Г л а в а 1

ИНТЕРПОЛАЦИЯ

1.1. ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН ПОЛИНОМ НА ЛАГРАНЖ

С π_n ще бележим класа на всички алгебрични полиноми от степен, по-малка или равна на n.

Нека $x_0, \dots, x_n$ са различни реални точки и $y_0, \dots, y_n$ са дадени реални числа. Задачата за построяване на алгебричен полином $P \in \pi_n$, който удовлетворява условията

$$P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, n, \tag{1.1}$$

се нарича интерполационна задача. Ако P удовлетворява (1.1), казваме, че P интерполира таблицата $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$. Полиномът P се нарича *интерполационен полином*, а точките $(x_k)_0^n$ — интерполационни възли.

Задача 1.1. Да се докаже, че ако съществува полином $P \in \pi_n$, който удовлетворява интерполационните условия (1.1), то той е единствен.

Задача 1.2. Да се докаже, че съществува полином $P \in \pi_n$, който удовлетворява условията (1.1).

Задача 1.3. Да се построи полиномът $l_{kn} \in \pi_n$, който удовлетворява условията $l_{kn}(x_i) = \delta_{ki}, \quad i = 0, \dots, n$, където δ_{ki} е символът на Кронекер:

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 1 & \text{при} \;\; k = i \\ 0 & \text{при} \;\; k \neq i. \end{cases}$$

Полиномите l_{kn} се наричат базисни полиноми на Лагранж. Лесно се вижда, че решението на интерполационната задача (1.1) може да се запише вече в явен вид по следния начин:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \, l_{kn}(x).$$

Най-често числата $(y_k)_0^n$ се разглеждат като стойности на някаква функция $f(x)$ във възлите $(x_k)_0^n$, т. е. $y_k = f(x_k)$. В този случай решението на (1.1) се бележи с $L_n(f; x)$ и се нарича *интерполационен полином на Лагранж* за функцията f с възли $x_0, \dots, x_n$. И така за всяка функция f, дефинирана в точките $x_0, \dots, x_n$, имаме

$$L_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \, l_{kn}(x).$$

Задача 1.4. Нека $Q \in \pi_n$. Да се докаже, че $L_n(Q; x) \equiv Q(x)$, каквито и да са възлите $(x_k)_0^n, \quad x_k \neq x_j$ при $k \neq j$.

Задача 1.5. Да се построи интерполационният полином на Лагранж за таблицата

x	0	$0,5$	1	$1,5$
$f(x)$	1	2	3	4

Задача 1.6. Да се опрости изразът

$$-\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)+x(x-2)(x-3)-\frac{3}{2}x(x-1)(x-3)+\frac{2}{3}(x-1)(x-2)x.$$

Задача 1.7. Определете приближено стойността на $f(x) = e^x$ при $x = 0,15$, като използувате интерполационен полином от трета степен и таблицата

x	$0,0$	$0,1$	$0,2$	$0,3$
$f(x)$	1	$1,10517$	$1,22140$	$1,34986$

Задача 1.8. Да се докаже, че при всяко естествено число n полиномът

$$l(x) = 1 + \frac{x-x_0}{x_0-x_1} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \cdots + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}$$

удовлетворява интерполационните условия

$$l(x_0) = 1, \quad l(x_k) = 0, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Задача 1.9. Да се докаже, че интерполационният полином на Лагранж за таблицата $(x_0, f_0), \ldots, (x_n, f_n)$ може да бъде построен по рекурентната връзка

$$P_0(x) = f_0,$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + [f_k - P_{k-1}(x_k)]\omega_k(x)/\omega_k(x_k),$$

където $\omega_1(x) = x - x_0, \quad \omega_{k+1}(x) = \omega_k(x)(x-x_k)$.

Задача 1.10. Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} l_{kn}(x) = 1$ за всяко x.

Задача 1.11. Да се докаже, че $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^m l_{kn}(x) = x^m, \quad m = 0,\ldots,n.$

Задача 1.12. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^m l_{kn}(x) = 0, \quad m = 1,\ldots,n.$$

Оттук нататък в този раздел с $\omega(x)$ ще бележим полинома

$$(x-x_0)\cdots(x-x_n).$$

Задача 1.13. Да се докаже равенството

$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^{n+1} l_{kn}(x) = (-1)^n \omega(x).$$

Задача 1.14. Да се докаже равенството

$$\sum_{k=0}^{n}(x-x_k)^{n+2} l_{kn}(x) = (-1)^n \omega(x) \sum_{k=0}^{n}(x-x_k).$$

Задача 1.15. Нека $x_0 < \ldots < x_n$. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1}\, l_{kn}(0) = (-1)^n x_0 \ldots x_n.$$

Задача 1.16. Да се докаже, че ако $(x_i)_0^n$ са различни точки, то

$$\frac{1}{\omega(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{(x-x_k)},$$

където $A_k = \dfrac{1}{\omega'(x_k)}, \quad k = 0, \ldots, n.$

Задача 1.17. Да се разложи в сума от елементарни дроби функцията $(x^2 - x - 1)/((x-1)(x-2)(x-3))$.

Задача 1.18. Нека $s_0, \ldots, s_n$ са дадени числа и $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Да се построи полином, който удовлетворява условията

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(x)dx = s_i, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Задача 1.19. Като използувате формулата на Лагранж, докажете, че

$$\frac{1}{m-n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{m}{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{m-k}$$

при $m > n \geq 0$.

Задача 1.20. При предположение, че $m > n \geq 1$, като използувате формулата на Лагранж, докажете, че

$$\frac{m}{m-n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{m}{n} \binom{n}{k} \frac{k}{m-k}.$$

Задача 1.21. Да се докаже, че

$l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x) \geq 1$ при $x \in [x_k, x_{k+1}]$ за $k = 0, \ldots, n-1$.

Задача 1.22. Нека $P \in \pi_n$ и k е естествено число. Да се докаже, че ако $P(j)$ се дели точно на k за $n+1$ последователни цели стойности на j, то $P(j)$ се дели на k за всяко цяло j.

Задача 1.23. Нека $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Докажете, че коефициентът пред x^n на интерполационния полином, построен по интерполационната таблица

x_i	x_0	x_1	$\ldots$	x_i	x_{i+1}	$\ldots$	x_n
$f(x_i)$	0	0	$\ldots$	0	1	$\ldots$	1

е различен от нула.

Задача 1.24. Напишете интерполационната формула на Лагранж с възли, съвпадащи с нулите на полинома на Чебишов от първи род:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

т.е. с числата $x_k = \cos(2k-1)\pi/(2n), \quad k = 1, \ldots, n.$

Задача 1.25. Напишете интерполационната формула на Лагранж с възли, съвпадащи с нулите на полинома на Чебишов от втори род:

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

т. е. с числата $x_k = \cos \dfrac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \ldots, n.$

Задача 1.26. Нека $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ е $n-$тият полином на Чебишов. Да се намери коефициентът a_{n-1}.

Задача 1.27. Нека $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Да означим с P полинома от класа π_n, който удовлетворява интерполационните условия

$$P(x_k) = (-1)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Да се докаже, че $|L_n(f;x)| \le |P(x)|$ за всяко $x \notin (x_0, x_n)$, ако $|f(x_k)| \le 1$, $k = 0, \ldots, n$. Да се докаже, че равенство се достига само при $f(x_k) = P(x_k)$, $k = 0, \ldots, n$, или при $f(x_k) = -P(x_k)$, $k = 0, \ldots, n$.

Задача 1.28. Като следствие от предишната задача да се покаже, че

$$|Q(x)| \le |T_n(x)|. \max_{x\in[-1,1]} |Q(x)|$$

за всеки полином $Q \in \pi_n$ и всяко x, $|x| \ge 1$. Тук T_n е полиномът на Чебишов, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ за $-1 \le x \le 1$.

Задача 1.29. Да се докаже, че екстремалната задача

$$\min_{-1\le x_0<\cdots<x_n\le 1} \{ \max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \ : \ P \in \pi_n, \ P(x_k) = (-1)^{n-k}, \ k = 0, \ldots, n\}$$

има единствено решение $P(x) = T_n(x)$.

Задача 1.30. Да се докаже, че $\inf\limits_{-1\le x_0<\cdots<x_n\le 1} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{|\omega'(x_k)|} = 2^{n-1}$ и този инфимум се достига единствено за екстремалните точки на полинома на Чебишов $\pm T_n$.

Задача 1.31. Намерете полином от степен, ненадминаваща n, който приема в точката ξ, $|\xi| > 1$, стойност η и най-малко се отклонява от нулата в интервала $[-1, 1]$.

Задача 1.32. Нека $x_0 < \ldots < x_n$ са произволни интерполационни възли в интервала $[a, b]$. Функцията

$$\lambda(x) := \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|$$

се нарича функция на Лебег за интерполационния оператор на Лагранж. Да се докаже, че

$$\sup\left\{|L_n(f;x)| : \quad f \in C[a,b], \quad \max_{a\le x\le b} |f(x)| \le 1\right\} = \lambda(x).$$

Задача 1.33. Да се докаже, че $\lambda(x) \ge 1$ за всяко x. Равенството се достига само при $x = x_k$, $k = 0, \ldots, n$.

Задача 1.34. Да се намери такова число $\xi \in (0, 1]$, че при $n = 2$ и възли $-\xi, 0, \xi$ величината $\max\{|\lambda(x)| : x \in [-1, 1]\}$ да бъде най-малка.

Задача 1.35. Нека $n = 2$. Да се докаже, че при произволен избор на интерполационните възли $x_0 < x_1 < x_2$ е изпълнено неравенството

$$\max\{\lambda(x) : \quad x_0 \le x \le x_2\} \ge 5/4.$$

Задача 1.36. Нека $P \in \pi_2$. Да се докаже, че

$$\max\{|P(x)| : \quad x \in [a, b]\} \le \frac{5}{4}. \max\left\{|P(a)|, |P(b)|, \left|P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right\}.$$

Задача 1.37. Да се докаже, че ако $x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n$, където h е дадено число, то

$$l_{kn}(x_0 + th) = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{j=0,\ j\neq k}^{n} (t - j), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Да се докаже, че

$$\max_{0\leq t\leq n} \ |\lambda(x_0 + th)| \geq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k-1} \binom{n}{k}.$$

Тук както обикновено

$$(2n)!! = \prod_{k=1}^{n} (2k), \quad (2n-1)!! = \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$$

Задача 1.38. Нека функцията $f(x)$ има непрекъснати производни до $(n+1)$–вата включително в $[a, b]$. Нека $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$. Да се докаже, че за всяко $x \in [a, b]$ може да се намери такава точка

$$\xi \in (\min\{x_0, \ldots, x_n, x\}, \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}),$$

че

$$f(x) - L_n(f; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0) \ldots (x - x_n).$$

Задача 1.39. Решете зад. 1.13 с помощта на предишната задача.

Задача 1.40. Нека $f \in C^2[x_0, x_1]$ и $\max\{|f''(x)| : x \in [x_0, x_1]\} = M$. Да се докаже, че при $x \in [x_0, x_1]$

$$|f(x) - L_1(f; x)| \leq \frac{M}{8} (x_1 - x_0)^2.$$

Задача 1.41. Да се намери оценка на грешката

$$R_n(x) = f(x) - L_n(f; x)$$

при $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$. Да се покаже, че в този случай

$$\max\{|R_n(x)| : x \in [a, b]\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при произволен избор на възлите $\{x_k\}$ от крайния интервал $[a, b]$.

Задача 1.42. Нека $\max\limits_{x\in[a,b]} |f^{(k)}(x)| = M_k$ и $M_k \leq A^k$ за $k = 0, 1, \ldots$, където A е константа. Да се докаже, че

$$\max_{x\in[a,b]} |L_n(f; x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

при произволна таблица $\{x_{kn}\}_{k=0,\ n=0}^{n \quad \infty}$, $a \leq x_{k0} < \ldots < x_{kn} \leq b$ от интерполационни възли.

Задача 1.43. Нека $F(x) = \sqrt{x}, \quad h = 1/N, \quad x_i = 1 + ih, \quad i = 0, \ldots, N$. Да се определи h така, че функцията $F(x)$ да може да се приближава в интервала $[1, 2]$ с точност 0,001 с полином от втора степен, интерполиращ F в най-близките до x възли x_{i-1}, x_i, x_{i+1} от системата $\{x_k\}_0^N$.

Задача 1.44. Да се намери оценка на грешката, която се допуска при приближаването на функцията $f(x) = 1/(1 + x)$ в интервала $[0, 1]$ с интерполационния полином на Лагранж от първа степен с възли 0 и 1.

Задача 1.45. Нека

$$f(x) = \ln x,\ 1 \le \xi \le 9,\ h = (\xi - 1)/2,\ H = (9 - \xi)/2,$$
$$t_k = 1 + kh, \quad k = 0, 1, 2; \quad x_k = \xi + kH, \quad k = 0, 1, 2.$$

$P(x)$ и $Q(x)$ са полиномите от втора степен, определени от условията

$$P(t_k) = f(t_k), \quad Q(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2.$$

Нека

$$R(x) = \begin{cases} |f(x) - P(x)| & \text{за} \quad x \in [1, \xi), \\ |f(x) - Q(x)| & \text{за} \quad x \in [\xi, 9]. \end{cases}$$

Да се намери такова $\xi \in [1, 9]$, че $R(x) \le 1/5$ за всяко $x \in [1, 9]$.

Задача 1.46. Нека $f \in C^2[0, 1]$ и $|f''(x)| \le x^2$ за всяко $x \in [0, 1]$. Да означим с $p_\xi(x)$ линейната в $[0, \xi]$ и $[\xi, 1]$ непрекъсната функция, която интерполира f в точките $0, \xi$ и 1. Да се определи ξ така, че $|f(x) - p_\xi(x)|$ да бъде по-малко от 0,02 в интервала $[0, 1]$.

Задача 1.47. Нека $P_\xi(x) \in \pi_2$ е полиномът, който интерполира функцията $f(x) = |x|$ в точките $-1, \xi, 1$, където $0 \le \xi < 1$. Да се определи ξ така, че грешката $\max\limits_{x \in [-1,1]} |f(x) - P_\xi(x)|$ да е минимална.

Задача 1.48. Нека $P_\xi(x)$ е полиномът от втора степен, който интерполира $|x|$ в точките $\pm 1/2, \ \pm \xi \quad (0 \le \xi \le 1,\ \xi \ne 1/2)$. Определете $\rho(\xi) := \max \left\{ \left| P_\xi(x) - |x| \right| \ : \ -1 \le x \le 1 \right\}$ и намерете $\inf \rho(\xi)$ по всички допустими ξ. За кое ξ се достига минималната стойност?

Задача 1.49. Нека $\{P_i\}_0^\infty$ е редица от такива полиноми от степен, по-малка или равна на n, че $|P_i(x)| \le 1$ за $x \in [a, b]$. Като използвате интерполационната формула на Лагранж, покажете, че може да бъде избрана сходяща подредица $\{P_{i_k}\}_{k=0}^\infty$ и нейната граница е полином от π_n, т. е. ако $P_{i_k}(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ за всяко x от $[a, b]$, то $f \in \pi_n$.

Задача 1.50. Нека $f(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a, b]$, за която съществува такъв алгебричен полином $P(x)$ от степен, по-малка или равна на n, че $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)| \le E$. Нека $x_0 < \ldots < x_n$ са произволни точки от $[a, b]$ и $\lambda(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|$ е функцията на Лебег за тези точки. Да се докаже, че

$$|f(x) - L_n(f; x)| \le (1 + \lambda(x))\, E, \quad x \in [a, b].$$

Задача 1.51. Нека $1 < a$ и $P(x)$ е полином от π_n, за който е изпълнено $|P(x)| \le 1$ при всяко x от множеството σ, състоящо се от незастъпващи се подинтервали на $[-1, a]$ с обща дължина 2. Да се докаже, че $|P(a)| \le T_n(a)$, където T_n е полиномът на Чебишов. Равенството се достига само при $\sigma = [-1, 1]$ и $P = \pm T_n$.

