB} \in$ векторното пространство

$\forall A, B \in \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \vec{AB} \in \mathcal{V}$

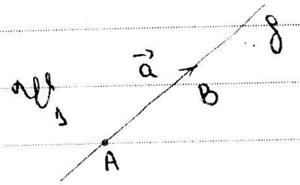
1.1. за $\forall A \in \mathcal{A}$ и за $\forall \vec{a}$, $\vec{a} \in \mathcal{V}$ $\exists!\, B$,

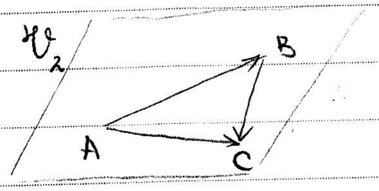
$B \in \mathcal{A}: \quad \vec{AB} = \vec{a}$

1.2. $\forall A, B, C \in \mathcal{A}: \quad \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

Множеството $\mathcal{A}$ и $\mathcal{V}$ се наричат афинно пространство

19.10.2005 г.





Афинно пространство

$\mathcal{A}, \mathcal{V}$

Права : $g = \{A, \vec{a} \neq \vec{0}\}$

$g = \{M : \vec{AM} = \lambda . \vec{a}\}$

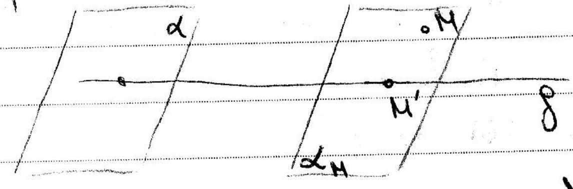
Равнина : $\alpha = \{O, \vec{a}, \vec{b} - \text{ЛНЗ}\}$ → двумерна р-на

$\alpha = \{M : \vec{OM} = \lambda . \vec{a} + \mu . \vec{b}\}$

Проекция на геометричен вектор върху ос

g - права, α - равнина, $\alpha \cap g \neq \emptyset$

$\exists! \, \alpha_M : \begin{cases} \ni M \\ \parallel \alpha \end{cases}$



$\alpha_M \cap g = M'$

⇒ M' - проекцията на т. M върху g, $\in \alpha_M \parallel \alpha$

$M' = \text{пр.}_g M \ (\parallel \alpha)$ $\quad \parallel$-но проектиране

$\vec{AB}$ - насочена отсечка

$\left. \begin{array}{l} A' = \text{пр.}_g A \ (\parallel \alpha) \\ B' = \text{пр.}_g B \ (\parallel \alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{A'B'} = \text{пр.}_g \vec{AB} \ (\parallel \alpha)$

Свойства:

1) $\vec{AB} = \vec{CD}$, то $\text{пр.}_g \vec{AB} \ (\parallel \alpha) = \text{пр.}_g \vec{CD} \ (\parallel \alpha)$

$\vec{a}' = \vec{A'B'} \iff \vec{a} = \vec{AB}$

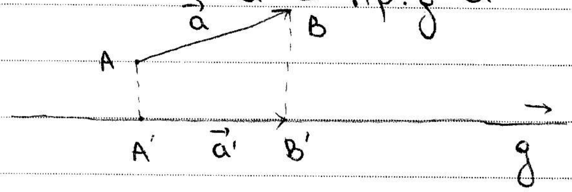
$\Rightarrow \vec{a}' = \text{пр.}_g \vec{a} \ (\parallel \alpha)$

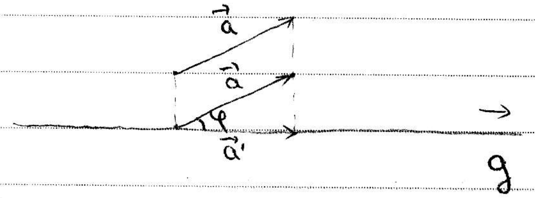
2) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \Rightarrow \text{пр.}_g \vec{c} \ (\parallel \alpha) = \text{пр.}_g \vec{a} \ (\parallel \alpha) + \text{пр.}_g \vec{b} \ (\parallel \alpha)$

3) $\vec{b} = \lambda.\vec{a} \Rightarrow \text{пр.}_{g}\, \lambda.\vec{a}\,(\parallel \alpha) = \lambda.\,\text{пр.}_{g}\,\vec{a}\,(\parallel \alpha) =$
$= \text{пр.}_{g}\,\vec{b}\,(\parallel \alpha)$

Ако $g \perp \alpha \rightarrow$ ортогонално проектиране

$\vec{a'} = \text{пр.}_{g}\,\vec{a}$





$\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{g})$

Алгебричната проекция на $\vec{a}$ е алгебричната мярка на $\vec{a'}$: $\overline{\text{пр.}_{\vec{g}}\vec{a}} = \overline{\text{пр.}_{g}\vec{a}} = |\vec{a}|.\cos\varphi$

Скаларно произведение на геометр. вектори

$\vec{a}, \vec{b}$ - геометр. вектори

Скаларно произведение:

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$, при $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$

$\vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$, 0 - число

Паралелна дефиниция: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|.\,\overline{\text{пр.}_{\vec{b}}\,\vec{a}}$

$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|.\,\overline{\text{пр.}_{\vec{a}}\,\vec{b}}$

Свойства:

1) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$
2) $k.(\vec{a}\vec{b}) = (k.\vec{a}).\vec{b} = (k.\vec{b}).\vec{a} = \vec{a}.(k.\vec{b})$
3) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
4) $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|.\,\overline{\text{пр.}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c})} = |\vec{a}|.(\overline{\text{пр.}_{\vec{a}}\vec{b}} + \overline{\text{пр.}_{\vec{a}}\vec{c}}) =$
$= |\vec{a}|.\,\overline{\text{пр.}_{\vec{a}}\vec{b}} + |\vec{a}|.\,\overline{\text{пр.}_{\vec{a}}\vec{c}} = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

Ако $\vec{a}\neq\vec{o}$, $\vec{b}\neq\vec{o}$, то $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}=0$

$\mathcal{V}$ - произволно векторно пространство

Скаларно произведение: функция, която на $\forall$ 2 вектора от $\mathcal{V}$ съпоставя едно число $\vec{a}\vec{b}$, за което са изпълнени:

1) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$
2) $k.(\vec{a}\vec{b}) = (k\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}(k\vec{b})$
3) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$
4) $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 > 0$, при $\vec{a}\neq\vec{o}$

Векторно пространство с дефинирано скаларно произведение се нарича **Евклидово пространство**.

$\Rightarrow$ $\mathcal{V}$ - Евклидово пространство

Евклидово точково пространство - афинно пространство, на което асоциираното векторно пространство е Евклидово

За произволно Евклидово пространство $\Rightarrow$

Дължина на вектор $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

Ъгъл между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$: $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$

$\vec{a}\neq\vec{o}$ и $\vec{b}\neq\vec{o}$ ортогоналност : $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$

Разстояние между A и B

$|AB| = \sqrt{\vec{AB}^2}$

? $-1 \leq \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \leq 1 \Leftrightarrow |\vec{a}\vec{b}| \leq |\vec{a}|.|\vec{b}|$

$$f(t) = \underbrace{(\vec{a}+t.\vec{b})^2}_{\geq 0} \underset{\text{по 1) и 2)}}{=} |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\vec{b}t + |\vec{b}|^2.t^2 \geq 0$$

$\Rightarrow D \leq 0$

$D = (\vec{a}\vec{b})^2 - |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2 \leq 0$

$\Rightarrow |\vec{a}\vec{b}| \leq |\vec{a}|.|\vec{b}|$

$\mathcal{V}$ - Евклидово пространство $\mathcal{K} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ЛНЗ

$\mathcal{K}$ - ОКС, ако $|\vec{e}_i| = 1$, $i = \overline{1,n}$ и $\vec{e}_i.\vec{e}_j = 0$, $i\neq j$, $i,j = \overline{1,n}$ $(\vec{e}_i^{\,2} = 1)$

$\mathcal{K} = \{O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ е ОКС, ако базата е ортонормирана.

$K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - афинна база

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$

$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3$

$\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$

$\Rightarrow \ldots$

Ако K - ортонормирана $\Rightarrow \vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = \vec{e}_3^{\,2} = 1$

и $\vec{e}_1\vec{e}_2 = \vec{e}_2\vec{e}_3 = \vec{e}_3\vec{e}_1 = 0$

$\Rightarrow \vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$

$$\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad / \cdot \vec{e}_1$

$\vec{a}\cdot\vec{e}_1 = a_1$, $\vec{a}\vec{e}_2 = a_2$, $\vec{a}\vec{e}_3 = a_3$

Единичен вектор - вектор $|\vec{a}| = 1$

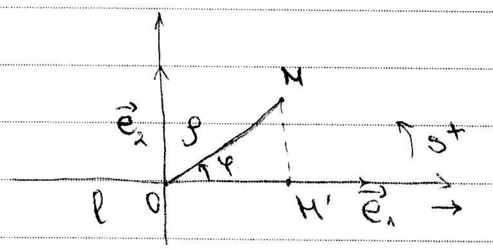
$|\vec{a}| = 1 \Rightarrow \vec{a}(\cos\varphi_1, \cos\varphi_2, \cos\varphi_3)$ → директорни косинуси на посока

$\varphi_i = \measuredangle(\vec{a}, \vec{e}_i)$

$|\vec{a}| = 1 \Rightarrow \cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$

07.12.2005 г.

Полярна координатна система



$\{O, l^{\to}, s^+\}$

$|OM| = \rho$

$\measuredangle(l^{\to}, \vec{OM}) = \varphi$

$M \leftrightarrow (\rho, \varphi)$ - полярни коорд.

т. O - полюс на полярната коорд. с-ма

$\mathcal{K} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ - ОКС $\qquad \vec{e}_1 \parallel \vec{\ell}$

$M^{\mathcal{K}}(x,y) \quad ; \quad \overline{OM'} = x = \rho.\cos\varphi \quad ; \quad y = \rho.\sin\varphi$

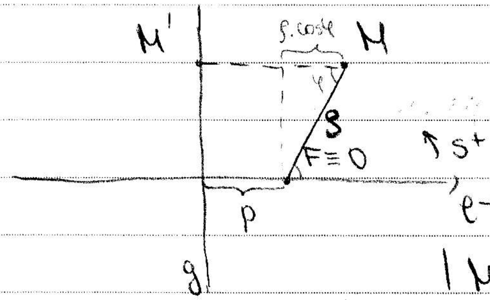
$$\begin{cases} x = \rho.\cos\varphi \\ y = \rho.\sin\varphi \end{cases} \qquad (\rho,\varphi) \leftrightarrow (x,y)$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arccotg}\frac{x}{y} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$K^{\mathcal{K}}(O;R)$

$K : \rho = R \qquad K : \begin{cases} x = R.\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$



$\dfrac{|MF|}{|M,g|} = e \quad ; \quad |F,g| = p \to \text{const}$

$\{F, \vec{\ell}, s^+\}$

$|MF| = \rho$

$|M,g| = p + \rho.\cos\varphi$

$\dfrac{\rho}{p+\rho.\cos\varphi} = e = \dfrac{|MF|}{|M,g|}$

$\rho = p.e + \rho.e.\cos\varphi$

$\rho = \dfrac{p.e}{1-e\cos\varphi}$ → у-е на конично сечение

При $e=1$ $\qquad \rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$ → у-е на парабола

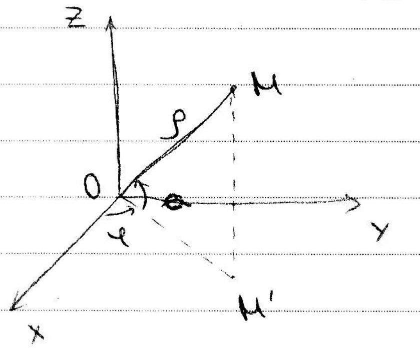
При $e<1$ $\qquad \dots$ → у-е на елипса

При $e>1$ $\Rightarrow \cos\varphi < \dfrac{1}{e}$

$\rho > 0 \quad , \quad p.e > 0 \quad , \quad e > 0$

Ако $\cos\varphi > \dfrac{1}{e}$: $\rho = \dfrac{p.e}{e\cos\varphi - 1}$ → у-е на хипербола

Сферични координати



$M \leftrightarrow (\rho, \varphi, \theta)$

Аналитично задаване на линия в равнината

$ax + by + c = 0$

$\mathcal{K} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ – АКС

$f(x,y) = 0$

$c\mathcal{K} : \{M(x,y) : f(x,y) = 0\}$

Дефиниция: Множеството от всички точки в равнината : $f(x,y) = 0$ се нарича **равнинна линия**.

$c : f(x,y) = 0$

$f(x,y) = ax + by + c$ – права

$f(x,y) = y^2 - 2px^2$ – парабола

$$l : \begin{cases} x = x_0 + a\lambda = \varphi_1(\lambda) \\ y = y_0 + b.\lambda = \varphi_2(\lambda) \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ – права}$$

$$c : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

$x, y, \dots, t$ – променливи

$a x^{\alpha} y^{\beta} \dots t^{\gamma}$ – едночлен

$\alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbb{N}$

$\alpha + \beta + \dots + \gamma = n$ – степен на едночлена

Сбор от краен брой едночлени е полином.

Степен на полинома е най-високата степен на едночлените.

$c : f(x,y) = 0$

Ако f е полином от степен n, то c е алгебрична крива от степен n.

Понеже смяната на КС е линейна (задава се с линейни ф-ии : $K \to K'$), $c : f(x,y) = 0$ от степен $n \to$ $c' : g(x,y) = 0$ е също полином от степен n.

$f(x,y) = x^2 + y^2$

$c : f(x,y) = 0 \iff c : x^2 + y^2 = 0$

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$

$\hookrightarrow$ празно множество (в $\mathbb{R}$)

Повърхнини и линии в пространството:

$\mathcal{K} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – АКС

$$f(x,y,z) = 0$$

$F: \{M(x,y,z) : f(x,y,z) = 0\}$ → повърхнина с у-е $F: f(x,y,z) = 0$

$$f(x,y,z) = Ax + By + Cz + D = 0$$

Ако $f(x,y,z)$ е полином, то F е алгебрична повърхнина от степен n.

$$F: \begin{cases} x = \varphi_1(u,v) \\ y = \varphi_2(u,v) \\ z = \varphi_3(u,v) \end{cases}$$

$$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + a_1 u + b_1 v \\ y = y_0 + a_2 u + b_2 v \\ z = z_0 + a_3 u + b_3 v \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

Линия в пространството се задава като сечение на две повърхнини.

$$C: \begin{cases} \varphi(x,y,z) = 0 \\ \psi(x,y,z) = 0 \end{cases} \qquad C: \begin{cases} x = \psi_1(t) \\ y = \psi_2(t) \\ z = \psi_3(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$f = x^2 + y^2 + z^2 = 0$ → 1 точка

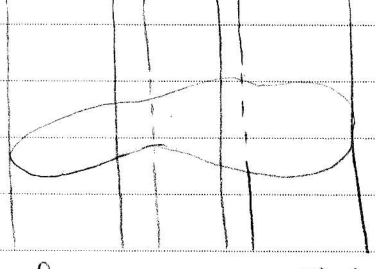
Цилиндрична повърхнина

c - крива в пространството

l_0 - фиксирана права

Ц - цилиндрична повърхнина: множеството от $\forall$ т. M в пространството, които лежат в/у l_0: $l \parallel l_0$, $l \cap c \neq \emptyset$

$$Ц = \{M \in l,\ l \parallel l_0,\ l \cap c \neq \emptyset\}$$



$\mathcal{K} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – АКС

$$c: \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$\vec{v} \parallel l \Rightarrow \vec{v}(a,b,c)$

$\vec{v} \nparallel xOy \Leftrightarrow c \neq 0$

$\vec{v}(a, b, 1)$

$$l: \begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \\ z = z_0 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\lambda = z - z_0$

$$l: \begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \quad (2) \qquad l \parallel l_0$$

Всяка такава права l се нарича образуваща на цилиндричната повърхнина. a, b - фиксирани
p, q - параметри

$$l \cap c \iff \begin{cases} f(az+p, bz+q, z) = 0 \\ g(az+p, bz+q, z) = 0 \end{cases}$$

Кривата C е управителна крива.
Ако можем да изключим z, ще получим връзка м/у p и q. $\varphi(p, q) = 0$
Когато тя е изпълнена $\forall$ зададени прави ще са образувателни.

