Записки за упражненията по Числени методи, СИ, II курс, зимен семестър, 2012/2013

Тихомир Иванов

29 януари 2013 г.

Съдържание

Глава 1

Интерполация

1.1 Интерполационна задача на Лагранж

Постановка на задачата. Нека x_0, x_1, ..., x_n са дадени различни точки от реалната права и $y_0, y_1, \ldots, y_n$ са дадени реални числа. Искаме да построим полином $P(x) \in \pi_n$ (π_n – класът от всички алгебрични полиноми от степен, ненадминаваща n) такъв, че

$$\left|\begin{array}{l} P(x_0) = y_0 \\ P(x_1) = y_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P(x_n) = y_n \end{array}\right. \tag{1.1}$$

Твърдение 1. *Съществува, при това единствен, полином $P(x) \in \pi_n$, удовлетворяващ интерполационната задача на Лагранж.*

Преди да представим начини за построяване на този полином, нека коментираме накратко практическия смисъл на разглежданата задача.

- Когато се моделира дадено явление, се правят експерименти и определен брой измервания. Т.е. получаваме крайно множество от наредени двойки от вида $(x, f(x))$, през които можем да построим единствен полином. Така, както ще видим с примери по-нататък, интерполацията е един от възможните начини да се намери функция, която описва даденото явление.

- Ако имаме функция $f(x)$, стойността на която е трудно да бъде пресметната (например $\sin x$, e^x и др.), можем да постъпим по следния начин: пресмятаме стойността на $f(x)$ в няколко точки и построяваме интерполационния полином, минаващ през тези точки. Както ще покажем, с този полином можем да намерим приближено стойността на $f(x)$ и за други необходими стойности на аргумента.

1.2 Метод на неопределените коефициенти

Първият и най-очевиден начин за намиране на полином, удовлетворяващ формулираната задача, е директното решаване на системата, зададена от условията (1.1). Ще го илюстрираме с пример:

Задача 1. Да се намери полином $P(x) \in \pi_3$, удовлетворяващ условията

$$P(1) = 2;\ P(2) = 9;\ P(4) = 41;\ P(6) = 97$$

Решение. Търсеният полином е от степен, ненадминаваща 3, и следователно общият му вид е

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Условията от задачата ни задават линейна система алгебрични уравнения спрямо коефициентите на този полином:

$$\left|\begin{aligned} a + b + c + d &= 2 \\ 8a + 4b + 2c + d &= 9 \\ 64a + 16b + 4c + d &= 41 \\ 216a + 36b + 6c + d &= 97. \end{aligned}\right.$$

Да отбележим, че четирите условия еднозначно определят точно 4 коефициента (един от тях е свободният член), т.е. полином от степен ≤ 3. Решаваме системата с помощта на Mathematica:

```
In[51]:= Solve[{a + b + c + d == 2, 8 a + 4 b + 2 c + d == 9,
           64 a + 16 b + 4 c + d == 41, 216 a + 36 b + 6 c + d == 97}, {a, b, c, d}]

Out[51]= {{a → 0, b → 3, c → -2, d → 1}}
```

Тогава търсеният полином е $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$. ■

Въпреки привидната простота на този метод, трябва да се имат предвид някои неща:

- Ако търсим полином от по-висока степен (удовлетворяващ повече интерполационни условия), трябва да решим система с висока размерност, а това не е никак лека работа.
- Решаването на системи уравнения с помощта на компютър (и числени методи), е свързано с получаването на някаква грешка. В частност, системи, при които матрицата на системата е матрица на Вандермонд, са „лоши” за числено решаване – получават се по-големи грешки. Както знаем от лекции, системите, които се получават при решаване на интерполационната задача на Лагранж, имат точно такава матрица.

1.3 Интерполационна формула на Лагранж

Твърдение 2 (Интерполационна формула на Лагранж)**.** *Полиномът, удовлетворяващ условията (1.1), се представя по формулата*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k,$$

където $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ *са базисните полиноми на Лагранж. Те изпълняват условията*

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{ако } k \neq i \\ 1, & \text{ако } k = i \end{cases}$$

и се задават с формулата

$$l_k(x) = \prod_{i=0,\ i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Ще обясним смисъла на формулата отново чрез пример. Нека отново вземем интерполационните условия от Задача 1, но този път да построим полинома $P(x)$ по формулата на Лагранж:

Задача 2. Като се използва интерполационната формула на Лагранж, да се намери полином $P(x) \in \pi_3$, удовлетворяващ условията

$$P(1) = 2;\ P(2) = 9;\ P(4) = 41;\ P(6) = 97$$

Решение. Нека означим

$$x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 6;$$

$$y_0 = 2,\ y_1 = 9,\ y_2 = 41,\ y_3 = 97.$$

Първо ще построим базисните полиноми на Лагранж. За полинома $l_0(x)$ искаме да се нулира във всички възли освен в x_0. В x_0 стойността му трябва да бъде 1. Тогава имаме

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}.$$

Действително, във възлите x_1, x_2, x_3 съответно първият, вторият и третият множител в числителя става 0 и цялата дроб е 0. Във възела x_0 получаваме

$$l_0(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = 1,$$

т.е. така дефинираният полином $l_0(x)$ изпълнява поставените му условия. Като заместим x_0, x_1, x_2, x_3 с техните равни, получаваме окончателно за $l_0(x)$

$$l_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(1-2)(1-4)(1-6)} = -\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{15}.$$

Аналогично имаме

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(2-1)(2-4)(2-6)} = \frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{8};$$
$$l_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(4-1)(4-2)(4-6)} = -\frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{12};$$
$$l_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(6-1)(6-2)(6-4)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{40}.$$

Тогава интерполационният полином, удовлетворяващ задачата, може да бъде представен във вида

$$P(x) = l_0(x).y_0 + l_1(x).y_1 + l_2(x).y_2 + l_3(x).y_3.$$

За да се убедим в това, нека проверим какво се случва, например, в точката $x = x_1$. Имаме $l_0(x_1) = l_2(x_1) = l_3(x_1) = 0$ и $l_1(x_1) = 1$. Тогава

$$P(x_1) = 0.y_0 + 1.y_1 + 0.y_2 + 0.y_3 = y_1.$$

Аналогично се вижда, че този полином удовлетворява интерполационните условия и в другите възли.

И така, получихме

$$P(x) = l_0(x).2 + l_1(x).9 + l_2(x).41 + l_3(x).97.$$

След заместване и опростяване, получаваме окончателно

$$P(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

■

Оттук нататък с $L_n(f; x)$ ще бележим интерполационния полином от ред n за функцията f, а с $\omega(x)$ ще бележим $(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$, където x_0, x_1, ..., x_n са дадени различни точки.

Твърдение 3. *Нека $[a, b]$ е даден краен интервал и x_0, ..., x_n са различни точки в него. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната $(n+1)$-ва производна в този интервал. Тогава за всяко $x \in [a, b]$ съществува точка $\xi \in [a, b]$ такава, че*

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

Да видим сега как можем да оценим приближено стойността на дадена функция в някоя точка, използвайки интерполация.

Задача 3. Да се намери приближено стойността на $\sin\dfrac{\pi}{5}$ и да се даде оценка на грешката при апроксимация.

Решение. Очевидно оценяването на функцията $f(x) = \sin x$ в дадена точка не е никак проста работа. Ето защо, вместо да работим с тази функция, ние ще намерим нейно приближение и ще работим с него. Да изберем първо възли, в които да интерполираме. Точки, в които стойността на $\sin x$ ни е известна, са например $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$ (съответните стойности на $f(x)$ в тези точки са $0, 1/2, \sqrt{3}/2, 1)$. Ще намерим полинома $L_3(f; x)$, който интерполира функцията $f(x)$ в тези точки. За целта първо намираме базисните полиноми на Лагранж:

$$l_0(x) = \frac{(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{2})}{(0 - \frac{\pi}{6})(0 - \frac{\pi}{3})(0 - \frac{\pi}{2})};$$
$$l_1(x) = \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{6} - 0)(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3})(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2})};$$
$$l_2(x) = \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{3} - 0)(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})};$$
$$l_3(x) = \frac{(x - 0)(x - \frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{2} - 0)(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})}.$$

Тогава получаваме

$$L_3(f;x) = l_0(x).0 + l_1(x).\frac{1}{2} + l_2(x).\frac{\sqrt{3}}{2} + l_3(x).1.$$

След кратки преобразования получаваме

$$L_3(x) \approx 1.02043x - 0.0654708x^2 - 0.113872x^3.$$

Сега вече можем да намерим стойността на полинома $L_3(x)$ при $x = \frac{\pi}{5}$, тъй като тя ще бъде „близо" до истинската стойност на $\sin\frac{\pi}{5}$. Получаваме $L_3\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0.587061$.

Остана да дадем оценка за това колко „близо" всъщност е стойността, която ние сме намерили, до точната стойност. С други думи искаме да дадем оценка за грешката

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) = \left| f\left(\frac{\pi}{5}\right) - L_3\left(f;\frac{\pi}{5}\right) \right|.$$

От Твърдение 3 непосредствено следва, че

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!} \left|\omega\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|,$$

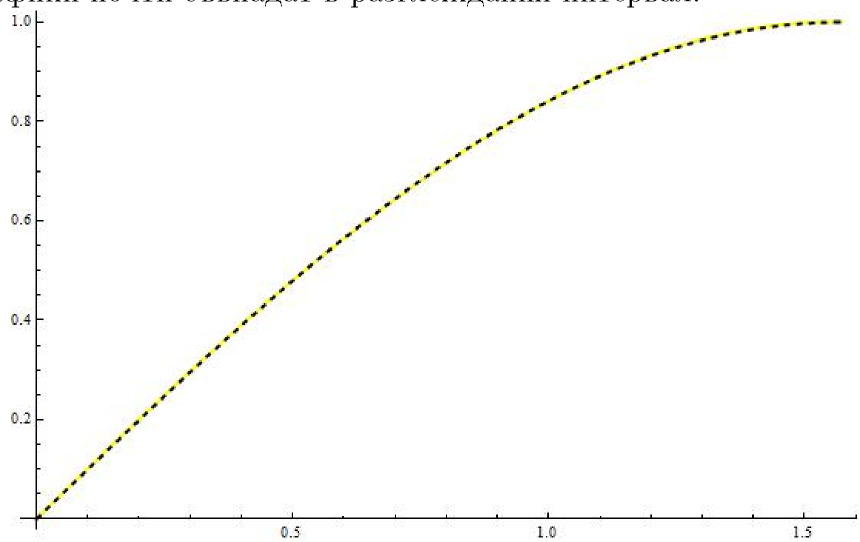
където ξ е число от интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Имаме $f^{(4)}(\xi) = \sin\xi$.В интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функцията $\sin x$ приема стойности между 0 и 1, т.е. $|f^{(4)}(\xi)| \leq 1$. Тогава

$$R\left(\frac{\pi}{5}\right) \leq \frac{1}{24} \left|\omega\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| \approx 0.00108232.$$

Окончателно получихме, че грешката по абсолютна стойност не надминава 0.0011. Ако сравним стойността, която ние получихме (0.587061) със стойността, която Mathematica връща за $\sin\frac{\pi}{5}$ (0.587785), ще се убедим, че това действително е така. Обърнете внимание, че това е оценка отгоре за грешката, т.е. тя може и да е значително по-малка.

Да обърнем внимание и че можехме да намерим по-добро приближение на $\sin\frac{\pi}{5}$, ако бяхме подбрали интерполационните възли по по-подходящ начин или бяхме взели повече възли.

Да илюстрираме графично решението на задачата – заместваме функцията $\sin x$ (която на фигурата е с черната пунктирана линия) с интерполационния полином от степен 3 $L_3(f;x)$ (жълтата непрекъсната линия). Както виждаме, двете графики почти съвпадат в разглеждания интервал.



Нека разгледаме още един пример, показващ как се оценява грешката при приближаване на дадена функция с нейния интерполационен полином.

Задача 4. Стойността на $\ln 15.2$ е намерена приблизително по следния начин: взети са точните стойности на $\ln 15$ и $\ln 16$ и е използвана линейна интерполация (построен е интерполационния полином от първа степен за възлите $x_0 = 15$ и $x_1 = 16$). Нека с x и y са означени съответно точната и приближената стойност на $\ln 15.2$. Докажете, че

$$0 < x - y < 4.10^{-4}$$

Решение. Нека $f(t) = \ln t$. Тогава грешката е

$$x - y = \frac{f''(\xi)}{2}(15.2 - 15)(15.2 - 16), \quad \xi \in (15, 16)$$

Тъй като $f''(t) = -\dfrac{1}{t^2}$, получаваме

$$x - y = -\frac{0,2.(-0,8)}{2\xi^2} = \frac{4}{50\xi^2}.$$

От една страна, $x-y$ очевидно е положително. От друга, най-голямата стойност на грешката се достига, когато знаменателят е най-малък, т.е. при $\xi = 15$. Тогава имаме

$$0 < x - y < \frac{4}{50.15^2} = \frac{4}{2.3^2.5^4} < \frac{4}{10^4}. \blacksquare$$

Твърдение 4. *Ако $f(x)$ е полином от степен, ненадминаваща n, то $f(x) \equiv L_n(f;x)$.*

Задача 5. Да се разложи в сума от елементарни дроби функцията

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Решение. Нека означим числителя с $g(x) = x^2 - x - 1$ и да построим интерполационния полином на Лагранж от степен 2 за функцията $g(x)$ във възлите $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Съответните стойности на g са -1, 1, 5

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2} \\
l_1(x) &= \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{-1} \\
l_2(x) &= \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \\
L_2(g;x) &= \frac{(x-2)(x-3)}{2}.(-1) + \frac{(x-1)(x-3)}{-1}.1 + \frac{(x-1)(x-2)}{2}.5.
\end{aligned}$$

Тъй като $g(x)$ е полином от втора степен, то $g(x) \equiv L_2(g;x)$ и тогава получаваме окончателно

$$f(x) = \frac{-1}{2(x-1)} - \frac{1}{x-2} + \frac{5}{2(x-3)}. \blacksquare$$

Следващите няколко задачи са свързани с единствеността на интерполационния полином и Твърдение 4, което е следствие от нея.

Задача 6. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1.$$

Решение. Нека $f(x) = 1 \in \pi_n, \forall n$. Тогава от Твърдение 4 следва, че $f(x) \equiv L_n(f;x)$, но

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x).f(x_k) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x),$$

откъдето следва исканото равенство. ■

Задача 7. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} (x - x_k)^m l_k(x) = 0,\ m = 1, \dots, n$$

Решение. Нека фиксираме x да бъде някое отнапред избрано число и да разгледаме функцията

$$f(t) = (x - t)^m.$$

Имаме, че $f(t)$ е полином от степен m и тогава $f(t)$ съвпада с кой да е свой интерполационен полином от степен, не по-малка от m. Получаваме:

$$f(t) \equiv L_n(f;\ t)$$

$$(x - t)^m = \sum_{k=0}^{n} (x - x_k)^m l_k(t),$$

като горното равенство е изпълнено за всяко t. Тогава то е изпълнено, в частност, и за $t = x$. Получаваме

$$f(x) = L_n(f;\ x)$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (x - x_k)^m l_k(x). \blacksquare$$

Задача 8. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} (x - x_k)^{n+1} l_k(x) = (-1)^n \omega(x)$$

Решение. Нека вземем x да бъде някое произволно число и да го фиксираме. Нека $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$. Нека

$$R(t) = \varphi(t) - L_n(\varphi; t) = \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k).l_k(t),$$

т.е.разглеждаме грешката при интерполиране на $\varphi(t)$ с полином от степен n. Знаем, че $\varphi(x_k) = L_n(\varphi, x_k)$, т.е. $R(x_k) = 0$ за $k = 0, ..., n$. $R(t)$ е полином от степен $n+1$ и следователно x_0, ..., x_n са всичките нули на този полином. Тогава получаваме

$$R(t) = C.(x - x_0)...(x - x_n) = C.\omega(t),$$

където константата C трябва да е равна на старшия коефициент във $\varphi(t)$ (Защо?), т.е. $(-1)^{n+1}$. Получихме, че

$$R(t) = \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k).l_k(t) = (-1)^{n+1}.\omega(t), \forall t.$$

Тогава имаме

$$R(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k).l_k(x) = 0 - \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k).l_k(x) = (-1)^{n+1}.\omega(x).$$

Делим двете страни на -1 и получаваме равенството от условието. ■

Задача 9. Да се докаже, че $\omega'(x_k) = (x_k - x_0)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)$.

Решение. С цел по-голяма конкретност, ще докажем, че $\omega'(x_0) = (x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_n)$, като аналогично се вижда за стойността на $\omega'(x)$ в останалите възли. Имаме

$$\omega(x) = \underbrace{(x - x_0)}_{A(x)}\underbrace{(x - x_1)\dots(x - x_n)}_{B(x)}.$$

Тогава

$$\omega'(x) = A'(x)B(x) + A(x)B'(x) = 1.(x - x_1)\dots(x - x_n) + (x - x_0).B'(x)$$

Получаваме

$$\omega'(x_0) = (x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_n) + B'(x_0).\cancelto{0}{(x_0 - x_0)} = (x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_n). \blacksquare$$

От горната задача непосредствено следва следното

Твърдение 5. *k-тият базисен полином на Лагранж може да се представи във вида*

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

Тогава за интерполационния полином на Лагранж получаваме представянето

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.f(x_k).$$

Задача 10. Да се докаже, че ако $P(x) \in \pi_n$, то

$$\frac{P(x)}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(x_k)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.$$

Решение. Умножаваме двете страни на исканото равенство с $\omega(x)$ и получаваме, че то е еквивалентно на равенството

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P(x_k)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}.\omega(x),$$

но дясната страна е точно полинома на Лагранж $L_n(P; x)$ за функцията $P(x)$ и тъй като $P(x)$ е полином от степен, ненадминаваща n, имаме, че равенството действително е изпълнено. ■

1.4 Разделени разлики. Интерполационна формула на Нютон

Дефиниция 1. *Нека $x_0, x_1, \ldots, x_n$ са дадени различни точки.* ***Разделената разлика*** *на функцията $f(x)$ в точките $x_0, \ldots, x_n$ се бележи с $f[x_0, \ldots, x_n]$ и се дефинира индуктивно по следния начин:*

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

като приемаме, че $f[x_i] := f(x_i)$ за всяка точка x_i.

Твърдение 6 (Интерполационна формула на Нютон)**.** *Интерполационният полином на Лагранж може да се представи чрез формулата*

$$L_n(f; x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_k](x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}).$$

Задача 11. Като използвате интерполационната формула на Нютон, намерете полинома $P(x)$, който интерполира функцията $f(x) = \sqrt{x} + 3x^2 - x + 2$ в точките 0,1,4.

Решение. Нека първо систематизираме интерполационните условия в таблица. За целта трябва да пресметнем стойността на $f(x)$ в точките 0, 1, 4. Получаваме

x	0	1	4
$f(x)$	2	5	48

Използвайки интерполационната формула на Нютон, получаваме представянето

$$L_2(f; x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$$

Тогава трябва да пресметнем разделените разлики, участващи във формулата. Удобно е тези пресмятания да се систематизират в следната таблица:

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 2$	$f[x_0, x_1] = 3$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{34}{12} = \frac{17}{6}$
$x_1 = 1$	$f[x_1] = 5$	$f[x_1, x_2] = \frac{43}{3}$	
$x_2 = 4$	$f[x_2] = 48$		

Коефициентите, необходими ни за формулата на Нютон, се намират в първия ред на така получената таблица. Получаваме

$$L_2(f;x) = 2+3(x-0)+\frac{17}{6}(x-0)(x-1) = 2+3x+\frac{17}{6}x^2-\frac{17}{6}x = 2+\frac{1}{6}x+\frac{17}{6}x^2 \blacksquare$$

Задача 12. Точките

x	-2	1	4	-1	3	-4
y	-1	2	59	4	24	-53

лежат на полином. Определете степента на този полином.