Задача 1.52. Нека $\{x_k\}_1^n$ са нулите на полинома на Чебишов $T_n(x)$, т.е. $x_k = \cos \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$. Да се докаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| \le 2n, \quad l_{kn}(x) = \prod_{i=1,\ i \ne k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

Задача 1.53. Нека $L_n(f;x)$ е интерполационният полином на Лагранж, построен за $f(x) = x/(x+1)$ с интерполационни възли $0, 1, \ldots, n$. Да се докаже, че
$$L_n(f; n+1) = \frac{(-1)^{n+1} + (n+1)}{n+2}.$$

Задача 1.54. Нека $f^{(n)} \in L[a,b]$. Докажете, че за всяко $x \in [a,b]$ е в сила тъждеството
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt.$$
Това е известната формула на Тейлор с интегрален остатък.

Задача 1.55. Като използувате предишната задача, покажете, че ако $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$, то
$$f(x) - L_n(f;x) = \int_a^b K(x,t) f^{(n)}(t)dt$$
за всяка функция $f \in C^{n-1}[a,b]$ с интегруема в $[a,b]$ n-та производна, където
$$K(x,t) = \frac{1}{(n-1)!}\left\{(x-t)_+^{n-1} - \sum_{k=0}^{n} (x_k - t)_+^{n-1}\, l_{kn}(x)\right\},$$
а $(x-t)_+^{n-1}$ е отсечената степенна функция: $(x-t)_+^{n-1} := [\max\{x-t, 0\}]^{n-1}$.

1.2. РАЗДЕЛЕНИ РАЗЛИКИ

Нека $x_0, x_1, \ldots$ е дадена редица от различни точки в интервала $[a,b]$ и функцията $f(x)$ е дефинирана в тях. Разделената разлика на функцията f в точките $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ще бележим с $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.

Дефиниция 1.1. *Разделената разлика се определя чрез рекурентната връзка:*
$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
при $f[x_k] = f(x_k)$.

Задача 1.56. Да се докаже, че $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$, където $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

Задача 1.57. Да се докаже, че:

а) ако $F(x) = f(x) + c\,g(x)$, то
$$F[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] + c\,g[x_0, x_1, \ldots, x_n];$$

б) $f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}]$, където $i_0, \ldots, i_n$ е произволна пермутация на $0, \ldots, n$.

Дефиниция 1.2. *Разделена разлика* $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *на функцията* f *в точките* $\{x_k\}_0^n$ *се нарича коефициентът пред* x^n *в интерполационния полином на Лагранж* $L_n(f;x)$ *от* $n-$*та степен за функцията* f*, построен при възли* $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Задача 1.58. Да се докаже, че дефинициите 1.1 и 1.2 са еквивалентни.

Задача 1.59. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k^i}{\omega'(x_k)} = 0, \ \ i = 0, \dots, n-1.$

Задача 1.60. Нека $f(x) = x^n$. Да се докаже, че:

а) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1$;

б) $f[x_1, \dots, x_n] = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Задача 1.61. Нека $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ и $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Да означим

$$f(x) = (x - t_1)(x - t_2) \dots (x - t_n), \quad g(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Да се докаже, че $\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{g'(x_k)} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - t_i)$.

Задача 1.62. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 0$.

Задача 1.63. Да се докаже, че $\sum_{k=0}^{n} x_k \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = (n+1)n$.

Задача 1.64. Пресметнете $\sum_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{\bar{\omega}''(x_k)}{\bar{\omega}'(x_k)}(x - x_k) \right]$, ако $x_1, \dots, x_n$ са различни точки и $\bar{\omega} = (x - x_1) \dots (x - x_n)$.

Задача 1.65. Нека $x_k \neq 0, -1$ за $k = 1, \dots, n$. Докажете равенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f(1/x_k)}{f'(x_k)(1 + x_k)} = (-1)^{n+1}(1 - x_1 x_2 \dots x_n),$$

където $f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$.

Дефиниция 1.3. *Ще наричаме разделена разлика на функцията f в точките $(x_k)_0^n$ единствения функционал от вида $D[f] = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, който удовлетворява условията:*

$$D[x^n] = 1, \qquad D[x^k] = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Задача 1.66. Да се докаже, че дефинициите 1.1, 1.2 и 1.3 са еквивалентни.

Задача 1.67. Нека $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Да се докаже формулата

$$f[x_0, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Задача 1.68. Нека $(x_k)_0^n$ са произволни различни цели числа. Да се докаже, че ако P е полином от степен n с коефициент 1 пред x^n, то съществува точка x_j, $j \in [0, n]$, за която $|P(x_j)| \geq (n!)/2^n$.

Задача 1.69. Нека $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ и $n \geq 2$. Да се докаже, че при всяко фиксирано k, $0 < k < n$, съществуват такива положителни числа $(A_i)_0^{n-2}$, че $A_0 + A_1 + \dots + A_{n-2} = 1$ и $f[x_0, x_k, x_n] = \sum_{i=0}^{n-2} A_i f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$.

Задача 1.70. Да се докаже, че ако $f(x) = g(x)h(x)$, то

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} g[x_0, \dots, x_k]\, h[x_k, \dots, x_n]$$

(това е известната формула на Стефенсън).

Задача 1.71. Нека са известни всички разделени разлики на функцията g в $x_0, x_1, \dots, x_n$. Да се намери разделената разлика $f[x_0, \dots, x_n]$ на функцията $f(x) = xg(x)$.

Задача 1.72. Да се намери $f[x_0, \dots, x_n]$ при $f(x) = 1/x$.

Задача 1.73. Да се докаже, че при всяко естествено число n

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Задача 1.74. Да се докаже, че ако $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ и функцията $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната в $[x_0, x_n]$, то

$$f[x_0, \dots, x_n] = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(\sigma_n)\, dt_n,$$

където $\sigma_n = x_0(1-t_1) + x_1(t_1 - t_2) + \dots + x_{n-1}(t_{n-1} - t_n) + x_n t_n$.

Задача 1.75. При същите предположения, както в предишната задача, да се докаже, че $f[x_0, \dots, x_n] = f^{(n)}(\xi)/n!$, където ξ е някаква точка от интервала $[x_0, x_n]$.

Задача 1.76. Да се докаже, че ако $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ и $f^{(n)}(x)$ е непрекъсната и различна от нула в интервала $[x_0, x_n]$, то

$$\operatorname{sgn} \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x), \quad x \in [x_0, x_n].$$

Задача 1.77. Нека $f \in C^n[a,b]$, $\xi \in (a,b)$ и $x_k \to \xi$ за $k = 0, \dots, n$. Да се докаже, че $f[x_0, \dots, x_n] \to f^{(n)}(\xi)/n!$.

Задача 1.78. Нека $(x_k)_0^n$ са произволни различни точки от интервала $[a,b]$ и функцията f е дефинирана в $[a,b]$. Да се докаже, че:

а) полиномът

$$P_n(f;x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

удовлетворява интерполационните условия $P_n(f; x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$;

б) за всяко x от $[a,b]$ е изпълнено равенството

$$f(x) = P_n(f;x) + (x - x_0)\dots(x - x_n) f[x_0, \dots, x_n, x].$$

(Полиномът $P_n(f;x)$ се нарича *интерполационен полином на Нютон.* Той представлява друг запис на интерполационния полином на Лагранж. Формулата б) се нарича *интерполационна формула на Нютон.*)

Задача 1.79. Нека $f[x_0,\ldots,x_n]=0$ при всеки избор на различните точки $(x_k)_0^n$ от $[a,b]$. Да се докаже, че функцията $f(x)$ съвпада в $[a,b]$ с алгебричен полином от степен, по-малка или равна на $n-1$.

Задача 1.80. Нека $p(x)$ е полином от трета степен, който интерполира функцията $\ln x$ в точките 1,2,3,4. Докажете, че $p(x)>\ln x$ за $2<x<3$.

Задача 1.81. Да означим с W_0^n множеството на всички функции f от $C^n[a,b]$, за които $|f^{n)}(x)|\le 1$ при $x\in[a,b]$ и $f(x_k)=0, \quad k=1,\ldots,n$ ($(x_k)_1^n$ са фиксирани различни точки от $[a,b]$). Да се докаже, че за всяко x от $[a,b]$ $\max\limits_{f\in W_0^n} f(x)=|(x-x_1)\ldots(x-x_n)|/n!$

Задача 1.82. Нека $g(x)=f[x_0,\ldots,x_k,x]$. Да се докаже, че

$$g[y_0.\ldots,y_n]=f[x_0,\ldots,x_k,y_0,\ldots,y_n].$$

Задача 1.83. Нека $P(x)$ е полином от $n-$та степен, за който в интервала $[-1,1]$ е изпълнено неравенството $|P(x)|\le 1$. Докажете, че

$P[x_0,x_1,\ldots,x_n]\ \le\ 2^{n-1}$ при всеки избор на точките $x_0<\ \cdots<\ x_n$.

1.3. КРАЙНИ РАЗЛИКИ

Дефиниция 1.4. *Нека е дадена редицата от числа $f_0,f_1,\ldots$ Крайната разлика от $n-$ти ред $\Delta^n f_i$ се определя чрез рекурентните формули:*

$$\Delta f_i=f_{i+1}-f_i,$$
$$\Delta^n f_i=\Delta^{n-1}f_{i+1}-\Delta^{n-1}f_i.$$

Задача 1.84. Да се докаже, че $\quad \Delta^n f_i=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f_{i+k}.$

Задача 1.85. Нека $x_k=x_0+kh, \quad k=0,1,\ldots$ Да се докаже, че

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{\Delta^n f_0}{n!h^n}.$$

Задача 1.86. Нека функцията $f(x)$ има непрекъсната $n-$та производна в интервала $[x_0,x_0+kh], \quad h>0$. Да се докаже, че съществува точка $\xi\in(x_0,x_0+kh)$, за която $\Delta^n f_0=h^k f^{(k)}(\xi)$.

Задача 1.87. Нека $x_k=x_0+kh, \ \ k=0,1,\ldots$ Да се докаже, че за всеки полином $P(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$ са в сила равенствата:

а) $\Delta^n P(x_0)=a_0\,n!\,h^n,$ б) $\Delta^m P(x_0)=0$ при $m>n$.

Задача 1.88. Да се докаже, че

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\,j^{\,k}=\begin{cases}0 & \text{при } k=0,1,\ldots,n-1,\\ n! & \text{при } k=n.\end{cases}$$

Задача 1.89. Да се докаже, че

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\binom{m+j}{k}=0$$

за всяко естествено число m и $k=0,1,\ldots,n-1$.

Задача 1.90. Нека $f_0, f_1, \ldots, f_n$ са произволни дадени числа. Да се покаже, че

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} f_k = f_0.$$

Задача 1.91. Нека $P(x)$ е произволен алгебричен полином от степен n, за който са известни величините $P_n, \Delta P_{n-1}, \ldots, \Delta^n P_0$, където

$$P_k = P(x_k), \quad x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Да се покаже, че стойностите на полинома $P(x)$ за $x = x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ могат да бъдат изчислени, като се използуват само n събирания за всяка от тях.

Задача 1.92. Нека $f_0, f_1, \ldots, f_{n+1}$ е произволна редица от числа, които удовлетворяват условието

$$f_0 = f_{n+1} = 0 \;\text{ и }\; |\Delta^2 f_{i-1}| \leq 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Да се докаже, че

$$|f_k| \leq \frac{k(n+1-k)}{2}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Задача 1.93. Нека $f_0, f_1, \ldots$ е редица от числа, за които

$$\Delta^{n+1} f_i = 0 \;\text{ за всяко }\; i = 0, 1, \ldots.$$

Тогава съществува единствен алгебричен полином $q(x)$ от степен n, за който $q(k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots$

Задача 1.94. Да се намери сумата:

а) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$; б) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$;

в) $1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$; г) $1^3 + 3^3 + \cdots + (2n-1)^3$.

Задача 1.95. Нека $f(x)$ е произволен полином от степен k. Да се докаже, че съществува такъв полином $F(x)$ от степен $k+1$, че за всяко n

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = F(n).$$

Задача 1.96. Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ функция и

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} f(x_0 + kh) = 0$$

за всяко $h > 0$ и x_0 такова, че $[x_0, x_0 + nh] \subset [a, b]$. Да се докаже, че $f(x)$ е полином от степен, по-малка или равна на n в $[a, b]$.

Задача 1.97. Да се докаже, че $\delta_h^k f(x) = (-1)^k \delta_{-h}^k f(x)$, където $\delta_h^k f(x)$ е централна (симетрична) крайна разлика, дефинирана с равенството $\delta_h^k f(x) = \Delta_h^k f(x - \frac{k}{2} h)$.

1.4. ИНТЕРПОЛАЦИОННА ФОРМУЛА НА ЕРМИТ

Задача 1.98. Нека $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ и $(y_k)_0^n$, $(y'_k)_0^n$ са произволни реални числа. Да се построи полином Q от степен $2n+1$, който удовлетворява интерполационните условия:

$$Q(x_k) = y_k, \quad Q'(x_k) = y'_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Задача 1.99. Да се построи полиномът от зад. 1.98 при възли

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

При същите възли да се запише полиномът, съответстващ на стойностите $y_k = f(x_k)\,, \;\; y_k' = 0, \;\; k = 1, \dots . n$. Той се нарича *интерполационен полином на Фейер.*

Задача 1.100. Да се построи полиномът от зад. 1.98, когато $(x_k)_1^n$ са нулите на полинома на Чебишов от втори род, т. е. когато

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Задача 1.101. Да се пресметне детерминантата на матрицата, съответстваща на интерполационната задача: $x_1 < \dots < x_n$,

$$P(x_k) = a_0 x_k^{2n-1} + a_1 x_k^{2n-2} + \dots + a_{2n-1} = y_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$
$$P'(x_k) = a_0(2n-1)x_k^{2n-1} + a_1(2n-2)x_k^{2n-3} + \dots + a_{2n-2} = y_k', \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Задача 1.102. Нека $x_1 < \dots < x_n$ и $(\nu_k)_1^n$ са дадени цели положителни числа. Да се докаже, че полиномите

$$\omega_{k\lambda}(x) = (x - x_1)^{\nu_1} \dots (x - x_{k-1})^{\nu_{k-1}} (x - x_k)^{\lambda},$$

$k = 1, 2, \dots, n, \quad \lambda = 0, 1, \dots, \nu_k - 1$, са линейно независими.

Задача 1.103. Нека $x_1 < \dots < x_n$ и $(\nu_k)_1^n$ са дадени цели положителни числа. Да се докаже, че при всеки избор на стойностите

$$y_k, y_k', \dots, y_k^{(\nu_k - 1)}, \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$

съществува единствен полином $H(x)$ от степен $N = \nu_1 + \dots + \nu_n - 1$, който удовлетворява условията

$$H^{(\lambda)}(x_k) = y_k^{\lambda}, \qquad k = 1, \dots, n, \quad \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1.$$

Задача 1.104. При същите условия, както в предишната задача, да се покаже, че полиномът

$$L_{k\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda!} \frac{\Omega(x)}{(x - x_k)^{\nu_k - 1}} \sum_{\mu=0}^{\nu_k - \lambda - 1} \frac{1}{\mu!} \left\{ \frac{(x - x_k)^{\nu_k}}{\Omega(x)} \right\}^{(\mu)} \Bigg|_{x = x_k} .(x - x_k)^{\mu},$$

където $\Omega(x) = (x - x_1)^{\nu_1} \dots (x - x_n)^{\nu_n}$, удовлетворява интерполационните условия

$$L_{k\lambda}^{(j)}(x_i) = \delta_{ki}\delta_{\lambda j}, \qquad i = 1 \dots, n, \quad j = 0, \dots, \nu_k - 1.$$

Задача 1.105. Да се построи полиномът от втора степен $P(x)$, който удовлетворява условията $P(a) = A, \; P(b) = B, \; P'(b) = B_1$.

1.5. ИНТЕРПОЛИРАНЕ С ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

Дефиниция 1.5. *Тригонометричен полином от ред n се нарича всеки израз от вида*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\, kx + b_k \sin\, kx),$$

където $\{a_k\}_0^n$ и $\{b_k\}_1^n$ са реални числа.

Задача 1.106. Да се докаже, че функцията

$$\varphi(x) = \sin\frac{x-x_1}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}$$

е тригонометричен полином от ред n при всеки избор на $x_1, \ldots, x_{2n}$.

Задача 1.107. Да се докаже, че всеки ненулев тригонометричен полином от ред n има най-много $2n$ различни нули в интервала $[0, 2\pi)$.