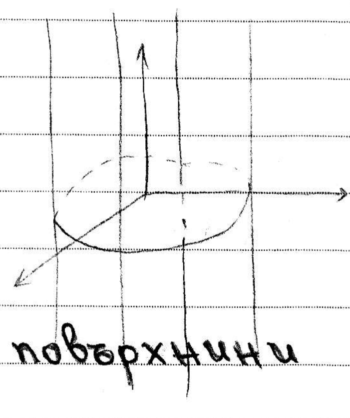
$$A \in \text{повърхнината} \Rightarrow \begin{cases} p = x - az \\ q = y - bz \end{cases}$$

$$\mathcal{Y}: \varphi(x - az, y - bz) = 0$$

$\forall$ т., чиито коорд. удовлетворяват $\mathcal{Y}$:... ще лежат в/у цилиндр. повърхност

$\varphi(x, y) = 0$ $\qquad C: \begin{cases} \varphi(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad \vec{v}(a, b, 1)$

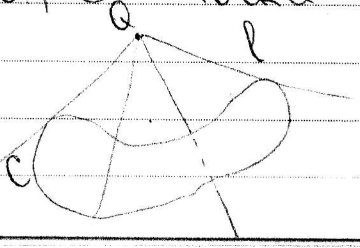
$x^2 + 4y^2 = 1$



елиптичен цилиндър

Конични повърхнини

Q, C - точка на крива



$K = \{M : M \in l \ni Q, \ l \cap c \neq \emptyset\}$

Q - връх

C - управителна крива

l - образуваща

$\mathcal{K} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$Q = (x_0, y_0, z_0)$

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + a\lambda \\ y = y_0 + b\lambda \\ z = z_0 + \lambda \end{cases} \qquad c : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda = z - z_0$

$$\ell : \begin{cases} x = az + x_0 - az_0 \\ y = bz + y_0 - bz_0 \end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 - фиксирани ; a, b - парам.

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + a(z - z_0) \\ y = y_0 + b(z - z_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x_0 + a(z-z_0), y_0 + b(z-z_0), z) = 0 \\ g(x_0 + a(z-z_0), y_0 + b(z-z_0), z) = 0 \end{cases}$$

Ако изключим z

$$\psi(a, b) = 0$$

$$a = \frac{x - x_0}{z - z_0} ; \quad b = \frac{y - y_0}{z - z_0}$$

$A \in K$, ако $\psi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0$

$K : \psi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}, \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0$ → у-е на конична повърхнина

$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ → у-е на конична повърхнина, минаваща през началото на КС

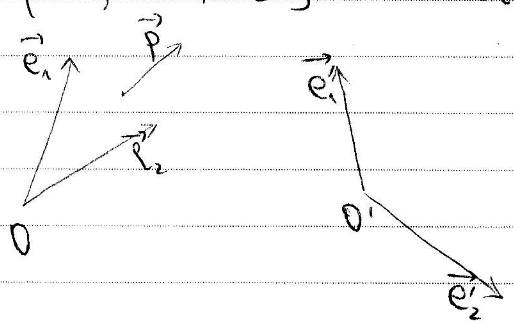
$x^2 + y^2 = z^2$ - прав кръгов конус, минаващ през началото на КС

26.10.2005г.

Смяна на координатната система в равнината

Имаме 2 фикс. коорд. с-ми

$\mathcal{K} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ $\quad$ $\mathcal{K}' = \{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$



$\vec{p}^{K}(p_1, p_2)$ $\quad$ $\vec{p}^{K'}(p_1', p_2')$

$\vec{e}_1' = \alpha_{11}.\vec{e}_1 + \alpha_{21}.\vec{e}_2$

$\vec{e}_2' = \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}.\vec{e}_2$

$\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ – ЛНЗ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ матрица на прехода от $\mathcal{K} \to \mathcal{K}'$

$$\vec{p} = p_1.\vec{e}_1 + p_2.\vec{e}_2 = p_1'.\vec{e}_1' + p_2'.\vec{e}_2' =$$

$$= p_1'.(\alpha_{11}.\vec{e}_1 + \alpha_{21}.\vec{e}_2) + p_2'.(\alpha_{12}.\vec{e}_1 + \alpha_{22}.\vec{e}_2) =$$

$$= (p_1'.\alpha_{11} + p_2'.\alpha_{12}).\vec{e}_1 + (p_1'.\alpha_{21} + p_2'.\alpha_{22}).\vec{e}_2$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} p_1 = \alpha_{11}.p_1' + \alpha_{12}.p_2' \\ p_2 = \alpha_{21}.p_1' + \alpha_{22}.p_2' \end{array} \right. \quad (1)$$

(1) ф-ли за смяна на коорд. на вектор в р-ната

Нека $M^{K}(x, y)$, $M^{K'}(x', y')$

$\vec{OM}^{K}(x, y)$ $\quad$ $\vec{OM}^{K'}(x', y')$

$O'^{K}(x_0, y_0)$

$\vec{O'M} = \vec{O'O} + \vec{OM} = \vec{OM} - \vec{OO'}$

$\vec{O'M}^{K}(x - x_0, y - y_0)$

$\vec{O'M}^{K'}(x', y')$

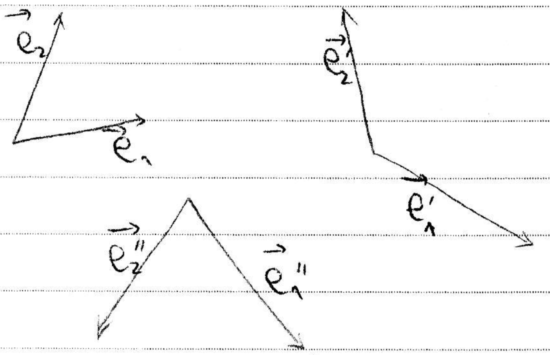
$\vec{OM}^{K'} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = \vec{O'M} - \vec{O'O}$

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha_{11}.\, x' + \alpha_{12}.\, y' \\ y - y_0 = \alpha_{21}.\, x' + \alpha_{22}\, y' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + \alpha_{11} x' + \alpha_{12} y' \\ y = y_0 + \alpha_{21} x' + \alpha_{22}.\, y' \end{cases}$$

ф-ли за смяна на коорд. на точка

Ориентация в равнината



$\mathcal{K} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$\mathcal{K}' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$

$C = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$

$\det C \neq 0$

О: (Ако) K, K' са еднакво ориентирани $\Leftrightarrow$ $\det C > 0$ и са противоположно ориентирани $\Leftrightarrow$ $\det C < 0$

$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $\det C > 0$ $\rightarrow$ 1) $K \rightarrow K$

2) $\mathcal{K}^* \xrightarrow{C} \mathcal{K}'$ $\qquad \mathcal{K}' \xrightarrow{C^{-1}} \mathcal{K}$

$\det c > 0 \Rightarrow \det c^{-1} > 0$

3) $\mathcal{K} \xrightarrow{C} \mathcal{K}'$, $\qquad \mathcal{K}' \xrightarrow{D} \mathcal{K}''$

$\Rightarrow \mathcal{K}^* \xrightarrow{C.D} \mathcal{K}''$

$\det C > 0$, $\det D > 0 \Rightarrow \det(DC) > 0$

$\mathcal{K} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ $\qquad \bar{\mathcal{K}} = \{\vec{e}_2, \vec{e}_1\}$

$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \det C = -1 < 0$

$\mathcal{K}$ и $\bar{\mathcal{K}}$ са противоположно ориентирани

$\mathcal{K}'$ – еднаквоориентирана с K или еднакво ор. с $\bar{K}$

$\Rightarrow$ $\exists$ два класа на еквивалентност

Двата класа на $\cong$ по отнош. на релацията ориентиране на **базите са** нар. **посоки** на ориентиране в р-ната!

база К

Фиксирана (посоки) в р-ната $\to S^+, S^-$

Нека $\mathcal{K}$ -ортонорм. и $\mathcal{K}'$ - ортонорм.

$$C = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\varepsilon\sin\theta \\ \sin\theta & \varepsilon\cos\theta \end{vmatrix} \qquad \theta \in [0; 2\pi) \quad \varepsilon = \pm 1$$

$\varepsilon = +1$ - К и К' - еднакво ориент.

$\varepsilon = -1$ - К и К' - против. ориент.

Смяна на координатната система в пространството

$\mathcal{K} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$\mathcal{K}' = \{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$

$\vec{p}^{K}(p_1, p_2, p_3)$

$\vec{p}^{K'}(p_1', p_2', p_3')$

$$\left| \begin{array}{l} \vec{e}_1' = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3' = \alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3 \end{array} \right.$$

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = p_1\vec{e}_1 + p_2\vec{e}_2 + p_3\vec{e}_3 =$$
$$= p_1'\vec{e}_1' + p_2'\vec{e}_2' + p_3'.\vec{e}_3' =$$
$$= p_1'.(\alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{21}\vec{e}_2 + \alpha_{31}\vec{e}_3) +$$
$$+ p_2'.(\alpha_{12}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{32}.\vec{e}_3) +$$
$$+ p_3'(\alpha_{13}\vec{e}_1 + \alpha_{23}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3) =$$

$$\Rightarrow \quad (1) \left| \begin{array}{l} p_1 = \alpha_{11}.p_1' + \alpha_{12}p_2' + \alpha_{13}p_3' \\ p_2 = \alpha_{21}p_1' + \alpha_{22}p_2' + \alpha_{23}p_3' \\ p_3 = \alpha_{31}p_1' + \alpha_{32}p_2' + \alpha_{33}p_3' \end{array} \right.$$

ф-ли за смяна на коорд. на вектор в (р-ната) пространството

$\det C \neq 0$

$\Updownarrow$

Да решим обратно (1)

С - матрица на прехода

$M^{K}(x, y, z)$ $\quad$ $M^{K'}(x', y', z')$

Нека $O'(x_0, y_0, z_0)$

$\overrightarrow{O'M^K}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

$\overrightarrow{O'M^{K'}}(x', y', z')$

$$(2)\quad \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' \\ y = y_0 + \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' \\ z = z_0 + \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' \end{array} \right.$$

ортогонална матрица : квадратите (+) по редове и стълбове + = 1

Ако двете коорд. с-ми са ортонормирани $\Rightarrow$ С - ортогонална матрица

Ориентация в пространството

$K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ $\quad$ $\det C \neq 0$

$K' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ $\quad C$

О: Базата K е еднаквоориент. с K' $\Leftrightarrow$ $\det C > 0$ и K е противопол. ориент. с K' $\Leftrightarrow$ $\det C < 0$

1) K еднакво-ориент. с K $\quad$ $\det C > 0$

$$\Delta C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2) K еднакво-ориент. K' $\Rightarrow$ K' еднакво-ор. с K

$K \xrightarrow{C} K'$, $\quad K' \xrightarrow{C^{-1}} K$

$\det C > 0 \Rightarrow \det C^{-1} > 0$

3) K едн. ор. с K', K' - едн. ор. с K'' $\Rightarrow$ K едн. ор. с K''

$K \xrightarrow{C} K' \xrightarrow{D} K''$

$K \xrightarrow{DC} K''$

$\det C > 0$, $\quad \det D > 0$

$\Rightarrow \det(C.D) > 0$

4) $K = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \xrightarrow{C} \overline{K}^* = \{\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3\}$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow -1 = \det C \overset{<}{\ngtr} 0$$

$\Rightarrow$ K и $\overrightarrow{K}^*$ - против. ориент.

Ако $\exists$ K' - база в пространството

$\Rightarrow$ K' еднакво ор. с K или е еднакво ор. с $\overline{K}$

$\Rightarrow$ $\exists$ 2 класа на $\cong$

Всеки един от тези 2 класа на $\cong$ в простр. се нар. витлова посока в пространството

$\mathcal{K} \to S^+$

$\searrow \overline{\mathcal{K}} \to S^-$

02.11.2005 г.

3 декември - контролно

9:00 - другата сряда

Векторно и смесено произведение на вектори в ориентирано евклидово пространство

$K = \{O\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \to S^+$

Векторно произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$: Вектор $\vec{c}$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

1 сл. $\vec{c} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (if $\vec{a} = 0 \vee \vec{b} = 0$ също са $\parallel$)

2 сл. $|\vec{c}| = |\vec{a}| . |\vec{b}| . \sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

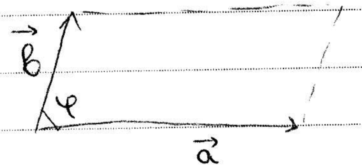
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \in S^+$

Смесено произведение на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}$

Свойства:

1) $|\vec a \times \vec b| = S_{\vec a, \vec b}$



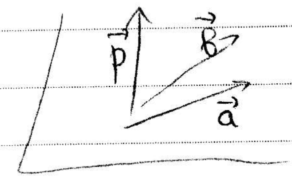
$S = |\vec a| . |\vec b| . \sin\varphi$

2) $\vec a \vec b \vec c = 0 \iff \vec a, \vec b, \vec c$ – компланарни

$(\vec a \times \vec b) . \vec c$

$\vec a \nparallel \vec b \Rightarrow \vec a \times \vec b = \vec p$

$\vec p \perp \alpha \quad : \quad \alpha = (\vec a, \vec b)$



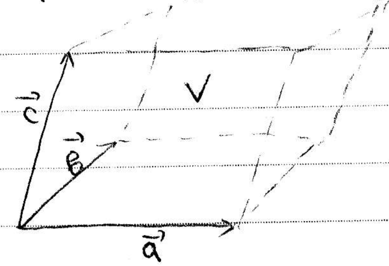
1) $\vec c \subset \alpha \Rightarrow \vec c . \vec p = 0$

$\Rightarrow \vec a \vec b \vec c = 0$

2) $\vec p . \vec c = 0 \Rightarrow \vec p \perp \vec c$

$\Rightarrow \vec c \subset \alpha$

3) $|\vec a \vec b \vec c| = V$ парал. постр. в/у тях $= V_{\vec a, \vec b, \vec c}$



$|\vec a \vec b \vec c| = |(\vec a \times \vec b) \vec c| =$

$= |\vec a \times \vec b| \, |\vec c| \, |\cos\measuredangle(\vec a \times \vec b, \vec c)| =$

$= |\vec a \times \vec b| . |\underbrace{\text{проекц. } \vec c}_{\vec a \times \vec b}| =$

$= S_{\vec a, \vec b} . h = V_{\vec a, \vec b, \vec c}$

$\Rightarrow \vec a \vec b \vec c = \varepsilon V, \quad \varepsilon = \pm 1$

εV – ориентираният обем на парал.

$\vec a \times \vec b = \vec p \Rightarrow \{\vec a, \vec b, \vec p\}$ – база

$\Rightarrow \vec c = \alpha . \vec a + \beta . \vec b + \gamma . \vec p$

$\{\vec a, \vec b, \vec p\} \xrightarrow{C} \{\vec a, \vec b, \vec c\}$

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}$$

$\{\vec a, \vec b, \vec p\} \in S^+$

$\Delta = \det C = \gamma$

$\vec p \perp \vec a, \quad \vec p \perp \vec b$

$\vec c = \alpha . \vec a + \beta . \vec b + \gamma . \vec p \quad / . \vec p$

$\vec c \vec p = \gamma . \vec p^2 \Rightarrow \gamma = \dfrac{\vec c . \vec p}{\vec p^2}$

$\operatorname{sign} \gamma = \operatorname{sign}(\vec{c}\vec{p})$

Ако $\vec{c}.\vec{p} > 0 \Rightarrow \gamma > 0$

$\Rightarrow \{\vec{a}\vec{b}\vec{c}\} \in S^+$

Ако $\vec{c}\vec{p} < 0 \Rightarrow \gamma < 0$

$\Rightarrow \{\vec{a}\vec{b}\vec{c}\} \in S^-$

4) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} =$

$= -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$

$|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = |\vec{b}\vec{c}\vec{a}| = V$

$\{\vec{a}\vec{b}\vec{c}\} \xrightarrow{} \{\vec{b}\vec{c}\vec{a}\}$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow 1 > 0$$

$\det C = 1 > 0$

$\Rightarrow \{\vec{a}\vec{b}\vec{c}\} \in S^+ \Rightarrow \{\vec{b}\vec{c}\vec{a}\} \in S^+$

5) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикомутативност)

От 4) $\Rightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{b}\vec{a}\vec{c} = 0$

$(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} + (\vec{b} \times \vec{a}).\vec{c} = 0$

$\vec{c}(\underbrace{\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a}}_{\vec{q}}) = 0$

? $\vec{q} = \vec{0}$

$\vec{q}.\vec{c} = 0$ за $\forall \vec{c}$

$K = \{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - ортонорм.