Решение. От единствеността на интерполационния полином и прилагайки формулата на Нютон, получаваме $P(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{5} f[x_0,\dots,x_k](x-x_0)\dots(x-x_{k-1})$ Както в предишната задача правим таблица с необходимите ни разделени разлики (обърнете внимание, че не е необходимо възлите да бъдат в нарастващ ред):

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3	4	5
$x_0=-2$	$f[x_0]=-1$	$f[x_0,x_1]=1$	$f[x_0,x_1,x_2]=3$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=1$	0	0
$x_1=1$	$f[x_1]=2$	$f[x_1,x_2]=19$	$f[x_1,x_2,x_3]=4$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=1$	0	
$x_2=4$	$f[x_2]=59$	$f[x_2,x_3]=11$	$f[x_2,x_3,x_4]=-6$	$f[x_2,x_3,x_4,x_5]=1$		
$x_3=-1$	$f[x_3]=4$	$f[x_3,x_4]=5$	$f[x_3,x_4,x_5]=-2$			
$x_4=3$	$f[x_4]=24$	$f[x_4,x_5]=11$				
$x_5=-4$	$f[x_5]=-53$					

Коефициентите във формулата на Нютон лежат на първия ред и тогава последният ненулев член е $f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$. Следователно полиномът е от трета степен. $\blacksquare$

Сега ще дадем още една дефиниция на понятието разделена разлика, която е еквивалентна на Дефиниция 1

Дефиниция 2. *Разделената разлика $f[x_0,x_1,\dots,x_n]$ е коефициентът пред x^n в полинома на Лагранж $L_n(f;x)$, интерполиращ функцията $f(x)$ в точките $x_0,\dots,x_n$.*

Следващите задачи имат за цел да илюстрират това свойство на разделените разлики.

Задача 13. Нека $f(x)=x^n$. Докажете, че $f[x_0,\dots,x_n]=1$.

Решение. Тъй като $f(x)\in\pi_n$, то $f(x)\equiv L_n(f;x)$, т.е. $L_n(f;x)=x^n$, но $f[x_0,\dots,x_n]$ е точно коефициентът пред x^n в $L_n(f;x)$, т.е. $f[x_0,\dots,x_n]=1$. $\blacksquare$

Задача 14. Да се докаже, че $f[x_0,\dots,x_n] = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{1}{\omega'(x_k)}$

Решение. $f[x_0,\dots,x_n]$ е коефициентът пред x^n в $L_n(f;x)$. От Твърдение 5 имаме, че

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_k)\dots(x-x_n)}{\omega'(x_k)} \in \pi_n.$$

Тогава коефициентът пред x^n в k-тия базисен полином е $\dfrac{1}{\omega'(x_k)}$. Следователно коефициентът пред x^n в $L_n(f;x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$ е

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k).\frac{1}{\omega'(x_k)},$$

и той е равен точно на $f[x_0, \dots, x_n]$. ■

Нека формулираме резултата от тази задача като твърдение, тъй като ще го използваме и по-нататък:

Твърдение 7.

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{1}{\omega'(x_k)}$$

Задача 15. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^m}{\omega'(x_k)} = 0, \quad m = 0, \dots, n-1$$

Решение. Нека $f(x) = x^m$. Тогава $f(x) \in \pi_n$ и следователно $L_n(f;x) \equiv f(x) = x^m$. $f[x_0, \dots, x_n]$ е коефициентът пред x^n в $L_n(f;x)$, т.е. $f[x_0, \dots, x_n] = 0$ (тъй като $m < n$, коефициентът пред x^n е 0). От друга страна, от Твърдение 7 имаме, че

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{1}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^m}{\omega'(x_k)}$$

Тогава от двете представяния за $f[x_0, \dots, x_n]$ получихме окончателно

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^m}{\omega'(x_k)}. \blacksquare$$

Задача 16. Да се докаже, че $\sum\limits_{k=0}^{n} x_k \dfrac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = n(n+1)$

Решение. Нека $f(x) = x.\omega''(x)$. Имаме:

$$\begin{aligned}
\omega(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = x^{n+1} + \dots \\
\omega'(x) &= (n+1)x^n + \dots \\
\omega''(x) &= (n+1)nx^{n-1} + \dots \\
f(x) &= x\omega''(x) = (n+1)nx^n + \dots
\end{aligned}$$

Т.е. получихме, че $f(x) \in \pi_n$. Следователно $f(x) \equiv L_n(f;x)$. Следователно коефициентът пред x^n (който е равен на $f[x_0, \dots, x_n]$) в $L_n(f;x)$ е $(n+1)n$. От друга страна, от Твърдение 7 имаме

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{1}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k.\omega''(x_k) \frac{1}{\omega'(x_k)}.$$

Окончателно получихме

$$n(n+1) = \sum_{k=0}^{n} x_k.\omega''(x_k)\frac{1}{\omega'(x_k)},$$

което и искахме да докажем. ■

Нека дефинираме функции в Mathematica, които пресмятат разделени разлики и намират интерполационния полином на Лагранж по зададена функция и които ще използваме по-нататък. Тъй като в Mathematica индексацията в списъците започва от 1, нека означим интерполационните възли с $x_1,\ldots,x_n$. Тогава интерполационната формула на Нютон ще изглежда така:

$$L_n(f;x) = f[x_1] + \sum_{k=2}^{n} f[x_1,\ldots,x_k](x-x_1)\ldots(x-x_{k-1}).$$

Вземайки предвид това, ще дефинираме следните функции:

- $diff[start,end]$ – изчислява разделената разлика $f[x_{start},\ldots,x_{end}]$. ($diff[a,a]$ пресмята $f[x_a]$).
- $newtonPoly[x]$ – намира интерполационния полином на Лагранж от степен n за функцията $f(x)$ във възлите $nodes$.

```
In[71]:= diff[start_, end_] := If[start == end,
              f[nodes[[start]]],
              (diff[start + 1, end] - diff[start, end - 1]) / (nodes[[end]] - nodes[[start]])
         ]
```

Нека използваме тази функция, за да пресметнем, например, разделената разлика $f[x_1,x_2,x_3]$ за функцията $f(x) = \sqrt{x} + 3x^2 - x + 2$ във възлите 0,1,4.

```
In[72]:= diff[1, 3]

Out[72]= 17/6

In[65]:= n=2;
         f[x_]:=Sqrt[x]+3x^2-x+2
         nodes={0,1,4};

In[69]:= newtonPoly[x_]:= Sum[(diff[1, k] Product[N[x-nodes[[j]]], {j,1,k-1}]), {k,2,n+1}] +diff[1,1]

In[70]:= newtonPoly[x] // Expand

Out[70]= 2 + 0.166667 x + 17 x^2/6
```

Ще предложим още един вариант за функция, намираща полинома на Лагранж във формата на Нютон – този път решението е итеративно и в този смисъл ни показва алгоритъм за решаване на задачата (който може да се имплементира и на други езици за програмиране).

```
In[63]:= newtonPolyIterative[x_]:=(
        res=0;
        Do[
            product=1;
            Do[
                product*=x-nodes[[j]],
                {j, 1, k-1}
            ];
            res+=diff[1,k]*product,
            {k, 1, n+1}
        ];
        res
    )
```

1.5 Някои практически въпроси, свързани с интерполирането с алгебрични полиноми

Тук ще разгледаме някои свойства на интерполацията, които трябва да се имат предвид, когато използваме интерполация, за да приближим дадена функция или да моделираме дадено явление.

Първо ще дадем следната

Дефиниция 3. *Когато използваме интерполационния полином за приближаване на стойност в интервала, определен от интерполационните възли, говорим за* ***интерполация****. В противен случай, говорим за* ***екстраполация****.*

Да започнем с моделирането на едно реално явление, за да видим как това може да стане посредством интерполация.

Задача 17. В таблицата са дадени данни за населението на САЩ в периода 1920-1990. Да се построи полином от степен 7, интерполиращ таблицата. Да се даде приближение на населението през 1952, 1974, 2000 година и да се сравни с действителните стойности – съответно 157 млн., 214 млн., 281,42 млн.

Година	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Население	106.46	123.08	132.12	152.27	180.67	205.05	227.23	249.46

Решение. Ще използваме програмата в Mathematica, която предложихме в предния параграф.

```
n=7;
nodes=Table[x, {x,1920,1990,10}];
f[x_]:=Which[x==1920, 106.46, x==1930, 123.08, x==1940, 132.12,
                  x==1950, 152.27, x==1960, 180.67, x==1970, 205.05,
                  x==1980, 227.23, x==1990, 249.46]
p[x_]:=newtonPoly[x]//Expand;
```

In[164]:= `p[1952]`

Out[164]= `157.728`

In[165]:= `p[1974]`

Out[165]= `213.511`

In[166]:= `p[2000]`

Out[166]= `175.08`

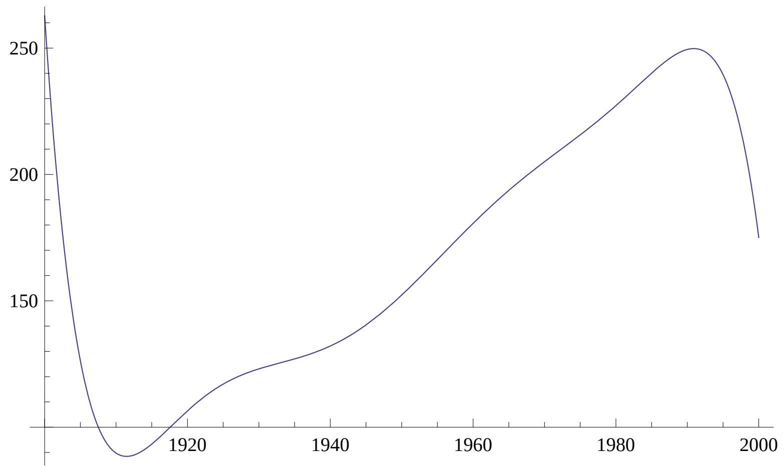
Получихме следните приближения:

- През 1952 година, 157.728 млн. (в действителност 157 млн.)
- През 1974 година, 213.511 млн. (в действителност 214 млн.)
- През 2000 година 175.08 млн. (в действителност 281,42 млн.)

В първите два случая приближението е добро и относителната грешка е малка. В третия обаче, полученият с интерполационния полином резултат няма нищо общо с действителността. **При екстраполация не можем да разчитаме на това, че явлението ще бъде добре моделирано.** Полиномът няма точки, за които да се „хване" и поведението му е в някакъв смисъл произволно. Можем да се убедим в този факт, като видим и графиката на полинома. Обърнете внимание как в границите на интерполация (между 1920 и 1990) поведението му добре моделира нарастването на населението, а извън тях това не е така.

In[168]:= `Plot[p[x], {x, 1900, 2000}]`

Out[168]=

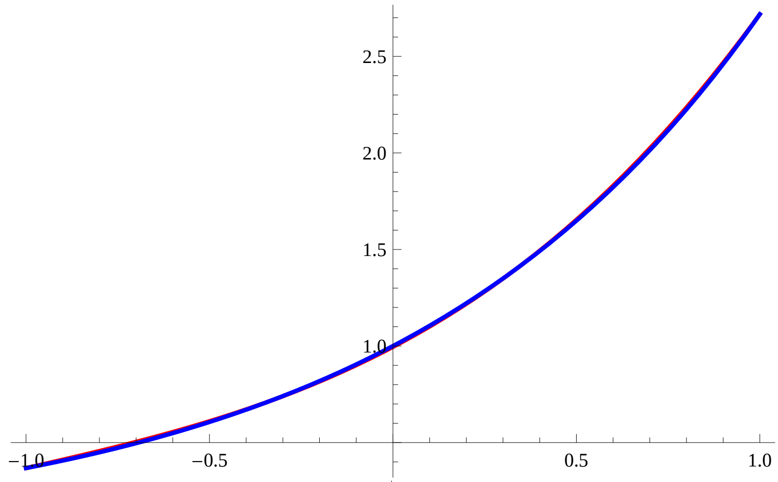


Задача 18. Да се даде приближение за функцията $f(x) = e^x$ в интервала $[-1, 1]$. За целта да се построи интерполационен полином от степен 3. Да се изчертаят графиките на интерполационния полином и функцията в една координатна система в интервалите $[-1, 1]$ и $[-6, 6]$. Същото да се направи и за грешката.

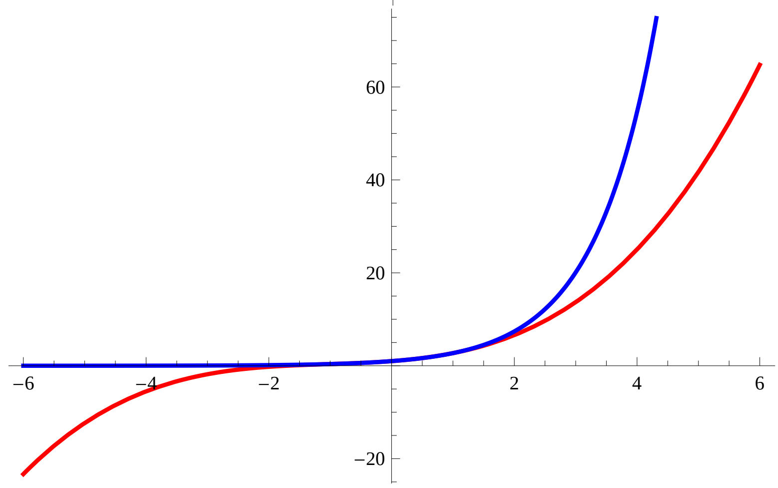
Решение. Отново работим, използвайки Mathematica.

```
In[135]:= n=3;
nodes:=Table[-1 + 2 (k-1)/n, {k, 1, n+1}]
f[x_]:=E^x
p[x_]=newtonPoly[x]//Expand;
Plot[{p[x], E^x}, {x, nodes[[1]], nodes[[n+1]]},
            PlotStyle→{{Red, Thick}, {Blue, Thick}}]
Plot[{p[x], E^x}, {x, nodes[[1]]-5, nodes[[n+1]]+5},
            PlotStyle→{{Red, Thick}, {Blue, Thick}}]
Plot[Abs[p[x]-E^x], {x,nodes[[1]],nodes[[n+1]]}]
```

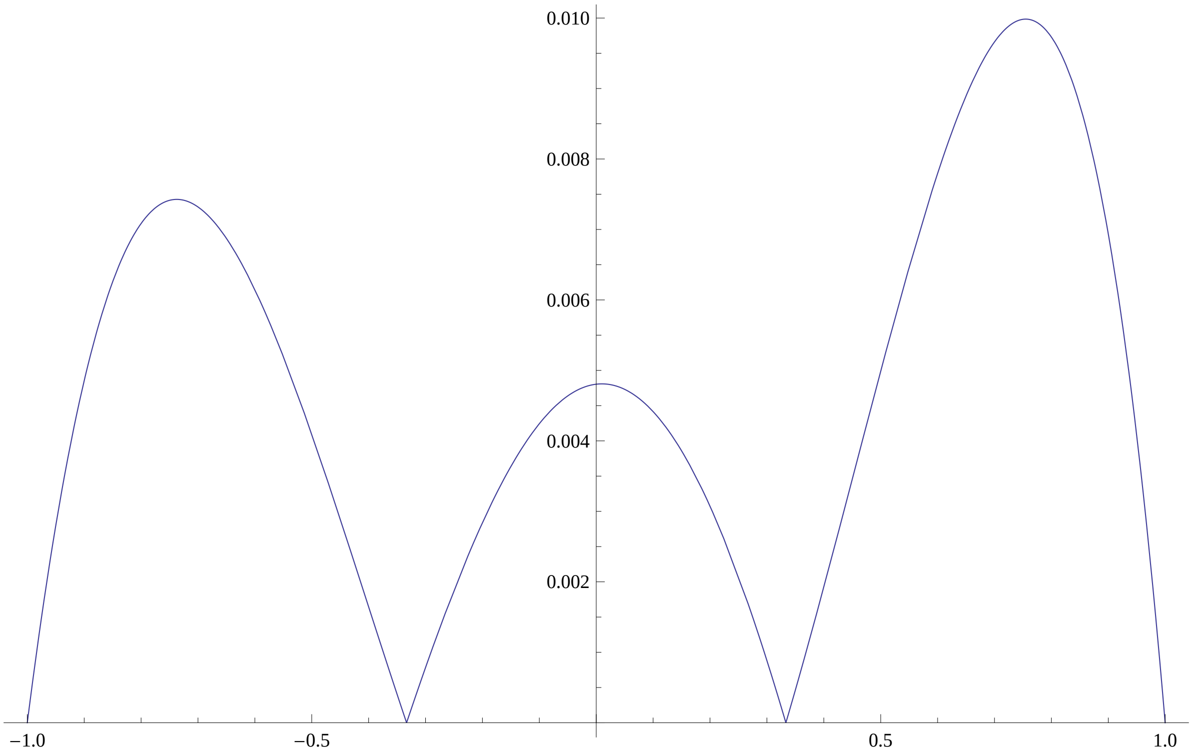
Out[132]=



Out[133]=



От първата фигура виждаме как функцията и интерполационният и́ полином почти съвпадат в границите на интерполация. На втората обаче е ясно, че при екстраполация не можем да разчитаме на същото. Очевидно функцията e^x расте по-бързо от всеки полином и двете графики бързо започват да се раздалечават при $x > 1$. За стойностите на $x < -1$ също поведението на двете функции е коренно различно. На долната фигура сме показали грешката при интерполация (по абсолютна стойност). Виждаме, че в средата на интервала тя е по-малка. Добре е, когато интерполираме, възлите да са подбрани така, че точката, в която искаме да намерим приближената стойност, да е близо до средата на интервала.

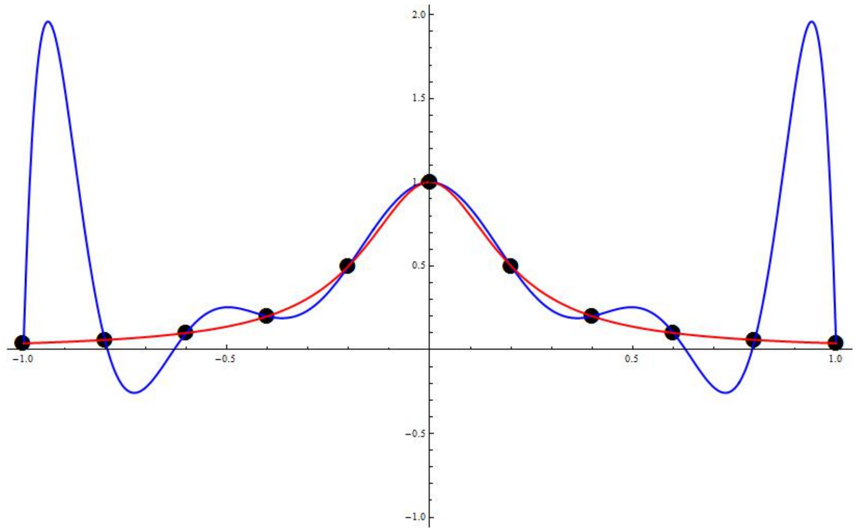


Със следващата задача ще покажем, че противно на интуицията, често при налагане на повече интерполационни условия (съответно използвайки полиноми от по-висока степен) получаваме по-лошо приближение. Това е така, защото полиномите от по-висока степен имат „по-лошо” поведение – появяват се осцилации.

Задача 19. Да се приближи функцията $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$, като се използват полиноми от степени 10 и 4.

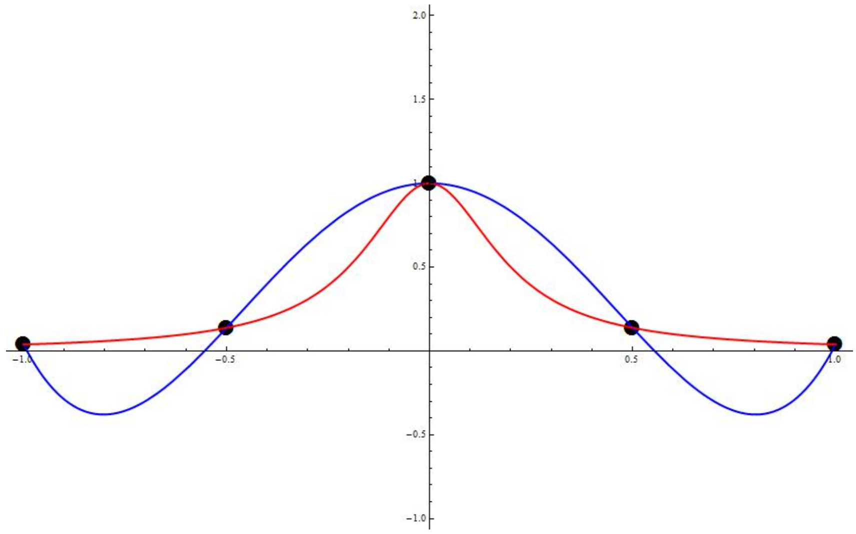
Решение. При интерполиране с полиноми от висока степен можем да очакваме наличието на осцилации. Между възлите на интерполация поведението на интерполационния полином е „лошо” - виждате как в двата края на интервала грешката при апроксимация е много голяма.

```
In[1]:= n=10;
        f[x_]:= 1/(1+25x^2)
        nodes=Range[-1,1,0.2];
        p[x_]=newtonPoly[x]//Expand
        graph1=ListPlot[Table[{nodes[[i]], f[nodes[[i]]]}, {i, 1, Length[nodes]}],
         PlotMarkers→{Automatic,Large}, PlotStyle→Black];
        graph2=Plot[{p[x],f[x]}, {x,-1,1}, PlotStyle→{{Blue, Thick}, {Red,Thick}},
         PlotRange→{{-1,1},{-1,2}}];
        Show[graph1, graph2, PlotRange→{{-1,1},{-1,2}} ]
```



Приближението (като цяло) е по - добро с полинома от по - ниската степен.