Задача 1.108. Нека $\{x_k\}_0^{2\pi}$ са произволни, две по две различни точки от интервала $[0, 2\pi)$ и $\{y_k\}_0^{2n}$ са произволни числа. Да се докаже, че съществува единствен тригонометричен полином $\tau(x)$ от ред n, който удовлетворява условията $\tau(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n$.

Задача 1.109. Нека $t_0, t_1, \ldots, t_n$ са две по две различни точки от интервала $[0, \pi]$:

а) Да се построи тригонометричен полином от вида

$$g_i(t) = a_0 + a_1\cos t + \cdots + a_n\cos nt, \quad i = 0, \ldots, n,$$

който удовлетворява интерполационните условия

$$g_i(t_j) = \delta_{ij}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

б) Да се построи тригонометричен полином $s_i(t)$ от вида

$$s_i(t) = b_1\sin t + b_2\sin 2t + \cdots + b_n\sin nt, \quad i = 1, \ldots, n,$$

който удовлетворява интерполационните условия

$$s_i(t_j) = \delta_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Задача 1.110. Да се докаже, че

а) $$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{1}{2}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin(x/2)};$$

б) $$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = -\frac{\cos(n+1/2)x + \cos(x/2)}{2\sin(x/2)}.$$

Задача 1.111. Да се построи тригонометричен интерполационен полином за таблицата

$$\begin{array}{c} t_0, t_1, \ldots, t_{2n} \\ y_0, y_1, \ldots, y_{2n} \end{array}$$

при $t_k = 2k\pi/(2n+1), \quad k = 0, \ldots, 2n$.

Задача 1.112. Интерполационният полином от зад. 1.111 да се запише във вида

$$\tau_n(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

1.6. ЧЕБИШОВИ СИСТЕМИ

Дефиниция 1.6. *Една система от функции $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ образува система на Чебишов (Чебишова система) в множеството от точки $\mathcal{A}$, ако произволна ненулева линейна комбинация $a_0\,\varphi_0(x) + \cdots + a_n\,\varphi_n(x)$ има не повече от n различни нули в $\mathcal{A}$.*

Задача 1.113. Да се докаже, че функциите $\{x^k\}_0^n$ образуват система на Чебишов в произволен интервал $[a,b]$.

Задача 1.114. Да се докаже, че функциите $1,\ \sin x$ са линейно независими в интервала $[0,\pi]$, но не образуват система на Чебишов.

Задача 1.115. Да се докаже, че функциите $\{x^{2k+1}\}_0^n$ образуват система на Чебишов във всеки интервал $[\alpha,\beta]$ при $0<\alpha<\beta$.

Задача 1.116. Да се докаже, че функциите $\{\varphi_k(x)\}_0^n$ образуват система на Чебишов в множеството $\mathcal{A}$ тогава и само тогава, когато

$$\det\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

при всеки избор на точките $x_0<x_1<\ldots<x_n$ от $\mathcal{A}$.

Задача 1.117. Да се докаже, че функциите $\{\cos kx\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов в интервала $[0,\pi]$.

Задача 1.118. Да се докаже, че функциите

$$(\{\cos\ kx\}_{k=0}^n, \{\sin\ kx\}_{k=1}^n)$$

образуват система на Чебишов в интервала $[\alpha,\alpha+2\pi)$ за всяко реално α.

Задача 1.119. Нека $\alpha_0<\ldots<\alpha_n$ са произволни реални числа. Да се докаже, че функциите $\{e^{\alpha_k x}\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов във всеки интервал $[a,b]$.

Задача 1.120. Нека $\alpha_0<\ldots<\alpha_n$. Да се докаже, че функциите $\{x^{\alpha_k}\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов във всеки интервал $[a,b]$ при $0<a<b$.

Задача 1.121. Нека $\{\alpha_k\}_{k=0}^n$ са такива произволни реални числа, че $\alpha_i\neq\alpha_j$ при $i\neq j$ и $\alpha_i\notin[a,b]$, $\ i=0,\ldots,n$. Да се докаже, че функциите $\{1/(\alpha_k+x)\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$.

Задача 1.122. Нека $\varphi(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[a,b]$. Да се докаже, че функциите $\{[\varphi(x)]^k\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$ тогава и само тогава, когато $\varphi(x)$ е строго монотонна в $[a,b]$.

Задача 1.123. Нека $f\in C^{n+1}[a,b]$ и $f^{(n+1)}(x)\neq 0$ при $x\in[a,b]$. Да се докаже, че функциите $\{f(x),1,x,\ldots,x^n\}$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$.

Задача 1.124. Нека функциите $\{\varphi_k(x)\}_o^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$ и $\psi(x)>0$ при $x\in[a,b]$. Да се докаже, че тогава и функциите $\{\psi(x)\varphi_k(x)\}_0^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$.

Задача 1.125. Нека функциите $\{\varphi_k(x)\}_o^n$ образуват система на Чебишов в $[a,b]$ и $\psi(x)$ е строго растяща функция, дефинирана в $[\alpha,\beta]$ със стойности в $[a,b]$. Да се докаже, че функциите $\{\varphi_k(\psi(x))\}_0^n$ образуват система на Чебишов в $[\alpha,\beta]$.

Задача 1.126. Да се докаже, че функциите $\left\{e^{-(x_k-t)^2}\right\}_{k=0}^n$ образуват система на Чебишов в произволен интервал $[a,b]$ при произволни различни стойности на параметрите $x_0,x_1,\ldots,x_n$.

1.7. СПЛАЙН–ФУНКЦИИ

Дефиниция 1.7. *Казваме, че s е сплайн–функция (накратко сплайн) от степен r с възли $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, ако:*

1. $s(x)$ съвпада с алгебричен полином от степен $\le r$ във всеки подинтервал (x_i, x_{i+1}), $i = 0, \ldots, n$ $(x_0 = -\infty,\ x_{n+1} = +\infty)$;

2. s има непрекъснати производни до $(r-1)-$вата включително в $(-\infty, +\infty)$.

По-нататък с $S_r(x_1, \ldots, x_n)$ ще означаваме множеството на всички сплайни от степен r с възли $x_1, \ldots, x_n$.

Задача 1.127. Да се докаже, че:

а) всеки алгебричен полином от степен r е сплайн от степен r без възли;

б) отсечената степенна функция

$$(x-\xi)_+^r := \begin{cases} (x-\xi)^r, & \text{ако } x-\xi \ge 0; \\ 0, & \text{ако } \ x-\xi < 0 \end{cases}$$

е сплайн от степен r с един възел (в точката ξ);

в) производната на всеки сплайн от степен r е сплайн от степен $r-1$;

г) r-тата производна на един сплайн s от $S_r(x_1, \ldots, x_n)$ е на части постоянна функция с точки на прекъсване във възлите на s;

д) r-кратната примитивна функция на една на части постоянна функция е сплайн от степен r.

Задача 1.128. Докажете, че функциите $|\, x_k - t\, |$, $\quad k = 1, \ldots, n$, са линейно независими в $[a, b]$ при $a \le x_1 < \cdots < x_n \le b$.

Задача 1.129. Нека $\xi_1 < \cdots < \xi_n$ и $n \le r+1$. Докажете, че функциите $(x-\xi_1)_+^r, \ldots, (x-\xi_n)_+^r$ са линейно независими във всеки подинтервал на (ξ_n, ∞).

Задача 1.130. Покажете, че всеки сплайн s от $S_r(x_1, \ldots, x_n)$ може да се запише във вида

$$s(x) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i x^i + \sum_{k=1}^{n} c_k (x-\xi_k)_+^r.$$

Задача 1.131. Нека $I_1(f; x)$ е сплайнът от $S_1(x_1, \ldots, x_{n-1})$, който интерполира f в точките $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Намерете коефициентите c_k в представянето

$$I_1(f; x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \ |\, x - x_k\, | \ .$$

Задача 1.132. Покажете, че

$$\|\, f - I_1(f; \cdot)\, \| \le 2\mathrm{dist}(f, S_1(x_1, \ldots, x_{n-1})),$$

където $||f|| := \max\{|f(x)| :\ x \in\ [a, b]\}$ и $\mathrm{dist}(g, F) := \inf\{\|\, g - f\, \| : f \in F\}$.

Задача 1.133. Покажете, че $\|\, f - I_1(f; \cdot)\, \| \le \omega(f; \Delta_n)$, където

$$\Delta_n := \max_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|.$$

Задача 1.134. Покажете, че ако ω е изпъкнала функция, то

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| \leq \omega\left(f; \frac{\Delta_n}{2}\right).$$

Задача 1.135. Нека $f \in C^1[0,1]$ и $x_k = \dfrac{k}{n},\ k = 0,\dots,n$. Докажете, че

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| \leq \frac{\| f' \|}{n}.$$

Задача 1.136. Нека $f \in C^2[0,1]$ и $x_k = \dfrac{k}{n},\ k = 0,\dots,n$. Докажете, че

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Задача 1.137. Нека $f(x)$ е изпъкнала функция в интервала $[0,1]$ и $x_k = \dfrac{k}{n},\ k = 0,\dots,n$. Да се докаже, че

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| \leq \omega_2\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

където $\omega_2(f;\delta) := \sup\{|f(t-h) - 2f(t) + f(t+h)| : \ |h| \leq \delta,\ \ t-h, t+h \in [0,1]\}$.

Задача 1.138. Нека $f(x) = \sqrt{|x|}$ и $[a,b] = [-1,1]$.

а) Да се докаже, че

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| = O(n^{-\frac{1}{2}}) \ \text{ при } \ x_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = 0,\dots,n.$$

б) Да се намерят точки $\{x_k\}_0^n$, за които $\| f - I_1(f;\cdot) \| = O(n^{-2})$.

B-сплайн от степен $r-1$ с възли $x_0,\dots,x_r$ се нарича разделената разлика на функцията $(x-t)_+^{r-1}$ в $r+1$ точки $x_0 < \cdots < x_r$. Ще бележим този сплайн с $B(x_0,\dots,x_r;t)$. Имаме

$$B(x_0,\dots,x_r;t) = (x-t)_+^{r-1}[x_0,\dots,x_r].$$

Задача 1.139. Покажете, че

$$\begin{aligned} B(x_0,\dots,x_r;t) &= 0 \qquad \text{за } t \in (x_0,x_r),\\ B(x_0,\dots,x_r;t) &> 0 \qquad \text{за } t \notin (x_0,x_r). \end{aligned}$$

Задача 1.140. Покажете, че $\displaystyle\int_{x_0}^{x_r} B(x_0,\dots,x_r;t)dt = \frac{1}{r}$.

Оттук нататък при дадена редица от точки $\{x_i\}$ (крайна или безкрайна) такива, че $x_i < x_{i+1}$ за всяко i , с $B_{i,r-1}(t)$ или просто с $B_i(t)$ ще означаваме B-сплайна

$$B_i(t) := B(x_i,\dots,x_{i+r};t).$$

Задача 1.141. Покажете, че ако $\{x_i\}$ е безкрайна редица от точки върху цялата реална права, то

$$\sum_i (x_{i+r} - x_i) B_{i,r-1}(t) = 1.$$

Задача 1.142. Нека $x_0 < \cdots < x_r$ и ξ е точка, различна от тях. Докажете, че има число α, $0 < \alpha < 1$, такова, че

$$B(x_0, \ldots, x_r; t) = \alpha B(x_0, \ldots, x_{r-1}, \xi; t) + (1-\alpha) B(x_1, \ldots, x_r, \xi; t).$$

Намерете α.

Задача 1.143. Нека $x_0 < \cdots < x_{r+N}$. Покажете, че функциите

$$B_i(t) := B(x_i, \ldots, x_{i+r}; t), \quad i = 0, \ldots N,$$

са линейно независими в $(-\infty, \infty)$.

Задача 1.144. Нека

$$x_1 < \cdots < x_r < a < x_{r+1} < \cdots < x_N < b < x_{N+1} < \cdots < x_{r+N}.$$

Покажете, че функциите $B_1(t), \ldots, B_N(t)$ са линейно независими в $[a, b]$.

Задача 1.145. Нека $x_1 < \cdots < x_{2r}$. Покажете, че $B_1(t), \ldots, B_r(t)$ са линейно независими в интервала (x_r, x_{r+1}).

Задача 1.146. Нека

$$x_k = -r/2 + k, \quad k = 0, \ldots, r \ \text{ и } \ M_i(t) := rB(x_0, \ldots, x_r; t).$$

Покажете, че

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} M_r(x) e^{ixt} dx = \left(\frac{\sin t/2}{t/2}\right)^r$;

б) $\displaystyle M_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} M_{r-1}(x-t) M_1(t) dt.$

Задача 1.147. Докажете рекурентната връзка

$$B_{i,r-1}(t) = \frac{x_{i+r} - t}{x_{i+r} - x_i} B_{i+1,r-2}(t) + \frac{t - x_i}{x_{i+r} - x_i} B_{i,r-2}(t).$$

Задача 1.148. Покажете, че

$$\frac{d}{dt} B_{i,r-1}(t) = \frac{r-1}{x_{i+r} - x_i} \{-B_{i+1,r-2}(t) + B_{i,r-2}(t)\}.$$

Задача 1.149. Докажете рекурентната връзка

$$\frac{d}{dt} \frac{B_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r} - t)^{r-1}} = (r-1) \frac{B_{i,r-2}(t)}{(x_{i+r} - t)^r}.$$

Това е известната формула на Л.Чакалов.

Задача 1.150. Нека φ_f е функцията, която удовлетворява интерполационните условия $\varphi_f(x_i) = f(x_i), \varphi_f'(x_i) = f'(x_i)$, $\quad i = 0, \ldots, n$, и φ_f съвпада с алгебричен полином от втора степен във всеки от подинтервалите (x_i, x_{i+1}), $\quad i = 0, \ldots, n-1$. Докажете, че ако

$$f \in C^4[a, b] \text{ и } \Delta_n := \max_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|,$$

то

$$\| f - \varphi_f \| \le (1/384) \Delta_n^4 \| f^{(4)} \|.$$

Задача 1.151 (П.Бинев [1984]). Нека s е сплайн с възли $\{x_j\}$ от степен k. Да се докаже, че за всяко четно $m \ge 2$ е изпълнено

$$\delta_h^{k+m} s(x_j) = 0 \quad \text{за} \ |h| \le \Big(2/(k+m)\Big) \min\{x_{j+1} - x_j, x_j - x_{j-1}\}.$$

Тук δ е симетрична крайна разлика (вж. зад. 1.97).

РЕШЕНИЯ, УПЪТВАНИЯ И ОТГОВОРИ

1.1. ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН ПОЛИНОМ НА ЛАГРАНЖ

1.1. Допускаме, че има два такива полинома P_1 и P_2. Тогава разликата им $R = P_1 - P_2$ е полином от π_n и $R(x)$ се анулира в $n+1$ точки $(x_k)_0^n$. Следователно $R(x) \equiv 0$.

1.2. П ъ р в и н а ч и н: Търсим $P(x)$ във вида

$$P(x) = a_0 x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n.$$

Интерполационните условия $P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n$, се записват като линейна система от $n+1$ уравнения с $n+1$ неизвестни $a_0, \ldots, a_n$. Детерминантата ѝ е детерминантата на Вандермонд и следователно е различна от нула, когато $(x_k)_0^n$ са различни точки.

В т о р и н а ч и н: Търсим $P(x)$ във вида

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + A_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Тогава матрицата на системата $P(x_k) = y_k, \quad k = 0, \ldots, n$, е триъгълна и нейната детерминанта е

$$1.(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)\ldots(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1}) \neq 0.$$

1.3. Отг. $\quad l_{kn} = \dfrac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$

1.4. Полиномите $Q(x)$ и $L_n(Q; x)$ са от π_n и удовлетворяват условията $Q(x_k) = L_n(Q; x_k), \quad k = 0, \ldots, n$. Следователно $Q(x) \equiv L_n(Q; x)$.

1.5. Отг. $L_3(f; x) = 2x + 1$.

1.6. Да означим израза с $P(x)$. Очевидно $P \in \pi_3$. Освен това $P(x) = x+1$ за $x = 0, 1, 2, 3$. Следователно $P(x) \equiv x + 1$.

1.7. Имаме

$$\begin{aligned} e^{0,15} &\approx 1.l_{03}(0,15) + 1,10517\, l_{13}(0,15) \\ &+ 1,22140\, l_{23}(0,15) + 1,34986\, l_{33}(0,15) \\ &= -0,0625 + 0,621658 + 0,687037 - 0,084366 \quad = \quad 1,161829. \end{aligned}$$

Сравнете с точната до петия знак след запетаята стойност 1,16183.