$\vec{q} = \alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2 + \gamma.\vec{e}_3 \quad /.\vec{e}_1$

$\Rightarrow \vec{q}\vec{e}_1 = \alpha = 0$ Нека $\vec{c} = \vec{e}_1$

$\vec{q}\vec{e}_2 = \beta = 0$ $\vec{c} = \vec{e}_2$

$\vec{q}\vec{e}_3 = \gamma = 0$ $\vec{c} = \vec{e}_3$

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

6) $\lambda\vec{a} \times \mu.\vec{b} = \lambda.\mu.(\vec{a} \times \vec{b})$

$|\lambda\vec{a} \times \mu.\vec{b}| = |\lambda|.|\mu|.|\vec{a}|.|\vec{b}|.|\sin\sphericalangle(\lambda\vec{a}, \mu\vec{b})| =$

$= |\lambda.\mu.(\vec{a} \times \vec{b})| = |\lambda|.|\mu|.|\vec{a}|.|\vec{b}|.|\sin\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})| \Rightarrow$

$|\lambda\vec{a} \times \mu\vec{b}| = |\lambda.\mu.(\vec{a} \times \vec{b})|$

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\} \in S^+$

$\Rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}\} \xrightarrow{C} \{\lambda\vec{a}, \lambda\vec{b}, \lambda.\mu.(\vec{a}\times\vec{b})\}$

$$C = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda.\mu \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \det C = (\lambda.\mu)^2 > 0$

$\{\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}, \lambda.\mu(\vec{a}\times\vec{b})\} \in S^+$

$\Rightarrow \{\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}, \lambda\vec{a}\times\mu\vec{b}\} \in S^+$

$\Rightarrow \lambda\vec{a}\times\mu\vec{b} = \lambda.\mu.(\vec{a}\times\vec{b})$

7) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

$[\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})].\vec{p} \overset{4)}{=} (\vec{p}\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})) =$

$= (\vec{p}\times\vec{a})(\vec{b}+\vec{c}) =$

$= (\vec{p}\times\vec{a})\vec{b} + (\vec{p}\times\vec{a})\vec{c} = \vec{p}\vec{a}\vec{b} + \vec{p}\vec{a}\vec{c} =$

$= \vec{a}\vec{b}\vec{p} + \vec{a}\vec{c}\vec{p} =$

$= [\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}].\vec{p}$

$\{\underbrace{\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) - [\vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}]}_{\text{Анал. 5)} \Rightarrow = \vec{0}}\}.\vec{p} = 0$

$\Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$

8) $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$

$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \cancel{|\vec{a}.\vec{b}|}^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 . \sin^2\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) =$

$= |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2.(1-\cos^2\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})) =$

$= \vec{a}^2.\vec{b}^2 - (\vec{a}\vec{b})^2$

Координатно представяне на векторно и смесено произведение

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \rightarrow S^+$

$\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3.\vec{e}_3$

$\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3.\vec{e}_3$

$$\vec{a}\times\vec{b} = a_1b_1\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_1)}_{\vec{o}} + a_2b_2\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_2)}_{\vec{o}} +$$
$$+ a_3b_3(\vec{e}_3\times\vec{e}_3) + (a_1b_2 - a_2b_1)\cdot\vec{e}_1\times\vec{e}_2 +$$
$$+ (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_3\times\vec{e}_1 + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_2\times\vec{e}_3 =$$
$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{e}_2\times\vec{e}_3 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\cdot\vec{e}_3\times\vec{e}_1 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\vec{e}_1\times\vec{e}_2$$

K - ортонорм.

$$|\vec{e}_2\times\vec{e}_3| = |\vec{e}_2|.|\vec{e}_3|.\sin 90^\circ = 1$$

$$\Rightarrow \vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1$$
$$\vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2$$
$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$$
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\cdot(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$$

При K - ортонорм. $\Rightarrow$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{p} \neq \vec{o} \Rightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d} \text{ - компланарни}$$
$$\vec{c}\times\vec{d} = \vec{p}$$

$\{\vec{a}, \vec{b}\}$ - база

$$\Rightarrow \vec{c} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b}$$
$$\vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$$
$$\vec{c}\times\vec{d} = (\alpha\gamma - \beta\delta)\,\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}.\vec{a}\times\vec{b}$$
$$\vec{c}\times\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$$

Защо $x = \lambda$ 1
$y = \mu$

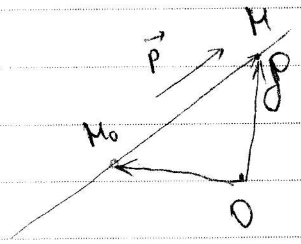
$\vec{a}, \vec{b}$ - бивектор

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ - унимодулярно еквивалентни

$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{d}\vec{e}\vec{f}$ - тривектор

09.11.2005г.

Параметрични уравнения на права и равнина



$M_0 \in g$

$\vec{p} \parallel g, \quad \vec{p} \neq \vec{0}$

$M \in g \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$

$\overrightarrow{M_0M} = \lambda . \vec{p}$

$\overrightarrow{OM_0} = \vec{R_0} \quad \overrightarrow{OM} = \vec{R}$

$(1): \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda . \vec{p}$

$(1): \quad \vec{R} = \vec{R_0} + \lambda . \vec{p}$

(1) **векторно параметрично у-е на пр. g**

λ-пар., $\lambda \in (-\infty; +\infty)$

$\vec{R} = \overrightarrow{OM_0}$ - радиус вектор на т. M

$K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ - произв. АКС

$\overrightarrow{OM_0}(x_0, y_0, z_0), \quad M_0(x_0, y_0, z_0)$

$\overrightarrow{OM}(x, y, z), \quad M(x, y, z)$

$\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$

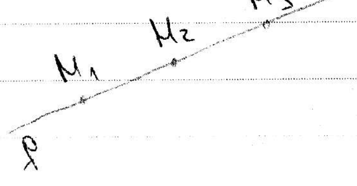
$$(2) \quad g: \begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 \\ y = y_0 + \lambda . p_2 \\ z = z_0 + \lambda . p_3 \end{cases} \quad \lambda \in (-\infty; +\infty)$$

скаларни парам. у-я на пр. g

$K = \{O, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$

$$g: \begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 \end{cases}$$

Просто отношение на три точки



$\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda . \overrightarrow{M_2M_3}$

λ - просто отнош. на 3 точки

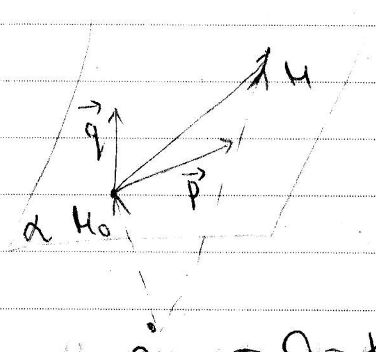
$$(M_1, M_2, M_3) = \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}}$$

$K = \{O, \vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$ – произв. АКС

$M_i(x_i, y_i, z_i)$ $\quad i = 1, 2, 3$

$$(M_1, M_2, M_3) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

Параметрично у-е на равнина



$M_0 \in \alpha$

$\vec p \parallel \alpha$

$\vec q \parallel \alpha$

$\vec p \nparallel \vec q$, $\quad M \in \alpha$

$\overrightarrow{M_0M} = \lambda . \vec p + \mu . \vec q$

т. O – фикс.

$\overrightarrow{OM_0} = \vec r_0$ $\quad \overrightarrow{OM} = r$ – рад. вектор на т. M

(1): $\vec r = \vec r_0 + \lambda \vec p + \mu \vec q$

(1): $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda \vec p + \mu \vec q$

(1): ↳ векторно парам. у-е на р-ната α

$(\lambda, \mu) \in (-\infty; +\infty)$

$K = \{O, \vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\}$ – произв. АКС

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$M(x, y, z)$

$\vec p(p_1, p_2, p_3)$, $\quad \vec q(q_1, q_2, q_3)$

(2): $\quad \alpha: \begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ z = z_0 + \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases}$

скаларни парам. у-я на р-ната α

≡ (координатни)

Общо уравнение на права в р-ната

р-на: $K = \{O, \vec e_1, \vec e_2\}$ – пр. АКС пр. g $\quad M_0 \in g$, $\vec{p} \parallel g$, $\vec{p} \neq \vec{0}$

т. $M_0(x_0, y_0)$ $\quad \vec{p}(p_1, p_2)$

$M(x, y) \in g \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$

$\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$

13: $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ p_1 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{p}$

$p_2 x - p_1 y + (p_1 y_0 - p_2 x_0) = 0$

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} p_2 = a, \quad -p_1 = b \qquad \vec{p}(p_1, p_2) \equiv \vec{p}(-b; a) \\ p_1 y_0 - p_2 x_0 = c \\ ax + by + c = 0 \quad (*) \end{array} \right.$

↳ общо у-е на правата g в р-ната

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$\vec{p}(p_1, p_2) \neq \vec{0} \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$

$(a, b) \neq (0, 0)$

Всяка права има общо у-е

Всяко у-е от тип (*) е общо у-е на някаква права.

Нека $b \neq 0$

т. $M_0\left(x_0, y_0 = -\frac{c + a x_0}{b}\right)$

$g \ni M_0$, $g \parallel \vec{p}(-b, a) \neq \vec{0}$

$g: \begin{vmatrix} x - x_0 & y + \frac{c + a x_0}{b} \\ -b & a \end{vmatrix} = 0$

$ax - \cancel{a x_0} + by + c + \cancel{a x_0} = 0$

$ax + by + c = 0$

$ax + by + \underbrace{(-b y_0 - a x_0)}_{c} = 0$

$g: \begin{cases} \vec{p} \parallel g \\ M_0 \end{cases} \qquad g: \begin{cases} M_1 \\ g \parallel \vec{q} \end{cases}$

$M_1(x_1, y_1)$; $\vec{q}(q_1, q_2) \parallel g \parallel \vec{p}(p_1, p_2)$

$\Rightarrow q_1 = \lambda p_1, \quad q_2 = \lambda p_2$

$\lambda \neq 0$

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$a_1 = \lambda a, \quad b_1 = \lambda . b \Rightarrow \lambda a x + b \lambda y + c_1 = 0$

$M_0 \in g \Rightarrow \lambda(ax_0+by_0)+c_1=0$

$ax_0+by_0=-c$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1=\lambda . c$

$ax_0+by_0+c=0$

$g: \begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$

$a_1=\lambda a$; $b_1=\lambda b$; $c_1=\lambda . c$, $\lambda \neq 0$

Т: Спрямо $K=\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - пр. АКС
$\forall$ права g има общо у-е от вида:
$ax+by+c=0$, $(a,b)\neq(0,0)$ и
$\vec{p}(-b,a) \parallel g$ като 2 такива у-я са у-я на една и съща права $\Leftrightarrow$ coef им са пропорционални.

Уравнения на права през 2 т.

$M_1(x_1,y_1) \neq M_2(x_2,y_2)$

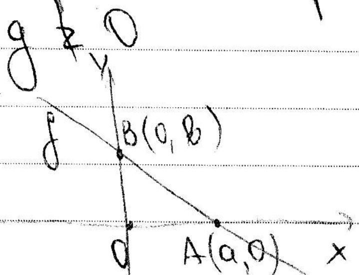
пр. $M_1M_2 \equiv g$: $g\{M_1, \overrightarrow{M_1M_2}\}$

$g: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0$ или

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$

Отрезово уравнение на права

$g \not\ni O$



$g \cap O\vec{x} = A(a,0)$

$g \cap O\vec{y} = B(0,b)$

$O\vec{x} \equiv O\vec{e}_1$

$O\vec{y} \equiv O\vec{e}_2$

$g=AB$: $\left\{ \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \end{vmatrix}=0 \right.$

$g: bx + ay - ab = 0 \quad /: ab \neq 0$

$g: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ → отрезово у-е на права

Декартово у-е на права

$g: ax + by + c = 0$, $g \not\parallel O\vec{e}_2$

$\vec{p}(-b, a) \not\parallel \vec{e}_2(0, 1) \iff b \neq 0$

$\Rightarrow g: y = \underbrace{-\frac{a}{b}}_{k}x \underbrace{- \frac{c}{b}}_{n}$

$g: y = kx + n$, ако имаме ОКС

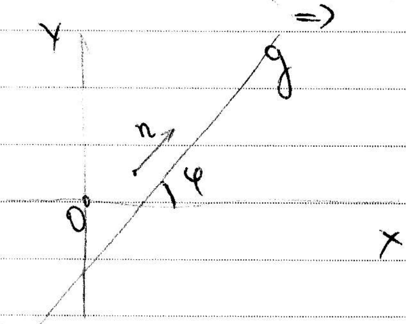
Нека $K = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ е ОКС

$g: kx - y + n = 0$

$\vec{p}(1, k) \parallel g$

$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) \\ \vec{n}_0(\cos\varphi, \sin\varphi) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\varphi = k$



$y = tg\varphi\, x + n$

k - ъглов coef

Нормално у-е на права

ОКС → $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$g: ax + by + c = 0$

$\vec{p}(-b, a) \parallel g$

$\vec{n}(a, b) \neq \vec{0}$

$\vec{p}\cdot\vec{n} = -b.a + a.b = 0$

$\Rightarrow \vec{p} \perp \vec{n}$

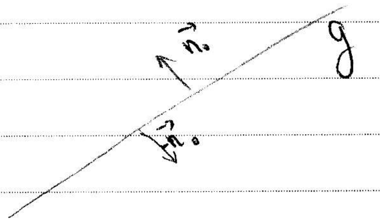
ОКС $\vec{n}(a, b) \perp g$, $\vec{n}$ - нормален вектор на g; $\vec{n}_0$ - ортонормиран нормален в-р

$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$\vec{n}_0(\cos\theta, \sin\theta)$

(1) $\cos\theta\, x + \sin\theta\, y + c_1 = 0$

↳ нормално у-е на права g



$g: ax + by + c = 0$

$$g: \frac{ax + by + c}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

Нормално у-е на права g

16.11.2005г.

другата сряда - 9:00

Разстояние от точка до права

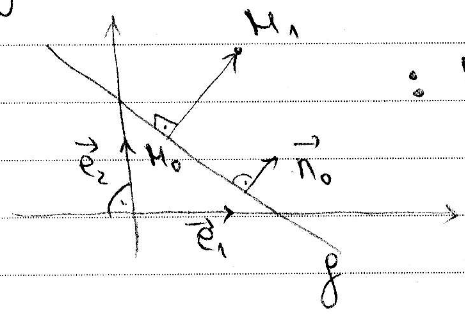
$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ - ОКС

$g: ax + by + c = 0$

$\vec{n}(a, b) \perp g$

$|\vec{n}_0| = 1 \Rightarrow \vec{n}_0(\cos\varphi, \sin\varphi)$

$g: \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y + c = 0$



$: M_1(x_1, y_1)$

$|M_1M_0| = |M_1, g|$

$M_1M_0 \perp g$

$M_0(x_0, y_0) \in g$

$\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \vec{n}_0$

$\overrightarrow{M_0M_1} = \delta . \vec{n}_0$

$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$

$$\begin{cases} x_1 - x_0 = \delta . \cos\varphi \\ y_1 - y_0 = \delta . \sin\varphi \end{cases}$$

$|M_1, g| = |M_1M_0| = |\overrightarrow{M_0M_1}| = |\delta| . \underbrace{|\vec{n}_0|}_{=1} = |\delta|$

$$\begin{cases} x_0 = x_1 - \delta . \cos\varphi \\ y_0 = y_1 - \delta . \sin\varphi \end{cases}$$

$M_0 \in g \Rightarrow \cos\varphi . x_0 + \sin\varphi . y_0 + c = 0$

$\cos\varphi.(x_1 - \delta\cos\varphi) + \sin\varphi(y_1 - \delta\sin\varphi) + c = 0$

$\cos\varphi\, x_1 - \delta.\cos^2\varphi + y_1 . \sin\varphi - \delta.\sin^2\varphi + c = 0$

$\cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, y_1 + c = \delta$ - ориентирано разст.

$|M_1, g| = |\delta| = |\cos\varphi\, x_1 + \sin\varphi\, y_1 + c|$

$g: ax + by + c = 0$

$M_1(x_1, y_1)$

$$|M_1, g| = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Полуравнини

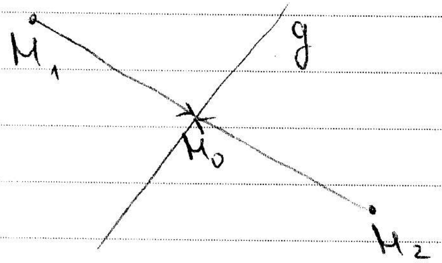
K - АКС ; $g: ax + by + c = 0$

$M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

$\ell(x, y) = ax + by + c$

Т: т. M_1 и M_2 са в $\neq$ полуравнини относно правата $g \Leftrightarrow \ell(x_1, y_1) . \ell(x_2, y_2) < 0$

Следствие: -//- в една и съща полуравнина -//- $\Leftrightarrow \ell(x_1, y_1) . \ell(x_2, y_2) > 0$



$\overrightarrow{M_1M_0} = \lambda . \overrightarrow{M_2M_0}$

$\overrightarrow{M_2M_0}$

M_0 - м/у M_1 и $M_2 \Rightarrow \lambda < 0$

$\overrightarrow{M_1M_0}(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$

$\overrightarrow{M_2M_0}(x_0 - x_2, y_0 - y_2)$

$$\begin{cases} x_0 - x_1 = \lambda.(x_0 - x_2) \\ y_0 - y_1 = \lambda.(y_0 - y_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y_0 = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \end{cases} \qquad M_0 \in g$$

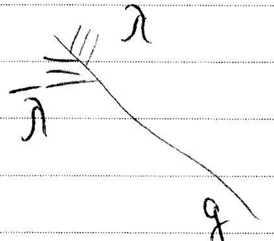
$\Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$

$$a.\frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} + b.\frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} + c = 0$$

$$\underset{l(x_1,y_1)}{(ax_1+by_1+c)} - \lambda.\underset{l(x_2,y_2)}{(ax_2+by_2+c)} = 0$$

$$\lambda = \frac{l(x_1,y_1)}{l(x_2,y_2)} < 0 \Rightarrow$$

$$l(x_1,y_1) \cdot l(x_2,y_2) < 0$$



$$\lambda = \{(x,y) : l(x,y) > 0\}$$
$$\overline{\lambda} = \{(x,y) : l(x,y) < 0\}$$

Взаимно положение на две прави в р-ната

$g: ax+by+c=0$

$\vec{p}(-b,a) \parallel g$

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$: АКС

$g_1 : l_1(x,y) = a_1x + b_1y + c_1 = 0$

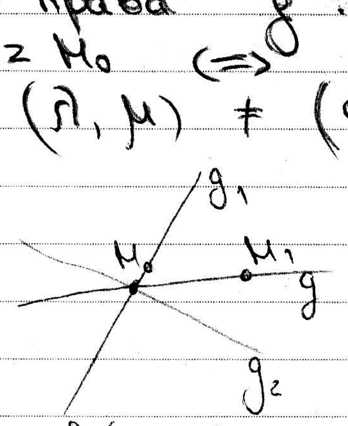
$g_2 : l_2(x,y) = a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Т : $g_1 \cap g_2 = M_0(x_0,y_0)$, то $\Rightarrow$

за $\forall$ права $g : l(x,y) = ax+by+c = 0$ {, то}

$g \ni M_0 \iff l(x,y) = \lambda . l_1(x,y) + \mu . l_2(x,y)$

$(\lambda,\mu) \neq (0,0)$



g_1, g_2, g – сноп прави през т. M_0

$g : l(x,y) = \lambda . l_1(x,y) + \mu . l_2(x,y)$

$g \ni M_0 \Rightarrow l(x_0,y_0) = \lambda l_1(x_0,y_0) +$
$+ \mu . l_2(x_0,y_0)$

$M_0 \in g_1 \Rightarrow l_1(x_0,y_0) = 0$

$M_0 \in g_2 \Rightarrow l_2(x_0,y_0) = 0$

$\Rightarrow l(x_0,y_0) = 0$

$$l(x,y) = \underbrace{(\lambda . a_1 + \mu a_2)}_{a}x + \underbrace{(\lambda b_1 + \mu b_2)}_{b}y + \ldots = 0$$

$(a, b) \neq (0, 0)$?

