

Задачи

Аналитична геометрия

1. Векторно и смесено произведение на свободни вектори

Задача 1. Дадени са векторите $\vec{a}(3, -1, -2)$, $\vec{b}(1, 2, -1)$, $\vec{c}(1, 1, -1)$. Намерете координатите на $\vec{a} \times \vec{b}$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ и пресметнете $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Отг.: $\vec{a} \times \vec{b} = (5, 1, 7)$, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-8, 12, 4)$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -1$.

Задача 2. За кои стойности на параметъра $\lambda \in \mathbb{R}$ векторът $\vec{c}(\lambda - 1, 2\lambda + 1, -\lambda)$ е ортогонален на $\vec{a} \times \vec{b}$, където $\vec{a}(1, 2, 0)$ и $\vec{b}(1, -1, 1)$.

Отг. Пресмятаме $\vec{a} \times \vec{b} = (2, -1, -3)$. Тогава $\vec{a} \times \vec{b} = (2, -1, -3) \perp \vec{c}$, точно когато $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$, откъдето получаваме $\lambda = 1$.

Задача 3. Намерете разстоянието от точка $A(1, 1)$ до правата, определена от точките $B(-3, 4)$ и $C(13, -4)$.

Отг. Нека разстоянието от A до правата BC е h . Разглеждаме $\triangle ABC$. От една страна $S_{\triangle ABC} = \frac{|\vec{BC}| \cdot h}{2} = 4\sqrt{5}h$. От друга страна имаме $S_{\triangle ABC} = \frac{|\vec{BC} \times \vec{BA}|}{2}$. Пресмятаме $\vec{BC} \times \vec{BA} = (0, 0, -16)$ и следователно $S_{\triangle ABC} = 8$. Тогава от първия израз за лицето намираме $h = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Задача 4. Дадени са точките $A(-1, 2, 3)$, $B(0, 4, 4)$, $C(2, 0, 2)$, $D(-1, 3, 2)$. Намерете разстоянието от D до равнината ABC .

Отг. $\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 4, -8)$, $S_{ABC} = 2\sqrt{5}$, $V_{ABCD} = 2$. Следователно разстоянието от D до ABC е равно на $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

2. Уравнение на права в равнина

Задача 5. Намерете общото уравнение на права:

- през т. $M(2, 1)$, сключваща ъгъл 135° с положителната посока на оста Ox ;
- през т. $A(-2, 0)$ и $B(0, 3)$;
- през т. $N(1, -4)$, успоредна на правата $p: 2x - 5y + 2 = 0$;
- през т. $P(-3, 1)$, перпендикулярна на правата $q: 4x - y + 3 = 0$.

Отг.: а) $x + y - 3 = 0$; б) $3x - 2y + 6 = 0$; в) $2x - 5y - 22 = 0$; г) $x + 4y - 1 = 0$.

Задача 6. Относно ортонормирана координатна система в равнината Oxy са дадени точките: $A(2, -2)$ и $B(4, 2)$.

- Намерете т. C от правата $x - y = 0$ такава, че $\triangle ABC$ да бъде правоъгълен с прав ъгъл при върха C .
- Намерете уравненията на страните на $\triangle ABC$ за получената т. C в подточка а). Кои от страните са успоредни на координатните оси?

Отг. а) От C лежи на правата $x - y = 0$ следва, че $C(x, x)$. Пресмятаме $\vec{AC}(x-2, x+2)$ и $\vec{BC}(x-4, x-2)$. Тогава $\angle ACB = 90^\circ$, точно когато $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$, откъдето намираме $x = 2$. Следователно $C(2, 2)$.

- $AB: 2x - y - 6 = 0$; $AC: x - 2 = 0$; $BC: y - 2 = 0$. Страната AC е успоредна на Oy , а страната BC - на Ox .

Задача 7. Даден е успоредник $ABCD$ с върхове $A(2, 1)$, $B(-1, 0)$ и пресечна точка на диагоналите $Q(1, 1)$. Намерете координатите на върховете C , D и медицентъра G на $\triangle ABQ$, уравненията на страните на успоредника, както и лицето на $ABCD$.

Отг.: Q е среда на диагоналите AC и BD и следователно $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$. Тогава $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OB}$. Така получаваме $C(0, 1)$, $D(3, 2)$. Имаме още $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OQ})$, следователно $G(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. $AB : x - 3y + 1 = 0$, $CD : x - 3y + 3 = 0$, $AD : x - y - 1 = 0$, $BC : x - y + 1 = 0$, $S_{ABCD} = 1$.

Задача 8. Нека $A(1, 7)$ е връх на $\triangle ABC$. Ако правите $p : 2x + 3y - 10 = 0$, $q : x = -3 + 2s, y = s$ са симетралаи съответно на страните AB и AC , намерете координатите на върховете B и C и лицето на триъгълника.

Отг. Първо построяваме уравненията на страните AB и AC , използвайки условията, че минават през т. A и че за всяка от тях знаем по една перпендикулярна на нея права – нейната симетрала. Така получаваме $AB : 3x - 2y + 11 = 0$ и $AC : 2x + y - 9 = 0$. Нека означим съответно с M и N средите на AB и BC . Координатите на тези точки намираме като решение на системата от уравнението на страната, на която лежи и уравнението на съответната ѝ симетрала. Имаме $M(-1, 4)$ и $N(3, 3)$. Сега можем да намерим $B(-3, 1)$ и $C(-5, -1)$. Накрая пресмятаме $S = 2$.

3. Уравнение на права и равнина в тримерно пространство

Задача 9. Дадени са т. $A(1, -4, 3)$, $B(3, -3, 2)$, права $a : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{2}$ и равнина $\alpha : 2x - 3y + z - 3 = 0$. Намерете:

- равнина β през т. A и B и успоредна на правата a ;
- равнина γ , успоредна на α и на разстояние $\sqrt{14}$ от нея;
- т. B' - ортогонално симетрична на B относно равнината α .
- т. P от правата a , която е на разстояние $\frac{7}{\sqrt{14}}$ от равнината α .

Отг. а) $\beta : x - 5y - 3z - 12 = 0$; б) $\gamma_1 : 2x - 3y + z + 11 = 0$, $\gamma_2 : 2x - 3y + z - 17 = 0$; в) $B'(-1, 3, 0)$; г) $P_1(-1, 2, 4)$, $P_2(1, 0, 8)$.

Задача 10. Дадени са точките $M(1, 2, 1)$, $N(1, 0, 1)$, правите $a : \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$, $b : x = -1 + 2s, y = 3 + 4s, z = 3s$ и равнината $\alpha : 2x + y - 2z - 1 = 0$. Намерете:

- права l , минаваща през т. M и N ;
- права m , минаваща през т. M и перпендикулярна на равнината α ;
- равнина β , съдържаща т. M и успоредна на правите a и b ;
- равнина γ , минаваща през т. N и успоредна на α ;
- равнина δ , съдържаща т. N , успоредна на b и перпендикулярна на α ;
- разстоянието $d(M, \alpha)$ от M до α ;
- т. M' - ортогонално симетрична на M относно правата a .

Отг. а) $l : \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{0}$; б) $m : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-2}$; в) $\beta : x - 2y + 2z + 1 = 0$; г) $\gamma : 2x + y - 2z = 0$; д) $\delta : 11x - 10y + 6z - 17 = 0$; е) $d(M, \alpha) = \frac{1}{3}$; ж) $M'(5, -3, 0)$.