In[8]:=
```
n=4;
nodes=Range[-1,1,0.5];
p[x_]=newtonPoly[x]//Expand
graph1=ListPlot[Table[{nodes[[i]], f[nodes[[i]]]}, {i, 1, Length[nodes]}],
 PlotMarkers→{Automatic,Large}, PlotStyle→Black];
graph2=Plot[{p[x],f[x]}, {x,-1,1}, PlotStyle→{{Blue, Thick}, {Red,Thick}},
 PlotRange→{{-1,1},{-1,2}}];
Show[graph1, graph2, PlotRange→{{-1,1},{-1,2}}]
```



1.6 Интерполационна задача на Ермит. Разделени разлики с кратни възли.

Постановка на задачата. Нека

$$x_0, \ldots, x_n$$

са дадени различни точки от реалната права (възли). Нека

$$\nu_0, \ldots, \nu_n$$

са цели положителни числа (кратности) и

$$\{y_{k\lambda}, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1\}$$

е таблица от произволни реални стойности. Нека

$$N := \nu_0 + \dots + \nu_n - 1.$$

Интерполационната задача на Ермит е да се построи полином P от степен N, който удовлетворява условията

$$P^{(\lambda)}(x_k) = y_{k\lambda}, k = 0, \dots, n, \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1. \blacksquare$$

С други думи, за всеки възел x_k налагаме условия за стойността на функцията и първите ѝ $\nu_k - 1$ производни (или общо толкова условия колкото е кратността на всеки възел) в съответния възел. По този начин имаме общо $\nu_0 + \dots + \nu_n$ условия, които могат да определят еднозначно коефициентите наполином от степен $N := \nu_0 + \dots + \nu_n - 1$.

Твърдение 8. *Задачата на Ермит има, при това единствено решение при всеки избор на интерполационни възли, кратности и стойности.*

Оказва се, че за да намерим интерполационния полином на Ермит, можем да използваме отново формулата на Нютон. Единствената разлика е, че трябва да обобщим понятието за разделени разлики така, че да можем да пресмятаме разделени разлики с кратни възли.

Твърдение 9. *Нека $f \in C^{(k)}[a, b]$. Тогава за произволни точки $x_0 \leq \ldots \leq x_n$ е в сила рекурентната връзка*

$$f[x_0, \dots, x_n] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, & \text{ако } x_0 < x_n \\ \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, & \text{ако } x_0 = x_k. \end{cases}$$

Задача 20. Да се построи полином, удовлетворяващ интерполационните условия

0	0	1	1	1
-1	-2	0	10	40

Решение. Казано с други думи, трябва да построим полином $P(x) \in \pi_4$ такъв, че

$$P(0) = -1, P'(0) = -2, P(1) = 0, P'(1) = 10, P''(1) = 40.$$

Ще го построим, използвайки формулата на Нютон. За целта трябва първо да пресметнем необходимите ни разделени разлики. Там, където пресмятаме разделена разлика, в която всички възли са равни, ще отбелязваме с * $(f[., ., .]^*)$, за да обръщаме внимание на този факт.

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3	Ред 4
$x_0 = 0$	$f[x_0] = -1$	$f[x_0, x_1]^* = -2$	$f[x_0, x_1, x_2] = 3$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 6$	5
$x_1 = 0$	$f[x_1] = -1$	$f[x_1, x_2] = 1$	$f[x_1, x_2, x_3] = 9$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = 11$	
$x_2 = 1$	$f[x_2] = 0$	$f[x_2, x_3]^* = 10$	$f[x_2, x_3, x_4]^* = 20$		
$x_3 = 1$	$f[x_3] = 0$	$f[x_3, x_4]^* = 10$			
$x_4 = 1$	$f[x_4] = 0$				

Обърнете внимание как е попълнена първата колона. $f[x_1]$ е равно на -1 а не на -2, тъй като $f[x_1] = f[0] = f(0)$. По същата причина $f[x_3] = f[x_4] = 0$.

Сега коефициентите лежат в първия ред. Получаваме

$$P(x) = -1 + (-2)(x-0) + 3(x-0)(x-0) + 6(x-0)(x-0)(x-1) \\ + 5(x-0)(x-0)(x-1)(x-1) = 5x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 2x - 1. \blacksquare$$

Задача 21. Да се построи полиномът, интерполиращ таблицата

0	0	0	1
1	0	2	-1

Решение. Имаме

Възли	Ред 0	Ред 1	Ред 2	Ред 3
$x_0 = 0$	$f[x_0] = 1$	$f[x_0, x_1]^* = \frac{0}{1!} = 0$	$f[x_0, x_1, x_2]^* = \frac{2}{2!} = 1$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = -3$
$x_1 = 0$	$f[x_1] = 1$	$f[x_1, x_2]^* = \frac{0}{1!} = 0$	$f[x_1, x_2, x_3] = -2$	
$x_2 = 0$	$f[x_2] = 1$	$f[x_2, x_3]^* = -2$		
$x_3 = 1$	$f[x_3] = -1$			

Получаваме

$$P(x) = 1 + 0.(x-0) + 1(x-0)(x-0) + (-3)(x-0)(x-0)(x-0) = 1 + x^2 - 3x^3. \blacksquare$$

1.7 Чебишови системи. Интерполиране с тригонометрични полиноми.

Дефиниция 4. *Нека $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ са ЛНЗ функции в интервала $[a, b]$. Тогава линейната комбинация*

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$$

наричаме ***обобщен полином*** *по системата $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$.*

Дефиниция 5. *Казваме, че функциите $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ образуват* ***Чебишова система*** *(Т-система) в интервала $[a, b]$, ако всеки ненулев обобщен полином по тази система има не повече от n различни нули в дадения интервал.*

Дотук разглеждахме интерполиране с алгебрични полиноми. Както се вижда от първата дефиниция, това е частен случай на интерполирането с обобщени полиноми, в случая, когато системата фунцкии е $1, x, x^2, \dots, x^n$. Тогава обобщените полиноми по тази система са точно алгебричните полиноми π_n.

Разглеждането на функции, които образуват системи на Чебишов е важно, тъй като е в сила следното

Твърдение 10. *Нека функциите $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ образуват система на Чебишов в интервала $[a, b]$. Тогава при дадени произволни възли $x_0 < \cdots < x_n$ в $[a, b]$ и стойности $y_0, \dots, y_n$ интерполационната задача*

$$a_0\varphi_0(x_k) + \cdots + a_n\varphi_n(x_k) = y_k, \; k = 0, \dots, n$$

има единствено решение.

Да разгледаме примери за такива функции.

Задача 22. Да се докаже, че $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ образуват Чебишова система във всеки интервал $[a, b]$.

Решение. Нека вземем един произволен обобщен полином по тази система, т.е. една тяхна произволна линейна комбинация:

$$\varphi(x) = a_0.1 + a_1.x + a_2.x^2 + \dots + a_n.x^n.$$

Искаме да докажем, че $\varphi(x)$ има не повече от n различни нули в интервала $[a, b]$. Но това е алгебричен полином от степен най-много n и от Основната теорема на алгебрата непосредствено следва, че той има не повече от n нули в кой да е интервал. С това задачата е доказана. ■

Забележка. По този начин още веднъж доказахме, че ако $P(x) \in \pi_n$, то интерполационната задача $P(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ има единствено решение.

Задача 23. Да се докаже, че $\{x^{2k+1}\}_{k=0}^{n}$ образуват Чебишова система във всеки интервал $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta$.

Решение. Вземаме обобщен полином по тази система:

$$\varphi(x) = a_0x + a_1x^3 + a_2x^5 + \dots + a_nx^{2n+1}.$$

Искаме да покажем, че той има не повече от n различни нули в интервала $[\alpha, \beta]$ и затова разглеждаме уравнението

$$\varphi(x) = a_0x + a_1x^3 + a_2x^5 + \dots + a_nx^{2n+1} = 0$$

Тъй като 0 не е в разглеждания интервал, можем спокойно да разделим двете страни на x. Полагаме $x^2 = y$ и получаваме

$$\varphi(x) = a_0 + a_1y + a_2y^2 + \dots + a_ny^n = 0.$$

Това уравнение има най-много n корена y^*. На всеки такъв корен съответстват два корена за $x - \pm\sqrt{y^*}$. Със сигурност обаче най-много 1 от тях е положителен, т.е. най-много 1 от тях е в интервала $[\alpha, \beta]$. Следователно $\varphi(x)$ има най-много n нули в $[\alpha, \beta]$ и задачата е доказана. ■

Със следващата задача ще илюстрираме факта, че това дали дадени функции образуват система на Чебишов зависи съществено от интервала, в който ги разглеждаме.

Задача 24. Да се докаже, че $\{1, \cos x\}$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \pi)$, но не образуват в $[0, 2\pi)$.

Решение. Ще докажем, че

$$\varphi(x) = a.1 + b.\cos x$$

има най-много 1 нула в интервала $[0, \pi)$. Първо да отбележим, че ако $b = 0$, то $a = 0$ и $\varphi(x)$ е нулевият полином. Следователно $b \neq 0$ и $\cos x = -\frac{a}{b}$. Ако $-1 \leq -\frac{a}{b} \leq 1$ уравнението има 1 решение в интерала $[0, \pi)$, иначе – няма решения. С други думи $\varphi(x)$ наистина има най-много 1 нула в разглеждания интервал и $\{1, \cos x\}$ образуват Чебишова система в него.

Да разгледаме сега същите функции върху интервала $[0, 2\pi)$. Достатъчно е да покажем, че съществува поне един обобщен полином по тази система, който да има повече от 1 нула в $[0, 2\pi)$. Нека вземем

$$\psi(x) = 0.1 + 1. \cos x = \cos x.$$

Той очевидно има 2 корена в $[0, 2\pi)$ и това са $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, т.е. $\{1, \cos x\}$ не образуват система на Чебишов в интервала $[0, 2\pi)$.

Задача 25. Да се докаже, че $\{\cos kx\}_{k=0}^{n}$ образуват система на Чебишов в интервала $[0, \pi]$.

Решение. Трябва да докажем, че обобщения полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$$

има не повече от n различни нули в интервала $[0, \pi]$. Правим смяната $x = \arccos t, t \in [-1, 1]$. Лесно може да се провери, че новата променлива е добре дефинирана, и получаваме в термините на новата променлива

$$\overline{\varphi}(t) = a_0 + a_1.t + a_2. \cos(2 \arccos t) + a_3. \cos(3 \arccos t) + \ldots + a_n. \cos(n \arccos t).$$

$T_k(t) = \cos(k \arccos t)$ е k-тият полином на Чебишов от първи род, за който знаем, че е алгебричен полином от степен k. Тогава $\overline{\varphi}(t)$ е алгебричен полином от степен n и следователно има не повече от n нули в интервала $[-1, 1]$. Връщайки се в полагането, на всеки корен за t съответства точно един корен за x, с което задачата е доказана.

Задача 26. Дадено е, че $f(x) \in C^n[a, b]$, $f^{(n)}(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Да се докаже, че функциите $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, f(x)\}$ образуват система на Чебишов в интервала (a, b).

Решение. Да допуснем противното, т.е. че някой обобщен полином

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n f(x)$$

има поне $n + 1$ нули. Очевидно $\varphi(x)$ изпълнява условията на теоремата на Рол и тогава $\varphi'(x)$ има поне n нули. Разсъждавайки индуктивно получаваме, че $\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ има поне 1 нула в (a, b), но това противоречи на условието, според което $f^{(n)}(x)$ не се нулира в този интервал. Следователно $\varphi(x)$ има най-много n нули в (a, b) и $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, f(x)\}$ образуват система на Чебишов в този интервал.

Дефиниция 6. *Обобщените полиноми по системата*

$$\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx\},$$

които имат вида

$$\tau_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

наричаме тригонометрични полиноми от ред n.

Може да се докаже, че функциите

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx$$

образуват система на Чебишов във всеки интервал от вида $[\alpha, \alpha+2\pi)$, откъдето следва следното

Твърдение 11. *Нека $\alpha \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} < \alpha + 2\pi$. Тогава за всяка функция f, определена в точките $\{x_i\}_0^{2n}$ съществува единствен тригонометричен полином τ_n от ред n такъв, че*

$$\tau_n(x_i) = f(x_i),\ i = 0, \ldots, 2n.$$

Тъй като тригонометричните полиноми са очевидно 2π-периодични функции, те се явяват удобен апарат за моделиране на периодични явления. Нека разгледаме следния пример:

Задача 27. Да се намери приближено функция $f(x)$, която моделира броя часове слънчева светлина. Променливата x е денят от годината.

Решение. Първо, да отбележим, че за да има смисъл да приближаваме една функция с тригонометричен полином, тази функция трябва да бъде 2π-периодична. Ясно е, че периодът на разглежданото явление е 365 дни. Тогава ще направим линейната смяна

$$t = \frac{2\pi}{365}x.$$

В термините на новата променлива функцията $\overline{f}(t)$ е 2π-периодична. Нека използваме следните данни

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\overline{f}(t)$	9	11.1	14.9	12.9	9

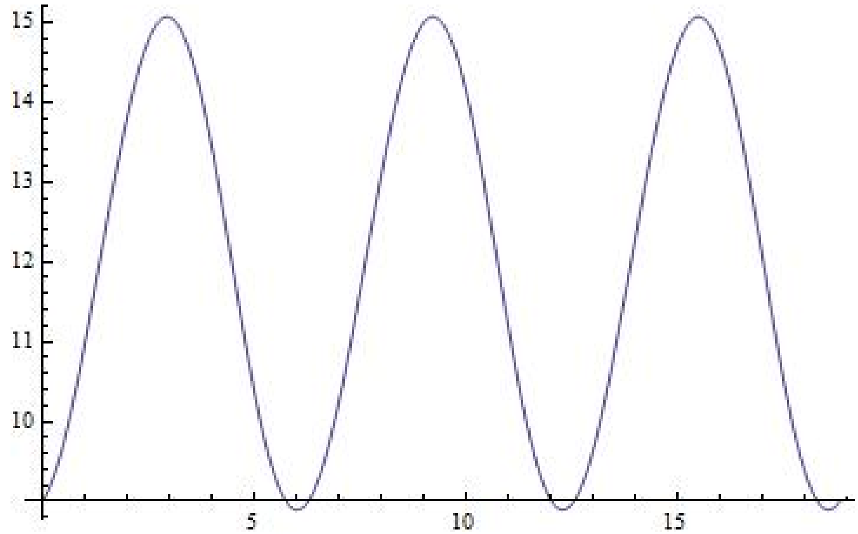
Тези 5 данни могат да определят еднозначно 5 коефициента и следователно можем да построим върху тях тригонометричен полином от ред 2. Търсим го във вида

$$\tau_2(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin_t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t.$$

Решаваме системата, която се задава от условията в таблицата, относно коефициентите, и получаваме приблизително

$$\tau_2(t) = 11.975 - 3.00477 \cos t + 0.0297749 \cos 2t + 0.695577 \sin t + 0.0460581 \sin 2t.$$

За да добием по-добра представа за характера на разглежданото явление нека изрисуваме графиката му:



От графиката виждаме как периодично денят се увеличава и намалява.

1.8 Задачи за самостоятелна работа

Задача 28. Да се построи интерполационния полином на Лагранж за таблицата

x	0	0.5	1	1.5
$f(x)$	1	2	3	4

а) по метода на неопределените коефициенти;
б) с формулата на Лагранж

Задача 29. Да се намери приближено $f(x) = e^x$ за $x = 0.15$, като се използва таблицата

x	0	0.1	0.2	0.3
$f(x)$	1	1.10517	1.2214	1.34986

и да се даде оценка на грешката при интерполиране.

Задача 30. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_k(x) = x^m,\ m = 0, \dots, n$$

Задача 31. Да се опрости изразът

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + x(x-2)(x-3) - \frac{3}{2}x(x-1)(x-3) + \frac{2}{3}x(x-1)(x-2).$$

Задача 32. Като използвате интерполационната формула на Нютон с разделени разлики, намерете полинома от възможно най-ниска степен, който удовлетворява условията:

x	-3	2	-1	3	1
y	0	5	-4	12	0

Задача 33. Вземайки предвид данните

x	1	2	2.5	3	4	5
$f(x)$	0	5	6.5	7	3	1

пресметнете $f(3.4)$, като използвате последователно интерполационни полиноми от степени 1, 2, 3. За целта избирайте последователността от интерполационни възли от таблицата така, че да получите възможно най-добра точност.

Упътване. Като вземем предвид представянето на грешката, което знаем

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x),$$

ясно е, че най-добрата възможна точност ще получим, когато възлите са максимално близо до точката 3.4, в която търсим стойността на f. Така, например, ако искаме да построим полином от първа степен, трябва да вземем точките $x_0 = 3$ и $x_1 = 4$.

Задача 34. Да се намери полиномът, интерполиращ таблицата

0	1	2	2	2
1	4	23	37	50

Задача 35. Намерете полинома, удовлетворяващ следните интерполационни условия:

$$P(0) = 8,\ P(1) = 9,\ P'(1) = 2,\ P(2) = 12,\ P'(2) = 4.$$

Задача 36. Като се използват свойствата на разделените разлики, да се докаже, че:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^n}{\omega'(x_k)} = 1; \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^{n+1}}{\omega'(x_k)} = \sum_{k=0}^{n} x_k; \tag{1.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0. \tag{1.4}$$

Упътване. За втория пример помислете за подходяща помощна функция.

Задача 37. Докажете, че функциите $1, \sin x$ са линейно независими в интервала $[0, \pi]$, но не образуват система на Чебишов в него. Да се докаже, че същите функции образуват Чебишова система в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Задача 38. Да се докаже, че $1, x, \cos x$ образуват система на Чебишов в интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Задача 39. Да се даде оценка на грешката, която се получава в дадена точка от интервала $[0, 1]$, когато интерполираме функцията $f(x) = e^x$ във възлите $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$, съответно с кратности 3 и 1.

Глава 2

Средноквадратични приближения

2.1 Норма и разстояние

Дефиниция 7. *Нека F е дадено линейно пространство. Казваме, че в F е въведена* ***норма****, ако на всеки елемент f от F е съпоставено число $\|f\|$ (наречено норма на f), като при това са удовлетворени условията*

1) $\|f\| \geq 0$ *(равенство се достига т.с.т.к. $f = 0$);*

2) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|, \forall \lambda$*;*

3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|, \forall f, g \in F$*.*

Дефиниция 8. *Нека F е дадено линейно пространство. Казваме, че в F е въведено* ***разстояние****, ако на всеки два елемента $f, g \in F$ съпоставяме число $\rho(f, g)$, което удовлеетворява следните изисквания:*

1) $\rho(f, g) \geq 0$*, като равенство се достига т.с.т.к. $f = g$;*

2) $\rho(f, g) = \rho(g, f)$*;*

3) $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g), \forall f, g, h \in F$*.*

Забележка. Понятията норма и разстояние са естествени обобщения съответно на разстоянието на дадена точка от нулата и разстоянието между две точки в геометричния смисъл.

Забележка. Всяка норма поражда разстояние. Т.е. ако имаме нормата $\|.\|$ в F, то можем да дефинираме разстояние между два елемента в F, като нормата на разликата им ($\|f - g\|$). Не е трудно да се провери, че така дефинираното разстояние удовлетворява условията от Дефиниция 8.

Ще разгледаме две често използвани на практика норми и породените от тях разстояния.