Доп., че

$$\begin{cases} \lambda a_1 + \mu a_2 = 0 \\ \lambda b_1 + \mu b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\vec{p}_1(-b_1, a_1) \parallel \vec{p}_2(-b_2, a_2) \Rightarrow$

$g_1 \equiv g_2 \Rightarrow$ ↯

$\Rightarrow \ell(x, y)$ е у-е на правата g

$M_1(x_1, y_1) \neq M_0 \quad M_1 \in g$

$\Rightarrow \ell_1(x_1, y_1) \neq 0$ или $\ell_2(x_1, y_1) \neq 0$

$\lambda = -\ell_2(x_1, y_1), \quad \mu = \ell_1(x_1, y_1)$

$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

$g' : \ell'(x_1, y_1) = ?\ \lambda \ell_1 + \mu . \ell_2 = 0$

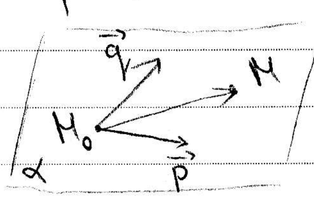
$g' = M_1 M_0 = g$

Ако $g_1 \parallel g_2$, то за $g = \lambda \ell_1 + \mu . \ell_2$ е изп. $g \parallel g_1 \parallel g_2$ (сноп $\parallel$ прави)

Общо уравнение на равнина в пространството

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – АКС

α - р-на



$\alpha = \{M_0, \vec{p} \nparallel \vec{q}\}$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$

$\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$

$M(x, y, z) \in \alpha \iff \overrightarrow{M_0M}$ - компл. с $\vec{p}$ и $\vec{q}$

$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0 \iff \text{т.} M \in \alpha$$

$A = p_2 q_3 - p_3 q_2$

$B = p_3 q_1 - p_1 q_3$

$C = p_1 q_2 - p_2 q_1$

$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$

$(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

(1) $Ax + By + Cz + D = 0$ – общо у-е на р-ната α

Доп. $A = B = C = 0$

$\Rightarrow \quad q_1 = k p_1, \quad q_2 = k p_2, \quad q_3 = k p_3$

$\Rightarrow \quad \vec{q} = k . \vec{p} \quad \Rightarrow \quad \vec{q} \parallel \vec{p} \quad \Rightarrow \quad ↯$

$\rho \neq 0 \quad \Rightarrow (1)' \quad \rho A x + \rho B y + \rho . C z + \rho D = 0$

$Ax + By + Cz + D = 0$

$(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$

Нека $A \neq 0 \Rightarrow M_0\left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right), M_1\left(-\frac{B+D}{A}, 1, 0\right)$

$M_2\left(-\frac{C+D}{A}, 0, 1\right)$

$\overrightarrow{M_0M_1} = \left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right) \qquad \overrightarrow{M_0M_2} = \left(-\frac{C}{A}, 0, 1\right)$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{M_0M_1} \nparallel \overrightarrow{M_0M_2}$

$\Rightarrow \exists \; \alpha = \{ z \; M_0, \overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2} \}$

$$\alpha \; z: \begin{vmatrix} x + \frac{D}{A} & y & z \\ -\frac{B}{A} & 1 & 0 \\ -\frac{C}{A} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\alpha : \quad x + \frac{B}{A} y + \frac{C}{A} z + \frac{D}{A} = 0$

$A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha : Ax + By + Cz + D = 0$

! Условие за компланарност на вектор и р-на

$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$

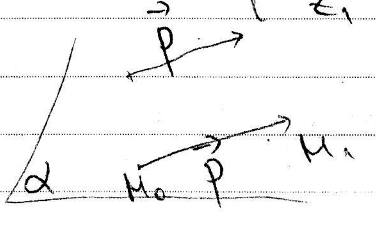
$\vec{p}\,(\lambda, \mu, \nu) \neq \vec{0}$

? $\vec{p} \parallel \alpha$

$M_0(x_0, y_0, z_0) \; z \; \alpha$

$M_1(x_1, y_1, z_1) : \quad \overrightarrow{M_0M_1} = \vec{p}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_0 = \lambda \\ y_1 - y_0 = \mu \\ z_1 - z_0 = \nu \end{cases}$$



$\vec{p} \parallel \alpha \Leftrightarrow M_1 \in \alpha$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_1 - \lambda \\ y_0 = y_1 - \mu \\ z_0 = z_1 - \nu \end{cases}$$

$M_1 \in \alpha \iff \vec{p} \parallel \alpha$

$\vec{p} \parallel \alpha$

$M_0 \in \alpha \Rightarrow A(x_1-\lambda) + B(y_1-\mu) + C(z_1-\nu) + D = 0$

$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) - (A\lambda + B\mu + C\nu) = 0$

$\parallel M_1 \in \alpha \Rightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$

$0 \Rightarrow A\lambda + B\mu + C\nu = 0$

$\Rightarrow \vec{p} \parallel \alpha \iff A\lambda + B\mu + C\nu = 0$

Взаимно положение на 2 равнини

$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$

$\alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \iff \forall \vec{p} \parallel \alpha_1 \Rightarrow \vec{p} \parallel \alpha_2$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu = 0 \\ A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu = 0 \end{array} \right.$$

$$r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

↳ ранг на матрицата

$A_2 = kA_1,\ B_2 = kB_1,\ C_2 = k.C_1$!

! $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \iff A_2 = kA_1,\ B_2 = kB_1,\ C_2 = kC_1$

$k \neq 0$

$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \iff \alpha_1 \parallel \alpha_2$ и $\exists M_0 \in \alpha_1, \in \alpha_2$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$M_0 \in \alpha_1 \Rightarrow D_1 = -(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0)$

$M_0 \in \alpha_2 \Rightarrow D_2 = -(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0)$

$\Rightarrow D_2 = k.D_1$

Т: С/о АКС (пр.) $\forall$ р-на има общо у-е от вида $Ax + By + Cz + D = 0$ като $(A, B, C) \neq (0,0,0)$ и две такива у-я задават една и съща р-на $\iff$ coef им са пропорционални.

Уравнение на р-на през 3 т. ∉ една права

$\alpha = \{ M_1, M_2, M_3 \} \quad M_i(x_i, y_i, z_i),\ i = 1,2,3$

$\alpha = \{ M_1, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} \}$

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

23.11.2005г.

Нормално у-е на р-на

$K = \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ - ОКС

$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$

$\vec{p}(\lambda, \mu, \nu) \parallel \alpha \iff A\lambda + B\mu + C\nu = 0$

$\vec{N}^\alpha (A, B, C) \neq \vec{0}$

$\vec{p} \cdot \vec{N}^\alpha = A\lambda + B\mu + C\nu = 0$

$\Rightarrow \vec{p} \perp \vec{N}^\alpha$ вярно за $\forall \vec{p} \parallel \alpha$

$\Rightarrow \vec{N}^\alpha \perp \alpha$!

Ако $|\vec{N}^\alpha| = 1 \iff A^2 + B^2 + C^2 = 1$,

то $Ax + By + Cz + D = 0$ - нормално у-е

$|\vec{N}^\alpha (A, B, C)| \neq 1$

$$\left| \vec{N}_0^\alpha \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} ; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} ; \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) \right| = 1$$

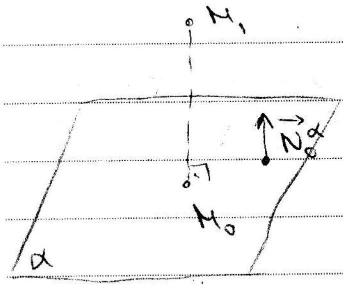
$$\alpha : \frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0$$ → норм. у-е на р-ната α

Разстояние от точка до р-на

$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$

$A^2 + B^2 + C^2 = 1$

Нека т. $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin \alpha$



$M_1M_0 \perp \alpha$, $M_0 \in \alpha$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

$\overrightarrow{N_0^\alpha} \perp \alpha$

$\Rightarrow \overrightarrow{N_0^\alpha} \parallel \overrightarrow{M_0M_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M_1} = \delta . \overrightarrow{N_0^\alpha}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{M_0M_1}| = |\delta| . |\overrightarrow{N_0^\alpha}| = |\delta|$

$\Rightarrow |\delta| =$ разст. от т. M_1 до р-ната α

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - x_0 = \pm\delta A \\ y_1 - y_0 = \delta B \\ z_1 - z_0 = \delta C \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_0 = x_1 - \delta A \\ y_0 = y_1 - \delta B \\ z_0 = z_1 - \delta C \end{array} \right.$$

Но $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \alpha$

$\Rightarrow A.(x_1 - \delta A) + B(y_1 - \delta B) + C(z_1 - \delta C) + D = 0$

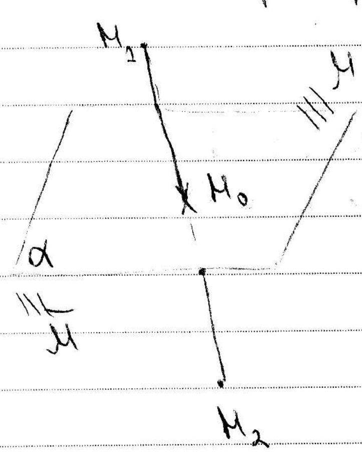
$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D - \delta . \underbrace{(A^2 + B^2 + C^2)}_{1} = 0$

$\delta = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$

$|M_1, \alpha| = |\delta| = |Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|$

$$|M_1, \alpha| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Полупространства



произв. АКС

$\alpha: Ax + By + Cz + D = f(x, y, z) = 0$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$

$\Rightarrow f(M_1) = f(x_1, y_1, z_1) =$

$= Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$

M_1 и M_2 са в $\neq$ полупростр. относно $\alpha \Leftrightarrow$

$f(M_1) . f(M_2) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_0} \uparrow\downarrow = \lambda . \overrightarrow{M_2M_0}$ $\lambda < 0$

$$\lambda = \frac{f(M_1)}{f(M_2)}$$

$\ell(M_1), \ell(M_2) \neq 0$, т. $M_1, M_2 \notin \alpha$

Следствие: M_1 и M_2 са в едно и също полупростр. отн. $\alpha \iff \ell(M_1) \cdot \ell(M_2) > 0$

$\underline{M}: \ell(M) > 0$

$\overline{M}: \ell(M) < 0$

$5x + 3y - 4 = 0 \rightarrow$! правата няма общо у-е спрямо пространствена коорд. с-ма

→ това не е общо у-е на права

$C = 0$; правата е представена в р-на

Представяне на права чрез 2 р-ни

$\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \ell_1(x, y, z) = 0$

$g = \alpha_1 \cap \alpha_2$

АКС - произв.

$\alpha_2 \Rightarrow A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \ell_2(x, y, z) = 0$

$M(x, y, z) \ni g \rightarrow M \in \alpha_1, M \in \alpha_2$

(1) $g: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

g: задаване на права в пространството

$\alpha: Ax + By + Cz + D = \ell(x, y, z) = 0$

α е произв. р-на $\ni g$

Твърдение: $\alpha \ni g \iff \ell(x, y, z) = \lambda \cdot \ell_1(x, y, z) + \mu \cdot \ell_2(x, y, z) = 0$

$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

$\ell(x, y, z) = (\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z + (\lambda D_1 + \mu D_2) = 0$

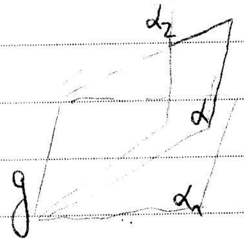
Доп., че $\begin{vmatrix} \lambda A_1 + \mu A_2 = 0 \\ \lambda B_1 + \mu B_2 = 0 \\ \lambda C_1 + \mu C_2 = 0 \end{vmatrix}$ $/ : \mu \neq 0$

$(\lambda, \mu) \neq (0, 0) \Rightarrow$ Нека $\mu \neq 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_2 = -\frac{\lambda}{\mu} A_1 \\ B_2 = -\frac{\lambda}{\mu} B_1 \\ C_2 = -\frac{\lambda}{\mu} \cdot C_1 \end{vmatrix} \Rightarrow \alpha_1 \parallel \alpha_2 \Rightarrow \text{↯}$

$(\alpha_1 \cap \alpha_2 = g)$

$\ell(x, y, z) = 0$ e $\exists$ р-на



$S: \lambda \ell_1 + \mu \ell_2 = 0$
S + сноп р-ни
$\forall \lambda, \mu$

$B_2 = k \cdot B_1 \quad , \quad k \neq l$
$C_2 = l \cdot C_1$

$\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2} \qquad B_1 C_2 - B_2 C_1 \neq 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$(B_1, B_2) \neq (0,0) \neq (C_1, C_2)$

$$g: \begin{cases} C_2 \ell_1 - C_1 \ell_2 = 0 & : \alpha_1' \\ -B_2 \ell_1 + B_1 \ell_2 = 0 & : \alpha_2' \end{cases}$$

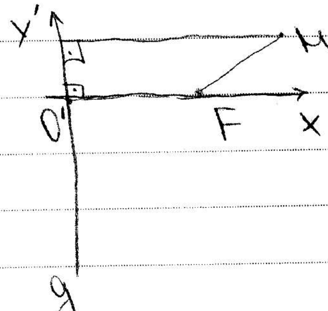
$\alpha_1' : C_2 \ell_1 - C_1 \ell_2 = A_1' x + \Delta y + 0 . z +$
$+ D_1' = 0$

$\alpha_2' : -B_2 \ell_1 + B_1 \ell_2 = 0 = A_2' x + 0 . y + \Delta z + D_2'$
$/ : \Delta \neq 0$

$$g: \begin{cases} y = ax + b \\ z = cx + d \end{cases}$$

Конични сечения

Р-на : т. F, пр. g, $F \notin g$



$M : \dfrac{|MF|}{(M, g)} = e$
$(*)$
e - const

$FO' \perp g, \quad O' \in g$
$K' = \{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ ОКС
$\vec{e}_1' \parallel \overrightarrow{O'F}$
$\vec{e}_2' \parallel g$

т. F – фокус, g – директриса на кон. сеч.