1.8. Да означим с $l_k(x)$ изследвания израз при възли $x_0, \ldots, x_k$. Ще използуваме индукция по k. При $k = 1$ твърдението е очевидно. Допускаме, че то е вярно при $k = n$. Тогава по формулата на Лагранж

$$l_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i}$$

и следователно

$$l_{n+1}(x) = l_n(x) + \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_{n+1})}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i}\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0 - x_{n+1}}\right) = \prod_{i=1}^{n+1} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i}.$$

1.9. Лесно се вижда, че $P_k \in \pi_k$. Трябва да докажем, че

$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Действително, при всяко $0 \le i \le n$ имаме

$$P_n(x_i) = P_{n-1}(x_i) = \cdots = P_i(x_i) = P_{i-1}(x_i) + f_i - P_{i-1}(x_i) = f_i.$$

1.10. Прилагаме зад. 1.4 при $Q(x) \equiv 1$.

1.11. Прилагаме зад. 1.4 при $Q(x) = x^m$.

1.12. Тъй като функцията $\varphi(t) = (x-t)^m$ е полином от степен m, то

$$(x-t)^m = \sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^m l_{kn}(t)$$

при $m = 1, \ldots, n$. Полагаме $t = x$.

1.13. Нека $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$. Функцията

$$R(t) := \varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} \varphi(x_k) l_{kn}(t)$$

е полином от степен $n+1$ и се анулира при $t = x_0, \ldots, x_n$. Следователно $R(t) = C\omega(t)$. Константата C определяме, като сравним коефициентите пред t^{n+1} в двете страни на горното тъждество. Получаваме $C = (-1)^{n+1}$. Полагаме $t = x$.

1.14. Да разгледаме функцията

$$R(t) := \sum_{k=0}^{n} (x-x_k)^{n+2} l_{kn}(t) - (x-t)^{n+2}.$$

Тя е полином от степен $n+2$. Освен това $R(x_k) = 0$ при $k = 0, \ldots, n$. Следователно $R(t)$ е от вида $R(t) = (At+B)\omega(t)$. Сравняваме коефициентите пред t^{n+2} и t^{n+1} и определяме константите A и B. Получаваме $A = (-1)^{n+1},\ B = (-1)^n \left[(n+2)x - (x_0 + \cdots + x_n)\right]$. Полагаме $t = x$ в равенството

$$R(t) = (A\,t + B)\omega(t) = (-1)^n \left[-t + x + \sum_{k=0}^{n} (x - x_k)\right] \omega(t).$$

1.15. Полагаме $x = 0$ в тъждеството от зад. 1.13.

1.16. Съгласно зад. 1.10

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}.$$

Разделяме двете страни на $\omega(x)$.

1.17. Нека $L_2(Q;x)$ е интерполационният полином от степен 2, който интерполира функцията $Q(x) = x^2 - x - 1$ в точките 1,2,3. Тъй като $Q(x) \equiv L_2(Q;x)$, то

$$\frac{Q(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{Q(1)}{V'(1)} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{Q(2)}{V'(2)} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{Q(3)}{V'(3)} \cdot \frac{1}{x-3},$$

където $V(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

1.18. Нека $Q(x)$ е полиномът от степен n, който удовлетворява условията $Q(x_0) = 0,\ Q'(x) = P(x)$. Тогава

$$Q(x_{i+1}) - Q(x_i) = s_i, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

и оттук $Q(x_i) = y_i$, където $y_i = s_0 + \cdots + s_{i-1}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad y_0 = 0$. По формулата на Лагранж
$$Q(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, l_{in}(x).$$
Следователно
$$P(x) = Q'(x) = \sum_{i=1}^{n} (s_0 + \cdots + s_{i-1})\, l'_{in}(x).$$

1.19. Нека $x_k = k,\ k = 0, \ldots, n$. По формулата на Лагранж и зад. 1.10
$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-k)\omega'(x_k)}, \quad \omega(x) = x(x-1)\ \ldots\ (x-n).$$
Тъй като
$$\omega(m) = \binom{m}{n} n!(m-n) \text{ и } \omega'(k) = (-1)^{n-k} k!(n-k)!,$$
то при $x = m$ от горното равенство получаваме
$$1 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{m-n}{m-k} \binom{m}{n} \binom{n}{k}.$$
Остава да разделим двете страни на равенството на $m - n$.

1.20. Нека $P(x)$ е интерполационният полином от степен n за функцията $f(x) = x$ при възли $x_k = k, \quad k = 0, \ldots, n$. Твърдението следва веднага от очевидното равенство $x = P(x)$ при $x = m$.

1.21. Да означим $f(x) = l_{kn}(x) + l_{k+1,n}(x)$. Да допуснем, че съществува точка $\xi \in (x_k, x_{k+1})$, за която $f(\xi) < 1$. Тъй като
$$f(x_{k-1}) = 0, \quad f(x_k) = 1, \quad f(x_{k+1}) = 1, \quad f(x_{k+2}) = 0,$$
то от теоремата на Рол следва, че $f'(x)$ има поне три нули в интервала (x_{k-1}, x_{k+2}). Освен това $f(x_i) = 0$ при $i = 0, \ldots, k-1, k+2, \ldots, n$. Следователно пак по теоремата на Рол $f'(x)$ ще има поне $k - 1$ нули в интервала (x_0, x_{k-1}) и поне $n - k - 2$ нули в интервала (x_{k+2}, x_n). И така $f'(x)$ ще има общо поне n нули, което е невъзможно, защото $f' \in \pi_{n-1}$ и $f(x) \not\equiv \text{const}$.

1.22. Нека $P(j)$ се дели на k при $j = i, i+1, \ldots, i+n$. По формулата на Лагранж
$$P(t) = \sum_{j=i}^{i+n} P(j) \prod_{m=i,\ m\neq j}^{i+n} \frac{t-m}{j-m}$$
за всяко t. Задачата ще бъде решена, ако успеем да покажем, че числото $l_{jn}(t) := \prod_{m=i,\ m\neq j}^{i+n} \frac{t-m}{j-m}$ е цяло, когато t е цяло. При $t > i + n$ имаме
$$\begin{aligned} l_{jn}(t) &= (-1)^{i+n-j} \frac{(t-i)\ \ldots\ (t-j+1)(t-j-1)\ \ldots\ (t-i-n)}{(j-i)\ \ldots\ 2.1.1.2.\ \ldots\ (i+n-j)} \\ &= (-1)^{i+n-j} \binom{t-i}{j-i} \binom{t-j-1}{i+n-j} \end{aligned}$$
и очевидно $l_{jn}(t)$ е цяло число. Случаят $t < i$ е напълно аналогичен.

1.23. Допускаме противното. Тогава $L'_n \in \pi_{n-2}$. От

$$L_n(x_k) = 0, \quad k = 0, \dots, i,$$
по теоремата на Рол следва, че $L_n'(x)$ има i нули в $[x_0, x_i]$. Аналогично в $[x_{i+1}, x_n]$ $L_n'(x)$ има други $n - i - 1$ нули. Следователно в $[x_0, x_n]$ $L_n'(x)$, без да е тъждествено нула, има $n-1$ нули. Стигнахме до противоречие.

1.24. В този случай
$$l_{k,n-1}(x) = \frac{(-1)^{k-1}\left(1 - x_k^2\right)^{1/2}}{n} \cdot \frac{T_n(x)}{x - x_k}, \quad k = 1, \dots n,$$
и следователно
$$L_{n-1}(f; x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} f(x_k)\sqrt{1 - x_k^2}\,\frac{T_n(x)}{(x - x_k)}.$$

1.25. Тъй като $U_n'(x_k) = (-1)^{k-1}\dfrac{(1 - x_k^2)}{(n+1)}$, то
$$L_{n-1}(f; x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} f(x_k)(1 - x_k^2)\frac{U_n(x)}{(x - x_k)}.$$

1.26. От $T_n'(0) = n \sin\,(n \arccos 0) = n\,\sin\dfrac{n\pi}{2}$ и $T_n'(0) = a_{n-1}$ намираме $a_{n-1} = n \sin\dfrac{n\pi}{2}$.

1.27. По формулата на Лагранж
$$|L_n(f; x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_{kn}(x)\right| \le \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|.$$
Нека $x \notin [x_0,\, x_n]$. За определеност да приемем, че $x > x_n$. Тъй като $l_{kn}(x)$ се анулира само в точките $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$, то очевидно $l_{kn}(x) \ne 0$. Нещо повече, $(-1)^{n-k}\, l_{kn}(x) > 0$ за $k = 0, \dots, n$. Следователно
$$|L_n(f; x)| \le \sum_{k=0}^{n}\, |l_{kn}(x)| = \sum_{k=0}^{n}\, (-1)^{n-k}\, l_{kn}(x) = L_n(P; x).$$
Но $L_n(P; x) = P(x)$. Следователно $|L_n(f; x)| \le |P(x)|$. Аналогично се доказва същото неравенство и при $x < x_0$. От доказателството се вижда, че равенство може да има само при $f(x_k) = \varepsilon(-1)^{n-k}, \quad k = 0,\, \dots,\, n$, където $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$.

1.28. Лесно се проверява, че $T_n(x_k) = (-1)^{n-k}, \quad k = 0,\, \dots,\, n$, където $x_{n-k} = \cos\dfrac{k\pi}{n}, \quad k = 0,\, \dots,\, n$. Тогава съгласно зад. 1.27 за всяко Q от π_n ще имаме
$$|L_n(\hat{Q}; x)| = |\hat{Q}(x)| \le |T_n(x)| \quad \text{при } |x| > 1,$$
където $\hat{Q}(x) = Q(x)/\max\limits_{x\in[-1,1]}|Q(x)|$. Това трябваше да се докаже.

1.29. Очевидно $||P|| := \max\limits_{x\in[-1,1]}|P(x)| \ge 1$ за всяко P, за което
$$P(x_k) = (-1)^{n-k}, \quad k = 0,\, \dots,\, n, \text{ при някои } -1 \le x_0 < \dots < x_n \le 1.$$
От друга страна,
$$||T_n|| = 1, \quad T_n(x_k) = (-1)^{n-k}, \quad x_{n-k} = \cos\frac{k\pi}{n}, \quad k = 0,\, \dots,\, n.$$

Ако допуснем, че има друг полином $P \neq \pm T_n$ от разглеждания вид със свойството $|P| = 1$, то по зад. 1.27 бихме имали

$$|P(x)| < |T_n(x)| \text{ при } |x| > 1 \quad \text{и} \quad |T_n(x)| < |P(x)| \text{ при } |x| > 1,$$

което е невъзможно.

1.30. Нека $x_0 < \ldots < x_n$ са произволни точки от $[-1, 1]$, несъвпадащи с множеството $\left\{\cos\dfrac{k\pi}{n}\right\}_{k=o}^{n}$ от екстремални точки на полинома на Чебишов $T_n(x)$. Вижда се, че величината $c(x_0, \ldots, x_n) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{|\omega'(x_k)|}$ е коефициентът пред x^n в полинома $P \in \pi_n$, който удовлетворява интерполационните условия $P(x_k) = (-1)^{n-k}$, $\quad k = 0, \ldots, n$. Тъй като $|T_n(x_k)| \leq 1$, $\quad k = 0, \ldots, n$, то съгласно зад. 1.27

$$|T_n(x)| = |L_n(T_n; x)| < |P(x)| \quad \text{за всяко } |x| > 1.$$

Оттук и от факта, че $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$, следва $c(x_0, \ldots, x_n) > 2^{n-1}$.

1.31. Разглеждаме

$$P(x) = \eta \frac{T_n(x)}{T_n(\xi)}, \quad P \in \pi_n.$$

Тогава $P(\xi) = \eta$. Ще докажем, че P най-малко се отклонява от нулата в $[-1, 1]$. Нека $\max\limits_{x \in [-1,1]} |P(x)| = L$. Допускаме, че съществува $Q \in \pi_n$, за който $Q(\xi) = \eta$ и $\max\limits_{x \in [-1,1]} |Q(x)| < L$. Тогава

$$R(x) = P(x) - Q(x), \quad R \in \pi_n,$$

и ще има $n + 1$ нули. Стигнахме до противоречие.

1.32. Оценката отгоре следва от

$$|L_n(f; x)| \leq \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)| = \lambda(x).$$

За всяко фиксирано x горната граница се достига за функцията $f_0(x)$, която е непрекъсната, на части линейна с възли в точките $x_0, \ldots, x_n$ и еднозначно определена с условието

$$f(x_k) = \operatorname{sgn}\{l_{kn}(x)\}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

1.33. От очевидното равенство $l_{0n}(x) + \cdots + l_{nn}(x) = 1$ следва

$$1 \leq \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|,$$

като равенство се достига в точките $x_0, \ldots, x_n$. Да допуснем, че има и други точки, в които се достига равенство. Нека $x_j < \xi < x_{j+1}$ и $\lambda(\xi) = 1$. Тогава

$$\sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(\xi)| = \sum_{k=0}^{n} l_{kn}(\xi)$$

и оттук следва, че числата $l_{kn}(\xi)$, $\quad k = 0, \ldots, n$, са положителни. Но това е невъзможно, защото $l_{j-1,n}(\xi)$ и $l_{j+1,n}(\xi)$ имат различни знаци в интервала (x_j, x_{j+1}). Тук се използва фактът, че полиномите $l_{in}(x)$ са от степен n и следователно $x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ са за тях прости нули, т. е. че $l_{in}(x)$ си сменя знака при преминаване през тях.

1.34. В този случай

$$||\lambda||_{[0,\xi]} = \lambda(\xi/2) = 5/4, \quad ||\lambda||_{[\xi,1]} = \lambda(1) = (2-\xi^2)/\xi^2.$$

Тъй като $\lambda(x)$ е симетрична функция, то изследваме поведението ѝ само в интервала [0,1]. Проверява се лесно, че

$$(2-\xi^2)/\xi^2 \le 5/4 \quad \text{при} \quad 2\sqrt{2}/3 \le \xi \le 1,$$
$$(2-\xi^2)/\xi^2 \ge 5/4 \quad \text{при} \quad 0 \le \xi \le 2\sqrt{2}/3,$$

откъдето следва, че $||\lambda||_{[-1,1]}$ приема най-малката си стойност, равна на $5/4$, при произволно $\xi \in [2\sqrt{2}/3, 1]$.

1.35. Очевидно е, че при линейна трансформация на възлите графиката на $\lambda(x)$ се разпъва или свива. Оттук следва, че без ограничение на общността можем да считаме, че $x_0 = -1$, $x_2 = 1$. Намираме явния израз за $\lambda(x)$ и изследваме, както в предишната задача, поведението на $||\lambda||_{[-1,1]}$ в зависимост от възела x_1.

1.36. И тук, както в предишната задача, можем да считаме, че $a = -\xi$, $b = \xi$, където ξ е параметърът от зад. 1.34. Там показахме, че $||\lambda||_{[-\xi,\xi]} = 5/4$. Остава да забележим, че

$$\max_{x\in[a,b]}|P(x)| \le \max\left\{|P(a)|, |P(b)|, \left|P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right\} ||\lambda||_{[-\xi,\xi]}.$$

1.37. Равенството се доказва веднага, като извършим смяната

$$x = x_0 + th \text{ и } x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Ще докажем неравенството. Имаме

$$\begin{aligned}\max_{0\le t\le n}|\lambda(x_0+th)| &\ge \prod_{j=0}^{n}\left|j-\frac{1}{2}\right|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n!}\frac{1}{|k-1/2|}\\ &= \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2k-1}.\end{aligned}$$

1.38. Разглеждаме функцията

$$F(z) = f(z) - L_n(f;z) - C(z-x_0)\cdots(z-x_n),$$

където

$$C = \frac{f(x) - L_n(f;x)}{(x-x_0)\cdots(x-x_n)} \quad \text{при} \quad x \ne x_0, \ldots, x_n.$$

Тя има $n+2$ нули: $x, x_0, \ldots, x_n$. Прилагаме $n+1$ пъти последователно теоремата на Рол и заключаваме, че съществува точка ξ, за която $F^{(n+1)}(\xi) = 0$. Оттук $C = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$. Сравняваме двата израза за C.

1.39. Прилагаме резултата от предишната задача за функцията $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$.