Дефиниция 9. ***Равномерна норма*** *в интервала $[a, b]$ дефинираме по следния начин:*

$$\|f\| := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Тя поражда ***равномерното разстояние****:*

$$\rho(f, g) := \|f - g\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

Дефиниция 10. *Нормата*

$$\|f\|:=\left\{\int_a^b \mu(x)f^2(x)dx\right\}^{1/2}$$

е ***средноквадратична норма*** *с тегло $\mu(x)$ в интервала $[a,b]$.*

Тя поражда ***средноквадратично разстояние:***

$$\rho(f,g):=\left\{\int_a^b \mu(x)(f(x)-g(x))^2dx\right\}^{1/2}$$

2.2 Ортогонални полиноми

Дефиниция 11. *Казваме, че функциите $f(x)$ и $g(x)$ са* ***ортогонални*** *в $[a,b]$ с тегло $\mu(x)$, ако $(f,g)=0$. Тук с (f,g) сме означили скаларното произведение на функциите f и g*

$$(f,g)=\int_a^b \mu(x)f(x)g(x)dx.$$

Дефиниция 12. *Казваме, че $P_0(x),P_1(x),P_2(x),\ldots$ е (крайна или безкрайна) редица от ортогонални полиноми в $[a,b]$ с тегло $\mu(x)$, ако*

$$\begin{aligned}&1)\ P_i\in\pi_i,\quad \forall i,\\&2)\ (P_i,P_i)\neq 0,\quad \forall i,\\&3)\ (P_i,P_j)=0,\quad \forall i\neq j.\end{aligned}$$

Задача 40. Да се докаже, че функциите $f(x)=1$ и $g(x)=\cos x$ са ортогонални в $[0,\pi]$ с тегло $\mu(x)=1$.

Решение. Казано с други думи, трябва да докажем, че

$$\int_0^\pi \mu(x)f(x)g(x)dx=0.$$

Имаме

$$\int_0^\pi \cos x dx=\sin x\,|_0^\pi=\sin\pi-\sin 0=0$$

и следователно функциите действително са ортогонални с тегло $\mu(x)=1$ в $[0,\pi]$.

Задача 41. Да се докаже, че функциите x и $\frac{1}{2}(3x^2-1)$ са ортогонални в $[-1,1]$ с тегло $\mu(x)=1$.

Решение.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(3x^3-x)dx=\frac{1}{2}\left(3\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^1=0$$

Задача 42. Да се намерят първите 3 ортогонални полинома (P_0,P_1,P_2) в интервала $[0,1]$ и тегло $\mu(x)=x$ със старши коефициент 1.

Решение. Според условие 1) от Дефиниция 12, $P_0 \in \pi_0$, т.е. P_0 е константа и тъй като искаме старшия коефициент на търсените полиноми да бъде 1, то

$$P_0(x) \equiv 1.$$

Пак вземайки предвид условие 1 на дефиницията, заключаваме, че P_1 трябва да бъде полином от π_1 и затова го търсим във вида $P_1(x) = x + a$ (старшият коефициент искаме да бъде 1). Неизвестният свободен член a ще намерим, като имаме предвид, че P_0 и P_1 трябва да са ортогонални в $[0, 1]$ с тегло $\mu(x) = x$, т.е.

$$\int_0^1 x.1.(x+a)dx = 0 \Longleftrightarrow \left(\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{a}{2} = 0 \Longleftrightarrow a = -\frac{2}{3}.$$

Така получихме, че

$$P_1(x) = x - \frac{2}{3}.$$

Аналогично постъпваме и за да намерим P_2. Търсим го във вида $P_2(x) = x^2 + bx + c$. Имаме

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 x(x^2 + bx + c)dx = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 + bx + c)dx = 0 \end{array} \right.$$

Решаваме тази система, например, с Mathematica:

```
In[2]:= Solve[{Integrate[x (x^2 + b x + c), {x, 0, 1}] == 0,
          Integrate[x (x - 1/3) (x^2 + b x + c), {x, 0, 1}] == 0}, {b, c}]
```

Получаваме, $b = -\frac{6}{5}$, $c = \frac{3}{10}$. Тогава

$$P_2 = x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{10}.$$

Лесно се проверява и че са изпълнени условията $(P_i, P_i) \neq 0$, $i = 0, 1, 2$.

Задача 43. Да се докаже, че полиномите на Чебишов от първи род са ортогонални в интервала $[-1, 1]$ с тегло $\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Трябва да проверим, че полиномите на Чебишов от първи род $T_0, T_1, \ldots$, където

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

удовлетворяват условията от Дефиниция 12. Да започнем с това, че, както знаем, $T_n(x)$ е алгебричен полином от степен n и следователно първото условие е изпълнено. Трябва да докажем, че ако

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

$$T_m(x) = \cos(n \arccos x)$$

то

$$I = \int_{-1}^1 \mu(x) T_n(x) T_m(x) dx \begin{cases} = 0, & \text{при } n \neq m \\ \neq 0, & \text{при } n = m \end{cases}.$$

Имаме
$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\arccos x)\cos(m\arccos x)dx.$$
Правим смяната
$$x=\cos t.$$
Тогава имаме
$$dx=d(\cos t)=-\sin t dt,$$
а интервала $[-1,1]$ се трансформира в $[\pi,0]$. Получаваме
$$\begin{aligned}I&=\int_{\pi}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 t}}\cos(nt)\cos(mt)(-\sin t)dt\\&=\int_{0}^{\pi}\frac{\cancel{\sin t}}{\cancel{\sin t}}.\frac{1}{2}\left[\cos((n+m)t)+\cos((n-m)t)\right]dt\\&=\frac{1}{2}\underbrace{\int_{0}^{\pi}\cos((n+m)t)dt}_{\Delta_1}+\frac{1}{2}\underbrace{\int_{0}^{\pi}\cos((n-m)t)dt}_{\Delta_2}.\end{aligned}$$
Да разгледаме поотделно интегралите Δ_1 и Δ_2. За Δ_2 искаме да внесем $n-m$ под знака на диференциала. Но тогава, за да не променим нищо, трябва и да умножим по $\frac{1}{n-m}$. Следователно трябва да разгледаме следните два случая:

1. **m=n**. Тогава
$$\Delta_2=\int_{0}^{\pi}\cos 0dt=\pi.$$
2. **m $\neq$ n**.
$$\Delta_2=\frac{1}{n-m}\int_{0}^{\pi}\cos((n-m)t)d((n-m)t)=\left.\frac{\sin((n-m)t)}{n-m}\right|_{0}^{\pi}=0.$$

Да видим как се оценява Δ_1 в тези случаи:

1. **m=n**
$$\Delta_1=\int_{0}^{\pi}\cos(2nt)dt$$
Искаме да внесем $2n$ под знака на диференциала и да разделим на същото. Затова разглеждаме
   (а) **m=n=0**
$$\Delta_1=\int_{0}^{\pi}\cos 0dt=\pi$$
   (б) **m=n $\neq$ 0**
$$\Delta_1=\frac{1}{2n}\int_{0}^{\pi}\cos(2nt)d(2nt)=\left.\frac{\sin(2nt)}{2nt}\right|_{0}^{\pi}=0.$$
2. **m $\neq$ n**.
$$\Delta_1=\frac{1}{n+m}\int_{0}^{\pi}\cos((n+m)t)d((n+m)t)=\left.\frac{\sin((n+m)t)}{(n+m)t}\right|_{0}^{\pi}=0$$

Тогава получихме окончателно:

1. **m=n=0**
$$I = \frac{1}{2}\Delta_1 + \frac{1}{2}\Delta_2 = \pi \neq 0$$
2. **m=n $\neq$ 0**
$$I = \frac{1}{2}\Delta_1 + \frac{1}{2}\Delta_2 = \frac{\pi}{2} \neq 0$$
3. **m $\neq$ n**
$$I = \frac{1}{2}\Delta_1 + \frac{1}{2}\Delta_2 = 0$$

Така показахме, че скаларното произведение на кои да е два различни полинома T_i е 0, а скаларният квадрат на кой да е полином е число, различно от 0, с което твърдението е доказано.

2.3 Метод на най-малките квадрати

В предишната глава разгледахме различни начини за решаване на следната задача:

Дадени са точките (x_0, y_0),...,(x_n, y_n). Търсим функция, чиято графика минава точно през тези точки. Както отбелязахме, една възможна интерпретация на тази задача, от гледна точка на практиката, е че са направени краен брой измервания (експерименти) при изследването на дадено явление и търсим функция, която да моделира явлението, като отговаря на тези емпирични резултати. И с най-съвършената техника обаче има някаква допустима грешка при правенето на тези измервания. В много случаи тази грешка не може да бъде пренебрегната. Тогава какъв би бил смисълът да намерим функция, която да минава през тези точки, след като дори самите те не са „на мястото си”? Друг проблем, който видяхме при интерполацията е, че често полиномите от висока степен имат „лошо” поведение, т.е. може да имаме проблеми при моделирането на явление, за което искаме да приближим голямо количество данни.

Оказва се, че можем да постъпим и по друг начин – да търсим функция, която следва поведението на данните (без задължително да съвпада с тях в която и да е точка) и която е „близо” до тези данни.

Преди да коментираме самия метод, нека разгледаме няколко реални процеса и да коментираме каква функция е подходяща, за да ги опише (на база на данните, които имаме).

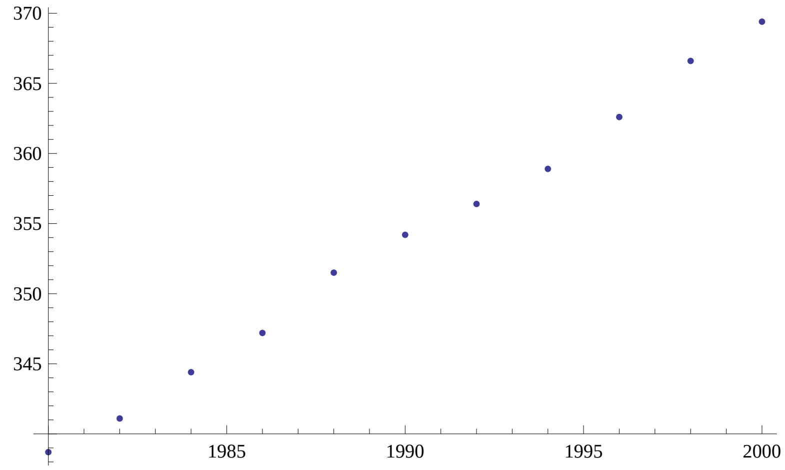
- В таблицата са дадени данни за това как нивото на въглеродния диоксид в атмосферата се е изменяло в периода 1980 – 2000.

Год.	1980	1982	1984	1986	1988	1990
CO_2	338.7	341.1	344.4	347.2	351.5	354.2

Год.	1992	1994	1996	1998	2000
CO_2	356.4	358.9	362.6	366.6	369.4

```
In[169]:= ListPlot[{{1980, 338.7}, {1982, 341.1}, {1984, 344.4},
   {1986, 347.2}, {1988, 351.5}, {1990, 354.2}, {1992, 356.4},
   {1994, 358.9}, {1996, 362.6}, {1998, 366.6}, {2000, 369.4}}]
```

Out[169]=



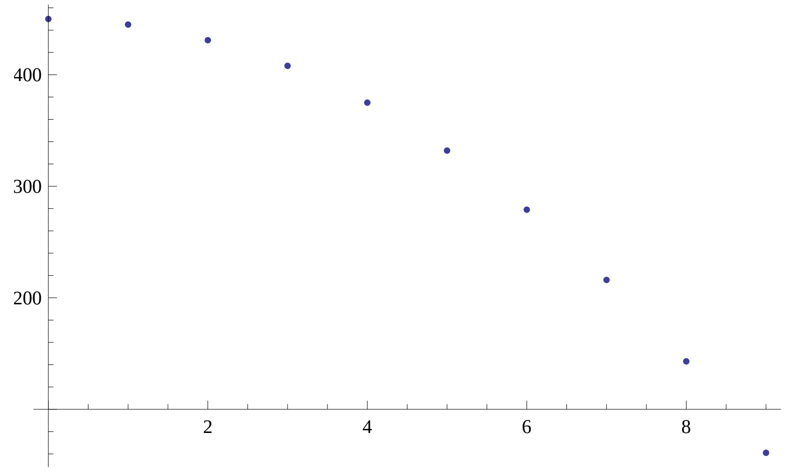
Графиката ни показва, че би било удачно да моделираме разглежданото явление с линейна функция. С други думи, ще търсим приближението във вида $f(x) = ax + b$.

- Топка е пусната от височина $450m$. Нейната височина е измервана през интервали от 1 сек.

t, sec	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h, m	450	445	431	408	375	332	279	216	143	61

```
In[170]:= ListPlot[{{0, 450}, {1, 445}, {2, 431}, {3, 408},
   {4, 375}, {5, 332}, {6, 279}, {7, 216}, {8, 143}, {9, 61}}]
```

Out[170]=

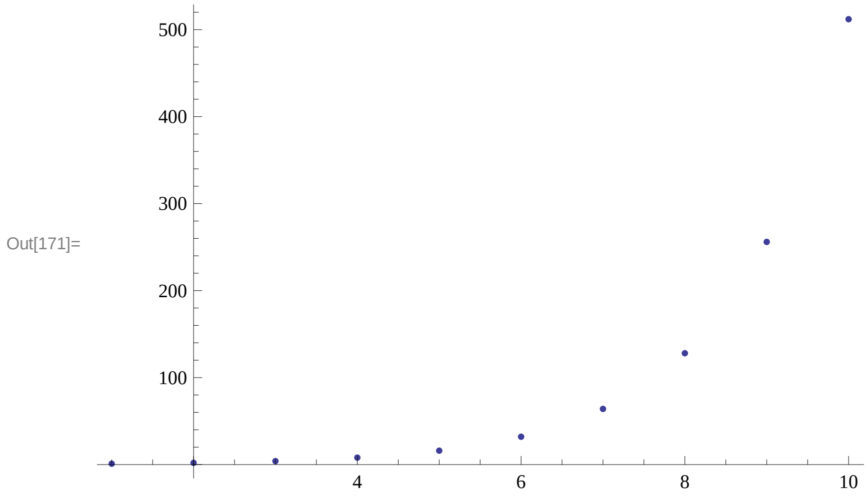


Тук точките изглеждат върху парабола. Затова ще търсим функцията, моделираща процеса, във вида $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Разглеждаме делението на клетки, в зависимост от момента t

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
клетки	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

```
In[171]:= ListPlot[{{1, 1}, {2, 2}, {3, 4}, {4, 8},
   {5, 16}, {6, 32}, {7, 64}, {8, 128}, {9, 256}, {10, 512}}]
```



Тук, на база на експерименталните данни, следва да търсим експоненциална зависимост. Ще търсим функцията във вида $f(x) = ae^{bx}$.

Ще оставим тези 3 процеса за малко и ще се върнем към тях, след като първо изясним метода, по който ще търсим съответните функции.И така, от горните примери е ясно, че след като сме избрали вида на функцията, с която ще приближаваме, трябва да определим параметрите в нея (например, коефициентите на квадратния тричлен във втория пример) така, че функцията да се окаже възможно „най-близо” до данните, които приближаваме. Първото, което трябва да направим, е вече да формализираме понятието „близо”.

Нека точките, които искаме да приближим, имат координати

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n),$$

а $f(x)$ е функция, с която ги приближаваме. Да означим с e_i грешката, т.е. разликата между действителната и приближената стойност в точката x_i

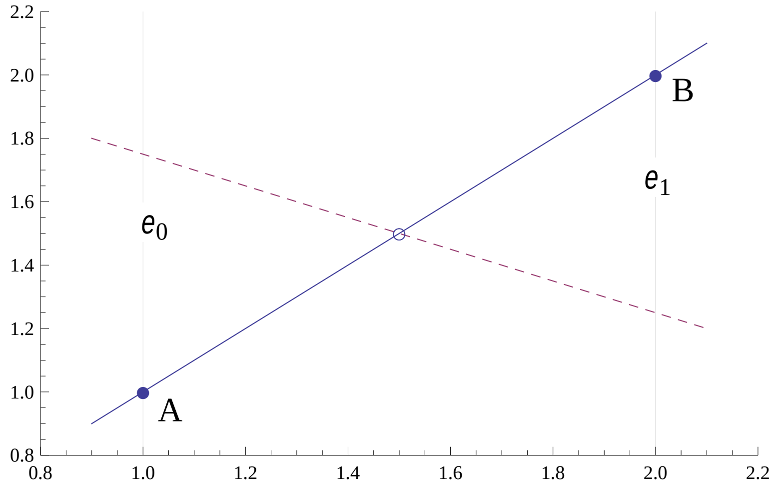
$$e_i := f(x_i) - y_i.$$

Да разгледаме някои възможни (но, по една или друга причина, неудачни) начини за да дефинираме понятието „най-близо”:

- Първата очевидна идея е да търсим функцията $f(x)$ така, че сумата от всички грешки да е възможно най-малка, т.е. да е възможно най-малко

$$\sum_{i=0}^{n} e_i.$$

  Да разгледаме обаче следния пример (вж. фигурата). Имаме две точки в равнината $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$. Търсим линейна функция, която да е „най-близо” до тях. Очевидно, това би следвало да е правата, която минава през тези две точки. Но, ако вземем произволна друга права, която минава през средата на отсечката AB, за нея също ще е изпълнено $e_0 + e_1 = 0$, тъй като в точките A и B грешките ще имат една и съща абсолютна стойност и ще са различни по знак. С други думи, всяка такава права ще удовлетворява условието $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} e_i$ да е минимално.



- Възможен начин да избегнем проблема е да не позволим грешките да бъдат с различни знаци, т.е. да ги вземаме по модул и да поставим условието функцията $f(x)$ да е избрана така, че

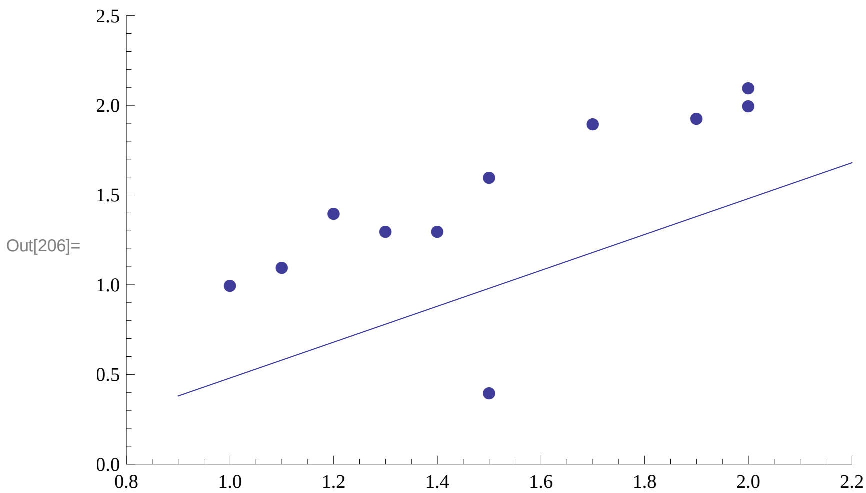
  $$\sum_{i=0}^{n} |e_i|$$

  да е минимално. Оказва се обаче, че и при това условие (макар и напълно логично и удовлетворително) в общия случай не можем да намерим единствена функция, която да го изпълнява.

- Можем да подберем функцията $f(x)$ така, че да е най-малка максималната грешка, т.е. да е най-малко

  $$\max_{i=0}^{n} e_i.$$

  Да вземем обаче следния пример:



Всички точки, с изключение на една, лежат приблизително на права, но тази „странична" точка, която вероятно е резултат от шум или грешка в измерванията, има в някакъв смисъл същото влияние върху избора на правата, както всички останали, взети заедно.

И така, след като показахме някои неудачни начини, сега вече да се концентрираме върху същността на **метода на най-малките квадрати**. Търсим функцията $f(x)$ така, че

$$\sum_{i=0}^{n} e_i^2$$

да е възможно най-малко. Освен, че решава проблема с наличието на различни знаци при сумирането на грешките, оказва се, че този подход води и до единствено решение.

Задачата за минимизиране на тази сума може да се интерпретира и по друг начин. Нека означим с y и F съответно векторите с елементи точните и приближените стойности

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$$
$$F = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Тогава $e = F - y$ ще бъде векторът с грешките

$$e = (e_0, e_1, \dots, e_n).$$

За него имаме

$$|e| = \sqrt{e_0^2 + e_1^2 + \dots + e_n^2},$$

т.е. задачата за минимизиране на сумата

$$\sum_{i=0}^{n} e_i^2$$

можем да разглеждаме и като минимизиране на дължината на вектора на грешката.