$F(p, 0)$, $g \{ : x' = 0$

$M(x', y')$

$|\overrightarrow{MF}| = \sqrt{(x'-p)^2 + y'^2}$

$|M, g| = \frac{|x'|}{1} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(*) $\sqrt{(x'-p)^2 + y'^2} = e . |x'|$

$(x'-p)^2 + y'^2 = e^2 . x'^2$

$x'^2 - 2px' + p^2 + y'^2 = e^2 x'^2$

(2) $(1-e^2)x'^2 + y'^2 - 2px' + p^2 = 0$

$K' \to K \{ O, \vec{e}_1, \vec{e}_2 \}$ $(\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1, \vec{e}_2{}' = \vec{e}_2)$

$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y \end{cases}$

$(1-e^2)(x+\alpha)^2 + y^2 - 2p(x+\alpha) + p^2 = 0$

$-2p\alpha + p^2 + x^2(1-e^2) + y^2 + 2\alpha(1-e^2)x - 2px + (1-e^2)\alpha^2 = 0$

$(1-e^2)x^2 + y^2 + x.(2\alpha(1-e^2) - 2p) - 2p\alpha + p^2 +$
$+ (1-e^2)\alpha^2 = 0$

I сл. $e = 1 \Rightarrow 1 - e^2 = 0$

$y^2 - 2px - 2p\alpha + p^2 = 0$

Нека $\alpha = \frac{p}{2}$

$\Rightarrow$ (3) : $y^2 - 2px = 0$

$y^2 = 2px$

$y^2 = 2px$ – канонично у-е на парабола

II сл. Нека $e \neq 1 \Rightarrow 1 - e^2 \neq 0$

Нека $\alpha = \frac{p}{1-e^2} \Rightarrow 2(1-e^2).\alpha - 2p = 0$

$(1-e^2)\alpha^2 - 2p\alpha + p^2 =$

$= (1-e^2)\frac{p^2}{(1-e^2)^2} - 2\frac{p^2}{1-e^2} + p^2 = \emptyset$

$= -\frac{p^2}{1-e^2} + p^2 = \frac{p^2}{1-e^2}.(\cancel{1} - e^2 - \cancel{1}) =$

$= \frac{-p^2 e^2}{1-e^2}$

$$(1-e^2)x^2 + y^2 - \frac{p^2e^2}{1-e^2} = 0$$

$$\frac{x^2}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2e^2}{(1-e^2)^?}} = 1 \quad (4)$$

П.1. $e<1$

$1-e^2>0$

$$\frac{pe}{1-e^2} = a, \quad \frac{pe}{\sqrt{1-e^2}} = b$$

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{елипса}$$

П.2. $e>1$

$1-e^2<0, \quad e^2-1>0$

$$\frac{pe}{e^2-1} = a \qquad \frac{pe}{\sqrt{e^2-1}} = b$$

$$(6) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \text{хипербола}$$

30.11.2005г.

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ОКС $\qquad K' = \{O', \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

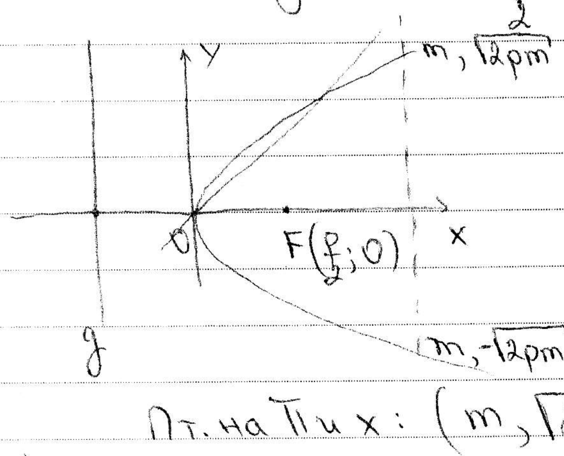
П: $y^2 = 2px$, $p>0$

$$\begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y \end{cases}$$

$F^{K'}(p;0) \rightarrow F^{K}\left(\frac{p}{2};0\right)$

$g^{K'}: x=0 \rightarrow g^{K}: x = -\frac{p}{2}$

$$\begin{cases} x' = x + \frac{p}{2} \\ y' = y \end{cases}$$



Ако $M(x_0, y_0) \in П$

$x_0 \geq 0$

$x = const \geq 0$

$x = m \geq 0$

$y^2 = 2pm$

$y_{1,2} = \pm\sqrt{2pm}$

Пт. на П и x: $(m, \sqrt{2pm})$ $(m, -\sqrt{2pm})$

Ако $M(x,y) \in П$, то и $M'(x,-y) \in П$

симетрична отн. $\vec{Ox} \Rightarrow \vec{Ox}$ - ос на параболата т.О - връх на П

$\ell : y = kx \quad 2\ O \cap П : y^2 = 2px$

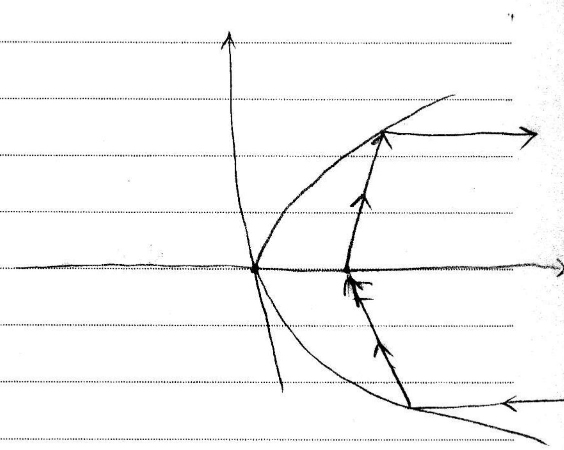
$\ell \cap П$:

$k^2x^2 = 2px$

$x.(k^2x - 2p) = 0$

$x = 0 \qquad x = \frac{2p}{k^2}$

$(0;0) \quad , \quad \left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)$



$e < 1$

$\varepsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$K \to K' \quad \begin{cases} x' = x + \alpha = \frac{p}{1-e^2} \\ y' = y \end{cases}$

$K' \to K \quad \begin{cases} x = x' - \frac{p}{1-e^2} \\ y = y' \end{cases}$

$F^{K'}(p;0) \to F^{K}\left(-\frac{pe^2}{1-e^2}; 0\right)$

$g^{K'} : x' = 0 \quad \to \quad g^{K} : x = -\frac{p}{1-e^2}$

Нека $c = \frac{pe^2}{1-e^2} > 0 \Rightarrow F^{K}(-c; 0)$

$a = \frac{p.e}{1-e^2} \quad ; \quad b = \frac{p.e}{\sqrt{1-e^2}}$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\frac{a^2}{c} = \frac{p}{1-e^2}$

$g^{K} : x = -\frac{a^2}{c} \quad \Rightarrow \quad a^2 - x^2 \geq 0$

$|x| \leq a$

$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x^2)$

$-a \le x \le a$

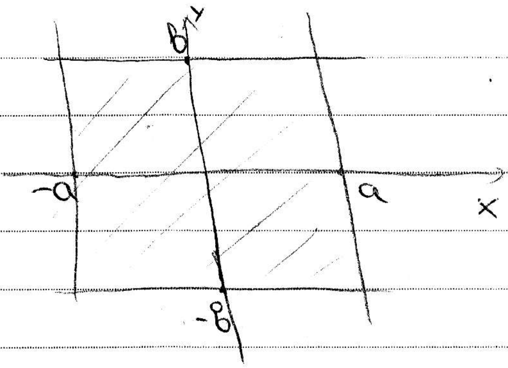
$-b \le y \le b$

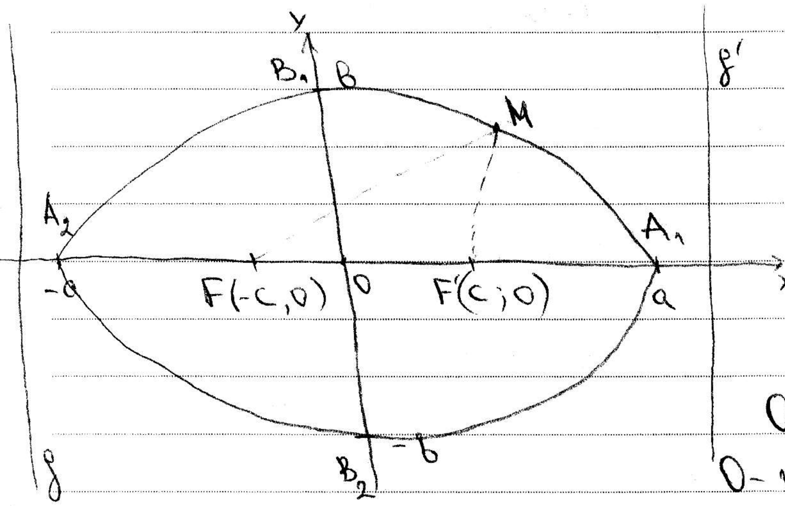
$M(x,y) \in \mathcal{E}$

$M'(-x,y) \in \mathcal{E}$

$M''(x,-y) \in \mathcal{E}$

$M'''(-x,-y) \in \mathcal{E}$





$O\vec{x}: y = 0$

$O\vec{x} \cap \mathcal{E} = \{A_1(a,0),\ A_2(-a,0)\}$

$O\vec{y}: x = 0$

$O\vec{y} \cap \mathcal{E} = \{B_1(0;b),\ B_2(0;-b)\}$

$O\vec{x}, O\vec{y}$ - оси на елипсата

O - ц-р на елипсата

a - голяма полуос, b - малка полуос

F' - сим. на F отн. $O\vec{y}$, $F'(c;0)$

$g': x = \dfrac{a^2}{c}$

елипсата има 2 фокуса F и F' и 2 директр. g и g'

$M \in \mathcal{E} \Rightarrow |MF| + |MF'| = \text{const} = 2a$

$M_y: y = \underset{(\pm 1)}{\eta} \dfrac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

$M_x: x = \underset{(\pm 1)}{\varepsilon} \dfrac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 - y^2}$

$|MF| = \sqrt{(x+c)^2 + \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \sqrt{x^2 + 2cx + a^2 - \dfrac{b^2}{a^2}x^2}$

$|MF| = \sqrt{\left(\dfrac{c}{a}x + a\right)^2} = \left|\dfrac{c}{a}x + a\right|$

$|x| \le a, \quad \dfrac{c}{a} = e < 1, \quad a > 0 \Rightarrow$

$|MF| = \dfrac{c}{a}x + a$

$|MF'| = \sqrt{(x-c)^2 + \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \left|\dfrac{c}{a}x - a\right|$

$|MF'| = a - \frac{c}{a}x$

$\Rightarrow |MF| + |MF'| = 2a$

$c/a = e$ - ексцентриситет , $e<1$

хипербола $\mathcal{X}$

$\mathcal{X}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $e>1$

$F^k\left(-\frac{pe^2}{1-e^2}; 0\right)$; $g^k: x = -\frac{p}{1-e^2}$

$c = \frac{pe^2}{e^2-1} > 0 \Rightarrow F(c;0)$

$g: x = \frac{a^2}{c} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

$M(x,y) \in \mathcal{X} \rightarrow M'(-x,y) \in \mathcal{X}$, $M''(x,-y) \in \mathcal{X}$

$M'''(-x,-y) \in \mathcal{X}$

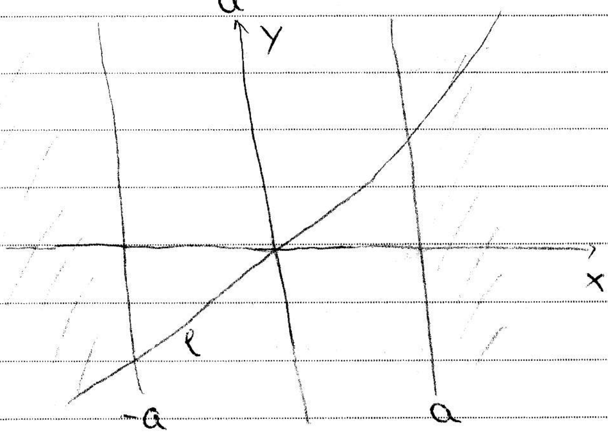
Ox, Oy - оси на хиперболата

O - ц-р на хиперболата

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(x^2 - a^2) \geq 0 \Rightarrow |x| \geq a$

$x^2 = \frac{a^2}{b^2}\cdot(y^2 + b^2)$

$|y|$ - няма огр.



$\vec{Ox} \cap \mathcal{X}$

$x^2 = a^2$

$A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$

$\vec{Oy} \cap \mathcal{X}$

$y^2 = -b^2$

Сим. отн. $\vec{Oy}$ $F(c;0) \rightarrow F'(-c;0)$

$g: x = \frac{a^2}{c} \rightarrow g': x = -\frac{a^2}{c}$

$\Rightarrow \mathcal{X}$ - 2 фокуса F и F', 2 директр. g и g'

$l: y = kx$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow (b^2 - k^2a^2)x^2 = a^2b^2$

При $b^2 - k^2a^2 < 0 \Rightarrow \ell \cap \chi = \emptyset$

При $b^2 - k^2a^2 > 0 \Rightarrow \ell \cap \chi = \begin{cases} x_1 = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}} \\ x_2 = \dfrac{-ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}} \end{cases}$

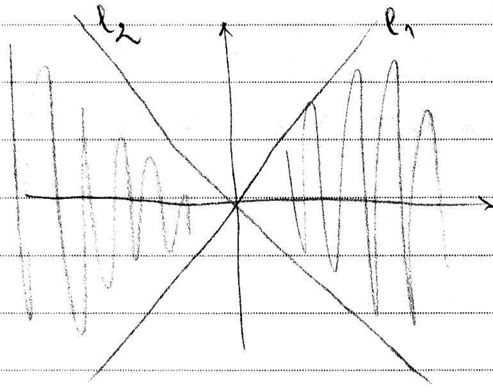
При $b^2 - k^2a^2 = 0$

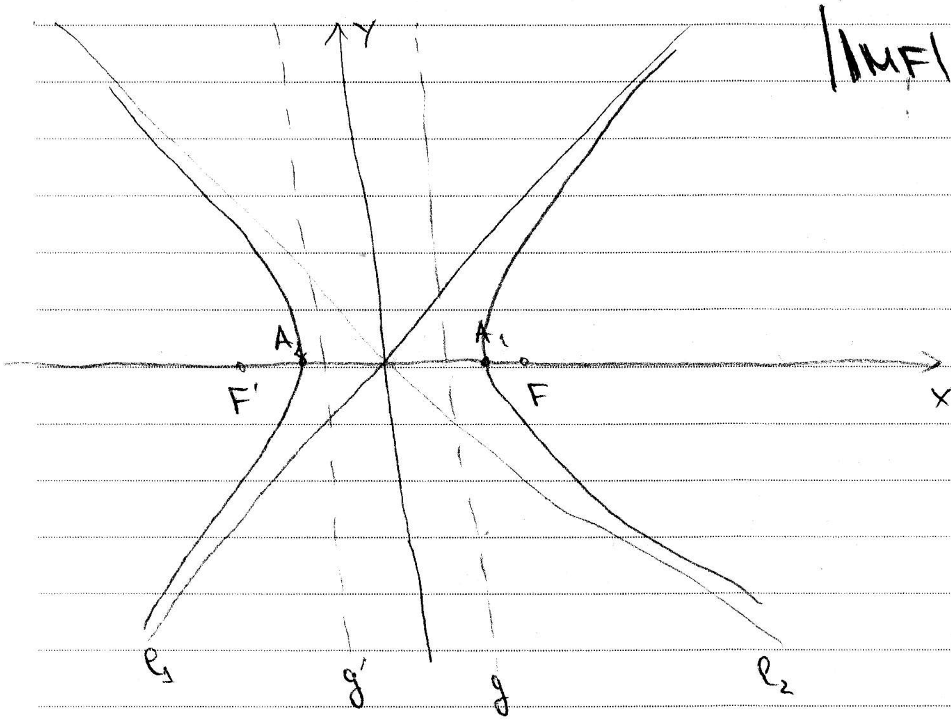
$\Rightarrow b = \pm ka$

$k_{1,2} = \pm \dfrac{b}{a} \Rightarrow \quad \ell_1 \Rightarrow y = \dfrac{b}{a}x$

$\ell_2 : y = -\dfrac{b}{a}x$

ℓ_1, ℓ_2 – асимптоти на хиперболата





$||MF| - |MF'|| = const = 2a$

$|MF'| = \left|\dfrac{c}{a}\cdot x + a\right| \qquad |MF| = \left|\dfrac{c}{a}x - a\right|$

$\dfrac{c}{a} = e$ – ексцентритӗт, $e > 1$

$a = b \Rightarrow \ell_1 : y = x \; , \; \ell_2 : y = -x$

$\Rightarrow \ell_1 \perp \ell_2 \Rightarrow$ равнораменна хипербола

21.12.2005 г.

Допирателна към крива от II-ра степен

$M_0 \in C$, $M(x, y, t)$

$t \cap M_0 \rightarrow t$ - допирателна

$M \in t$, t $M \notin C \Leftrightarrow f(M) \neq 0$

$f(M_0, M) = 0$

(1) $f_1(M_0) x + f_2(M_0) . y + f_3(M_0) . t = 0$

$\Rightarrow$ у-ето (кв) на допир. към в т. M_0 към C

$f_1(M_0) = f_2(M_0) = f_3(M_0) = 0$

$$(*) \left| \begin{array}{l} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} t_0 = 0 \\ a_{12} x_0 + a_{22} y_0 + a_{23} t_0 = 0 \\ a_{13} x_0 + a_{23} y_0 + a_{33} t_0 = 0 \end{array} \right.$$

$(x_0, y_0, t_0) \neq (0, 0, 0)$

(*) има р-е, ако

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Деф.: Ако $\Delta = 0 \Rightarrow M_0(x_0, y_0, t_0)$ се нарича особена точка за C.

Ако $M \in C$, $M \neq M_0$

$\Rightarrow M_0 M$ - образуваща на C

Крива, която има особени точки се нарича изродена крива от II степен.