1.40. Следва от зад. 1.38 и от факта

$$\max_{x\in[x_0,x_1]}|(x-x_0)(x-x_1)| = (x_1-x_0)^2/4.$$

1.41. Тъй като $||f^{(n+1)}(x)||_{[0,2\pi]} = 1$, то $|R_n(x)| \le \dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

1.42. Въз основа на зад. 1.38 $|R_n(x)| \le [A(b-a)]^{n+1}/(n+1)!$.

1.43. Нека p е интерполационният полином на Лагранж с възли $1+(i-1)h,\ 1+ih,\ 1+(i+1)h$. Получаваме оценката

$$|f(x)-p_i(x)| \le \frac{h^3}{24\sqrt{3}} \quad \text{за } x \in [1+(i-1)h, 1+(i+1)h].$$

Следователно грешката ще бъде по-малка от 0,001 например при $h = 1/4$.

1.44. Отг. 1/2.

1.45. Въз основа на зад. 1.38 получаваме

$$|R(x)| \le \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3\sqrt{3}}\max(h^3, H^3/\xi^3).$$

Избираме ξ така, че $h = H/\xi$. Оттук $\xi = 3$. Тогава $|R(x)| \le \dfrac{2}{15}$ за всяко $x \in [1,9]$.

1.46. Нека $R(x) = f(x) - P_\xi(x)$. Тогава

$$|R(x)| \le \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{2}|x(x-\xi)| & \text{при} \ \ x\in[0,\xi], \\ \dfrac{1}{2}|(x-\xi)(x-1)| & \text{при} \ \ x \in [\xi,1]. \end{cases}$$

Оттук се вижда, че $|R(x)| \le 0,02$ например при $\xi = \dfrac{3}{5}$.

1.47. Намираме $P_\xi(x) = \dfrac{x^2+\xi}{1+\xi}$. Тъй като $f(x)$ и $P_\xi(x)$ са четни, разглеждаме само $x \in [0,1]$.

Образуваме

$$R(x) = \left| |x| - \frac{x^2+\xi}{1+\xi}\right| = \begin{cases} \dfrac{x^2+\xi}{1+\xi} - x & \text{за} \ \ x \in [0,\xi], \\ x - \dfrac{x^2+\xi}{1+\xi} & \text{за} \ \ x\in[\xi,1]. \end{cases}$$

От $\max\limits_{x\in[0,\xi]}|R| = |R(0)| = \dfrac{\xi}{1+\xi}$ и $\max\limits_{x\in[\xi,1]}|R| = R\left(\dfrac{1+\xi}{2}\right) = \dfrac{(1-\xi)^2}{4(1+\xi)}$ намираме, че ξ трябва да удовлетворява $\xi^2 - 6\xi + 1 = 0$, откъдето $\xi = 3-2\sqrt{2}$.

1.48.

$$\rho(\xi) = \begin{cases} (1-\xi)/(2\xi+1) & \text{при} \ \ 0 \le \xi \le 1/2, \\ \xi/(2\xi+1) & \text{при} \ \ 1/2 \le \xi \le 1. \end{cases}$$

Следователно $\inf\{\rho(\xi) : \xi \in [0,1], \xi \ne 1/2\} = \dfrac{1}{4} = \rho\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

1.49. Нека $x_0 < \ldots < x_n$ са произволни точки в $[a,b]$. По формулата на Лагранж

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^{n} P_i(x_k)\, l_{kn}(x).$$

По теоремата на Болцано — Вайерщрас от числовите редици $\{P_i(x_k)\}_{i=0}^{\infty}$ могат да бъдат избрани сходящи подредици. Нека те клонят съответно към числата $p_k, \quad k = 0, \ldots, n$. Полиномът $\sum_{k=0}^{n} p_k \, l_{kn}(x)$ е граница на сходящата подредица.

1.50. Тъй като $L_n(P;x) = P(x)$, то

$$\begin{aligned} |f(x) - L_n(f;x)| &\leq |f(x) - P(x)| + \sum_{k=0}^{n} |f(x_k) - P(x_k)| \, l_{kn}(x) \\ &\leq E + E \sum_{k=0}^{n} |l_{kn}(x)|. \end{aligned}$$

1.51. Нека $\theta_k = \cos \dfrac{(n-k)\pi}{n}, \quad k = 0, \ldots, n$. Знае се, че

$$T_n(\theta_k) = (-1)^{n-k}.$$

Да означим с $(x_k)_0^n$ онези точки от множеството σ_ν, които отиват в $(\theta_k)_0^n$ при подреждане на всички подинтервали на σ един до друг върху $[-1, 1]$. Тогава

$$|P(a)| \leq \sum_{k=0}^{n} |P(x_k)| \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{|a - x_i|}{|x_k - x_i|}.$$

Оттук

$$|P(a)| \leq \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{|a - \theta_k|}{|\theta_k - \theta_i|} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \, l_{kn}(a),$$

където $l_{kn}(x)$ са базисните полиноми на Льожандър за възлите $(\theta_k)_0^n$. По-нататък

$$|P(a)| \leq \sum_{k=0}^{n} T_n(\theta_k) \, l_{kn}(a) = T_n(a).$$

1.52. Нека $x = \cos\theta, \ \theta_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, \ldots, n$. Тъй като

$$T_n'(x_k) = (-1)^{k+1} \frac{n}{\sin\, \theta_k},$$

то

$$|l_{kn}(x)| = \frac{1}{n} \left| \frac{\cos\, n\theta}{\cos\, \theta - \cos\, \theta_k} \sin\, \theta_k \right|, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Като използуваме съотношенията

$$|\cos\, n\theta| = |\cos\, n\theta - \cos\, n\theta_k| \leq 2 \left| \sin\, n \frac{\theta - \theta_k}{2} \right| \leq 2n \left| \sin\, \frac{\theta - \theta_k}{2} \right|,$$

$$|\cos\, \theta - \cos\, \theta_k| = 2 \left| \sin\, \frac{\theta - \theta_k}{2} \right| \left| \sin\, \frac{\theta + \theta_k}{2} \right|,$$

получаваме

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{kn}(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\sin\, \theta_k}{\sin\, \dfrac{\theta + \theta_k}{2}} \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\, \theta_k + \sin\, \theta}{\sin\, \dfrac{\theta + \theta_k}{2}} = 2 \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{\theta_k - \theta}{2} \leq 2n$$

при $0 \leq \theta \leq \pi$.

1.53. Образуваме $P(x) = (x+1)L_n(f;x) - x$. Проверяваме, че

$$P(x_k) = 0 \text{ за } x_k = k \ , \quad k = 0, \ldots, n.$$

Следователно

$$P(x) = Cx(x-1)\dots(x-n).$$

От това, че $x=-1$ анулира $P(x)+x$, намираме $C = \dfrac{1}{(n+1)!(-1)^{n+1}}$. Тогава $P(n+1) = (-1)^{n+1}$ и $L_n(f;n+1) = \dfrac{(-1)^{n+1}+n+1}{n+2}$.

1.54. Използувайте индукция по n и интегриране по части.

1.55. По формулата на Тейлор от предишната задача получаваме

$$f(z) = P(z) + \int_a^b \frac{(z-t)_+^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

за $z = x, x_0, \dots, x_n$, където с P сме означили полинома $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Тогава

$$\begin{aligned} f(z) - L_n(f;x) &= P(x) + \int_a^b \frac{(x-t)_+^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt \\ &- L_n(P;x) - \int_a^b \frac{1}{(n-1)!} L_n\left((x-t)_+^{n-1};x\right) f^{(n)}(t)dt \\ &= \int_a^b K(x,t) f^{(n)}(t)dt. \end{aligned}$$

1.2. РАЗДЕЛЕНИ РАЗЛИКИ

1.56. Използувайте индукция по броя на точките и рекурентната връзка

$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{f[x_1,\dots,x_n] - f[x_0,\dots,x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

1.57. Твърдението следва веднага от представянето на разделената разлика в предишната задача като линейна комбинация на стойностите на функцията $f(x)$ в точките $\{x_k\}_0^n$.

1.58. От формулата на Лагранж

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}$$

се вижда, че коефициентът пред x^n е точно равен на $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\omega'(x_k)}$. Прилагаме доказаното в зад. 1.56.

1.59. Съгласно зад. 1.56 изразът $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{x_j^k}{\omega'(x_j)}$ е равен на коефициента пред x^n в интерполационния полином $L_n(f;x)$ за $f(x) = x^k$. Но $L_n(f;x) = x^k$ при $k \le n$.

1.60. а) Използуваме дефиниция 1.2.

б) Нека $\omega(x) = x^n - (x_1 + \dots + x_n)x^{n-1} + p(x)$. Тогава при $f(x) = x^n$,

$$0 = \omega[x_1, \ldots, x_n] = f[x_1, \ldots, x_n] - (x_1 + \cdots + x_n).$$

Оттук $f[x_1, \ldots, x_n] = x_1 + \cdots + x_n$.

1.61. Вижда се, че $f[x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)/g'(x_k)$. Но

$$f(x) = x^n - (t_1 + \cdots + t_n)x^{n-1} + p(x),$$

където p е полином от степен $n-2$. Оттук, като използуваме и предишната задача, получаваме

$$f[x_1, \ldots, x_n] = (x_1 + \cdots + x_n) - (t_1 + \cdots + t_n).$$

1.62. Това е разделената разлика на полинома $\omega''(x)$, а той е от степен $n-1$.

1.63. Това е разделената разлика на полинома $x\omega''(x)$, а той има вида $n(n+1)x^n +$ полином от степен $n-1$.

1.64. От $x\bar{\omega}''(x) = n(n-1)x^{n-1} + \cdots$ намираме

$$\sum_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{\bar{\omega}''(x_k)}{\bar{\omega}'(x_k)}(x - x_k)\right] = n - x\sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\omega}''(x_k)}{\bar{\omega}'(x_k)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\bar{\omega}''(x_k)}{\bar{\omega}'(x_k)} x_k$$

$$= n + n(n-1) = n^2.$$

1.65. Нека

$$x_0 = -1,\ x_{n+1} = 0,\ g(x) = x^{n+1} f(1/x), \quad \varphi(x) = \prod_{k=0}^{n+1} (x - x_k).$$

Тогава

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^n f(1/x_k)}{f'(x_k)(1 + x_k)} = \sum_{k=1}^{n+1} g(x_k)/\varphi'(x_k)$$

$$= g[x_0, \ldots, x_{n+1}] - g(x_0)/\varphi'(x_0) = g[x_0, \ldots, x_{n+1}] - (-1)^n.$$

Но $g(x) = (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n . x^{n+1} + \cdots$. Следователно според дефиниция 1.2

$$g[x_0, \ldots, x_{n+1}] = (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

1.66. Съгласно дефиниция 1.3 коефициентите $\{A_k\}_0^n$ се определят като решения на линейната система

$$A_0 x_0^k + A_1 x_1^k + \cdots + A_n x_n^k = \delta_{kn}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Детерминантата ѝ е Вандермондова и следователно е различна от нула. По формулите на Крамер получаваме $A_k = 1/\omega'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n$. Оттук се вижда, че изразът $\sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$ съвпада с израза от зад. 1.56. От друга страна, вече показахме в зад. 1.58, че дефиниции 1.1 и 1.2 са еквивалентни.

1.67. Използуваме, че $f[x_0, \ldots, x_n]$ е коефициентът пред x^n в полинома $P(x) = a_0 x^n + \cdots + a_n$, удовлетворяващ интерполационните условия $P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n$. По формулите на Крамер получаваме искания израз за $a_0 = f[x_0, \ldots, x_n]$.

1.68. Нека $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$. Тогава $p[x_0, \ldots, x_n] = 1$. От друга страна,

$$|p[x_0,\dots,x_n]| \le M\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{|\omega'(x_k)|} \le M\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!} = M\frac{2^n}{n!},$$

където $M = \max\limits_{0\le k\le n}|p(x_k)|$. Следователно $M \ge \dfrac{n!}{2^n}$.

1.69. Да въведем функциите

$$\varphi_i(x) = (x_{i+2}-x_i)(x-x_{i+1})_+, \quad i=1,\dots,n-1.$$

Лесно се вижда, че $\varphi_i[x_j,x_{j+1},x_{j+2}] = \delta_{ij}, \quad j=0,\dots,n-2$. Каквито и да са числата $f(x_0),\dots,f(x_n)$, съществува единствена функция от вида

$$s(x) = A + Bx + \sum_{i=0}^{n-2} c_i\varphi_i(x),$$

която удовлетворява интерполационните условия

$$s(x_j) = f(x_j), \quad j=0,\dots,n.$$

Като използуваме свойствата на $\varphi_i(x)$, определяме коефициентите c_j:

$$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2}] = s[x_j,x_{j+1},x_{j+2}] = \sum_{i=0}^{n-2} c_i\varphi_i[x_j,x_{j+1},x_{j+2}] = c_j.$$

Тогава

$$f[x_0,x_k,x_n] = \sum_{i=0}^{n-2} f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]\varphi_i[x_0,x_k,x_n].$$

Ще покажем, че числата $A_i = \varphi_i[x_0,x_k,x_n]$ са положителни. По дефиниция A_i е коефициентът пред x^2 в полинома от втора степен, който интерполира $\varphi_i(x)$ в точките $x_0 < x_k < x_n$. Вижда се, че този коефициент е винаги различен от нула, защото не съществува права линия, която да съвпада с $\varphi_i(x)$ в точките x_0, x_k, x_n. Тъй като коефициентът A_i е непрекъсната функция на x_k и очевидно $A_i > 0$ при $x_k < x_{i+1}$, то $A_i > 0$ при всяко положение на x_k в (x_0,x_n). Равенството $\sum\limits_{i=0}^{n-2} A_i = 1$ следва веднага, като поставим $f(x) = x^2$.

1.70. Доказателството ще проведем по индукция. За $n=2$ формулата е очевидна. Нека тя е вярна за произволни $n+1$ точки. Тогава

$$\begin{aligned}&(x_{n+1}-x_0)f[x_0,\dots,x_{n+1}]\\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} g[x_1,\dots,x_{k+1}]\,h\,[x_{k+1},\dots,x_{n+1}] - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} g\,[x_0,\dots,x_k]\,h\,[x_k,\dots,x_n].\end{aligned}$$

Но $g[x_1,\dots,x_{k+1}] = g[x_0,\dots,x_k] + (x_{k+1}-x_0)g[x_0,\dots,x_{k+1}]$. Оттук за дясната страна на предишното равенство получаваме

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} g[x_0,\dots,x_k](h[x_{k+1},\dots,x_{n+1}] - h[x_k,\dots,x_n])\\ +&\sum_{k=0}^{n}(x_{k+1}-x_0)g[x_0,\dots,x_{k+1}]h[x_{k+1},\dots,x_{n+1}]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} (x_{n+1}-x_k) g[x_0,\dots,x_k] h[x_k,\dots,x_{n+1}] \\
&+ \sum_{k=1}^{n+1} (x_k-x_0) g[x_0,\dots,x_k] h[x_k,\dots,x_{n+1}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} (x_{n+1}-x_0) g[x_0,\dots,x_k] h[x_k,\dots,x_{n+1}] \\
&+ (x_{n+1}-x_0) g[x_0,\dots,x_{n+1}] h[x_{n+1}] \\
&= (x_{n+1}-x_0) \sum_{k=0}^{n+1} g[x_0,\dots,x_k] h[x_k,\dots,x_{n+1}].
\end{aligned}
$$

1.71. По формулата на Стефенсън
$$f[x_0,\dots,x_n] = x_0 g[x_0,\dots,x_n] + g[x_1,\dots,x_n].$$

1.72. От равенството $xf(x) = 1$ следва
$$x_0 f[x_0,\dots,x_n] + f[x_1,\dots,x_n] = 0.$$
Получаваме рекурентната връзка $f[x_0,\dots,x_n] = (-1/x_0) f[x_1,\dots,x_n]$, която дава $f[x_0,\dots,x_n] = \dfrac{(-1)^n}{x_0 x_1 \dots x_n}$.

1.73. Нека $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ и $x_k = k, \quad k = 0,\dots,n$. Тогава
$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \frac{1}{2i+1}.$$

От друга страна, прилагайки формулата на Стефенсън за произведението $(2x+1)f(x) = 1$, извеждаме рекурентната връзка
$$f[x_0,\dots,x_n] = \frac{-2}{2x_0+1} f[x_1,\dots,x_n],$$
от която следва $f[x_0,\dots,x_n] = \dfrac{(-1)^n 2^{2n} n!}{(2n+1)!}$.