Следващата стъпка е да покажем как точно ще намерим функцията $f(x)$ така, че тази сума да е възможно най-малка. Ще го покажем с пример

Задача 44. Да се намери линейна функция, която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата

x_i	0	1	2	3	4
y_i	1	2	1	0	4

Решение. От условието следва, че ще търсим функцията във вида $f(x) = ax+b$. Трябва да определим параметрите a и b така, че

$$\sum_{i=0}^{4} e_i^2 = \sum_{i=0}^{4} (f(x_i) - y_i)^2$$

да е възможно най-малко. Имаме

$$f(0) = b;\ f(1) = a + b;\ f(2) = 2a + b;\ f(3) = 3a + b;\ f(4) = 4a + b.$$

Тогава

$$\sum_{i=0}^{4} e_i^2 = (b-1)^2 + (a+b-2)^2 + (2a+b-1)^2 + (3a+b-0)^2 + (4a+b-4)^2.$$

Разглеждаме този израз като функция на двете променливи a и b (нека я означим с $\Phi(a,b)$). Необходимо условие тази функция да има минимум в дадена точка е първите частни производни по отношение на всеки параметър да са нули. Получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial b}=0\end{array}\right.$$

По този начин получаваме система с толкова уравнения, колкото са и параметрите в задачата. Решаваме я и еднозначно определяме a и b.

$$\left|\begin{array}{r}2(a+b-2)+2(2a+b-1).2+2(3a+b).3+2(4a+b-4).4=0\\ 2(b-1)+2(a+b-2)+2(2a+b-1)+2(3a+b)+2(4a+b-4)=0\end{array}\right.$$

Окончателно имаме $a=\dfrac{2}{5}$, $b=\dfrac{4}{5}$. Така получихме търсената функция във вида

$$f(x)=\frac{2}{5}x+\frac{4}{5}.$$

Задача 45. По метода на най-малките квадрати да се намери парабола, която приближава таблицата

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-4	15	-9	10	7	6

Решение. Търсим функцията във вида $f(x)=ax^2+bx+c$. Трябва да минимизираме сумата

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{5}e_i^2&=(f(-2)-(-4))^2+(f(-1)-15)^2+(f(0)-(-9))^2+(f(1)-10)^2\\&+(f(2)-7)^2+(f(3)-6)^2\\&=(4a-2b+c+4)^2+(a-b+c-15)^2+(c+9)^2+(a+b+c-10)^2\\&+(4a+2b+c-7)^2+(9a+3b+c-6)^2=\Phi(a,b,c)\end{aligned}$$

За да бъде минимална тази сума коефициентите a, b, c трябва да са такива, че да удовлетворяват системата

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial\Phi}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial b}=0\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial c}=0\end{array}\right. .$$

Нека решим тази система с помощта на системата Mathematica:

```
In[5]:= Φ[a_, b_, c_] := (4 a - 2 b + c + 4) ^2 + (a - b + c - 15) ^2 +
          (c + 9) ^2 + (a + b + c - 10) ^2 + (4 a + 2 b + c - 7) ^2 + (9 a + 3 b + c - 6) ^2
        Solve[{∂a Φ[a, b, c] == 0, ∂b Φ[a, b, c] == 0, ∂c Φ[a, b, c] == 0}, {a, b, c}]
```

Out[6]= $\left\{\left\{a\to-\dfrac{2}{7},\ b\to\dfrac{11}{7},\ c\to\dfrac{30}{7}\right\}\right\}$

Тогава получихме окончателно

$$f(x) = -\frac{2}{7}x^2 + \frac{11}{7}x + \frac{30}{7}$$

И така, след като изяснихме самия метод, нека се върнем към трите модела, които разгледахме.

Задача 46. Да се намери подходяща функция, която моделира изменението на нивото на въглероден диоксид в атмосферата (вж. таблицата на стр. 31).

Решение. Казахме, че ще търсим приближението във вида $f(x) = ax + b$. За да определим коефициентите a и b, трябва да решим системата

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{array} \right. ,$$

където

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=0}^{10} (f(x_i) - y_i)^2.$$

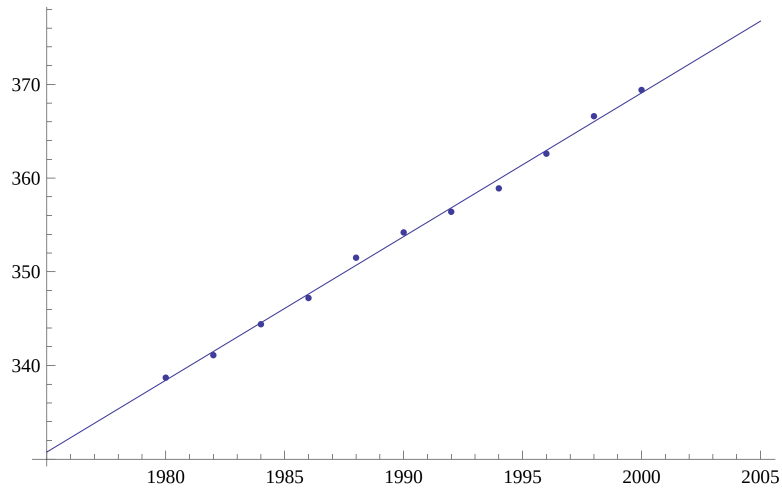
Нека направим това в Mathematica:

```
In[19]:= f[x_] := a x + b
         Φ[a_, b_] := (f[1980] - 338.7)^2 + (f[1982] - 341.4)^2 +
           (f[1984] - 344.4)^2 + (f[1986] - 347.2)^2 + (f[1988] - 351.5)^2 +
           (f[1990] - 354.2)^2 + (f[1992] - 356.4)^2 + (f[1994] - 358.9)^2 +
           (f[1996] - 362.6)^2 + (f[1998] - 366.6)^2 + (f[2000] - 369.4)^2
         coeffs = Solve[{∂a Φ[a, b] == 0, ∂b Φ[a, b] == 0}, {a, b}]

Out[21]= {{a → 1.53273, b → -2696.37}}
```

Да илюстрираме графично:

```
In[27]:= plot1 = ListPlot[{{1980, 338.7}, {1982, 341.1}, {1984, 344.4},
              {1986, 347.2}, {1988, 351.5}, {1990, 354.2}, {1992, 356.4},
              {1994, 358.9}, {1996, 362.6}, {1998, 366.6}, {2000, 369.4}}];
         plot2 = Plot[f[x] /. coeffs[[1]], {x, 1975, 2005}];
         Show[plot1, plot2]
```

Out[29]=



Втория модел (за падането на топката) можете да направите самостоятелно за упражнение (вж. задачите за самостоятелна работа). Преди да се концентрираме върху третия модел ще коментираме една техника, която е полезна в определени ситуации.

Нека търсим приближението във вида $f(x) = \alpha e^{\beta x}$. Очевидно в този случай системата уравнения, която ще получим за параметрите a и b ще бъде нелинейна. Разбира се, можем да я решаваме в този вид, но можем да подходим и по друг начин. Имаме

$$y_i \approx f(x_i) = \alpha e^{\beta x_i}$$

Тогава, логаритмувайки двете страни, получаваме

$$\ln y_i \approx \ln \alpha + \beta x_i$$

и сега отново определяме коефициентите така, че да минимизират

$$\sum_{i=0}^{n} e_i,$$

но за e_i вземаме $\ln y_i - (\ln \alpha + \beta x_i)$ (т.е. минимизираме $\sum_{i=0}^{n} (\ln y_i - \ln f(x_i))^2$). Полагайки $\ln \alpha = c$, получената система ще е линейна спрямо c и β. След като намерим c, връщайки се в полагането, имаме $\alpha = e^c$. Ще илюстрираме тази техника с пример след малко, но първо да видим още една подобна ситуация:

Търсим приближението във вида

$$f(x) = \frac{\alpha x}{\beta + x}.$$

С други думи имаме

$$y_i \approx \frac{\alpha x_i}{\beta + x_i}$$

Вземаме реципрочните стойности на двете страни и имаме

$$\frac{1}{y_i} \approx \frac{\beta}{\alpha} x_i + \frac{1}{\alpha}.$$

Дефинираме

$$e_i := \frac{1}{y_i} - \left(\frac{\beta}{\alpha} x_i + \frac{1}{\alpha} \right),$$

полагаме $\dfrac{\beta}{\alpha} = A$ и $\dfrac{1}{\alpha} = B$ и получената система ще бъде линейна спрямо A и B.

След тези предварителни сведения вече сме готови да моделираме и третия пример от началото на параграфа (за деленето на клетките).

Задача 47. Да се намери функция от вида $f(x) = Ae^{Bx}$, която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата от стр. 32

Решение. От графиката на таблицата видяхме, че е удачно да търсим приближението във вида

$$f(x) = ae^{bx}$$

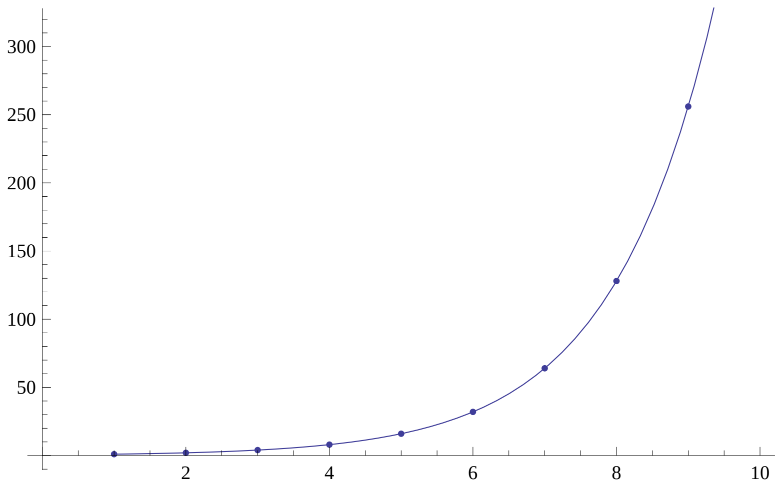
Както казахме, ще минимизираме сумата от квадратите не на $f(x_i) - y_i$, а на $\ln f(x_i) - \ln y_i$, т.е. на разликата от логаритмите на приближената и точната стойност. С други думи, искаме да определим коефициентите a и b така, че

$$\sum (f(x_i) - (c + bx_i))^2,$$

където $c = \ln a$, да е възможно най-малко.

```
In[30]:= g[x_] := c + b x
Φ[c_, b_] := (g[1] - Log[1])^2 + (g[2] - Log[2])^2 + (g[3] - Log[4])^2 +
   (g[4] - Log[8])^2 + (g[5] - Log[16])^2 + (g[6] - Log[32])^2 +
   (g[7] - Log[64])^2 + (g[8] - Log[128])^2 + (g[9] - Log[256])^2 +
   (g[10] - Log[512])^2
coeffs = NSolve[{∂c Φ[c, b] == 0, ∂b Φ[c, b] == 0}, {c, b}]
f[x_] := E^c * E^(b x)
plot1 = ListPlot[{{1, 1}, {2, 2}, {3, 4}, {4, 8},
    {5, 16}, {6, 32}, {7, 64}, {8, 128}, {9, 256}, {10, 512}}];
plot2 = Plot[f[x] /. coeffs[[1]], {x, 1, 10}];
Show[plot1, plot2]
Out[25]= {{c → -0.693147, b → 0.693147}}
```

Out[29]=



Нека сега разгледаме в общ вид задачата за приближаване на точките

$$(x_1, y_1), \ldots, (x_s, y_s)$$

с алгебрични полиноми. Т.е. ще търсим приближението във вида

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Функцията, която трябва да минимизираме, има вида

$$\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=0}^{s} (f(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{s} (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 \cdots + a_nx_i^n - y_i)^2$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_0} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0 \end{array}\right.$$

За да определим коефициентите на полинома, трябва да решим системата След като диференцираме и разделим двете страни на всяко уравнение на 2, получаваме

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=0}^{s} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n - y_i) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{s} [(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n - y_i) x_i] = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{s} [(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_n x_i^n - y_i) x_i^n] = 0 \end{array}\right.$$

Записана в матричен вид, тази система изглежда така:

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{s} 1 & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^2 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^n \\ \sum\limits_{i=0}^{s} x_i & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^2 & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^3 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^{n+1} \\ \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^2 & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^3 & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^4 & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^n & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^{n+1} & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^{n+2} & \cdots & \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{s} y_i \\ \sum\limits_{i=0}^{s} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=0}^{s} x_i^n y_i \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Нека означим матрицата на системата с X, вектор-стълба с коефициентите с a и вектор-стълба с десните страни с y. Тогава системата добива вида

$$Xa = y$$

и получаваме коефициентите по формулата

$$a = X^{-1} y.$$

Вземайки предвид матричното представяне на системата уравнения, нека отново приближим данните от задача 44:

Задача 48. По метода на най-малките квадрати да се намери полином от първа степен, който приближава точките

x	0	1	2	3	4
y	1	2	1	0	4

Решение. Търсим приближението във вида $f(x) = a_0 + a_1 x$. Вземайки предвид (2.1), получаваме матричното уравнение

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}}_{y}$$

Сега имаме $c = A^{-1}y$. Решаваме в Mathematica:

```
In[4]:= X = {{5, 10}, {10, 30}};
        y = {{8}, {20}};
        a = Inverse[X].y // MatrixForm
```

Out[6]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Окончателно получихме $f(x) = \dfrac{4}{5} + \dfrac{2}{5}x$.

Да дадем още един пример.

Задача 49. Да се намери параболата, която приближава по метода на най-малките квадрати таблицата

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	4	-1	1	5	6	13

Решение. Търсим приближението във вида $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Ще работим отново в Mathematica:

```
In[22]:= Do[x_i = i - 4, {i, 1, 7}];
         y_1 = 7; y_2 = 4; y_3 = -1; y_4 = 1; y_5 = 5; y_6 = 6; y_7 = 13;
```

$$X = \left\{\left\{7, \sum_{i=1}^{7} x_i, \sum_{i=1}^{7} x_i^2\right\}, \left\{\sum_{i=1}^{7} x_i, \sum_{i=1}^{7} x_i^2, \sum_{i=1}^{7} x_i^3\right\}, \left\{\sum_{i=1}^{7} x_i^2, \sum_{i=1}^{7} x_i^3, \sum_{i=1}^{7} x_i^4\right\}\right\};$$

$$Y = \left\{\left\{\sum_{i=1}^{7} y_i\right\}, \left\{\sum_{i=1}^{7} x_i\, y_i\right\}, \left\{\sum_{i=1}^{7} x_i^2\, y_i\right\}\right\};$$

```
         a = Inverse[X].Y // MatrixForm
```

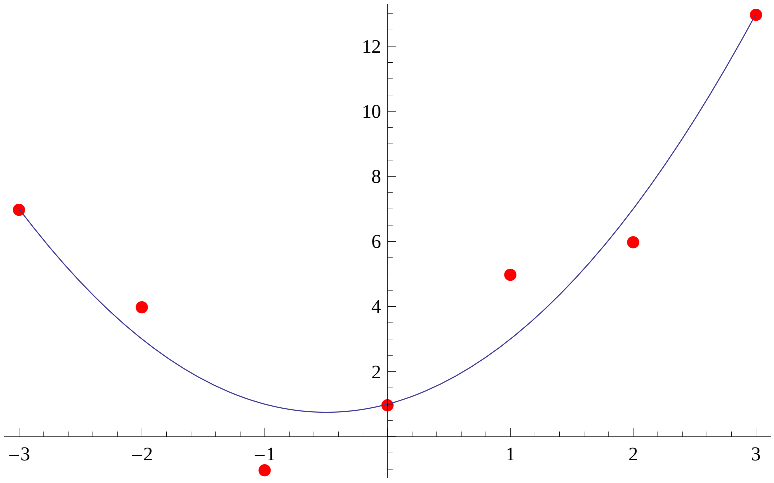
Out[12]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Така получихме, че $f(x) = 1 + x + x^2$. Нека илюстрираме графично, като изчертаем графиката на полинома и точките в една координатна система:

```
In[19]:= plot1 = ListPlot[Table[{x_i, y_i}, {i, 1, 7}], PlotStyle → Red, PlotMarkers → ●];
         plot2 = Plot[x^2 + x + 1, {x, -3, 3}];
         Show[plot1, plot2]
```

Out[21]=



Сега ще покажем как можем да използваме метода на най-малките квадрати, за да решаваме преопределени системи. С други думи ще търсим възможно най-доброто решение (в смисъл, който ще дефинираме по-долу) за система, която има по-голям ранг, отколкото неизвестни.

Задача 50. Да се реши преопределената система

$$\left|\begin{array}{l} x-y=1 \\ x+y=1 \\ x+y=-1 \\ x-y=-1 \end{array}\right.$$

Решение. Отново ще приложим същата идея, която приложиме и по-горе – търсим приближеното решение $(\overline{x}, \overline{y})$ така, че

$$\Phi(\overline{x},\overline{y}) = \sum e_i^2$$

да е минимално. Тук с e_i сме означили грешката, която се получава в i-тото уравнение, т.е. разликата между стойностите на лявата и дясната страна.

Получаваме

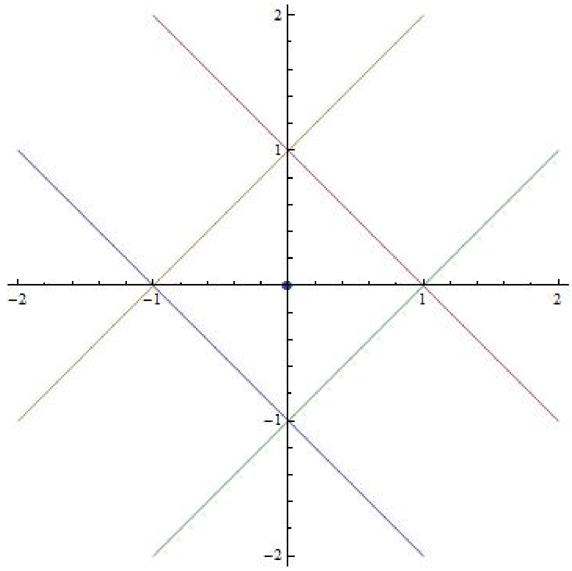
$$\Phi(\overline{x},\overline{y}) = (\overline{x}-\overline{y}-1)^2 + (\overline{x}+\overline{y}-1)^2 + (\overline{x}+\overline{y}+1)^2 + (\overline{x}-\overline{y}+1)^2$$

Необходимото условие да има функцията $\Phi(\overline{x},\overline{y})$ минимум е

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial\Phi}{\partial\overline{x}} = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\overline{y}} = 0 \end{array}\right.$$

Решаваме тази система и получаваме окончателно $(\overline{x},\overline{y}) = (0,0)$.

Нека видим геометричния смисъл на така полученото решение. Всяко едно от уравненията определя една права. Тогава търсим такава точка, която да е възможно най-близо до всички тези прави. Очевидно това е точно центърът на квадрата, заключен между правите:



Твърдение 12. *Нека търсим най-доброто решение $\overline{x}$ на преопрелената система*

$$Ax = b.$$

Тогава $\overline{x}$ удовлетворява матричното уравнение

$$A^T A\overline{x} = A^T b$$

Да приложим това твърдение към системата от задача 50.

Задача 51. Да се реши преопределената система

$$\left|\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x + y = 1 \\ x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{array}\right.,$$

като се използва Твърдение 12.

Решение. Решаваме задачата в Mathematica:

```
In[19]:= A = {{1, -1}, {1, 1}, {1, 1}, {1, -1}};
         b = {{1}, {1}, {-1}, {-1}};
         x = Inverse[Transpose[A].A].Transpose[A].b

Out[21]= {{0}, {0}}
```

Задача 52. Да се намери полином от първа степен на най-добро средноквадратично приближение в интервала $[0, 1]$ при тегло $\mu(x) = 1$за функцията $f(x) = \ln(1 + x)$.

Решение. Търсим полинома във вида $g(x) = ax + b$. Искаме да определим коефициентите така, че средноквадратичното разстояние между f и g да е възможно най-малко. Имаме

$$\|f - g\|_{L_2[0,1]} = \left\{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx\right\}^{1/2}.$$

Искаме това разстояние да е минимално и следователно търсим минимума на

$$\Phi(a, b) = \int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Условията за това са

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \end{array} \right. .$$

Решаваме тази система и получаваме $a \approx 0.682234$, $b \approx 0.0451774$.

Обърнете внимание, че това е непрекъснатия аналог на метода на най-малките квадрати. Разбира се, в непрекъснатия случай сумата заменяме с интеграл.

2.4 Задачи за самостоятелна работа

Задача 53. Топка е пусната от височина $450m$. Височината, на която се намира, е измервана през интервали от 1 сек.

t, sec	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h, m	450	445	431	408	375	332	279	216	143	61

По метода на най-малките квадрати да се намери квадратната функция, която описва падането на топката.