! $\Delta \neq 0 \rightarrow$ неизродени криви от II степен.

Т: Във $\forall$ точка на неизродена крива от II степен $\forall M \in C$, $\Delta \neq 0$ има ! допирателна (тангента)

$t : t : f_1(M) x + f_2(M) . y + f_3(M) z t = 0$

Определяне на крива от II-ра степен с 5 точки

T_1: През $\forall$ 5 точки, никои 4 от които не са колинеарни, минава точно 1 крива от $\underline{II}$ степен.

$M_i(x_i, y_i, t_i)$, $i = \overline{1,5}$

Нека $C \ni M_i$

$\Rightarrow C: f(x, y, t) = a_{11}x^2 + \dots + a_{33}t^2 = 0$

$f(M_i) = 0$

$$(2) \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + \dots + a_{33}t_1^2 = 0 \\ a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + \dots + a_{33}t_2^2 = 0 \\ \dots\dots \\ a_{11}x_5^2 + 2a_{12}x_5y_5 + \dots + a_{33}t_5^2 = 0 \end{array} \right.$$

Уравн. на (2) са независими едно от друго!

Доп., че 5-то у-е е лин. комб. от 1, 2, 3, 4

$C \ni M_1, M_2, M_3, M_4$, то $M_5 \in C$

Нека $C_1 = \{M_1M_2, M_3M_4\}$

$M_5 \in C_1 \Rightarrow \vee\ M_5 \in M_1M_2 \ \vee\ M_5 \in M_3M_4$ (v)

$C_2 = \{M_1M_3, M_2M_4\}$, $M_5 \in C_2$

$\Rightarrow M_5 \in M_1M_3 \ \vee\ M_5 \in M_2M_4$ ($\wedge$)

От (v) и ($\wedge$) $\Rightarrow M_5 \equiv M_1$

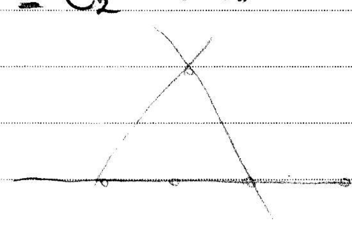
... $M_5 \equiv M_2$ ... $\Rightarrow$ ↯

$\Rightarrow$ (2) има ненулево р-е

T_2: $C_1: f_1(x, y, t) = 0$

$C_2: g(x, y, t) = 0$

$C_1 \equiv C_2 \iff f(x, y, t) = \rho \cdot g(x, y, t)$, $\rho \neq 0$



Сноп криви от $\underline{II}$ степен

$C_1: g(x, y, t) = a'_{11}x^2 + \dots + a'_{33}t^2 = 0$

$C_2: h(x, y, t) = a''_{11}x^2 + \dots + a''_{33}t^2 = 0$

$C_1 \neq C_2 \Rightarrow \nexists \rho \neq 0 : \rho . a'_{ij} = a''_{ij}$

$f(x,y,t) = \lambda . g(x,y,t) + \mu . H(x,y,t)$

$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

$f(x,y,t) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{33}t^2$

$a_{ij} = \lambda a'_{ij} + \mu a''_{ij} \neq 0$

$\Rightarrow f(x,y,t)$ - крива от II степен

$S_\lambda : f(x,y,t) = \lambda g(x,y,t) + \mu . h(x,y,t)$

$(\lambda, \mu) \neq (0;0)$.

- сноп криви от II ра степен

Ако $P \in C_1$, $P \in C_2 \Rightarrow P \in C$ за $\forall C \in S$

$P(x_0, y_0, t_0)$, $g(P) = 0$, $h(P) = 0$

$\Rightarrow f(P) = 0$

$\Rightarrow$ т. P - основна точка на снопа

T_0: $K_1, K_2 \in S$, $K_1(\lambda_1, \mu_1)$, $K_2(\lambda_2, \mu_2)$

$\Rightarrow$ 1) $K_1 \equiv K_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0$

$\lambda_2 = \rho \lambda_1$, $\mu_2 = \rho . \mu_1$

2) Ако M_0 не е основна т. за снопа, то през нея $\exists !$ крива K_0, $K_0 \in S$, $K_0 \ni M_0$

$(g(M_0), h(M_0)) \neq (0,0)$

Нека $\lambda_0 = h(M_0)$, $\mu_0 = -g(M_0)$

$(\lambda_0, \mu_0) \neq (0,0)$

$\Rightarrow \exists K_0 : f = \lambda_0 g + \mu_0 h = 0$

$K_0 \ni M_0 \Rightarrow$ има крива

Доп., че $\exists K^* : f = \lambda^* g + \mu^* h$, $K^* \ni M_0$

$\Rightarrow (*) \begin{vmatrix} \lambda_0 . g(M_0) + \mu_0 . h(M_0) = 0 \\ \lambda^* . g(M_0) + \mu^* . h(M_0) = 0 \end{vmatrix}$

$(*)$ има $(g(M_0), h(M_0)) \neq (0,0)$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda_0 & \mu_0 \\ \lambda^* & \mu^* \end{vmatrix} = 0$

От 1) $\Rightarrow K_0 \equiv K^*$

3) Ако $K_1 : p = \lambda_1 g + \mu_1 h = 0$

$K_2 : q = \lambda_2 g + \mu_2 h = 0$, $K_1 \neq K_2$

$\Rightarrow \bar{S} : f = \alpha k_* p + \beta . q \Rightarrow \bar{S} \equiv S$

$k_0 \in S \Rightarrow k_0 : f = \lambda_0 g + \mu_0 . h$

$k^* \in \bar{S} \Rightarrow k^* : e = \alpha . p + \beta . q$

$k^* : e = \alpha . (\lambda_1 g + \mu_1 h) + \beta . (\lambda_2 g + \mu_2 . h)$

$= (\alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2) . g + (\lambda \mu_1 + \beta \mu_2) . h = 0$

Доп., че $\begin{cases} \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 = 0 \\ \alpha \mu_1 + \beta \mu_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha \lambda_1 + \beta \lambda_2 = \rho . \lambda \\ \alpha \mu_1 + \beta \mu_2 = \rho . \mu \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow k_1 \neq k_2$

$\Rightarrow k^* \in S$

4) Ако P - основна точка на снопа S и $\ell \ni P$ - обща допир. на C_1 и C_2

$\Rightarrow \ell$ - допир. към $\forall k \in S$

ℓ доп. $C_1 \Rightarrow g_1(P) . x + g_2(P) . y + g_3(P) . t = 0$

ℓ доп. $C_2 \Rightarrow h_1(P) . x + h_2(P) . y + h_3(P) . t = 0$

$\Rightarrow h_i = \rho . g_i, \quad \rho \neq 0$

$\Rightarrow k : S = \lambda . g + \mu . h = 0, \quad k \ni P$

ℓ' - доп. към k в т. P

$\ell' : f_1(P) . x + f_2(P) . y + f_3(P) . t = 0$

$\ell' : (\lambda g_1(P) + \mu h_1(P)) . x + (\lambda g_2(P) + \mu h_2(P)) . y + (\lambda g_3(P) + \mu h_3(P)) . t = 0$

$\ell' : (\lambda + \rho \mu) . [g_1(P) . x + g_2(P) y + g_3(P) t] = 0$

$\Rightarrow \ell' \equiv \ell$

T_1: Нека P_1, P_2, P_3, P_4 са 4-ри точки в общо положение (никои $3 \not\in 1$ пр.)

$\ell_{ij} = P_i P_j \Rightarrow \ell_{ij} : \ell_{ij}(x, y, t) = 0 \Rightarrow$

$S : \lambda \ell_{12} . \ell_{34} + \mu \ell_{13} \ell_{24} = 0$

е сноп криви от $\underline{II}$ степен с основни т. $P_1, \dots, P_4$

$k_1 = \{ P_1 P_2, P_3 P_4 \}$

$k_2 = \{ P_2 P_3, P_4 P_1 \}$

$K_1 \neq K_2 \iff P_1P_2 \cap P_3P_4 \neq P_2P_3 \cap P_4P_1$

Нека $P \neq P_1, P_2, P_3, P_4$ е осн. т.

$P \ni K_1$, $P \ni K_2$

$\Rightarrow P \equiv P_1, \dots, P \equiv P_4$

$\Rightarrow$ няма друга основна точка

$P_5 \neq P_i \Rightarrow \exists!\, K \in S^0, \ni S, P \in K$

$\Rightarrow K: f = \lambda l_{12} l_{13} + \mu l_{13} l_{24} = 0$

$\lambda = l_{13}(P)\, l_{24}(P)$

$\mu = -l_{12}(P) \cdot l_{34}(P)$

T_2: Нека P_1, P_2, P_3 - Δ-к и $l \ni P_1$,
$l \not\ni P_2, P_3$

$l_{ij} = P_iP_j$

$\Rightarrow S = \lambda l . l_{23} + \mu l_{12} . l_{13} = 0$

е сноп криви от $\underline{II}$ степен
с осн. т. P_1, P_2, P_3 и обща допир. l.

$K_0 \in S$ $K_0: f = \lambda_0 l . l_{23} + \mu_0 l_{12} l_{13} = 0$

$M_0 \neq P_1, P_2, P_3$

$\Rightarrow K_0 \ni M_0 \Rightarrow \lambda_0 = l_{12}(M_0) . l_{13}(M_0)$

$\mu_0 = -l(M_0) . l_{23}(M_0)$

$K_0 \cap l = \{P_1, X\}$

$\begin{cases} \lambda_0 l . l_{23} + \mu_0 . l_{13} l_{23} = 0 \\ l = 0 \end{cases}$

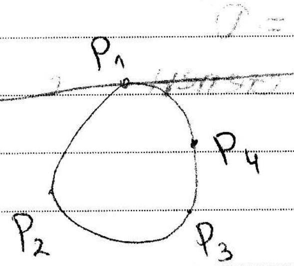
$\Rightarrow$ т. X : $\mu_0 l_{13} l_{23} = 0$

$\Rightarrow X_1 = \begin{cases} l_{12} = 0, & l = 0 \end{cases} \rightarrow P_1$

или $X_2 = \begin{cases} l_{13} = 0, & l = 0 \end{cases} \rightarrow P_1$

$\Leftarrow$ $\Rightarrow X \equiv P_1$

P_1, P_2, P_3

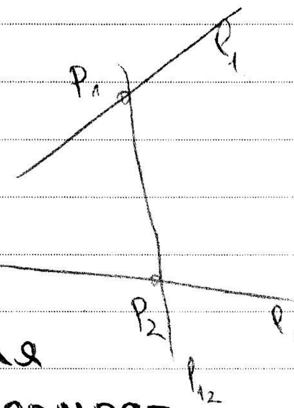


Крива от II степен еднозначно се определя с 4 т. и една допирателна.

T_3 : $P_1 \neq P_2 \Rightarrow l_1 \ni P_1$, $l_2 \ni P_2$, $l_1, l_2 \neq P_1P_2$

S : $\lambda l_1 l_2 + \mu l_{12}^2 = 0$

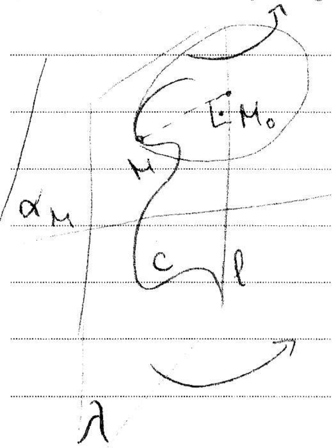
е сноп криви от II степен с осн. т. P_1, P_2 и общи допир. l_1, l_2.



Крива от II степен се определя еднозначно с 3 точки и 2 допират.

14.12.2005г.

Ротационни повърхнини



$l,\ \lambda \ni l$

$c \in \lambda$

S - ротационна повърхнина

$k_M(MM_0 = r,\ M_0)$

$k_M \subset \alpha_M \perp l$

k_M - паралел на S

$\beta \ni l,\ \beta \cap S = c_\beta$

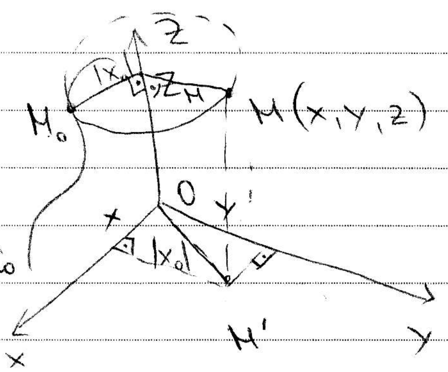
c_β - меридиан

l - ос на ротационната повърхнина

Нека $K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $O\vec{e}_3 \equiv l$

ОКС

$c_0 \in xOz$



$c_0 \begin{cases} \Phi(x,z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Нека $M_0 \in c_0$

$M_0 \longrightarrow M(x,y,z) \in S$

$M_0(x_0, 0, z_0)$

$|Z_M M_0| = |Z_M M| = |OM'| = r_{k_M}$

$\alpha_M = (M_0, Z_M, M)$ $\quad \alpha_M \perp Oz$

$\alpha_M \parallel Oxy$

$z = z_0$, $Z_M(0,0,z_0)$

$|Z_M M_0| = |x_0|$

$$x^2 + y^2 = x_0^2 \Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

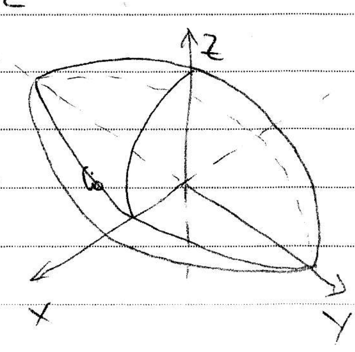
$$\Phi(x_0, z_0) = 0$$

$$S:\ \Phi\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z\right) = 0$$

Елипса в xOz

$c_0:\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow S:\ \dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$



$a > b$

Хомогенни координати. Безкрайни елементи в р-ната.

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \cancel{\vec{e}_3}\}$ АКС

$g: ax + by + c = 0$

$g \Leftrightarrow ax + by + c = 0$

$\{a, b, c\} \Rightarrow g, \quad (a, b) \neq (0, 0)$

a, b, c – координати (хомогенни) на пр. g

$g[a, b, c]$

$g[\lambda a, \lambda b, \lambda c], \quad \lambda \neq 0$

$M(X, Y)$

$M \in g \Leftrightarrow a\cancel{A}.X + b.Y + c.1 = 0$

$\Rightarrow M(X, Y, 1)$

$X, Y, 1$ – наредена тройка хомогенни коорд. на т. M

$a\rho X + b\rho.Y + c.\rho = 0, \quad \rho \neq 0$

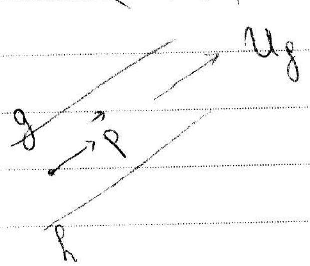
$\Rightarrow M(\rho.X, \rho.Y, \rho), \quad \rho \neq 0$

$M(X, Y)$ – нехомогенни координати $\Big\} \Rightarrow$

$M(x, y, t)$ – хомогенни коорд.