1.74. Показваме, че интегралният израз удовлетворява същите рекурентни връзки, както разделената разлика.

1.75. Следва от формулата в предишната задача, като приложим теоремата за средните стойности.

1.76. От предишната задача следва $\operatorname{sgn} f[x_0,\dots,x_n] = \operatorname{sgn} f^{(n)}(x)$. Използваме представянето на разделената разлика от зад. 1.67 и факта, че детерминантата на Вандермонд е положителна.

1.77. Първи начин: Нека $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Съгласно зад. 1.75 съществува такава точка $t, \quad x_0 < t < x_n$, че
$$f[x_0,\dots,x_n] = f^{(n)}(t)/n!.$$
Извършваме граничния преход $x_k \to \xi, \quad k = 0,\dots,n$, и се възползуваме от непрекъснатостта на f.

В т о р и н а ч и н: Забелязваме, че величината σ_n от зад. 1.74 клони към ξ при $x_k \to \xi, \quad k = 0, \dots, n$. Извършваме граничен преход в интегралното представяне от същата задача.

1.78. а) Използуваме индукция по броя на точките и рекурентната връзка между разделените разлики.

б) Записваме полинома $P_{n+1}(t)$ по изведената в точка а) формула при възли $x, x_0, \dots, x_n$ и полагаме $t = x$.

1.79. Нека $(x_k)_0^{n-1}$ са произволни различни точки от $[a, b]$. Съгласно формулата на Нютон

$$f(x) = L_{n-1}(f; x),$$

защото по условие $f[x_0, \dots, x_{n-1}, x] = 0$.

1.80. Съгласно интерполационната формула на Нютон

$$\ln x - p(x) = C(x-1)(x-2)(x-3)(x-4),$$

където $C = f^{(4)}(\xi)/4!, \quad \xi \in (1, 4)$. Остава да забележим, че $f^{(4)}(x) < 0$ при $x > 0$.

1.81. Използуваме, че ако $f \in W_0^n$, то

$$f(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) f[x_1, \dots, x_n, x].$$

1.82. Прилагаме индукция по n.

1.83. Допускаме противното. От $P(x) = a_n(x^n + \cdots) = a_n Q_n(x)$ намираме

$$\max_{x \in [-1,1]} |P(x)| = a_n \max_{x \in [-1,1]} |Q_n(x)| > 2^{n-1} . \frac{1}{2^{n-1}} \max_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| = 1.$$

Стигаме до противоречие.

1.3. КРАЙНИ РАЗЛИКИ

1.84. П ъ р в и н а ч и н: Използуваме индукция по n.

В т о р и н а ч и н: Използуваме представянето на разделената разлика от зад. 1.56 и връзката от следващата задача.

1.85. По индукция.

1.86. Решението следва от зад. 1.75 и предишната задача.

1.87. Решението следва от зад. 1.85 и съответните свойства на разделената разлика.

1.88. Това е крайната разлика от ред n на полинома $f(x) = x^n$.

1.89. Изразът е крайната разлика от ред n на алгебричния полином $f_j(x) = (m + x)(m + x - 1) \dots (m + x - j + 1)/j!$, който е от степен j.

1.90. Да се запише интерполационният полином $p(x)$ от степен n, който интерполира таблицата $(k, f_k), \quad k = 0, \dots, n$, като се използува формулата на Нютон за интерполиране назад. Исканото равенство е еквивалентно на $p(0) = f_0$.

1.91. Използувайте факта, че $\Delta^{n+1} P_i = 0$ за всяко i (защото $P \in \pi_n$). Тогава

$$P(x_{n+1}) = P(x_n) + \Delta P(x_{n-1}) + \cdots + \Delta^{n-1} P(x_1) + \Delta^n P(x_0).$$

1.92. Да означим $b_k = k(n+1-k)/2, \quad k = 0, \ldots, n+1$. Вижда се, че

$$b_0 = b_{n+1} = 0, \; b_{k+1} - 2b_k + b_{k-1} = -1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Допускането, че редицата $\{f_k - b_k\}_{k=0}^{n+1}$ съдържа положително число или че редицата $\{f_k + b_k\}_{k=0}^{n}$ съдържа отрицателно число, води до противоречие с условието $\left|\Delta^2 f_{i-1}\right| \leq 1$.

1.93. Нека $q \in \pi_n$ и $q(k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, m, \quad m \geq n$. Ще покажем, че $q(m+1) = f_{m+1}$. Наистина по формулата на Нютон

$$f_{m+1} = q(m+1) + \frac{\Delta^{n+1} f_{m-n}}{(n+1)!} \prod_{i=m-n}^{m} (m+1-i) = q(m+1).$$

1.94. а) Нека $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$. Тъй като $\Delta^4 S_n = 0$, то съгласно предишната задача $S_n = q(n)$, където $q \in \pi_3$. По формулата на Нютон, като използуваме, че $\Delta S_n = n^2, \; \Delta^2 S_n = 2n+1, \; \Delta^3 S_n = 2$, получаваме $q(n) = n(n+1)(2n+1)/6$. Аналогично:

б) Отг. $n^2(n+1)^2/4$;

в) Отг. $n(4n^2-1)/3$;

г) Отг. $n^2(2n^2-1)$.

1.95. Решението следва от зад. 1.93, понеже $\Delta F(n) = f(n+1)$ и следователно $\Delta^{k+2} F(n) = 0$ за всяко n.

1.96. Съгласно зад. 1.93 при всяко $0 < h < \dfrac{b-a}{n}$ съществува такъв полином $q(h;x)$ от π_n, че $q(h;x)$ съвпада с $f(x)$ в точките от вида $a + kh$ в $[a,b]$. Но $q(h;x) \equiv q(h/2m;x)$ за всяко $m = 1, 2, \ldots$, защото тези полиноми имат повече от n общи стойности. Тогава $f(x)$ съвпада с полинома $q(h;x)$ във всички двоично-рационални точки и следователно (поради непрекъснатостта на f) във всички точки на $[a,b]$.

1.97. Съгласно дефиницията

$$\begin{aligned}
\delta_h^k f(x) &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + (j - \frac{k}{2})h) \\
&= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{k-j} f(x - (k - j - \frac{k}{2})h) \\
&= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x - (j - \frac{k}{2})h) = (-1)^k \delta_{-h}^k f(x).
\end{aligned}$$

1.4. ИНТЕРПОЛАЦИОННА ФОРМУЛА НА ЕРМИТ

1.98. Упътване: Полиномът Q да се търси във вида

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[y_k + (x - x_k)\,(\alpha_k y_k + \beta_k y_k')\right] l_{kn}^2(x).$$

Отг. $$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \left\{1 - (x - x_k)\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right\} l_{kn}^2(x) + \sum_{k=0}^{n} y_k' l_{kn}^2(x).(x - x_k).$$

1.99. Отг.

$$Q(x) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{T_n^2(x)}{(x - x_k)^2}\left\{f(x_k)(1 - x\,x_k) + f'(x_k)(1 - x_k^2)(x - x_k)\right\}.$$

1.100. Отг.

$$Q(x) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{u_n^2(x)(1 - x_k^2)}{(x - x_k)^2}$$
$$\times\left\{f(x_k)(1 + 2x_k^2 - 3xx_k) + f'(x_k)(1 - x_k^2)(x - x_k)\right\}.$$

1.101. Отг. $$\prod_{1\le i<j\le n} (x_i - x_j)^4.$$

1.102. Използувайте, че всеки $N+1$ полинома $(\varphi_i)_0^N$ от вида

$$\varphi_i(x) = x^i + \text{ полином от степен } i-1$$

са линейно независими.

1.103. Очевидно хомогенната система

$$H^{(\lambda)}(x_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \ \lambda = 0, \dots, \nu_k - 1,$$

допуска само нулевото решение, защото един ненулев полином от степен N има най-много N реални нули, броейки кратностите.

1.104. Не са очевидни само равенствата

$$L_{k\lambda}^{(j)}(x_k) = \delta_{\lambda j}, \quad j = \lambda, \dots, \nu_{k-1}.$$

Да ги докажем. По формулата на Лайбниц

$$L_{k\lambda}^{(j)}(x_k) = \frac{1}{\lambda!}\sum_{m=\lambda}^{j}\binom{j}{m}\left\{\frac{\Omega(x)}{(x - x_k)^{\nu_k}}\right\}_{x=x_k}^{(j-m)} . \frac{1}{(m-\lambda)!}\left\{\frac{(x - x_k)^{\nu_k}}{\Omega(x)}\right\}_{x=x_k}^{(m-\lambda)} .ml.$$

По-нататък, като се възползуваме от равенството

$$\binom{j}{m}\binom{m}{\lambda} = \binom{j}{\lambda}\binom{j-\lambda}{m-\lambda},$$

получаваме

$$\begin{aligned}
L_{k\lambda}^{(j)}(x_k) &= \binom{j}{\lambda}\sum_{m=\lambda}^{j}\binom{j-\lambda}{m-\lambda}\left\{\frac{\Omega(x)}{(x - x_k)^{\nu_k}}\right\}_{x=x_k}^{(j-m)}\left\{\frac{(x - x_k)^{\nu_k}}{\Omega(x)}\right\}_{x=x_k}^{(m-\lambda)} \\
&= \binom{j}{\lambda}\sum_{i=0}^{j-\lambda}\binom{j-\lambda}{i}\left\{\frac{\Omega(x)}{(x - x_k)^{\nu_k}}\right\}_{x=x_k}^{(j-\lambda-i)}\left\{\frac{(x - x_k)^{\nu_k}}{\Omega(x)}\right\}_{x=x_k}^{(m-\lambda)} \\
&= \binom{j}{\lambda}\left\{\frac{\Omega(x)}{(x - x_k)^{\nu_k}}\frac{(x - x_k)^{\nu_k}}{\Omega(x)}\right\}_{x=x_k}^{(j-\lambda)} = \delta_{\lambda j}.
\end{aligned}$$

1.105. Търсим полином $P(x)$ във вида $P(x) = L(x) + C(x-a)(x-b)$, където $L(x)$ е полиномът от първа степен, който удовлетворява условията $L(a) = A$, $L(b) = B$, а параметърът C се определя от условието $P'(b) = B_1$. Получаваме

$$P(x) = A\frac{(x-b)^2}{(b-a)^2} + B\frac{(x-a)(2b-a-x)}{(b-a)^2} + B_1\frac{(x-a)(x-b)}{b-a}.$$

1.5. ИНТЕРПОЛИРАНЕ С ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

1.106. Използувайте индукция по n.

1.107. Нека $\tau(x)$ е произволен тригонометричен полином от ред n с поне един ненулев коефициент. Като направим смяната $z = e^{\mathrm{i}x}$ и използуваме известните формули на Ойлер

$$\cos kx = (e^{\mathrm{i}kx} + e^{-\mathrm{i}kx})/2 = (z^k + z^{-k})/2,$$
$$\sin kx = (e^{\mathrm{i}kx} - e^{-\mathrm{i}kx})/2\mathrm{i} = (z^k - z^{-k})/2\mathrm{i},$$

получаваме

$$\tau(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k z^k = z^{-n} P_{2n}(z),$$

където c_k се изразяват чрез коефициентите $\{a_k\}_0^n$ и $\{b_k\}_1^n$ на тригонометричния полином $\tau(x)$. Тъй като P_{2n} е алгебричен полином от степен $2n$, то той има не повече от $2n$ нули в комплексната равнина. Но уравнението $e^{\mathrm{i}x} = z$ има единствен корен в ивицата $0 \le \mathrm{Re}x < 2\pi$ при всяко фиксирано z. Следователно и уравнението $\tau(x) = 0$ има в тази ивица не повече от $2n$ корена. Оттук следва, че реалните корени на $\tau(x) = 0$ в $[0, 2\pi]$ са не повече от $2n$.

1.108. Въз основа на предишната задача хомогенната система

$$\tau(x_k) = 0, \quad k = 0, \dots, 2n$$

допуска само нулевото решение.

1.109. Отг. а) $g_i(t) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{\cos\, t - \cos\, t_j}{\cos\, t_i - \cos\, t_j}$,

б) $s_i(t) = \frac{\sin\, t}{\sin\, t_i} \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} \frac{\cos\, t - \cos\, t_j}{\cos\, t_i - \cos\, t_j}$.

1.110. а) Умножаваме двете страни с $2\,\sin\,(x/2)$ и използуваме формулата

$$2\sin\frac{x}{2}\,\cos\,kx = \sin\,\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\,\left(k-\frac{1}{2}\right)x.$$

б) Както в подточка а).

1.111. Отг. $\tau(t) = \dfrac{1}{2n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} y_k \frac{\sin\,\dfrac{2n+1}{2}(t-t_k)}{\sin\,\dfrac{t-t_k}{2}}$.

1.112. Отг. $a_k = \dfrac{2}{2n+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{2n} y_i \cos\, kt_i, \quad k = 0, \dots, n,$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} y_i \sin\, kt_i, \quad k = 0, \dots, n.$$

1.6. ЧЕБИШОВИ СИСТЕМИ

1.113. Използувайте, че всеки алгебричен полином от степен n има не повече от n реални нули.

1.114. Например линейната комбинация $\sin\, x - \dfrac{1}{2}$ има две нули в $[0, \pi]$.

1.115. Всяка линейна комбинация $f(x)$ на $\left\{x^{2k+1}\right\}_0^n$ е нечетна функция. Следователно, ако $f(x)$ има $n+1$ нули в $[\alpha, \beta]$, то $f(x)$ ще има още $n+1$ нули и в $[-\beta, -\alpha]$, т. е. общо $2n+2$. Но f е полином от степен $2n+1$. Стигаме до противоречие.

1.116. Нека $(\varphi_k)_0^n$ е система на Чебишов. Допускаме, че има точки $(x_k)_0^n$, за които въпросната детерминанта е равна на нула. Тогава хомогенната система

$$a_0\varphi_0(x_k) + \cdots + a_n\varphi_n(x_k) = 0, \quad k = 0, \dots, n,$$

има ненулево решение: $a_0, \dots, a_n$, т. е. съществува ненулев полином $a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$, който се анулира в $n+1$ точки: $x_0, \dots, x_n$. Стигаме до противоречие.

Нека сега предположим, че детерминантата е различна от нула при всеки избор на различните точки $(x_k)_0^n$ от A. Да допуснем, че функциите $(\varphi_k)_0^n$ не образуват система на Чебишов. Тогава има ненулев обобщен полином $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(x)$ и точки $x_0 < \cdots < x_n$ от A, за които $f(x_k) = 0, \;\; k = 0, \dots, n$, т. е. написаната по-горе система има ненулево решение. Тогава нейната детерминанта е равна на нула. Това противоречи на условието.

1.117. Направете трансформацията $x = \arccos t$.

1.118. Твърдението следва от зад. 1.107.

1.119. Прилагаме индукция по n. Използуваме факта, че ако

$$\alpha_0 < \cdots < \alpha_{n+1}$$

и функцията $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} a_k e^{\alpha_k x}$ има $n+2$ различни нули, то $g(x) := f(x)/e^{\alpha_0(x)}$ ще има също $n+2$ нули, а оттук по теоремата на Рол функцията $g'(x)$ ще има поне $n+1$ нули. Но

$$g'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k(\alpha_k - \alpha_0)e^{(\alpha_k - \alpha_0)x}$$

и съгласно индукционното предположение $g'(x)$ има най-много n нули.

1.120. Твърдението следва от предишната задача, като направим смяната $x = e^t$.

1.121. Допускаме противното. Тогава съществува функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k/(\alpha_k + x),$$

която има поне $n+1$ различни нули в $[a,b]$. Но като приведем към общ знаменател, заключаваме, че функцията

$$f(x) = g(x)/\omega(x), \quad \text{където} \quad \omega(x) = \prod_{k=0}^{n}(\alpha_k + x),$$

а оттук и функцията

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\omega_k(x), \quad \text{където} \quad \omega_k(x) = \omega(x)/(\alpha_k + x), \quad k = 0, \ldots, n,$$

има поне $n+1$ различни нули. Тъй като $g(x) \in \pi_n$, то $g(x) \equiv 0$. От линейната независимост на $\{\omega_k\}_0^n$ следва, че $a_0 = \cdots = a_n = 0$.