Задача 54. Да се намери подходяща функция, приближаваща таблицата

x	1	2	3	4	5
y	1	2	4	8	32

Задача 55. **Допълнителна информация за разглеждания модел**
(Няма връзка с решението на задачата)
Нека имаме дадена популация от микроорганизми. Означаваме с x тяхната численост в момента t. Един възможен модел, описващ развитието на популацията в дадената среда е следният – скоростта на увеличение на числеността на популацията (т.е. $x'(t)$) е пропорционална на самата численост x и на функцията $\mu(S) = \dfrac{mS}{a+S}$, която се нарича модел на Michaelis-Menten (експериментално установен). Записано като диференциално уравнение, това изглежда така:

$$x'(t) = \frac{mS}{a+S} x,$$

където

- x е числеността на популацията;
- S е концентрацията на хранителното вещество в дадената жизнена среда;
- m и a са параметри, зависещи от вида микроорганизми.

Задачата е по дадените по-долу експериментални данни за конкретни микроорганизми да се определят по метода на най-малките квадрати параметрите m и a във функцията

$$\mu(S) = \frac{mS}{a+S} \quad \text{(Модел на Michaelis-Menten)}$$

Желателно е

$$y \approx \mu(S)$$

да се представи по такъв начин, че получената от метода система уравнения да е линейна.

S	1.3	1.8	3	4.5	6	8	9
$\mu(S)$	0.07	0.13	0.22	0.275	0.335	0.35	0.36

Задача 56. Да се реши преопределената система

$$\left| \begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x-y=0.2 \\ x+3y=7 \\ 3x+y=5 \end{array} \right.$$

по два начина – като се минимизира функцията $\Phi(x,y)$ и като се използва формулата

$$A^T A\overline{x} = A^T b$$

Задача 57. Да се реши преопределената система

$$\left| \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+z=2 \\ x+3y+z=3. \\ x-4y+z=4 \\ x+5y+z=4 \end{array} \right.$$

(Използвайте начина, който предпочитате).

Задача 58. Да се намери полином от втора степен на най-добро средноквадратично приближение в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$ при тегло $\mu(x) = 1$ за функцията $f(x) = \sin x$. Да се илюстрира графично.

Глава 3

Числено диференциране и интегриране

3.1 Интерполационни квадратурни формули

Важен клас от числени методи са тези за приближено намиране на определени интеграли. Ясно е, че голяма част от интегралите не могат да бъдат решени точно. Ето защо от изключителна важност е да се намерят начини, по които стойността на съответните интеграли да може да се намира с достатъчно добра точност.

Първият начин, който ще разгледаме са т.нар. интерполационни квадратурни формули:

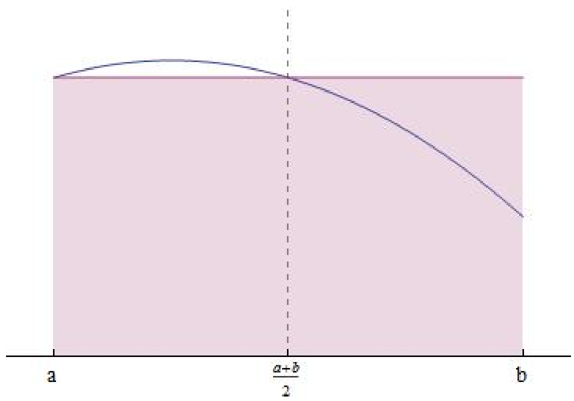
- **Квадратурна формула на правоъгълниците**

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Грешката при приближаване е

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3, \quad \xi \in (a,b)$$

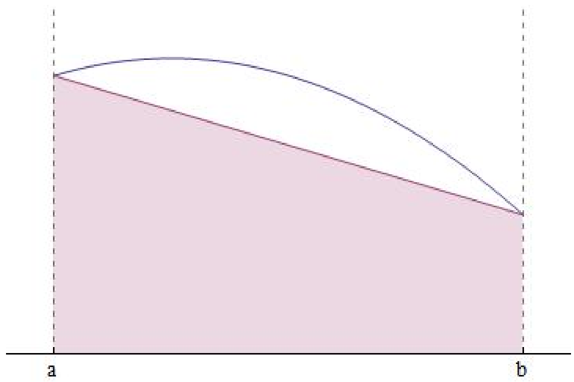
Геометричният смисъл на тази формула е следният – вместо лицето на криволинейния трапец, заключен под графиката на функцията $f(x)$, намираме лицето на правоъгълника със страни $b-a$ и $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.



- **Квадратурна формула на трапеците**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

$$R(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$



- **Квадратурна формула на Симпсън**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$R(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5$$

Ще изведем квадратурната формула на трапеците, за да покажем как става това. За другите формули нещата стоят по подобен начин.

Търсим приближение за

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Тогава можем да заместим функцията $f(x)$ с интерполационния ѝ полином от степен 1 за възлите $x_0 = a$ и $x_1 = b$ и тогава ще имаме

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_1(f;x)dx.$$

Получаваме

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \int_a^b L_1(f;x)dx \\
&= \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}.f(b) + \frac{x-b}{a-b}.f(a)\right)dx \\
&= \frac{f(b)}{b-a}\,\frac{(x-a)^2}{2}\bigg|_a^b - \frac{f(a)}{b-a}\,\frac{(x-b)^2}{2}\bigg|_a^b \\
&= \frac{f(b)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2} - \frac{f(a)}{b-a}.\frac{(b-a)^2}{2} \\
&= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)).
\end{aligned}$$

Аналогично могат да се изведат и формулите на правоъгълниците и Симпсън, като функцията $f(x)$ се апроксимира съответно с $L_0(f;x)$ във възела $x_0 = \frac{a+b}{2}$ и $L_2(f;x)$ във възлите $x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$.

Задача 59. Да се намери приближено стойността на

$$I = \int_{0.5}^{1} x^6 dx$$

и да се даде оценка на грешката (по абсолютна стойност) R, като се използва формулата на:

а) правоъгълниците;

б) трапеците;

в) Симпсън.

Да се сравни с точната стойност $\frac{127}{896} \approx 0.141741$.

Решение. Да означим $f(x) := x^6$. Във всеки от трите случая първо ще дадем оценка на грешката, а след това и ще намерим съответните приближения на I. Имаме:

а) За грешката имаме

$$R = \left| \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3 \right| = \frac{30\,|\xi^4|}{24}.0.5^3 \leq \frac{30}{24}.0.125 = 0.15625$$

При оценяването на грешката използвахме, че $\xi \in (0.5, 1)$. Сега получаваме

$$I \approx 0.5 f(0.75) \approx 0.0889893.$$

Действителната грешка е приблизително 0.05, което е в съответствие с оценката, която дадохме.

б) За оценка на грешката получаваме

$$R = \left| -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)^3 \right| = \frac{30\,|\xi^4|}{12}.0.5^3 \leq \frac{30}{12}.0.125 = 0.3125.$$

За приближението получаваме

$$I \approx 0.5 \frac{f(0.5) + f(1)}{2} \approx 0.253906.$$

Действителната грешка е приблизително 0.11.

в) За оценката на грешката имаме

$$R = \left| -\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5 \right| = \frac{360\,|\xi^2|}{2880}.0.5^5 \leq \frac{360}{2880}.0.03125 = 0.00390625.$$

$$I \approx \frac{0.5}{6}(f(0.5) + 4f(0.75) + f(1)) \approx 0.143962$$

В действителност грешката е приблизително 0.0022. ■

Обикновено, с цел да се постигне по-добра точност, се използват т.нар. съставни квадратурни формули. Нека търсим приближение за

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Разделяме интервала $[a, b]$ на n равни подинтервала с дължина $h = \frac{b-a}{n}$. Нека вземем точките $\{x_i = a + ih\}_{i=0}^{n}$. Тогава

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

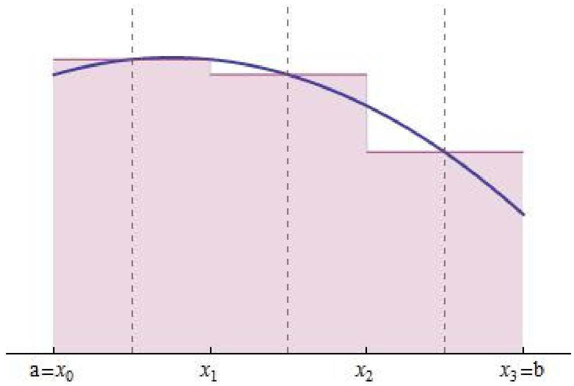
Сега, прилагайки към всеки от подинтервалите една от квадратурните формули (на правоъгълниците, на трапеците, на Симпсън), получаваме съответно:

- **Съставна квадратурна формула на правоъгълниците**

$$I(f) \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

За грешката може да се покаже, че

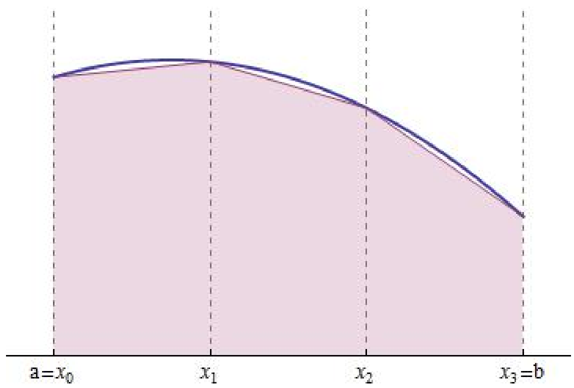
$$R(f) = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi).$$



- **Съставна квадратурна формула на трапеците**

$$I(f) \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$



- **Съставна квадратурна формула на Симпсън**

$$I(f) = \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i) \right]$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\xi)$$

Задача 60. Да се намери n така, че n-тата съставна квадратурна формула на правоъгълниците (трапеците, Симпсън) да приближава

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

с грешка, не по-голяма от $\epsilon = 0.00001$. Да се намери това приближение.

Решение. а) По формулата на правоъгълниците имаме за представянето на грешката

$$R_{rect} = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi) = \frac{f''(\xi)}{24n^2}.$$

Диференцираме $f(x)$ и получаваме

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$f''(x)$ е намаляваща (и положителна) в интервала $[0, 1]$ (проверете, че $f'''(x) < 0$ в този интервал) и тогава достига максималната си по модул стойност в този интервал за $x = 0$. Тогава

$$R_{rect} = \frac{2}{24n^2(1+\xi)^3} \leq \frac{1}{12n^2}.$$

Искаме грешката да е по-малка от ϵ и тогава

$$\frac{1}{12n^2} \leq 10^{-5} \Longleftrightarrow n^2 \geq \frac{10^5}{12}$$

Следователно n трябва да е поне 92. Обърнете внимание, че това е най-малката стойност на n, която гарантира грешка, по-малка от ϵ. Възможно е достатъчно добро приближение да се получи и за значително по-малки стойности на n.

Сега да намерим самото приближение за I.

```
In[1]:= f[x_] := 1/(1 + x)
        h = 1. / 92;
        nodes = Table[i h, {i, 0, 92}];
        i = 1/92 Sum[f[(nodes[[i - 1]] + nodes[[i]])/2], {i, 2, 93}]
Out[4]= 0.693143
```

Ако сравним така намереното приближение с това, което дава Mathematica като резултат (0.693147), ще видим, че резултатът е действително точен до петия знак след десетичната запетая.

б) Приближението по формулата на трапеците можете да направите самостоятелно за упражнение.

в) $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(1+x)^5}$. Тогава за представянето на грешката, използвайки формулата на Симпсън, имаме

$$R_{simp} \leq \frac{24}{2880n^4} \Longrightarrow \frac{24}{2880n^4} \leq 10^{-5},$$

т.е. $n \geq 6$. Намираме приближената стойност за I:

```
f[x_] := 1/(1 + x)
h = 1./6;
nodes = Table[j h, {j, 0, 6}];
i = 1/(6*6) Sum[(f[nodes[[j - 1]]] +
      4 f[(nodes[[j - 1]] + nodes[[j]])/2] + f[nodes[[j]]]), {j, 2, 7}]
Out[16]= 0.693149
```

Практически метод за приближено пресмятане на интеграли с определена точност

На практика в много случаи е невъзможно (или много трудно) да се даде оценка на грешката, използвайки формулата, както направихме в задача 60. Тогава може да се използва следната идея. Нека търсим приближена стойност на интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

с точност, не по-лоша от някакво отнапред зададено ϵ. Ще използваме, например, съставната квадратурна формула на Симпсън. Последователно намираме приближения по формулата, като разделяме интервала $[a, b]$ на $2, 3, \ldots$ подинтервала. Правим това, докато две последователни приближения, които сме намерили, се различават помежду си с не повече от ϵ. Тогава можем да считаме, че сме намерили I с близка до желаната точност. Нека дадем пример, като разгледаме отново същия интеграл, както и в задача 60.

Задача 61. Като използвате описания по-горе метод, намерете приближено стойността на

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Алгоритъмът да приключва, когато разликата между приближенията в две съседни итерации стане по-малка от 10^{-10} или докато броят на итерациите стане 1000.

Решение. Ще реализираме описания по-горе алгоритъм в Mathematica:

```
ϵ = 10^-10;
f[x_] := 1/(1 + x)
n = 2;
h = 1/n;
Do[x_i = i h, {i, 0, n}];
IApprox_1 = 1/(6*n) Sum[(f[x_(j-1)] + 4 f[(x_(j-1) + x_j)/2] + f[x_j]), {j, 1, n}] // N;

Do[
 n++;
 h = 1/n;
 Do[x_i = i h, {i, 0, n}];
 IApprox_2 = 1/(6*n) Sum[(f[x_(j-1)] + 4 f[(x_(j-1) + x_j)/2] + f[x_j]), {j, 1, n}];
 If [Abs[IApprox_1 - IApprox_2] < ϵ, Break[]];
 IApprox_1 = IApprox_2
 , {1000}
]
Print["I≈", N[IApprox_2, 10]]
Print["Iterations:", n]
```

```
I≈0.6931471814

Iterations:39
```

■

За упражнение можете да реализирате този алгоритъм за формулите на правоъгълниците и трапеците. Направете числени експерименти и сравнете броя итерации, необходими при всяка от формулите, за да се постигне желаната точност.

Да обърнем внимание, че разгледаната идея може да се използва за широк клас задачи, а не само за приближеното пресмятане на интеграли (например, по формулата на Нютон можем да построяваме полиноми с нарастващи степени, докато приближението на функция в дадена точка стане достатъчно добро).

3.2 Квадратурна формула на Гаус

Дефиниция 13. *Казваме, че една квадратурна формула има* ***алгебрическа степен на точност*** *(АСТ) m, ако тя е точна за всички алгебрични полиноми от степен $\leq m$ и съществува полином от степен $m + 1$, за който тя не е точна.*

Да разгледаме квадратурната формула в общия вид

$$\int_a^b \mu(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{3.1}$$

където $\mu(x)$ е дадено тегло, дефинирано в $[a,b]$, точките $\{x_k\}_{k=1}^n$ ($a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$) са възлите на квадратурната формула, а $\{A_k\}_{k=1}^n$ са реални числа – коефициентите на квадратурната формула. Искаме да определим възлите и коефициентите така, че съответната квадратурна формула да има възможно най-висока АСТ. Тази формула се нарича **квадратурна формула на Гаус**. Построяването ѝ се основава на следното

Твърдение 13. *При всяко естествено число n съществува единствена квадратурна формула от вида (3.1) с АСТ $2n-1$ (и нито една с по-голяма АСТ). Възлите $\{x_k\}_{k=1}^n$ на тази квадратурна формула са нулите на полинома от степен n, ортогонален в $[a,b]$ с тегло $\mu(x)$ на всички алгебрични полиноми от степен $n-1$.*

Първо ще покажем как можем да изведем формулите при тегло $\mu(x)=1$ по метода на неопределените коефициенти. С други думи, ще изведем формули за приближеното пресмятане на

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)dx.$$

Тези формули са известни като формули на Гаус-Льожандър. Обърнете внимание, че обикновено те се задават за приближено интегриране в граници от -1 до 1. Произволен интеграл в граници от a до b може да се пресметне, като се направи линейна смяна. Ще покажем как става това.

Задача 62. Да се намери по метода на неопределените коефициенти формулата на Гаус-Льожандър с два възела.

Решение. Търсим приближението във вида

$$I \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2).$$

Неизвестните параметри, които подлежат на определяне са A_1, A_2, x_1, x_2. Съгласно Твърдение 13, формулата трябва да има АСТ 3, т.е. да е точна за всички полиноми от π_3. Ще вземем най-простия базис $\{1, x, x^2, x^3\}$ и получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} \int_{-1}^{1} 1.dx = A_1.1 + A_2.1 \\ \int_{-1}^{1} x.dx = A_1.x_1 + A_2.x_2 \\ \int_{-1}^{1} x^2.dx = A_1.x_1^2 + A_2.x_2^2 \\ \int_{-1}^{1} x^3.dx = A_1.x_1^3 + A_2.x_2^3 \end{array} \right.$$

Решаваме тази система, вземайки предвид, че $x_1 < x_2$:

```
In[5]:= Solve[
  {A1 + A2 == Integrate[1, {x, -1, 1}],
   A1 x1 + A2 x2 == Integrate[x, {x, -1, 1}],
   A1 x1^2 + A2 x2^2 == Integrate[x^2, {x, -1, 1}],
   A1 x1^3 + A2 x2^3 == Integrate[x^3, {x, -1, 1}],
   x1 < x2
  }, {A1, A2, x1, x2}]
```

$$\text{Out[5]= } \left\{\left\{A_1 \to 1,\ A_2 \to 1,\ x_1 \to -\frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2 \to \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

Така, търсената формула има вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Аналогично могат да се изведат и формули с повече възли. Ще дадем някои формули в следната таблица, като укажем възлите и коефициентите за всяка от тях.

Брой възли	Коефициенти	Възли	АСТ
1	$A_1 = 2$	$x_1 = 0$	1
2	$A_1 = 1$ $A_2 = 1$	$x_1 = -1/\sqrt{3}$ $x_2 = 1/\sqrt{3}$	3
3	$A_1 = 5/9$ $A_2 = 8/9$ $A_3 = 5/9$	$x_1 = -\sqrt{3/5}$ $x_2 = 0$ $x_3 = \sqrt{3/5}$	5
4	$A_1 = (18 - \sqrt{30})/36$ $A_2 = (18 + \sqrt{30})/36$ $A_3 = (18 + \sqrt{30})/36$ $A_4 = (18 - \sqrt{30})/36$	$x_1 = -\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$ $x_2 = -\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$ $x_3 = \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}/35$ $x_4 = \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}/35$	7

За да интегрираме в произволни граници, т.е. за да намерим приближено стойността на

$$\int_a^b f(x)dx,$$

първо трябва да направим **смяна на променливата**:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

Задача 63. Да се пресметне приближено стойността на

$$\int_0^{0.8} f(x)dx,$$

където

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5,$$

като се изпозват формулите на Гаус-Льожандър с 2 и 3 възела. Да се сравни с точната стойност (1.640533). Да се сравни със стойността, която се получава по формулите на трапеците и Симпсън.

Решение. За да можем да приложим формулите на Гаус-Льожандър, трябва да интегрираме в граници от -1 до 1. Следователно първо трябва да направим смяна на променливата. Полагаме

$$x = 0.4 + 0.4t$$

Тогава интегралът добива вида

$$\int_{-1}^{1} [0.2 + 25(0.4 + 0.4t) - 200(0.4 + 0.4t)^2 + 675(0.4 + 0.4t)^3 - 900(0.4 + 0.4t)^4 + 400(0.4 + 0.4t)^5]dt$$

Нека означим подинтегралната функция с $\varphi(t)$.
Двуточкова формула на Гаус-Льожандър. Получаваме

$$I \approx \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

```
In[8]:= φ[t_] := (0.2 + 25 (0.4 + 0.4 t) - 200 (0.4 + 0.4 t)^2 +
            675 (0.4 + 0.4 t)^3 - 900 (0.4 + 0.4 t)^4 + 400 (0.4 + 0.4 t)^5) 0.4
        φ[-1/√3] + φ[1/√3]
Out[9]= 1.82258
```

Триточкова формула на Гаус-Льожандър. Имаме

$$I \approx \frac{5}{9}\varphi\left(-\sqrt{3/5}\right) + \frac{8}{9}\varphi(0) + \frac{5}{9}\varphi\left(\sqrt{3/5}\right).$$

```
In[18]:= φ[t_] := (0.2 + 25 (0.4 + 0.4 t) - 200 (0.4 + 0.4 t)^2 +
             675 (0.4 + 0.4 t)^3 - 900 (0.4 + 0.4 t)^4 + 400 (0.4 + 0.4 t)^5) 0.4
         NumberForm[5/9 φ[-√(3/5)] + 8/9 φ[0] + 5/9 φ[√(3/5)], 7]
Out[19]//NumberForm=
         1.640533
```

Формула на трапеците. Можем да приложим формулата на трапеците директно към интеграла, както е зададен в условието (в граници от 0 до 0.8). Получаваме

$$I \approx \frac{0.8}{2}(f(0) + f(0.8))$$

```
In[50]:= f[x_] := 0.2 + 25 x - 200 x^2 + 675 x^3 - 900 x^4 + 400 x^5
         0.8/2 (f[0] + f[0.8])
Out[51]= 0.1728
```

Формула на Симпсън.