$X = \dfrac{x}{t}, \quad Y = \dfrac{y}{t}, \quad t \neq 0$

$M(x, y, t) \in g[a, b, c] \Leftrightarrow ax + by + ct = 0$



$g \parallel h$

$\Rightarrow g \cap h = U_g$

U_g – множеството от $g \cup \forall x \parallel g$

U_g – безкрайна точка, зададена от пр. g

$\vec{p} \parallel g \parallel h \ldots$

$\vec{p}(\lambda, \mu) \neq \vec{0}$

$g: ax + by + c = 0$

$\lambda.a + \mu.b = 0 \Leftrightarrow \lambda.a + \mu.b + 0.c = 0$

$\Rightarrow U_g(\lambda, \mu, 0)$

$U_g(\rho\lambda, \rho\mu, 0)$

M – крайна точка $\quad M(x, y, t), \quad t \neq 0$

$U_g \rightarrow U_g(\lambda, \mu, 0), \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$

$(0, 0, 0)$ не задава никаква точка

Постулиране: ∀ безкрайни точки лежат в/у една безкрайна права: $w = \{\forall u_g\}$

$w[0, 0, \rho]$, $\rho \neq 0$

$M(x, y, t)$ $(x, y, t) \neq (0, 0, 0)$

$(x, y, t) \equiv (\lambda x, \lambda y, \lambda t)$, $\lambda \neq 0$

$g[u, v, w]$, $[u, v, w] \neq [0, 0, 0]$

$[u, v, w] \equiv [\rho u, \rho v, \rho w]$

Разширена Евклидова р-на: Афинно-проективна р-на {р-на + безкрайни т. + безкр. пр.}

$M_1(x_1, y_1, t_1) \neq M_2(x_2, y_2, t_2)$

$r\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{pmatrix} = 2$ $g = M_1M_2$

$M(x, y, t) \in g$

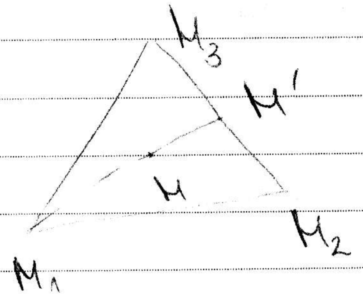
$$\begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2 \\ t = \lambda t_1 + \mu t_2 \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

$g: M = \lambda M_1 + \mu M_2$

$M_1, M_2, M \in g[a, b, c]$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax_1 + by_1 + ct_1 = 0 \\ ax_2 + by_2 + ct_2 = 0 \\ ax + by + ct = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \\ x & y & t \end{vmatrix} = 0$$



$M' = \alpha M_2 + \beta M_3$

$M = \lambda M_1 + \delta M'$

$M = \lambda M_1 + \mu M_2 + \nu M_3$

Алгебрични криви от втора степен в разширената р-на

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ АКС

$c: f(X, Y) = 0$

$$f(X,Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33} = 0 \quad (1)$$

$M(X, Y) \in c \Rightarrow f(M) = 0$

$\Rightarrow M(x, y, t)$, $X = \dfrac{x}{t}$, $Y = \dfrac{y}{t}$

$$c: f(x,y,t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0 \quad (2)$$

В (2) → вкл. се и безкр. т. в/у кривата от 2ра степен.

$$f_1(x,y,t) = f_1(M) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}t$$
$$f_2(x,y,t) = f_2(M) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}t$$
$$f_3(x,y,t) = f_3(M) = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}t$$

$$x.f_1(x,y,t) + y.f_2(x,y,t) + t.f_3(x,y,t) = f(x,y,t)$$

$$f(M_1, M_2) = f_1(M_1)x_2 + f_2(M_1).y_2 + f_3(M_1)t_2 =$$

билинейна форма $= f_1(M_2)x_1 + f_2(M_2)y_1 + f_3(M_2)t_1 = f(M_2, M_1)$

Общи точки с права на крива от II степен

$g: M = \lambda M_1 + \mu M_2$ $\quad g \cap c = ?$

$M \in c \Leftrightarrow f(M) = 0$

$$f(M) = f(\lambda M_1 + \mu M_2) = \lambda^2 f(M_1) + 2\lambda\mu.f(M_1, M_2) + \mu^2.f(M_2) = 0 \quad (3)$$

I сл. $M_1 \notin c$

$\Leftrightarrow f(M_1) \neq 0$ $\quad$ ~~(1+1)~~ $\cancel{\exists \lambda} \neq \emptyset$

$\mu \neq 0$ $\quad (3) \,/ : \mu^2$

$S = \dfrac{\lambda}{\mu} \Rightarrow f(M_1)S^2 + 2.f(M_1, M_2)S + f(M_2) = 0$

(4)

$$\frac{D}{4} = f(M_1, M_2)^2 - f(M_1).f(M_2)$$

1) $\Delta > 0 \Rightarrow 2 \neq$ р-я $\Rightarrow \lambda_{1,2}; \mu_{1,2} \Rightarrow M = \lambda_{1,2} M_1 + \mu_{1,2} M_2$

$\Rightarrow$ 2 общи т. на g ~~със~~ секущата

2) $\Delta = 0 \Rightarrow$ 1 реш. ; g - допирателна

3) $\Delta < 0 \Rightarrow$ 0 реш. ; g - външна

II. $M_1 \in C$

$f(M_1) = 0$

$\mu \neq 0$

(5) $2 f(M_1, M_2) . S + f(M_2) = 0$

(*) 1) $f(M_1, M_2) \neq 0$ - 1 р-е $\rightarrow$ секуща

2) $f(M_1, M_2) = 0$ и $f(M_2) \neq 0 \Rightarrow$ н.р. - допирателна $(M_1 = C \cap g)$

3) $f(M_1, M_2) = 0$, $f(M_2) = 0 \Rightarrow$ безброй р-е ∞

кривата съдържа правата

↳ правата се нарича образуваща.

04.01.2006г.

Полярност спрямо крива от IIра степен

K - неизродена крива от IIра степен

$\Delta \neq 0$

$K : f(x, y, t) = 0$

$\sum_{i=1}^{3} f_i^2 (M) \neq 0$

$\Psi : M_0(x_0, y_0, t_0) \xrightarrow{\Psi} g_0 [f_1(M_0), f_2(M_0), f_3(M_0)]$

$\ell [a, b, c] \xrightarrow{\Psi} N(x_1, y_1, z_1) \left\{ \begin{array}{l} a = f_1(N) \\ b = f_2(N) \\ c = f_3(N) \end{array} \right. \rightarrow$

$\rightarrow$ има ! р-е , $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

и $\Delta \neq 0$

$\Psi(M_0) = g_0$

$\Psi(\ell) = N$

→ полярност спрямо кривата K

M_0 – полюс, g_0 – поляра, N – полюс

$\psi(M_0) = g_0$ Ако $M_0 \in g_1 \Leftrightarrow M_1 \in g_0$

$\psi(M_1) = g_1$

$M_0(x_0, y_0, t_0) \rightarrow g_0[f_1(M_0), f_2(M_0), f_3(M_0)]$

$M_1(x_1, y_1, t_1) \rightarrow g_1[f_1(M_1), f_2(M_1), f_3(M_1)]$

$M_0 \in g_1 \Leftrightarrow f_1(M_1)x_0 + f_2(M_1)y_0 + f_3(M_1).t_0 = 0$

$\parallel$

$f_1(M_0).x_1 + f_2(M_0).\cancel{x}y_1 + f_3(M_0)t_1 = 0$

$\Rightarrow M_1 \in g_0$

M_1 и M_0 – спрегнати точки относно K

$f(M_0, M_1) = 0$

$\Rightarrow$ ~~f(~~

$M_0 \in g_0 \Rightarrow g_0$ – допир. към K

Нека $M_0 \notin K$

$\Rightarrow g_0 = \psi(M_0) \Rightarrow g_0$ – не е допир.

$g_0 \cap K = \{M_1, M_2\}$, $M_0 \neq M_1$; $M_0 \neq M_2$

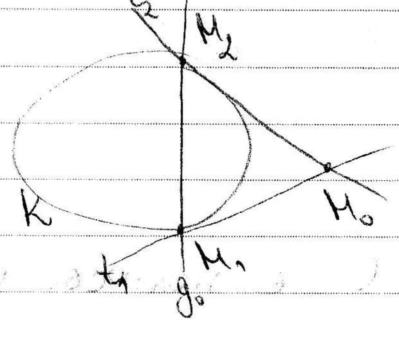
$g_1 \neq [f_1(M_1), f_2(M_1), f_3(M_1)]$ – доп.

$g_2[f_1(M_2), f_2(M_2), f_3(M_2)]$ – доп.

$M_1 \in g_0 \Rightarrow M_0 \in g_1$

$M_2 \in g_0 \Rightarrow M_0 \in g_2$

$\Rightarrow g_1 \cap g_2 = M_0$



$\Rightarrow$ алгоритъм за получаване на (два) допир. към K от външна точка

Безкрайни точки на крива от II степен

$K: f(x,y,t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots + a_{33}t^2 = 0$

$K \cap \omega = ?$ $\omega: t = 0$

Ако $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$

$t.(a_{13}x + \ldots + a_{32}t) = 0$ – получ. се безкр. права

$(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0)$

$U(\lambda, \mu, 0) \in K \Rightarrow$

$a_{11}\lambda^2 + 2a_{12}\lambda\mu + a_{22}\mu^2 = 0 \quad / : \mu^2 \neq 0$

$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

$s = \frac{\lambda}{\mu}$

$\Rightarrow a_{11}s^2 + 2a_{12}s + a_{22} = 0 \quad (1)$

$\Rightarrow D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -A_{33}$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \det A = \Delta$

$A_{33} = -D$

$\Rightarrow$ 1) $D > 0 \Rightarrow 2$ безкр. т. $\Rightarrow A_{33} < 0$

крива от хиперболичен тип

2) $D = 0 = A_{33} \Rightarrow 1$ безкр. т.

крива от параболичен тип

3) $D < 0 \Leftrightarrow A_{33} > 0 \Rightarrow 0$ безкр. т.

крива от елиптичен тип

Броят на безкр. т. на K – афинни св-ва

Център на крива от II степен

K – неизродена крива $\Delta \neq 0$

$K : f(x, y, t) = 0$

т. C – ц-р на K $\Leftrightarrow$ C е полюсът на безкр. права

т. $C = \Psi(\omega)$

$C(x_0, y_0, t_0) \qquad \omega[0, 0, \rho], \quad \rho \neq 0$

$$\left| \begin{array}{l} f_1(C) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}t_0 = 0 \\ f_2(C) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}t_0 = 0 \\ f_3(C) = a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}t_0 = \rho \end{array} \right. \quad (1)$$

Т: ∀ка неизродена крива от II степен има ! ц-р

C - безкрайна т. $\Leftrightarrow$ $C(x_0, y_0, 0)$

$$(v) \quad \begin{cases} a_{11} x_0 + a_{12} y_0 = 0 \\ a_{12} x_0 + a_{22} y_0 = 0 \end{cases} \qquad (x_0, y_0) \neq (0,0)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = 0$$

(*) ! крива от параболичен тип има безкр. ц-р

(**) хип. и елипт. тип - краен ц-р

(*) - нецентрална крива

(**) - централна крива

$A_{33} \neq 0 \rightarrow C(X_0, Y_0)$

$$X_0 = \frac{x_0}{t_0}, \quad Y_0 = \frac{y_0}{t_0}, \quad t_0 \neq 0$$

$$(1*) \quad \begin{cases} a_{11} X_0 + a_{12} Y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12} X_0 + a_{22} Y_0 + a_{23} = 0 \end{cases}$$

Ц-р се използва и за изродени криви ~~като~~ :0

точка с коорд. от (1*)

Централно у-е на крива от II-ра степен

K - с краен ц-р $C(x_0, y_0, 1)$

$\mathcal{K} = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (x, y) АКС $\rightarrow \mathcal{K}' = \{C, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (x', y')

$$(1): \begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

у-ето на K с/о $\mathcal{K}'$

$K^{\mathcal{K}}: f(x, y, 1) = a_{11} x^2 + \dots + a_{33} = 0$

$K^{\mathcal{K}'}: f'(x', y', 1) = a_{11} x'^2 + a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 + 2 f_1(C) . x' + 2 f_2(C) . y' + f_3(C) = 0$

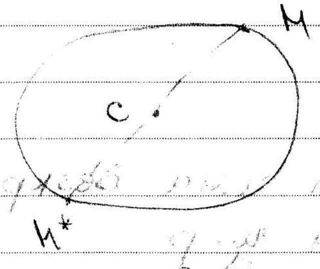
C - ц-р $\Rightarrow f_1(C) = f_2(C) = 0$

$$\Rightarrow K^{\mathcal{K}'}: a_{11} x'^2 + 2a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 + f_3(C) = 0 \qquad (2)$$

(2) централно у-е на кривата (ц-рът на К е началото на АКС)

$M(x', y') \in K \Rightarrow M^*(-x', -y') \in K$

$\Rightarrow$ C е ц-р на симетрия на кривата



$\mathcal{E}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

$(*) \left| \begin{array}{l} b^2x = 0 \\ a^2y = 0 \end{array} \right. \Rightarrow C(0,0)$

Диаметри и асимптоти на крива от II степен

О: Диаметър на К : Поляра на безкр. т. u

$\psi(\omega) = C$ - ц-р

$\psi(u) = d$ - диаметър

$u \in \omega \Rightarrow C \in d$

$\Rightarrow \forall$ диаметър $\in$ ц-ра на крива от II степен

Ако две безкр. т. са спрегнати

т.е. Ако $u_1 \in \psi(u_2) \Leftrightarrow u_2 \in \psi(u_1)$

u_1 и u_2 - спрегнати

$\Rightarrow d_1, d_2$ - спрегнати

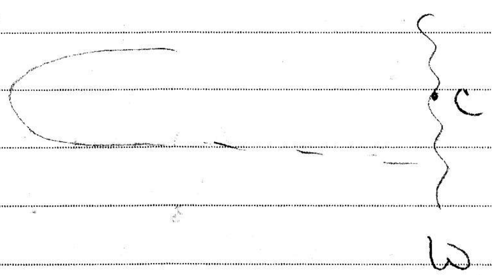
Ако $u \in K \Rightarrow \psi(u) = d$ - допирателна $\Rightarrow$

d-асимптота

К → парабол. тип

безкр. права $\Leftrightarrow$ допир.

т.е. асимптота



К – хиперб. тип – 2 реални безкр. т.

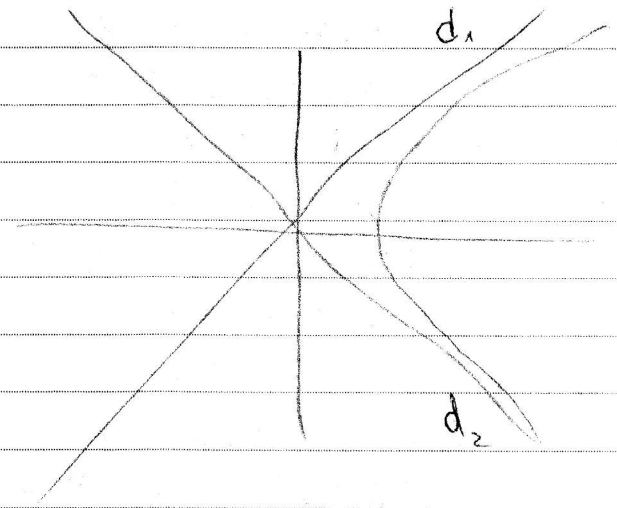
$\Rightarrow$ 2 асимптоти, които $\ni$ ц-ра

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = t^2 \Rightarrow U_1(a, b, 0)$

$U_2(-a, b, 0)$

$d_1: y = \frac{a}{b} \cdot x$

$d_2: y = -\frac{a}{b} \cdot x$



11.01.2006г.

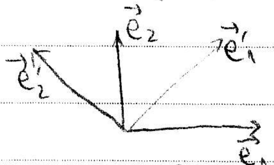
18.01 – 9:00 ч !

Главни направления на крива от II степен

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ОКС

(1) $c: f(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

$K' = \{O, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ ОКС (X, Y)



$\vec{e}_1' = (\alpha_1, \beta_1)$

$\vec{e}_2' = (\alpha_2, \beta_2)$

(2) $\begin{cases} x = \alpha_1 X + \alpha_2 Y \\ y = \beta_1 X + \beta_2 Y \end{cases}$

(3) $f(X,Y) = a_{11}' X^2 + 2a_{12}' XY + a_{22}' Y^2 + 2a_{13}' X + 2a_{23}' Y + a_{33}' = 0$

$a_{11}' = a_{11}\alpha_1^2 + 2a_{12}\alpha_1\beta_1 + a_{22}\beta_1^2$

$a_{12}' = 2a_{11}\alpha_1\alpha_2 + a_{12}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + a_{22}\beta_1\beta_2 =$

$= (a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_1)\alpha_1 + (a_{12}\cancel{\beta_2}\alpha_2 + a_{22}\beta_2)\beta_1$

$a_{22}' = a_{11}\alpha_2^2 + 2a_{12}\alpha_2\beta_2 + a_{22}.\beta_2^2$

$a_{13}' = \dots$

$a_{23}' = \dots \quad ; \quad a_{33}' = a_{33}$

$a_{12}' = 0 \quad ? \qquad \vec{e}_1', \vec{e}_2' = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2 = s.\alpha_2 \\ a_{12}\alpha_2 + a_{22}\beta_2 = s.\beta_2 \end{vmatrix} \quad ?$

$(4) \begin{vmatrix} a_{11}\alpha + a_{12}\beta = s\alpha \\ a_{12}\alpha + a_{22}\beta = s\beta \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow (4) \begin{vmatrix} (a_{11}-s)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{12}\alpha + (a_{22}-s)\beta = 0 \end{vmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-s \end{vmatrix} = 0$

(5) $s^2 - (a_{11}+a_{22})s + A_{33} = 0$ → характеристично у-е на кривата C

$D = (a_{11}+a_{22})^2 - 4A_{33} =$

$= \cancel{4}.(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$

I. $D = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = 0 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow s = s_1 = s_2 = \dfrac{a_{11}+a_{22}}{2} = a_{11}$

$\Rightarrow$ окръжност ← C

$\begin{vmatrix} 0.\alpha + 0.\beta = 0 \\ 0\alpha + 0.\beta = 0 \end{vmatrix} \quad , \forall \alpha, \beta$

II. $D > 0$

$(5) \rightarrow s_1 \neq s_2$

$s_1 \rightarrow (\alpha_1^*, \beta_1^*)$

$s_2 \rightarrow (\alpha_2, \beta_2)$

$+\left\{ \begin{vmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = s_1\alpha_1 \ /.\alpha_2 \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 = s_1\beta_1 \ /.\beta_2 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2 = s_2\alpha_2 \ /.\alpha_1 \\ a_{12}\alpha_2 + a_{22}\beta_2 = s_2\beta_2 \ /.\beta_1 \end{vmatrix} \right.$

$\Rightarrow \underbrace{(s_1 - s_2)}_{\neq 0}(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) = 0$