1.122. Съгласно зад. 1.116 функциите $\left\{[\varphi(x)]^k\right\}_0^n$ образуват система на Чебишов тогава и само тогава, когато детерминантата

$$D = \det\left\{[\varphi(x_i)]^k\right\}_{k,i=0}^n$$

е различна от нула при всеки избор на точките $a \le x_0 < \cdots < x_n \le b$. Но D е детерминанта на Вандермонд за точките $y_k = \varphi(x_k)$, $\quad k = 0, \ldots, n$. Остава да забележим, че $\varphi(x_k) \ne \varphi(x_i)$ при $k \ne i$ за всяка система от точки $x_0 < \cdots < x_n$ тогава и само тогава, когато $\varphi(x)$ е строго монотонна.

1.123. Допускаме противното и прилагаме теоремата на Рол.

1.124. Решението следва от факта, че функцията

$$f(x) = a_0\psi(x)\varphi_0(x) + \cdots + a_n\psi(x)\varphi_n(x)$$

има толкова нули, колкото и функцията $a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$.

1.125. Ясно е, че броят на нулите на линейната комбинация

$$a_0\varphi_0(\psi(x)) + \cdots + a_n\varphi_n(\psi(x))$$

в $[\alpha,\beta]$ е равен на броя на нулите на $a_0\varphi_0(t) + \cdots + a_n\varphi_n(t)$ в $[a,b]$.

1.126. Очевидно

$$e^{-(x_k-t)^2} = e^{-x_k^2}.e^{2x_kt}.e^{-t^2}.$$

Вече показахме в зад. 1.119, че функциите $\left\{e^{2x_kt}\right\}_{k=o}^n$ образуват система на Чебишов във всеки интервал $[a,b]$. Тъй като $e^{-t^2} > 0$ в интервала $(-\infty,\infty)$, то твърдението следва от зад. 1.124.

1.7. СПЛАЙН–ФУНКЦИИ

1.127. Всички твърдения следват непосредствено от дефиницията на сплайн-функция.

1.128. Допускаме, че съществуват числа $a_1, \ldots, a_n$, поне едно от които е различно от нула и такива, че

$$a_1 \mid x_1 - t \mid + \cdots + a_n \mid x_n - t \mid = 0 \ \text{ в } \ [a, b].$$

Но $a_k = (f'(x_k + 0) - f'(x_k - 0))/2 = 0$ за всяко $k = 1, \ldots, n$. Стигнахме до противоречие.

1.129. Допускаме противното. Тогава има интервал $[a, b]$ и числа $a_1, \ldots, a_n$, поне едно от които е различно от нула и такива, че

$$f(x) := a_1(x - x_1)^r + \cdots + a_n(x - x_n)^r = 0 \ \text{ в } \ [a, b].$$

Оттук следва, че $f^{(j)}(t) = 0$ за $j = 0, \ldots, r$, където t е някаква фиксирана точка от $[a, b]$. Означаваме $\xi_k := t - x_k, \quad k = 1, \ldots, n$. Разглеждаме системата от уравнения $f^{(j)}(t) = 0, \quad j = r - n + 1, \ldots, r$, която е еквивалентна със системата $a_1\xi_1^i + \cdots + a_n\xi_n^i = 0$ за $i = 0, \ldots, n - 1$. Детерминантата на тази хомогенна система е Вандермондова. Следователно тя допуска само нулевото решение $a_1 = \cdots = a_n = 0$. Стигнахме до противоречие.

1.130. Покажете, че $s^{(r)}(x)$ може да се представи като линейна комбинация на функциите $1, (x - x_1)_+^0, \ldots, (x - x_n)_+^0$, и след това интегрирайте този израз r пъти.

1.131. Отг. $c_k = \dfrac{1}{2}(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]), \quad k = 1, \ldots, n - 1,$

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{x_n - x_0} + f[x_0, x_1]\right),$$

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{x_n - x_0} - f[x_{n-1}, x_n]\right).$$

1.132. Нека $\rho := \operatorname{dist}(f, S_1(x_1, \ldots, x_{n-1})) = \ \| f - s \|$. Тогава за всяко x от (x_i, x_{i+1}) имаме

$$\begin{aligned}
|f(x) - I_1(f; x)| &\le |f(x) - s(x)| + |s(x) - I_1(f; x)| \\
&\le \rho + \max\{|s(x_i) - I_1(f; x_i)|, |s(x_{i+1}) - I_1(f; x_{i+1})|\} \\
&\le \rho + \max\{|s(x_i) - f(x_i)|, |s(x_{i+1}) - f(x_{i+1})|\} \le 2\rho.
\end{aligned}$$

1.133. Неравенството следва от факта, че за всяко $x \in (x_i, x_{i+1})$ имаме $|f(x) - I_1(f; x)| \le \max\{|f(x) - f(x_i)|, |f(x) - f(x_{i+1})|\} \le \omega(f; \Delta_n)$.

1.134. За всяко $x \in (x_i, x_{i+1})$

$$f(x) - I_1(f; x) = [f(x) - f(x_i)]\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} + [f(x) - f(x_{i+1})]\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

Следователно

$$|f(x) - I_1(f; x)| \le \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\omega(f; |x - x_i|) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\omega(f; |x_{i+1} - x|).$$

Сега използувайте неравенството

$$\alpha\omega(f; \delta_1) + (1 - \alpha)\omega(f; \delta_2) \le \omega(f; \alpha\delta_1 + (1 - \alpha)\delta_2).$$

1.135. Използувайте зад. 1.133 и неравенството $\omega(f; \delta) \le \| f' \| \delta$.

1.136. Съгласно формулата на Нютон

$$f(x) - I_1(f; x) = f[x_i, x_{i+1}, x](x - x_i)(x - x_{i+1}).$$

Тогава за $x \in (x_i, x_{i+1})$ имаме

$$\| f - I_1(f;\cdot) \| \leq \max_{\xi\in[x_i,x_{i+1}]} |f''(\xi)| \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)^2.$$

1.137. Нека $I_1(f;x)$ съвпада с линейната функция $l_1(x)$ в (x_{i-1}, x_i) и с $l(x)$ в (x_i, x_{i+1}). Тъй като $f(x)$ е изпъкнала функция, то $l(x) \leq f(x) \leq l_1(x)$ за всяко $x \in (x_i, x_{i+1})$. Следователно

$$\begin{aligned} |f(x) - l(x)| &\leq |l_1(x) - l(x)| \leq |l_1(x_{i+1}) - l(x_{i+1})| \\ &= |\{f(x_i) + f[x_{i-1}, x_i](x_{i+1}) - x_i)\} - \{f(x_i) + f[x_i, x_{i+1}](x_{i+1}) - x_i)\}| \\ &= |f[x_{i-1}, x_i] - f[x_i, x_{i+1}]|(x_{i+1}) - x_i) \leq \omega_2\left(f; \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

1.138. Тъй като $\omega(f;\delta) = f(\delta)$, то а) следва от зад. 1.133. За б) използувайте например точките $x_k = \left(\frac{k-1}{n-1}\right)^4$, $k = 2, \ldots, n$, и техните симетрични от $[-1, 0]$.

1.139. От дефиницията на разделена разлика следва, че

$$B(t) := B(x_0, \ldots, x_r; t) = \sum_{k=0}^{r} \frac{(x_k - t)_+^{r-1}}{\omega\prime(x_k)}.$$

Тъй като $(x_k - t)_+^{r-1} = 0$ при $t > x_k$, то очевидно $B(t) = 0$ за $t > x_r$. При $t < x_0$ имаме $(x_k - t)_+^{r-1} = (x_k - t)^{r-1}$ и горната сума е разделената разлика на полинома $(x - t)^{r-1}$ от степен $r - 1$ в $r + 1$ точки. Следователно тя е равна на нула.

За да докажете положителността на $B(t)$ в (x_0, x_r), покажете най-напред, че $B(t)$ не си сменя знака в (x_0, x_r). След това проверете, че $B(t) > 0$ за $t \in (x_{r-1}, x_r)$.

1.140. Използувайте връзката

$$1 = f[x_0, \ldots, x_r] = \frac{1}{(r-1)!}\int_{x_0}^{x_r} B(x_0, \ldots, x_r; t) f^{(r)}(t)dt$$

при $f(x) = x^r$.

1.141. Използувайте рекурентната връзка

$$(x_{i+r} - x_i)B_{i,r-1}(t) = (\cdot - t)_+^{r-1}[x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}] - (\cdot - t)_+^{r-1}[x_i, \ldots, x_{i+r-1}].$$

1.142. Равенството следва от съответната подобна връзка между разделените разлики.

1.143. Допускаме противното. Тогава съществува линейна комбинация

$$f(t) := a_0 B_0(t) + \cdots + a_N B_N((t)$$

с поне един ненулев коефициент a_i, която е тъждествено равна на нула в $(-\infty, \infty)$. Но при $t \in (x_0, x_1)$ имаме $f(t) = a_0 B_0(t) = 0$. Тъй като $B(t) > 0$ (вж. зад. 1.139), то $a_0 = 0$. Аналогично се показва след това, че $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ и т. н. Всички коефициенти a_k са нули. Стигнахме до противоречие.

1.144. Използувайте, че $B-$сплайните са сплайни с минимален носител. С други думи, ако $s(t)$ е сплайн от степен $r - 1$ с възли $t_1, \ldots, t_r$ и $s(t) = 0$ вън от интервала (t_1, t_r), то $s(t) \equiv 0$. Сега, ако допуснете, че линейната комбинация

$$f(t) = a_1 B_1(t) + \cdots + a_N B_N((t)$$
се анулира в $[a,b]$, то тя ще се анулира и в $[t_1, t_r]$ и $[t_{N+1}, t_{N+r}]$, а следователно и в $(-\infty, \infty)$. Тогава от зад. 1.143 ще следва, че всичките коефициенти на f са нули.

1.145. Ако линейната комбинация $f(t) = a_1 B_1(t) + \cdots + a_r B_r((t)$ се анулира в (x_r, x_{r+1}) , то f ще се анулира и в (x_1, x_r), (x_{r+1}, x_{2r}), защото те съдържат само по r възела (използуваме, че B-сплайните имат минимален носител).

1.146. Нека $\delta f(x)$ е операторът на централната разделена разлика със стъпка 1, т. е.
$$\delta f(x) := f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2}), \quad \delta^{k+1} f(x) := \delta^k \delta f(x), \quad k = 0, 1, \ldots$$
Покажете най-напред, че за $f(x) = e^{\mathrm{i}xt}$ имаме $\delta f(x) = \left(2\mathrm{i} \sin \frac{t}{2}\right) .e^{\mathrm{i}xt}$ и следователно
$$\delta^r f(x) = \left(2\mathrm{i} \sin \frac{t}{2}\right)^r .e^{\mathrm{i}xt}.$$
Тогава а) следва от връзката
$$\delta^r f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} M_r(x) f^{(r)}(x) dx,$$
вземайки предвид, че $f^{(r)}(x) = (\mathrm{i}t)^r e^{\mathrm{i}xt}$. б) се проверява директно.

1.147. Използувайте правилото на Стефенсън и представянето
$$B_{i,r-1}(t) = (f \cdot g)[x_i, \ldots, x_{i+r}],$$
където $f(t) := x - t, \qquad g(t) := (x-t)_+^{r-2}$.

1.148. Съгласно рекурентната връзка за разделените разлики
$$(x_{i+r} - x_i) \frac{d}{dt} B_{i,r-1}(t)$$
$$= \frac{d}{dt} (\cdot - t)_+^{r-1} [x_{i+1}, \ldots, x_{i+r}] - \frac{d}{dt} (\cdot - t)_+^{r-1} [x_i, \ldots, x_{i+r-1}].$$
Диференцираме и получаваме исканата връзка.

1.149. Имаме
$$\frac{d}{dt} \frac{B_{i,r-1}(t)}{(x_{i+r} - t)^{r-1}} = \frac{1}{(x_{i+r} - t)^r} \left((x_{i+r} - t) B'_{i,r-1}(t) + (r-1) B_{i,r-1}(t) \right).$$
Сега като заместим изразите за $B'_{i,r-1}(t)$ и $B_{i,r-1}(t)$ от зад. 1.147 и 1.148, получаваме търсената връзка.

1.150. Използувайте, че при $x \in (x_i, x_{i+1})$ е в сила връзката
$$f(x) - \varphi_f(x) = (x - x_i)^2 (x - x_{i+1})^2 f[x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1}, x].$$

1.151. От условието за h получаваме, че в крайната разлика участвуват само стойности на $s(x)$ от интервала $[x_{j-1}, x_{j+1}]$. Затова можем да смятаме, че $s(x) = p_j(x) + a_j (x - x_j)_+^k$, където $p_j \in \pi_k$ и $a_j \in R$. От свойството, че крайната разлика от ред $k + m > k$ се анулира за полиноми от степен k, имаме, че
$$\delta_h^{k+m} s(x_j) = \delta_h^{k+m} (p_j + a_j f_j)(x_j) = a_j \delta_h^{k+m} f_j(x_j),$$

където $f_j(x) = (x - x_j)_+^k$. Нека $g_j(x) = (x - x_j)_-^k = (-1)^k f_j(2x_j - x)$. Тогава от свойството на симетричната крайна разлика и от четността на m следва

$$\delta_h^{k+m} f_j(x_j) = (-1)^k \delta_{-h}^{k+m} f_j(x_j) = \delta_h^{k+m} g_j(x_j).$$

Накрая от $f_j(x) + g_j(x) = x^k$ получаваме

$$\delta_h^{k+m} f_j(x_j) = \frac{1}{2}\,\delta_h^{k+m} f_j(x_j) + \frac{1}{2}\,\delta_h^{k+m} g_j(x_j) = \frac{1}{2}\,\delta_h^{k+m} (f_j + g_j)(x_j) = 0.$$

Глава 2

КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ

2.1. ПРИБЛИЖЕНО ПРЕСМЯТАНЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ ЧРЕЗ РАЗВИВАНЕ НА ПОДИНТЕГРАЛНАТА ФУНКЦИЯ В РЕД

Този метод има ограничено приложение, тъй като изисква подинтегралната функция да може да се развие в степенен ред, равномерно сходящ в интеграционния интервал. Друг недостатък е, че методът е индивидуален за всяка функция.

Задача 2.1. Като използувате развитие в ред на подинтегралната функция, пресметнете приближено

$$I = \int_0^{0,5} \frac{\mathrm{tg} x}{x}\, dx\,.$$

Задача 2.2. Определете колко члена от развитието на подинтегралната функция в ред на Маклорен трябва да се вземат, за да бъде пресметнат всеки от следващите интеграли с грешка $\varepsilon \le 10^{-5}$. Намерете съответните приближени стойности.

а) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\, dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$; в) $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$; г) $\displaystyle\int_0^1 \exp\left(-x^2\right) dx$.

2.2. ИНТЕРПОЛАЦИОННИ КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ

Дефиниция 2.1. *Квадратурна формула се нарича линеен функционал* $Q(f)$ *от вида*

$$Q(f) := \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k), \quad a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b,$$

който служи за приближено пресмятане на $\int_a^b f(x)\, dx$, *т. е.*

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx Q(f).$$

По-общо квадратурната формула може да съдържа и производни на подинтегралната функция:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\nu_k - 1} a_{kj} f^{(j)}(x_k).$$

Най-често за построяване на квадратурни формули се използува интерполация, т. е. $Q(f) = \int_a^b L_{n-1}(f;x)\,dx$ или $Q(f) = \int_a^b H(f;x)\,dx$, където $L_{n-1}(f;x)$ и $H(f;x)$ са съответно интерполационни полиноми на Лагранж и Ермит. Квадратурните формули, получени по такъв начин, наричаме *интерполационни.*

Дефиниция 2.2. *Алгебрична степен на точност на една квадратурна формула наричаме най-голямото цяло неотрицателно n, за което*

$$\int_a^b f(x)\,dx = Q(f)$$

винаги, когато подинтегралната функция f е алгебричен полином от степен, ненадминаваща n.

Задача 2.3. Намерете:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}\right\}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+4}\cdots+\dfrac{1}{2n^2}\right\}$.