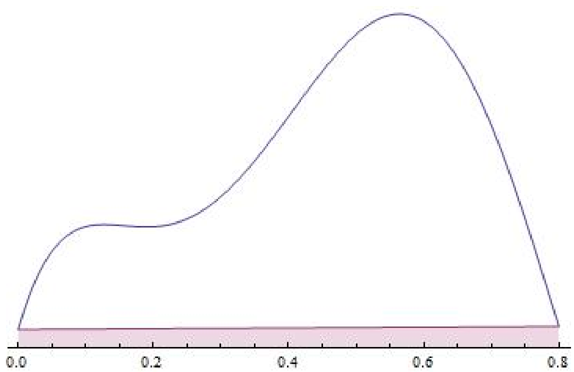
$$I \approx \frac{0.8}{6}(f(0) + 4f(0.4) + f(0.8))$$

```
In[46]:= f[x_] := 0.2 + 25 x - 200 x^2 + 675 x^3 - 900 x^4 + 400 x^5
         0.8/6 (f[0] + 4 f[0.4] + f[0.8])
Out[47]= 1.36747
```

Да обобщим получените резултати

Формула	АСТ	Резултат	Грешка(по модул)
на трапеците	1	0.1728	1.468
на Симпсън	3	1.36747	0.27
Гаус(2 възела)	3	1.82258	0.182
Гаус(3 възела)	5	1.640533	0.0

Резултатите в таблицата показват, че АСТ е важен критерий за точността на квадратурните формули. Формулите на Симпсън и двуточковата формула на Гаус-Льожандър са с една и съща АСТ и дават приблизително еднаква грешка. Предимството на формулата на Гаус обаче е, че функцията се оценява само в 2 точки, а по формулата на Симспън – 3. Триточковата формула на Гаус е точна за всички полиноми от π_5 и затова няма грешка при приближаването на $f(x)$. Поучително е да се види и графично защо формулата на трапеците дава толкова голяма грешка в този случай:



3.3 Числено диференциране

Тук съвсем накратко ще коментираме въпроса как можем да намерим приблизително стойността на производната на дадена функция в някоя точка. Нека търсим $f'(x_0)$, където x_0 е дадена точка от реалната права. По дефиниция

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Тогава, ако вземем крайната разлика

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

при достатъчно малко h, можем да считаме, че сме намерили приблизително стойността на производната в точката x_0. Ще разледаме следните 3 формули, прилагащи тази идея, и ще изведем оценка за грешката им на апроксимация:

- Формула с разлика напред:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

За грешката имаме

$$\begin{aligned}R &= f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \\ &= f'(x_0) - \frac{1}{h}\left(f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + O(h^2) - f(x_0)\right) = O(h)\end{aligned}$$

При оценката на грешката развихме $f(x_0+h)$ по формулата на Тейлор около точката x_0.

- Формула с разлика назад:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$$

По аналогичен начин се показва и тук, че грешката е O(h).

- Формула с централна разлика:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Тук за грешката имаме:

$$\begin{aligned}R &= f'(x_0) - \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = \\ &= f'(x_0) - \frac{1}{2h}\left(f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + O(h^3) - f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) . \right. \\ &\left. -\frac{h^2}{2!}f''(x_0) + O(h^2)\right) = O(h^2)\end{aligned}$$

С други думи, получихме, че формулата с централна разлика дава най-добро приближение измежду трите.

3.4 Задачи за самостоятелна работа

Задача 64. Изведете формулата на Гаус-Льожандър с 3 възела по метода на неопределените коефициенти.

Задача 65. Да се изведе квадратурната формула на Гаус с 3 възела за пресмятане на интеграл от вида

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx$$

Задача 66. Намерете приближено стойността на

$$\int_0^3 xe^{2x}dx,$$

като използвате квадратурните формули на правоъгълниците, Симпсън, Гаус с 2 и 4 възела. Направете сравнение със стойността, точна до осмия знак след десетичната запетая ($\frac{1}{4}\left(1+5e^6\right)$) – намерете грешките.

Задача 67. За интеграла от Задача 66 намерете n така, че n-тата съставна квадратурна формула на трапеците да дава не по-лоша точност, отколкото формулата на Гаус с 4 възела.

Задача 68. Намерете приближено

$$\int_0^\pi f(x)dx,$$

използвайки съставната квадратурна формула на трапеците, като са известни само следните стойности за функцията

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
$f(x)$	1.0000	0.3431	0.2500	0.3431	1.0000

Задача 69. Покажете,че формулата с разлика назад за приближеното пресмятане на $f'(x_0)$

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

дава грешка O(h).

Глава 4

Числено решаване на уравнения

Накрая ще разгледаме няколко метода за приближеното решаване на уравнения. Както знаем, в общия случай е трудно или дори невъзможно да намерим точно решение за дадено нелинейно уравнение. Ето защо в тези случаи трябва да се обърнем към числени методи за намиране на приближено решение (с произволна точност). Тук ще разгледаме само алгоритмичната страна на въпроса, като ще предполагаме, че задачите, които ще решаваме, могат да бъдат решени със съответните числени методи. За повече информация – виж лекциите и учебника.

И така, разглеждаме следната задача – търсим приближено решение на уравнението

$$f(x) = 0$$

с грешка, не по-голяма от ϵ. Първият метод, който ще разгледаме, е т.нар. **метод на бисекцията**. Идеята е следната:

1. Нека сме ограничили корена на уравнението в даден интервал $[a, b]$ и за него имаме $f(a).f(b) < 0$.

2. Оценяваме стойността на функцията $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

   - Ако $f(a).f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, това означава че функцията има различни знаци в точките a и $\frac{a+b}{2}$ и коренът се намира в интервала, определен от тези две точки. Вземаме $b = \frac{a+b}{2}$ и търсим корена в така получения (два пъти по-малък) интервал $[a, b]$.
   - В противен случай, вземаме $a = \frac{a+b}{2}$.

3. Повтаряме тези стъпки, докато интервалът, в който е заключен коренът стане с дължина, по-малка от ϵ.

Да демонстрираме този алгоритъм, като решим следната

Задача 70. Да се намери приближено решение на уравнението

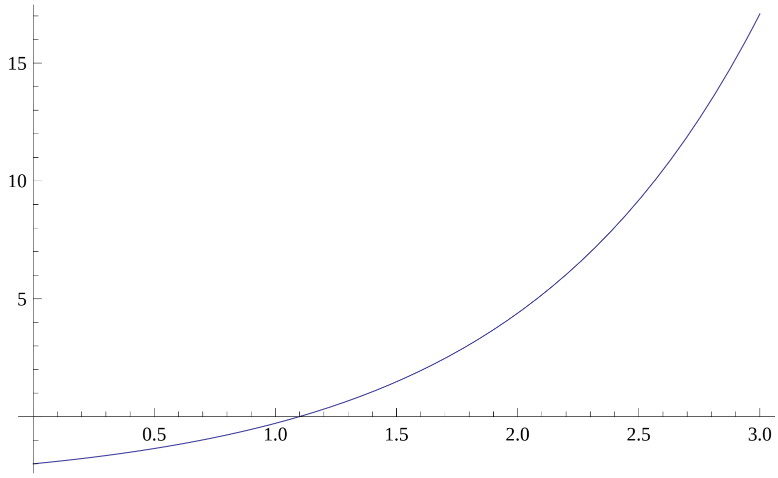
$$e^x - 3 = 0$$

в интервала $[0, 3]$ с грешка, ненадминаваща $\epsilon = 0.000001$.

Решение. Първо, да изчертаем графиката на функцията $f(x) = e^x - 3$, за да видим какви корени има тя в искания интервал.

```
In[62]:= Plot[f[x], {x, 0, 3}]
```

Out[62]=



Оказва се, че уравнението има един корен и този корен е ограничен, например, в интервала $[1, 3]$. Нека сега реализираме описания по-горе алгориитъм в Mathematica, като за начални стойности на a и b вземем съответно 1 и 3:

```
In[52]:= f[x_] = E^x - 3;
         ϵ = 0.000001;
         a = 1;
         b = 3;
         iter = 0;
         While[b - a > ϵ,
          If[f[a] f[(a + b)/2] < 0, b = (a + b)/2, a = (a + b)/2];
          iter++;
         ]
         Print["x≈", b // N]
         Print["iterations≈", iter]
x≈1.09861
iterations≈21
```

Вторият метод, който ще разгледаме е т.нар. метод на Нютон, който е може би най-широко използваният за приближено решаване на уравнения, тъй като (в случаите, когато е сходящ към точното решение) дава резултат с исканата точност след сравнително малък брой итерации.

1. Нека имаме едно първоначално приближение x_0 (например, избрано от графиката на функцията). Да построим допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката $(x_0, f(x_0))$. Имаме

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1}$$

   Тогава

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0}{f'(x_0)}$$

2. Аналогично намираме следващите приближения по формулата

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i}{f'(x_i)},\ i = 0, 1, \ldots$$

3. Правим това, докато разликата в две съседни приближения стане по-малка от ϵ.

```
In[22]:= f[x_] := E^x - 3;
         ϵ = 0.000001;
         x0 = 3;
         x1 = x0 - f[x0] / f'[x0];
         i = 1;
         While[Abs[xi - xi-1] > ϵ,
             xi+1 = xi - f[xi] / f'[xi]; i++;]
         Print["x≈", xi // N];
         Print["Iterations:", i ];

x≈1.09861

Iterations:7
```

Глава 5

Допълнителни задачи

Задача 71. Да се намери полиномът, интерполиращ таблицата:

x	-1	0	1	3
$f(x)$	1	2	3	29

Отг.: $x^3 + 2$.

Задача 72. Да се намери полиномът, интерполиращ таблицата:

x	1	3	4
$f(x)$	-2	4	10

Отг.:$x^2 - x - 2$

Задача 73. Да се намери полиномът, интерполиращ таблицата:

x	0	0	0	1
$f(x)$	2	1	0	3

Отг.:$x + 2$

Задача 74. Ако $f(x) = x^m,\ m = 0, \dots, n-1$, да се докаже, че $f[x_0, \dots, x_n] = 0$.

Задача 75. Проверете дали функциите $1, \cos x, \cos 2x$ образуват Чебишова система в интервала $[0, \pi]$ и в интервала $[0, 2\pi]$.

Задача 76. Да се намерят равномерната норма и средноквадратичната норма с тегло $\mu(x) = 1$ за функцията $f(x) = 1 - x$ в интервала $[0, 3]$.
Отг.: 2; $\sqrt{3}$.

Задача 77. Да се намерят равномерното разстояние и средноквадратичното разстояние с тегло $\mu(x) = 1$ между функциите $f(x) = x$ и $g(x) = x^2$ в интервала $[0, 1]$.
Отг.: $\dfrac{1}{2}; \sqrt{\dfrac{1}{30}}$

Задача 78. Проверете дали функциите $f_1(x) = e^x$ и $f_2(x) = 1$ са ортогонални с тегло $\mu(x) = 1$ в интервала $[0, 1]$.

Задача 79. Проверете дали функциите $f_1(x) = x$ и $f_2(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ са ортогонални с тегло $\mu(x) = 1$ в интервала $[0, 1]$.

Задача 80. Да се намери линейна функция, която по метода на най-малките квадрати приближава таблицата:

1	2	3	4
2	5	7	10

Отг.: $2.6x - 0.5$

Задача 81. Да се намери полиномът от първа степен на най-добро средноквадратично приближение с тегло $\mu(x) = 1$ в интервала $[0, 1]$ за функцията $g(x) = x^2$.

Упътване. Тоест търсим функция от вида $f(x) = ax + b$, която минимизира средноквадратичното разстояние $\|f - g\|_{L_2[0,1]}$

Задача 82. Като се използва методът на най-малките квадрати, да се реши преопределената система:

$$\left|\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x + 2y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right. .$$

Задача 83. Като използвате квадратурната формула на правоъгълниците/на трапеците/на Симпсън, пресметнете приближено стойността на

$$\int_{-1}^{1} (x^3 - 1)dx.$$

Дайте оценка на грешката.

Задача 84. Като използвате съставната квадратурна формула на правоъгълниците/на трапеците при $n = 2$, пресметнете приближено стойността на

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx.$$

Задача 85. Да се изведе квадратурната формула на Гаус-Льожандър с 1 възел.

Упътване. Тоест търсим квадратурна формула от вида $Q(f) = A.f(x_0)$, която да има АСТ $2n - 1 = 1$.

Задача 86. Като се използва метода на Нютон за приближено решаване на уравнения и началното приближение $x_0 = 2$, да се намери следващото приближение на корена на уравнението

$$x^2 - 1 = 0$$

Приложение A

Въведение в системата Mathematica

A.1 Запознаване със синтаксиса

Синтаксисът в Mathematica е изключително последователен и е достатъчно човек да запомни няколко основни правила, които ще разгледаме в този параграф.

Основните аритметични операции се извършват по стандартния начин – с операторите $+$, -, *, $/$. Полезно е да знаем и операторите за пресмятане на квадратен корен, факториел, частно и остатък при целочислено деление – съответно *Sqrt*, !, *Quotient*, *Mod*.

```
In[90]:= 2+3

Out[90]= 5
In[91]:= 3.5-2.8

Out[91]= 0.7
In[92]:= 2*4

Out[92]= 8
In[93]:= 10/2

Out[93]= 5
In[94]:= 12^3

Out[94]= 1728
In[95]:= 2x+3x

Out[95]= 5 x
In[96]:= 5!

Out[96]= 120
In[97]:= Sqrt[121]

Out[97]= 11
In[98]:= 10/3
```

Out[98]= $\frac{10}{3}$

```
In[99]:= Quotient[10,3]

Out[99]= 3
```

Обърнете внимание, че знакът за умножение може да се изпуска, стига това да не предизвиква двусмислие (напр., не можем да напишем xy, тъй като Mathematica ще приеме това като символ с името xy.)

Едно от нещата, които често предизвикват объркване, е изполването на скоби. Тук трябва да се помнят следните правила:

- Кръглите скоби се използват само в „математическия смисъл" на думата, т.е. за да заграждат част от някакъв алгебричен израз.

```
In[84]:= x(x+2)^2
         (x+y(1-y))^2
```

- Квадратни скоби се използват, за да се заградят аргументите на дадена функция (вградена или дефинирана от нас). Да обърнем внимание, че всички вградени функции и константи се пишат с главна буква.

```
In[86]:= Sqrt[60+4]
         ArcSin[Sin[Pi/2]]
         Log[E]
```

- Фигурните скоби се използват, за да заграждат елементите на списък

```
In[89]:= {1,2,3,4}
```

Системата Mathematica не може да разбере какво имаме предвид със следните изрази (като коментар са зададени правилните изрази):

```
[x+y(1-y)]^2
(* (x+y(1-y))^2 *)

Syntax::sntxb : Expression cannot begin with "[x + y (1 − y)] ^ 2".

Syntax::tsntxi : "[x + y (1 − y)]" is incomplete; more input is needed.

Syntax::sntxi : Incomplete expression; more input is needed .

(1,2)
(* {1,2} *)

Syntax::sntxf : "(" cannot be followed by "1, 2)".

Syntax::tsntxi : "1, 2" is incomplete; more input is needed.

Syntax::sntxi : Incomplete expression; more input is needed .

Sin(Pi)
(* Sin[Pi] *)

π Sin
```

Обърнете внимание, че при последния пример системата Mathematica на извежда съобщение за грешка. От гледна точка на синтаксиса, всичко е наред – умножават се символът, означен със Sin (а не вградената функция за намиране на синус) и константата π.

Друга честа причина за проблеми е незнаенето на следния факт – **имената на всички вградени функции и константи в Mathematica започват с главна буква.** Например, $Cos[x]$, $N[1/2]$, E, Pi, $Log[x]$. Обърнете внимание, че вградената функция за намиране на нантурален логаритъм е Log.

Да разгледаме и някои полезни функции за работа с алгебрични изрази:

- $Expand[expr]$ – Разкрива скобите в израза $expr$(За по-точно определение - вж. документацията);

- $Factor[poly]$ – Разлага полинома *poly* на прости множители;
- $Together[expr]$ – Събира рационалните дроби в израза *expr* под общ знаменател;
- $Apart[expr]$ – Разлага рационалната дроб *expr* в сума от елементарни дроби;
- $Simplify[expr]$ – Опростява израза *expr*, в съответствие с вградени в системата правила. Обърнете внимание, че често представата на Mathematica за „опростяване” се разминава с нашата! Често е удобно опростяването да се прави при някакви предположения за параметрите в израза (напр., положителни, реални и др.). За повече информация по този въпрос, виж „Simplifying with Assumptions” в документацията.

```
In[18]:= Expand[(x+5)^3 * (2x-1)^2]
```

Out[18]= $125 - 425\,x + 215\,x^2 + 241\,x^3 + 56\,x^4 + 4\,x^5$

```
In[19]:= Factor[x^3+2x^2-5x-6]
```

Out[19]= $(-2+x)\,(1+x)\,(3+x)$

In[20]:= **Together**$\left[x+\frac{2}{x^2+1}\right]$

Out[20]= $\frac{2+x+x^3}{1+x^2}$

In[21]:= **Apart**$\left[\frac{1}{x^2+x-2}\right]$

Out[21]= $\frac{1}{3\,(-1+x)} - \frac{1}{3\,(2+x)}$

```
In[22]:= Simplify[x(3-x)-5x^2+(x-1)(2x+3)]
```

Out[22]= $-3 + 4\,x - 4\,x^2$

Важна особеност на Mathematica е фактът, че тя работи символно (и следователно точно), докато не сме указали друго. (За повече подробности, вж. „Symbolic Computation ” в документацията.)

```
In[117]:= 123/Sqrt[768]
          Cos[Pi/12]
          Log[2]
```

Out[117]= $\frac{41\sqrt{3}}{16}$

Out[118]= $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Out[119]= Log[2]

Можем да получим приближената стойност на дадено число или даден израз, като използваме вградената функция N:

```
In[114]:= N[123/Sqrt[768]]
          N[Cos[Pi/12]]
          N[Log[2]]

Out[114]= 4.43838

Out[115]= 0.965926

Out[116]= 0.693147
```

A.2 Списъци

Списък в Mathematica е всяка последователност от елементи, разделени със запетаи и оградени с фигурни скоби. Например:

```
In[14]:= {1, 2, 3, 4, 5}
         {a, b, c}
         {{1, 3}, {2, 5}}
         {x^2 + y == 5, x - y == 7}
```

Първото, което ще отбележим, когато говорим за списъци, е че повечето вградени функции в Mathematica могат да се прилагат върху списъци. Като резултат се получава отново списък, в който елементите се получават, като съответната функция се приложи върху елементите на изходния списък. Да разгледаме следните примери:

```
In[31]:= {1,2,3,4,5}^2

Out[31]= {1, 4, 9, 16, 25}

In[32]:= Sqrt[{{ {2,3}, {4,5}}, {{6,7}, {8,9}}}]
```

Out[32]= $\{\{\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\}, \{2, \sqrt{5}\}\}, \{\{\sqrt{6}, \sqrt{7}\}, \{2\sqrt{2}, 3\}\}\}$

```
In[33]:= 1/{1,2,3,4,5}
```

Out[33]= $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$

```
In[34]:= {1,2,3}+{4,5,6}

Out[34]= {5, 7, 9}

In[37]:= 2^{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

Out[37]= {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024}

In[38]:= Cos[{0,Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi}]
```

Out[38]= $\left\{1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right\}$

Обърнете внимание, че когато приложим стандартното умножение към списъци, те се умножават поелементно. Скаларно произведение получаваме, като използваме точка.

```
In[39]:= {1,2,3}{4,5,6}

Out[39]= {4, 10, 18}

In[40]:= {1,2,3}.{4,5,6}

Out[40]= 32
```

Нека си дефинираме следния списък:

```
In[41]:= alist = {2, x, y, {a, b}};
```

Върху него да разгледаме основните операции, които можем да извършваме върху списъци:

- Намиране на дължината на списъка

```
In[42]:= Length [alist]

Out[42]= 4
```

- Достъпване на елемент на списъка. Обърнете внимание, че за разлика от масивите в C++ и Java, например, индексацията започва от 1, а не от 0.

```
In[43]:= alist [[3]]

Out[43]= y

In[44]:= alist[[1]]

Out[44]= 2
```

Други полезни функции за работа със списъци са *Append*, *Prepend*, *Sort*, *Union*, *Join*, *Flatten* и др. – можете да видите синтаксиса и семантиката им в документацията на системата.