$\Rightarrow \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 0$

$\vec{e}_1'(\alpha_1, \beta_1) \quad \vec{e}_2'(\alpha_2, \beta_2)$ – главни направления на кривата C

$$a_{11}' = \alpha_1 . \underbrace{(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1)}_{S_1\alpha_1} + \beta_1 \underbrace{(a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1)}_{S_1\beta_1}$$

$$= S_1 \underbrace{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}_{1} = S_1$$

Аналог. $a_{22}' = S_2$

$$C^{K'}: \; S_1 x^2 + S_2 y^2 + 2a_{13}' x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$$

Метрични канонични уравнения на кривите от II степен

Класификация на кривите от II степен

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ОКС

$c: f(x, y, 1) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \dots + a_{33} = 0$

$(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$

$K' = \{O, \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$

$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ - главни направления

$$c^{K'} (\xi, \eta): \; F(\xi, \eta, 1) = S_1 \xi^2 + S_2 \eta^2 + 2a_{13}' . \xi + 2a_{23}' \eta + a_{33} = 0$$

I. c - централна крива - ц-р $M_0^{K'}(x_0, y_0)$

$A_{33} \neq 0 \Rightarrow S_1 \neq 0, \; S_2 \neq 0$

$K'' = \{M_0, \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$ (x, y)

$$\begin{cases} \xi = x + x_0 \\ \eta = y + y_0 \end{cases}$$

$c^{K''}: \; S_1 x^2 + S_2 y^2 + a_{33}' = 0$

$(a_{33}' = F(x_0, y_0))$

II. c - <u>не</u>централна ; няма краен ц-р

$\Leftrightarrow A_{33} = 0$

$\Rightarrow S_1 = 0, \; S_2 \neq 0$

$K' \to K''$

$K'' = \{N_0, \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$ $N_0(\lambda, \mu)$

$$\begin{cases} \xi = x + \lambda \\ \eta = y + \mu \end{cases}$$

$$c^{K''}: \; S_2 y^2 + 2a_{13}' x + 2(S_2\mu + a_{23}')y + 2a_{13}'\lambda + 2a_{23}'\mu + a_{33} + S_2\mu^2 = 0$$

$S_2 \neq 0 \Rightarrow \mu = -\frac{a_{23}'}{S_2}$

$\Rightarrow S_2 \mu + a_{23}' = 0$

$\Pi_1 : a_{13}' \neq 0 \qquad \lambda = -\frac{1}{2a_{13}'} \cdot (2a_{23}' \mu + a_{33} + S_2 \mu^2)$

$\Rightarrow C^{k''} : S_2 y^2 + 2a_{13}' x = 0$

$\Pi_2 : a_{13}' = 0, \qquad \lambda = 0$

$C^{k''} : S_2 y^2 + a_{33}' = 0$

Т: За $\forall$ крива от II-ра степен $\exists$ ОКС, с/о която у-ето на кривата е от 1 от следните видове:

$$\text{I.} \quad S_1 x^2 + S_2 y^2 + a_{33}' = 0$$
$$S_1 \neq 0, \quad S_2 \neq 0$$

$$\text{II.} \quad S_2 y^2 + 2a_{13}' x = 0$$
$$S_2 \neq 0, \quad a_{13}' \neq 0$$

$$\text{III.} \quad S_2 y^2 + a_{33}' = 0$$
$$S_2 \neq 0$$

Ia) $a_{33}' \neq 0$

$$\frac{x^2}{-\frac{a_{33}'}{S_1}} + \frac{y^2}{-\frac{a_{33}'}{S_2}} = 1$$

Ia₁) $-\frac{a_{33}'}{S_1} = a^2 > 0, \quad -\frac{a_{33}'}{S_2} = b^2 > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{– елипса}$$

Ia₂) $-\frac{a_{33}'}{S_1}, -\frac{a_{33}'}{S_2} < 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{– имагинерна елипса}$$

Ia₃) $S_1 \cdot S_2 < 0$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{– хипербола}$$

IV в) $a_{33}' = 0$

$S_1 X^2 + S_2 Y^2 = 0$

$S_1 . S_2 > 0$

$X^2 = -\frac{S_2}{S_1} . Y^2$

→ двойка имагинерни пресекателни прави

$S_1 . S_2 < 0$

$X^2 = \underbrace{-\frac{S_2}{S_1}}_{> 0} Y^2$ → двойка реални пресекателни прави

II. $Y^2 = -\frac{2a_{13}'}{S_2} . X$ → парабола

III. а) $a_{33}' \neq 0$

$Y^2 = -\frac{a_{33}'}{S_2}$

$-\frac{a_{33}'}{S_2} > 0 \Rightarrow$ 2 ∥ прави

$-\frac{a_{33}'}{S_2} > 0 \Rightarrow$ 2 имагинерни ∥ прави

III в) $a_{33}' = 0$

$Y^2 = 0$ → двойка реални сливащи се прави $(\vec{Ox})$

$C: a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + \dots + a_{33} = 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots \\ \dots & a_{33} \end{vmatrix}$

$D = A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, $I = a_{11} + a_{22}$

Δ	D	Крива	
$\Delta \neq 0$	$D > 0$	$\Delta I < 0$	реална елипса
		$\Delta I > 0$	имагинерна елипса
	$D < 0$	хипербола	
	$D = 0$	парабола	
$\Delta = 0$	$D > 0$	2 имагинерни пресекателни прави	
	$D < 0$	2 реални пресекателни прави	
	$D = 0$	2 $\parallel$ или сливащи се прави	

18.01.2006г.

Повърхнини от втора степен

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{14} & \dots & \dots & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad r(A) \geq 3$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-S & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-S & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-S \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{има } 3 \text{ р-я}$$

Метрични канонични у-я на повърхнини от II-ра степен

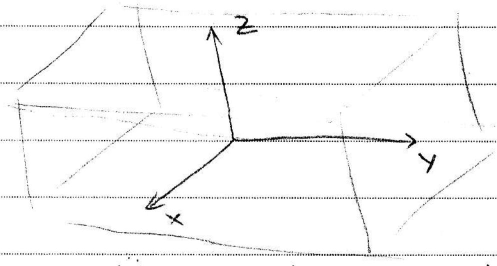
1) Реален елипсоид

$K = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ орт.

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2} \Rightarrow \text{let } |z| \leq c$$

Аналог. $|x| \le a$, $|y| \le b$



$A_1(a,0,0)$, $A_2(-a,0,0)$
$B_1(0,b,0)$, $B_2(0,-b,0)$
$C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$

$\gamma: z = h \parallel (xOy)$

$\gamma \cap E = E_1$

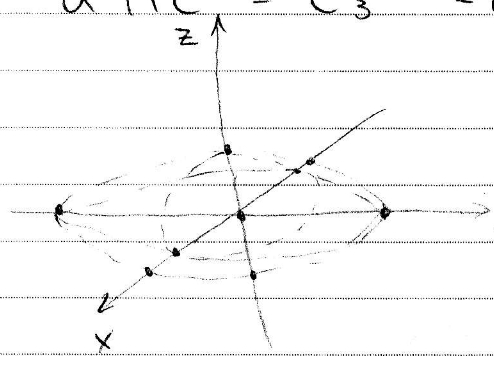
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2} > 0.$$

$\beta \parallel (xOz)$

$\beta \cap E = E_2$ - елипса

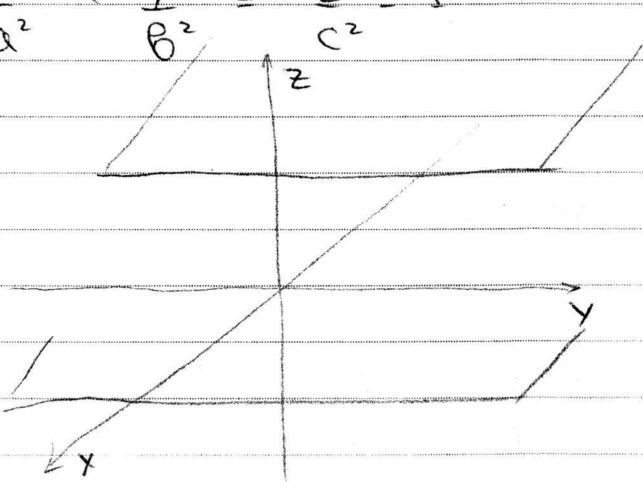
$\alpha \parallel (yOz)$

$\alpha \cap E = E_3$ - елипса



2) Двоен хиперболоид

$$\chi: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1 \qquad |z| \ge c$$



$C_1(0,0,c)$, $C_2(0,0,-c)$

$\gamma \parallel (xOy)$

$\gamma: \quad z = h \qquad |h| > c$

$\chi \cap \gamma = \chi_1$

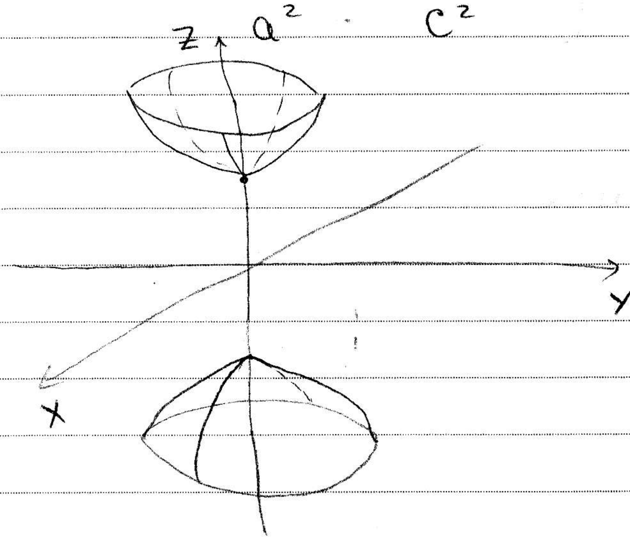
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 > 0 \qquad \text{елипса}$$

$\beta \parallel (xOz)$

$\beta: \quad y = m$

$\chi \cap \beta = \chi_2$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{m^2}{b^2} - 1 \qquad - \text{хипербола}$$



$$\ell: \begin{cases} x = x_0 + m\lambda \\ y = y_0 + n\lambda \\ z = z_0 \end{cases} \qquad \ell \parallel (xOy)$$

3) Елиптичен параболоид

$$\Pi: \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \qquad z \geq 0$$

$O(0,0,0)$ - връх на Π

$\gamma \parallel (xOy)$

$\gamma: z = h > 0$

$$\Pi \cap \gamma = \Pi_1 : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h > 0 \quad (\text{елипса})$$

$\beta \parallel (xOz)$; $\beta : y = m$

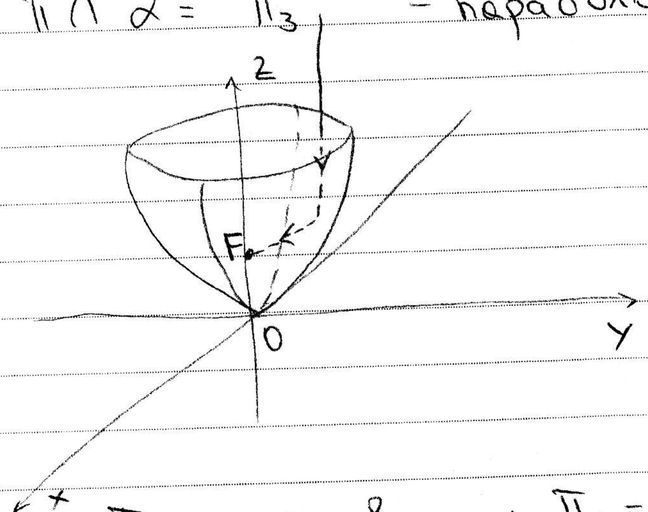
$\Pi \cap \beta = \Pi_2$

$\frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{m^2}{b^2}$ - парабола

$\alpha \parallel (yOz)$

$\alpha : x = m$

$\Pi \cap \alpha = \Pi_3$ - парабола



При $a = b$: Π_1 = окр.

$\Rightarrow$ ротационен параболоид.

Повърхнини, съдържащи реални прави

1) Прост хиперболоид

$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}$

$A_1(a, 0, 0)$ $A_2(-a, 0, 0)$

$B_1(0, b, 0)$ $B_2(0, -b, 0)$

$\gamma : z = h$

$\mathcal{H} \cap \gamma = \mathcal{H}_1$

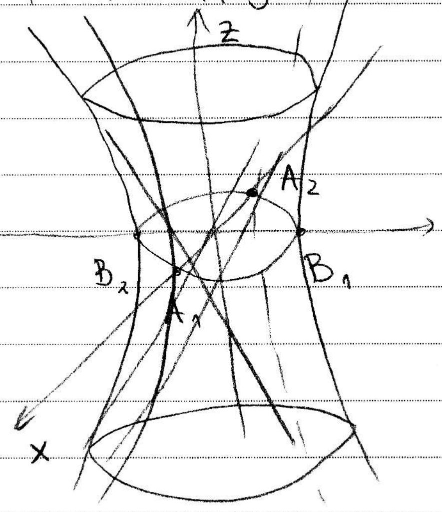
$\mathcal{H}_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$ - елипса

$\beta : y = m$

$\beta \cap \mathcal{H} = \mathcal{H}_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2}{b^2}$ - хипербола

$\alpha : x = n$

$\alpha \cap H = H_3$ – хипербола



развиваеми (линейни) повърхнини

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\mathcal{H} : \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

$$l_{\lambda,\mu} : \begin{cases} \alpha : \lambda . \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu . \left(1 + \frac{y}{b}\right) \\ \beta : \mu . \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda . \left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

$$(\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

$$\alpha \cap \beta = l_{\lambda,\mu}$$

всички тези прави са 2×2 кръстосани

безброй много

Нека $M_0 \in l$; $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$M_0 \in \mathcal{H}$

$$\lambda . \mu . \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \mu . \lambda . \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$\Rightarrow \forall$ т. $\in l$ лежат в/у $\mathcal{H}$

$\forall\ l$ – образуващи на хиперболоида

$$l'_{\lambda',\mu'} : \begin{cases} \alpha' : \lambda' . \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \mu' \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \beta' : \mu' . \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda' . \left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases}$$

$M_0 \in l'_{\lambda',\mu'} \Rightarrow M_0 \in \mathcal{H}$

... Аналог. на $l_{\lambda,\mu}$

През $\forall$ т. на един $\mathcal{H}$

2 двойка прави образуващи на хиперболоида

2) Хиперболичен параболоид

$\Pi : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$

връх $O(0,0,0)$

$\gamma : z = h$

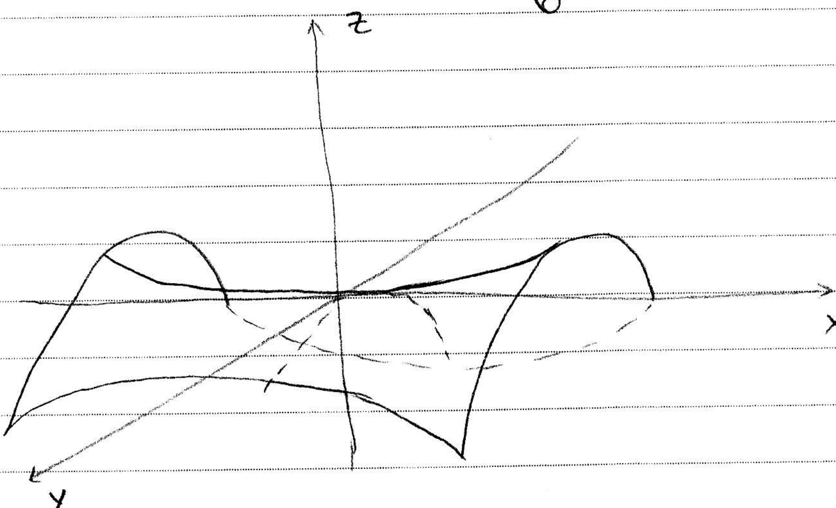
$\Pi \cap \gamma = \Pi_1 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2h$: хипербола

$\beta : y = m$

$\Pi \cap \beta = \Pi_2 : \dfrac{x^2}{a^2} = 2z + \dfrac{m^2}{b^2}$ - парабола

$\alpha : x = n$

$\Pi \cap \alpha = \Pi_3 : \dfrac{y^2}{b^2} = -2z + \dfrac{n^2}{a^2}$ - парабола



състои се само от прави линии

$\Pi : \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 2z$

$l_{\lambda,\mu} \begin{cases} \alpha : \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 2\mu \\ \beta : \mu\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \lambda z \end{cases} \qquad (\lambda,\mu) \neq (0,0)$

$\ell_{\lambda,\mu} = \alpha \cap \beta$

$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \ell_{\lambda,\mu}$

$\Rightarrow M_0 \in \Pi$

$$\ell'_{\lambda',\mu'} : \begin{cases} \alpha' : \lambda' \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = \cancel{A}\, z\mu' \\ \beta' : \mu' \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2\lambda' \end{cases}$$

През $\forall$ т. на Π $\exists$ точно 2 образуващи на ~~хи~~параболоида.