В много случаи е удобно, вместо да въвеждаме елементите на даден списък един по един, те да се създават автоматично по определено правило. Има два варианта за случването на това в Mathematica. Първият е вградената фукция Range. Тя може да се използва по следните начини:

- $Range[N]$ – генерира списък с първите N естествени числа.

```
In[48]:= Range[10]

Out[48]= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
```

- $Range[A, B]$ – генерира списък с числата от A до B през 1.

```
In[49]:= Range[4.5, 15.1]

Out[49]= {4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5, 10.5, 11.5, 12.5, 13.5, 14.5}
```

- $Range[A, B, step]$ – генерира списък с числата от A до B през стъпка $step$.

```
In[50]:= Range [0,1,1/10]
```

Out[50]= $\left\{0, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}, \frac{9}{10}, 1\right\}$

Друга вградена функция за автоматично генериране на списъци е $Table$. Тя приема 2 аргумента. Първият е формулата, по която се изчисляват елементите, а вторият е итератор. Ще илюстрираме действието на $Table$ с няколко примера.

- Елементите на списъка се получават, като във формулата k последователно се замества с първите 10 естествени числа.

```
In[51]:= Table [k^2, {k,10}]

Out[51]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
```

- Елементите на списъка се получават, като във формулата k последователно се замества с числата от 2 до 5 през 1.

```
In[52]:= Table [k^2, {k,2,5}]

Out[52]= {4, 9, 16, 25}
```

- Елементите на списъка се получават, като във формулата x се замества последователно с числата от 1 до 10 през $\frac{1}{2}$

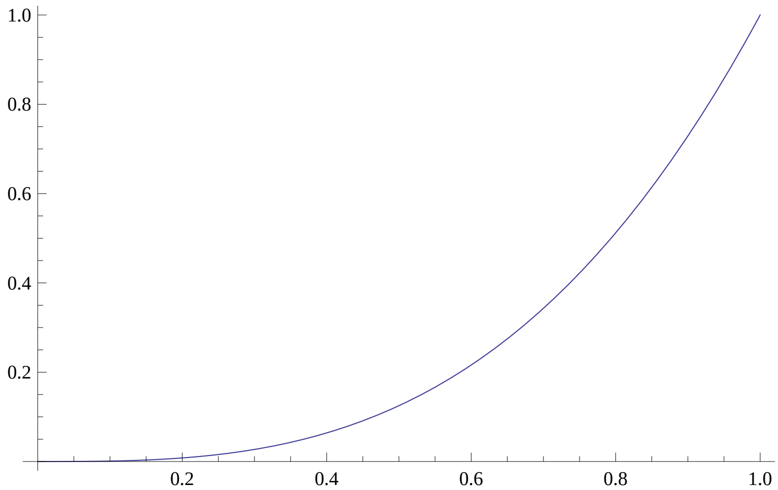
```
In[54]:= Table [N[Cos[x]], {x,1,10,1/2}]

Out[54]= {0.540302, 0.0707372, -0.416147, -0.801144, -0.989992, -0.936457,
 -0.653644, -0.210796, 0.283662, 0.70867, 0.96017, 0.976588, 0.753902,
 0.346635, -0.1455, -0.602012, -0.91113, -0.997172, -0.839072}
```

A.3 Графики

Да видим сега как с помощта на системата Mathematica можем да построяваме графики. Функцията за това е Plot. Тя приема два аргумента – първият е функцията (или списък от функции), чиято графика искаме да построим. Вторият е списъкът $\{var, from, to\}$, където var е името на независимата променлива във функцията, а $[from, to]$ е интервалът, в който искаме да бъде построена графиката.

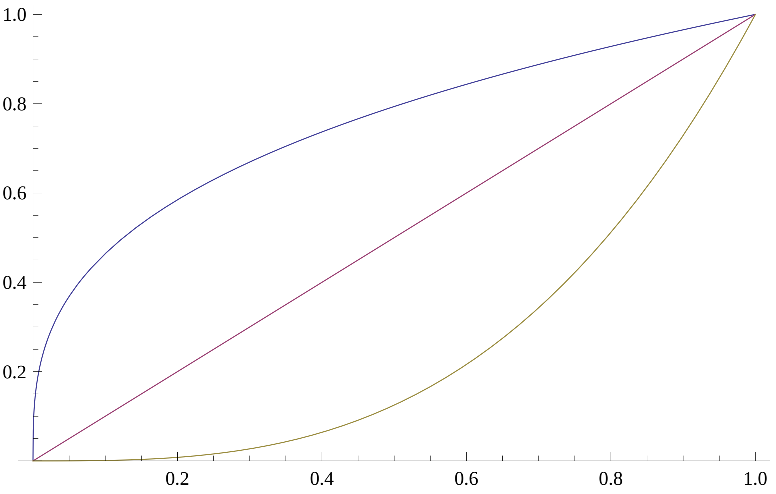
```
In[8]:= Plot[x^3, {x,0,1}]
```

Out[8]=



```
In[9]:= Plot[{∛x ,x,x^3}, {x,0,1}]
```

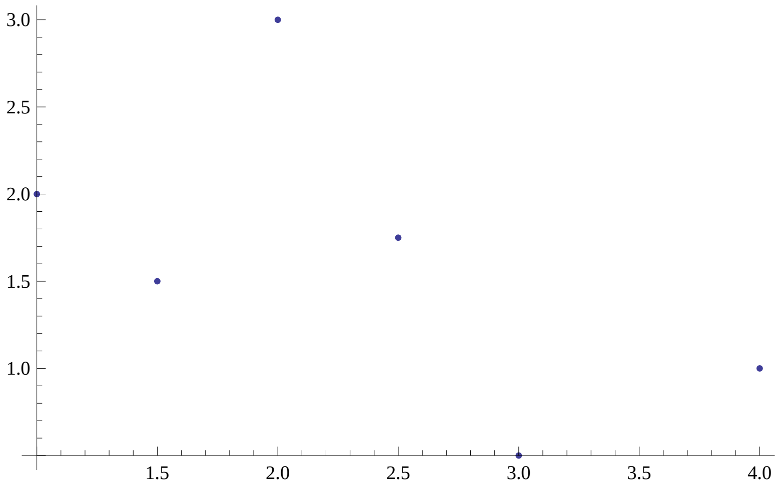
Out[9]=



Когато искаме да изброим дадено множество от точки в равнината, използваме командата $ListPlot$, която приема като аргумент списък с наредени двойки (списъци с по два елемента) – координатите на точките:

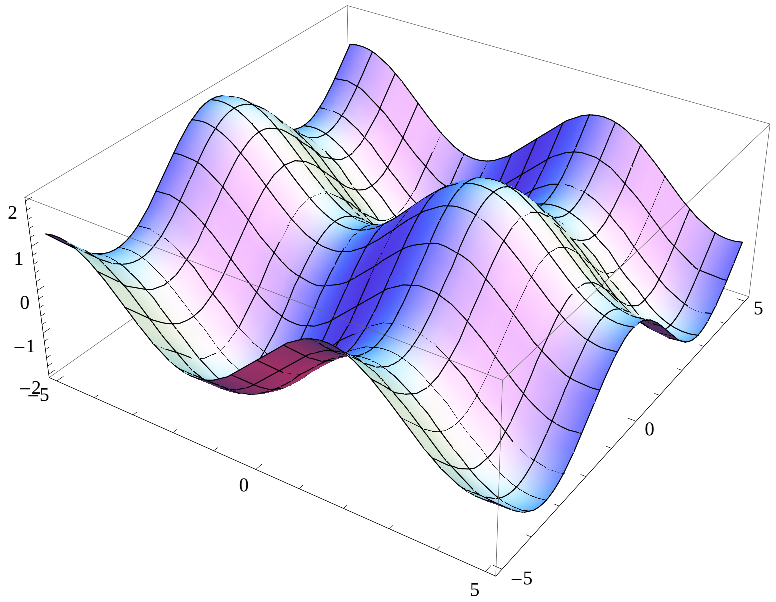
```
In[113]:= ListPlot[{{1, 2}, {1.5, 1.5}, {2, 3}, {2.5, 1.75}, {3, 0.5}, {4, 1}}]
```

Out[113]=

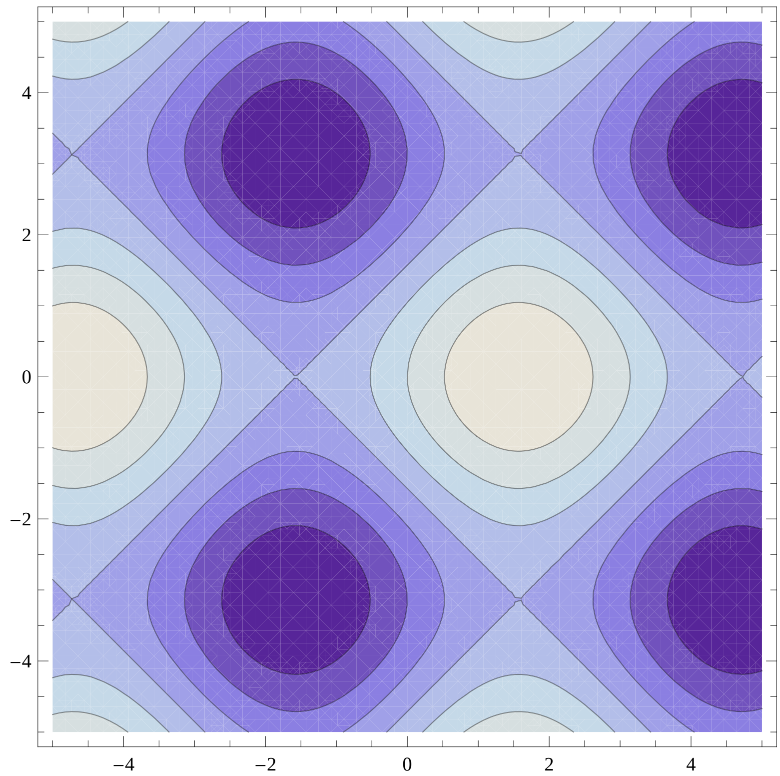


Без да се спираме подробно, ще дадем пример и за командите $Plot3D$ и $ContourPlot$, които са за функции на 2 променливи и които можете да видите в документацията:

In[104]:= `Plot3D[Sin[x] + Cos[y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]`

Out[104]=


In[105]:= `ContourPlot[Sin[x] + Cos[y], {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]`

Out[105]=


Още информация за различни видове графики, които могат да се построват с Mathematica, както и за опции, които могат да се добавят при изчертаването на графики, за да изглеждат те по начин, който ние искаме, вижте „Create Plots” в документацията.

A.4 Дефиниране на функции в Mathematica

A.5 Решаване на уравнения и системи уравнения

В Mathematica можем да решаваме уравнения с помощта на функцията *Solve*. Тя има следния синтаксис $Solve[equation, var]$, където *equation* е уравнението, което трябва да се реши, а *var* – неизвестното, спрямо което искаме да решим уравнението. Обърнете внимание, че когато въвеждаме уравнението, трябва да използваме $==$ вместо $=$. Операторът $=$ се използва единствено за присвояване.

Системата Mathematica се справя с много класове уравнения, които могат да бъдат решени точно, включително и такива, които имат комплексни корени:

```
In[55]:= Solve[6x^3-23x^2+25x-6==0, x]
```

Out[55]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{3}\right\}, \left\{x \to \frac{3}{2}\right\}, \{x \to 2\}\right\}$

```
In[56]:= Solve[x^4-2x^3-x^2+6x-6==0,x]
```

Out[56]= $\{\{x \to 1 - i\}, \{x \to 1 + i\}, \{x \to -\sqrt{3}\}, \{x \to \sqrt{3}\}\}$

In[57]:= $\text{Solve}\left[\sqrt{x-1} + x == 4 + \sqrt{x+4}, x\right]$

Out[57]= $\{\{x \to 5\}\}$

В някои случаи, когато корените на уравнението не могат да бъдат представени точно или представянето им е прекалено сложно (и съответно ни носи малко информация), можем да използваме функцията *NSolve*. Тя има същия синтаксис, но връща десетични приближения на корените. Вижте следните примери:

```
In[59]:= Solve[x^5-10x^2+5x+1==0, x]
```

Out[59]= $\{\{x \to \text{Root}[1 + 5 \#1 - 10 \#1^2 + \#1^5 \&, 1]\},$
$\{x \to \text{Root}[1 + 5 \#1 - 10 \#1^2 + \#1^5 \&, 2]\}, \{x \to \text{Root}[1 + 5 \#1 - 10 \#1^2 + \#1^5 \&, 3]\},$
$\{x \to \text{Root}[1 + 5 \#1 - 10 \#1^2 + \#1^5 \&, 4]\}, \{x \to \text{Root}[1 + 5 \#1 - 10 \#1^2 + \#1^5 \&, 5]\}\}$

```
In[60]:= NSolve[x^5-10x^2+5x+1==0, x]
```

Out[60]= $\{\{x \to -1.22065 - 1.89169\, i\}, \{x \to -1.22065 + 1.89169\, i\},$
$\{x \to -0.153102\}, \{x \to 0.66946\}, \{x \to 1.92494\}\}$

```
In[61]:= Solve[x^3-10x^2+5x+1==0, x]
```

Out[61]=
$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{3}\left(10 + \frac{85}{\left(\frac{1}{2}\left(1523 + 9\, i \sqrt{1691}\right)\right)^{1/3}} + \left(\frac{1}{2}\left(1523 + 9\, i \sqrt{1691}\right)\right)^{1/3}\right)\right\},\right.$$
$$\left\{x \to \frac{10}{3} - \frac{1}{6}\left(1 + i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1523 + 9\, i\sqrt{1691}\right)\right)^{1/3} - \frac{85\left(1 - i\sqrt{3}\right)}{3 \times 2^{2/3}\left(1523 + 9\, i\sqrt{1691}\right)^{1/3}}\right\},$$
$$\left.\left\{x \to \frac{10}{3} - \frac{1}{6}\left(1 - i\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\left(1523 + 9\, i\sqrt{1691}\right)\right)^{1/3} - \frac{85\left(1 + i\sqrt{3}\right)}{3 \times 2^{2/3}\left(1523 + 9\, i\sqrt{1691}\right)^{1/3}}\right\}\right\}$$

```
In[62]:= NSolve[x^3-10x^2+5x+1==0, x, WorkingPrecision → 20]
```

Out[62]= $\{\{x \to -0.15267126289972786880\},$
$\{x \to 0.69236912842833511119\}, \{x \to 9.4603021344713927576\}\}$

По същия начин можем да решаваме и системи уравнения. Тогава първият аргумент на Solve / NSolve е списък с уравнения, а вторият – списък с неизвестни, относно които решаваме (за списъци – вж. А.2).

```
In[58]:= Solve[{x^2-y==1,-x+y==1},{x,y}]

Out[58]= {{x → -1, y → 0}, {x → 2, y → 3}}
```

В случаите, когато уравнението не може да се реши точно с помощта на *Solve* или *NSolve*, може да се изпозлва вградената функция *FindRoot*.

А.6 Процедурно програмиране в Mathematica

В този параграф ще разгледаме синтаксиса на конструкции за условен преход и цикъл в Mathematica.

- Операторът за условен преход има следния синтаксис – $If[condition, true, false]$, където *condition* е условие, *true* е оператор (или последователност от оператори, разделени с точка и запетая), който се изпълнява, ако *condition* се оценява като истина. $false$ е незадължителен елемент. Ако го има, той се изпълнява, когато *condition* се оцени като лъжа.

- Оператор за цикъл $Do[body, iterator]$. Изпълняват се операторите в *body*, които са разделени помежду си с точка и запетая. *iterator* може да изглежда по един от следните начини:
  - $\{k, N\}$ – итерационната променлива k (или каквото име си изберем) приема последователно стойности, първите N естествени числа;
  - $\{k, from, to\}$ – итерираме по k от числото $from$ до *to* през 1;
  - $\{k, from, to, step\}$ – итерираме по k от числото $from$ до *to* през *step*.

А.7 Работа с матрици в Mathematica

А.8 Задачи за самостоятелна работа

Задача 87. Пресметнете точно, а след това и числено стойността на следните изрази: а) $\dfrac{[23^3 - 3(117-48)^2]}{\sqrt{7^5 - 5^7}}$; б) $\cos\dfrac{319\pi}{12}$; в) $\dfrac{83!}{111!}$;
г) $\ln 2981$.

Задача 88. Опростете изразите: а) $\ln(2e^5)$; б) $1 + \cos 2x$; в) $\dfrac{x + [x(x-1)]^3 - 4}{(x^2 + x - 6)}$

Задача 89. Да се разложат на множители полиномите: а) $6x^3 + 47x^2 + 71x - 70$; б) $12x^6 - 56x^5 + 100x^4 - 80x^3 + 20x^2 + 8x - 4$.

Задача 90. Като използвате вградената функция Apart, пресметнете интеграла

$$\int \frac{x}{(x^2 + 3x + 2)}dx.$$

Задача 91. Дефинирайте $f(x) = x(x-2)^2$; $g(x) = x-3$; $h(x) = (x^2)-1$. Пресметнете и опростете $f(g(h(x)))$; $h(g(f(x)))$. Постройте графиките на $f(x)$, $f(x+1)$, $f(2x)$.

Задача 92. Дефинирайте и постройте графиките на:

а)$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$;

б)$g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

в)$h(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 1 - x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ -3, & x > 2 \end{cases}$.

Задача 93. Уравнението $x^3 = x + 1$ има единствен реален корен. Намерете точната и приближената му стойност.

Задача 94. Намерете нулите на функцията: а) $f(x) = e^{-x/2}$; б) $f(x) = x - 9\cos x$; в) $f(x) = x^2 - \operatorname{tg}^{-1} x$.

Задача 95. Задача 5: Използвайки Solve, решете неопределената система

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

и интерпретирайте получения резултат. Пробвайте всяка от комбинациите {x,y,z}, {x,y}, {x,z}, {y,z}

Задача 96. Като използвате Table и Prime, създайте списък с първите 100 прости числа. Генерирайте същия списък, използвайки само Prime и Range.

Задача 97. Генерирайте списък със стойности на функцията $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ за $x = 0.1, 0.2, \ldots, 1$ използвайки Table и Range.

Задача 98. Генерирайте списък с първите 50 нечетни числа, като използвате Table, а след това и Range.

Задача 99. Използвайте Table, за да генерирате списък от наредени двойки $\{x, f(x)\}$ за $x = 0, \frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{12}, \ldots, \pi$, където $f(x) = \sin x$.

Задача 100. Да се дефинира функция, която намира $\varphi(x)$, където $\varphi(x)$ е функцията на Ойлер - връща броя на числата $\leq x$, които са взаимно прости с x.

Задача 101. Да се дефинира функция $max[list_,a_,b_]$, която по зададен списък $list$ и числа a, b намира най-голямото число от списъка, което е в интервала $[a, b]$.

Задача 102. Да се дефинира функция, която по зададени a, n пресмята итеративно сумата

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i!}{(a+1)(a+2)\dots(a+i)}.$$

Библиография

[1] Боянов, Б.: Лекции по числени методи. Дарба, 2008

[2] Сборник по числени методи – http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/nummeth

[3] Сендов, Бл., Попов, В.: Числени методи. Първа част. Университетско издателство „Св.Климент Охридски", 1996

[4] Kiusalaas, J.: Numerical Methods in Engineering. Cambridge University Press, 2010

[5] Chapra, S.: Applied Numerical Methods with Matlab for Engineers and Scientists. McGraw Hill, 2012

[6] Бахвалов, Н.С., Лапин, А.В., Чижонков, Е.В.: Численные методы в задачах и упражнениях. Высшая школа, 2000

[7] Hollis, S: Manual for Stewart's Single Variable Calculus. Brooks/Cole, 2008