Задача 2.4. Покажете, че:

а) квадратурната формула на правоъгълниците

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f(\xi) =: Q_{\text{пр}}(f),\ \ a\le\xi\le b,$$

има алгебрична степен на точност 1 при $\xi=(a+b)/2$ и 0 в противен случай;

б) квадратурната формула на трапеците

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] =: Q_{\text{тр}}(f)$$

има алгебрична степен на точност 1;

в) квадратурната формула на Симпсон

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] =: Q_{\text{С}}(f)$$

има алгебрична степен на точност 3.

Задача 2.5. Покажете, че

$$Q_C(f) = \frac{1}{3}\cdot Q_{\text{тр}}(f) + \frac{2}{3}\cdot Q_{\text{пр}}(f)\ \ (\xi=(a+b)/2).$$

Задача 2.6. Да се построи квадратурна формула от вида

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx \approx h[Af(0)+Bf(h)+Cf(2h)]$$

с възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.7. Определете a, b и c така, че квадратурната формула

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx c[f(ah)+f(bh)]$$

да има възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.8. Да се определят a, b, c, d и A така, че квадратурната формула

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \approx A[f(a)+f(b)+f(c)+f(d)]$$

да има възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.9. Да се определят A, B, C, D и E така, че квадратурната формула

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx \approx h[Af(0) + Bf(h) + Cf(2h)] + h^2[Df'(0) + Ef'(2h)]$$

да има възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.10. Определете A и B така, че квадратурната формула

$$\int_0^h \frac{f(x)}{1+x^2}\,dx \approx Af(0) + Bf(h)$$

да има възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.11. Да се определят коефициентите $a_i,\ b_i,\ \ i = 1, 2, 3$, така, че квадратурната формула

$$\begin{aligned}\int_{-h}^h f(x)\,dx \quad &\approx \quad h[a_1 f(-h) + a_2 f(0) + a_3 f(h)] \\ &+ \quad h^2[b_1 f'(-h) + b_2 f'(0) + b_3 f'(h)]\end{aligned}$$

да има възможно най-висока алгебрична степен на точност.

Задача 2.12. Да се докаже, че квадратурната формула

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] - \frac{h^3}{24}[f^{''}(0) + f^{''}(h)]$$

е точна за всички полиноми от степен, ненадминаваща 3.

Задача 2.13. Като се използува методът на неопределените коефициенти, да се построи формулата

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[f(0) + f(h)] + \frac{h^2}{10}[f'(0) - f'(h)] + \frac{h^3}{120}[f''(0) + f''(h)].$$

Да се докаже, че тя има алгебрична степен на точност 5.

Задача 2.14. Покажете, че квадратурната формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{3}{8}\cdot f(1/6) + \frac{27}{56}\cdot f(11/18) + \frac{1}{7}\cdot f(1)$$

има алгебрична степен на точност 2.

2.3. СЪСТАВНИ КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ. ОЦЕНКА НА ГРЕШКАТА

За повишаване точността на пресмятанията вместо елементарни интерполационни квадратурни формули се прилагат съставни такива, които се получават чрез разделяне на интеграционния интервал на равни части, прилагане на елементарната квадратура за всеки подинтервал и сумиране на резултатите.

За оценка на грешката на квадратурните формули често се прилага следната теорема на Пеано:

Теорема 2.1. *Нека R е произволен линеен функционал, дефиниран върху пространството*

$$W_1^r[a,b] := \left\{ f \in C^{r-1}[a,b] : \ f^{(r-1)} \ \text{абс. непр. в } (a,b), \ \int_a^b |f^{(r)}(x)|\,dx < \infty \right\},$$

който се анулира върху множеството π_{r-1} от всички алгебрични полиноми от степен, ненадминаваща $r-1$. Тогава за функционала R е валидно представянето

$$R(f) = \int_a^b K_r(R;t) f^{(r)}(t)\,dt, \qquad \text{където} \qquad K_r(R;t) = R\left(\frac{(\cdot - t)_+^{r-1}}{(r-1)!} \right)$$

(тук u_+ е отсечената степенна функция, $u_+ = \max\{u,0\}$).

Ние прилагаме тази теорема за $R(f) = \int_a^b f(x)\,dx - Q(f)$. В този случай функцията $K_r(R;t)$ се нарича $r-$то ядро на Пеано за квадратурната формула Q (ще го бележим по-нататък с $K_r(Q;t)$). Нека за $1 \le p < \infty$ означим с $W_p^r[a,b]$ множеството

$$\left\{ f \in C^{r-1}[a,b] : \ f^{(r-1)} \ \text{абс. непр. в } (a,b), \ \left(\int_a^b |f^{(r)}(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \le M \right\},$$

а с $W_\infty^r[a,b]$ — множеството

$$\left\{ f \in C^{r-1}[a,b], \ f^{(r-1)} \ \text{абс. непр. в } (a,b), \ \operatorname{supvrai}_{x\in(a,b)} |f^{(r)}(x)| \le M \right\}.$$

Следствие 2.1. *Нека квадратурната формула Q има алгебрична степен на точност, не по-малка от $m-1$ $(m-1 \ge 0)$. Тогава за нейната грешка в пространствата $W_p^r[a,b]$, $r \le m$, са валидни формулите:*

а) при $1 < p \le \infty$

$$\sup_{f\in W_p^r[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q(f) \right| = M \left(\int_a^b |K_r(Q;t)|^q dt \right)^{1/q}, \ q = \frac{p}{p-1};$$

б) $$\sup_{f\in W_1^r[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q(f) \right| = M \max_{t\in[a,b]} |K_r(Q;t)|.$$

Следствие 2.2. *Нека квадратурната формула Q има алгебрична степен на точност, не по-малка от $m-1$ $(m-1 \ge 0)$. Нека $f \in C^m[a,b]$ и нека $K_m(Q;t)$ не сменя знака си в (a,b). Тогава съществува точка $\xi \in (a,b)$, такава че*

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q(f) = f^{(m)}(\xi) \int_a^b K_m(Q;t)dt.$$

Задача 2.15. Нека $Q(f)$ е квадратурна формула за пресмятане на $\int_0^1 f(x)\,dx$. Докажете, че n-тата съставна квадратурна формула, основаваща се на Q, може да се получи като $Q(\varphi_n)$, където

$$\varphi_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+x}{n} \right).$$

Задача 2.16. Покажете, че за $t \in [a,b]$ ядрата на Пеано за квадратурната формула $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k)$ с алгебрична степен на точност $m-1$ имат представянията:

а) $K_r(Q;t) = \dfrac{(b-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n a_k \dfrac{(x_k-t)_+^{r-1}}{(r-1)!}$;

б) $K_r(Q;t) = (-1)^r \left[\dfrac{(t-a)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n a_k \dfrac{(t-x_k)_+^{r-1}}{(r-1)!} \right]$

за $r = 1, 2, \ldots, m$.

Задача 2.17. Покажете, че в квадратурната формула

$$Q(f) = \sum_{j=1}^n a_j f(x_j)$$

коефициентите a_j се изразяват чрез ядрото ѝ на Пеано посредством формулите

$$a_j = (-1)^r [K_r^{(r-1)}(Q; x_j + 0) - K_r^{(r-1)}(Q; x_j - 0)], \quad j = 1, \ldots, n.$$

Задача 2.18. Покажете, че $\dfrac{d}{dt} K_r(Q;t) = -K_{r-1}(Q;t)$.

Задача 2.19. Покажете, че за грешката на съставната формула на трапеците

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right] := Q^n{}_{\text{тр}}(f)$$

е изпълнено

$$|I(f) - Q^n{}_{\text{тр}}(f)| \le (b-a)\omega\left(f; \frac{b-a}{n}\right),$$

където $\omega(f;t) := \sup\{|f(t') - f(t'')|,\ t', t'' \in [a,b],\ |t' - t''| \le t\}$, т. е. $\omega(f;t)$ е модулът на непрекъснатост на функцията f.

Задача 2.20. Нека $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) =: Q(f)$ е симетрична квадратурна формула, т. е.

$$x_k - a = b - x_{n+1-k},\ a_k = a_{n+1-k},\ k = 1, \ldots, [(n+1)/2].$$

Докажете, че за всяко $t \in [a,b]$ е изпълнено

$$K_r(Q; a+b-t) = (-1)^r K_r(Q;t).$$

Задача 2.21. Докажете, че ако $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) =: Q(f)$ е симетрична квадратурна формула, то

$$\int_a^b |K_r(Q;x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q;x)|\,dx.$$

Задача 2.22. Нека $\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) =: Q(f)$ и нека S_n е n-тата съставна квадратурна формула, получена на базата на Q. Покажете, че

$$K_r(S_n;t) = \frac{1}{n^r} K_r(Q; nt - j) \quad \text{за } t \in \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right),\ j = 0, \ldots, n-1.$$

Задача 2.23. Нека $Q(f)$ е квадратурна формула с алгебрична степен на точност $m-1$ $(m-1 \geq 0)$ за пресмятане на $\int_a^b f(x)\,dx$. Ако за грешката на тази квадратурна формула в W_∞^r $(1 \leq r \leq m)$ е изпълнено неравенството

$$\sup_{f \in W_\infty^r[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q(f) \right| \leq A,$$

то за $n-$тата съставна квадратурна формула S_n, получена от Q, е в сила оценката

$$\sup_{f \in W_\infty^r[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - S_n(f) \right| \leq \frac{A}{n^r}.$$

Задача 2.24. Нека квадратурната формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(x_k) := Q(f)$$

има алгебрична степен на точност $m-1 \geq 1$. Ако ядрото ѝ на Пеано $K_r(Q;t)$ $(1 \leq r \leq m)$ има нула $\tau \in (0,1)$, докажете, че разглежданата квадратурна формула е точна за функцията $f(x) = (x-\tau)_+^{r-1}$. По-общо, ако $\tau \in [0,1]$ е $s-$кратна нула за $K_r(Q;t)$ $(1 \leq s \leq r-1)$, квадратурната формула ще бъде точна за функциите

$$(x-\tau)_+^{r-1},\ (x-\tau)_+^{r-2}, \ldots, (x-\tau)_+^{r-s}.$$

Задача 2.25. Да се намерят грешките на квадратурните формули на правоъгълниците, трапеците и Симпсон (вж. зад. 2.4) за пространството $W_\infty^1[a,b]$. Какви са оценките за грешките на съответните съставни квадратурни формули?

Задача 2.26. Да се намерят оценки за грешките на квадратурните формули на правоъгълниците, трапеците и Симпсон за пространството $W_\infty^2[a,b]$. Какви са оценките за грешките на съответните съставни квадратурни формули ?

Задача 2.27. Нека $f \in C^2[a,b]$. Докажете, че съществуват точки ξ_1 и ξ_2 от интервала $[a,b]$, такива че

$$\int_a^b f(x)\,dx - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f''(\xi_1)}{24}(b-a)^3;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = -\frac{f''(\xi_2)}{12}(b-a)^3.$$

Задача 2.28. Докажете, че ако функцията f е изпъкнала в интервала $[a,b]$, то

$$Q_{\text{пр}}(f) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq Q_{\text{тр}}(f).$$

Задача 2.29. Докажете, че за грешката на формулата на Симпсон в класа $W_\infty^3[a,b]$ е изпълнено

$$\sup_{f \in W_\infty^3[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{С}}(f) \right| = M \frac{(b-a)^4}{576}.$$

Задача 2.30. Да се оцени грешката на елементарната и съставната формула на Симпсон в класа $W_\infty^4[a,b]$.

Задача 2.31. Нека $f \in C^4[a,b]$. Докажете, че съществува точка ξ_3 от интервала $[a,b]$, такава че

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] = -\frac{f^{(4)}(\xi_3)}{2880}(b-a)^5.$$

Задача 2.32. Нека $f \in C^3[0,1]$ и $0 < m \le |f'''(x)| \le M$ за $x \in [0,1]$. Ако съгласно зад. 2.27 $\xi_1,\ \xi_2 \in [0,1]$ са такива точки, че

$$\int_0^1 f(x)\,dx - f(1/2) = \frac{f''(\xi_1)}{24}, \qquad \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = -\frac{f''(\xi_2)}{12},$$

то за точките $\xi_1,\ \xi_2$ е изпълнено $|\xi_1 - \xi_2| \le \min\left\{\dfrac{M}{16m}, 1\right\}$.

Задача 2.33. Като използувате зад. 2.27, докажете твърдението: ако $f \in C^2[0,1]$, то съществуват точки η_1 и η_2 от $[0,1]$, такива че:

а) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - 2f(1/2) + \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{f''(\eta_1)}{6}$;

б) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{4}{3}f(1/2) + \frac{1}{6}[f(0) + f(1)] = \frac{f''(\eta_2)}{12}$.

Задача 2.34. Ако $f \in C^2[0,1]$, докажете, че съществува точка ξ от интервала $[0,1]$, такава че

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(1/4) + f(3/4)] = \frac{f''(\xi)}{96}.$$

Задача 2.35. Ако $f \in C^2[0,1]$, докажете, че съществува точка ξ от интервала $[0,1]$, такава че

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(1/3) + f(2/3)] = \frac{f''(\xi)}{36}.$$

Задача 2.36. Решете зад. 2.26, но за пространството $W_2^2[a,b]$.

Задача 2.37. Нека $f \in C^4[a,b]$. Да се докаже равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3}{8}h[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3}{80}f^{(4)}(\xi)h^5,$$

където $a < \xi < b$, $x_k = a + kh$, $k = 0,1,2,3$ и $h = (b-a)/3$.

Задача 2.38. Нека $f \in C^4[a,b]$. Докажете равенството

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{4}{3}h[2f(x_1) - f(x_2) + 2f(x_3)] + \frac{14}{45}f^{(4)}(\xi)h^5,$$

където $a < \xi < b$, $x_k = a + kh$, $k = 1,2,3$ и $h = (b-a)/4$.

Задача 2.39. Нека $f(x)$ има интегруема първа производна, ненадминаваща по абсолютна стойност 1 в $[0,1]$. Да се определи за какъв брой възли съставната формула на правоъгълниците (трапеците, Симпсон) пресмята $\int_0^1 f(x)\,dx$ с точност 0,001.

Задача 2.40. Определете броя на подинтервалите за прилагане на съставната квадратурна формула на правоъгълниците (трапеците, Симпсон), осигуряващ пресмятането с точност $0,00001$ на:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$; б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Задача 2.41. Да се определи броят $N = 2m$ на подинтервалите за прилагане на съставната квадратурна формула на Симпсон така, че да се осигури точност 10^{-3} при пресмятане на интеграла $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Задача 2.42. Да се получи формулата за числено интегриране

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f\left(\cos \frac{k\pi}{n}\right).$$

Да се даде оценка за грешката.

Задача 2.43. Да се получи формулата за числено интегриране

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\, f(x)\, dx \approx \frac{\pi}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f\left(\cos^2 \frac{k\pi}{2n}\right).$$

2.4. КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ ОТ ГАУСОВ ТИП

Квадратурни формули, при които свободните възли са избрани по такъв начин, че да осигуряват максимална алгебрична степен на точност, се наричат квадратурни формули от Гаусов тип. Характеризация на такива квадратурни формули дава следната теорема:

Теорема 2.2. *Квадратурната формула*

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k), \quad a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \le b$$

има алгебрична степен на точност $n-1+k$ *тогава и само тогава, когато са изпълнени едновременно условията:*

1. *формулата е интерполационна;*

2. $\int_a^b \sigma(x)\omega(x)p(x)\, dx = 0$ *за всеки полином* p *от степен, ненадминаваща* k, *където* $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$.

В частност, ако $x_{1,n}^* < x_{2,n}^* < \ldots < x_{n,n}^*$ са нулите на $n-$тия ортогонален в $[a,b]$ полином по отношение на теглото $\sigma(x)$, получаваме квадратурната формула на Гаус

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^G f(x_{k,n}^*)$$

с алгебрична степен на точност $2n-1$.

Квадратурната формула с алгебрична степен на точност $2n+1$ от вида

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^L f(x_{k,n}) + b_n^L f(a) + c_n^L f(b) =: Q_n^L(f)$$

се нарича *квадратурна формула на Лобато*, а квадратурните формули с алгебрична степен на точност $2n$ от вида

$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^R f(x_{k,n}) + b_n^R f(a) =: Q_n^R(f),$$

$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_{k,n}^R f(\tilde{x}_{k,n}) + c_n^R f(b) =: \tilde{Q}_n^R(f)$$

се наричат *квадратурни формули на Радо*. Съгласно горната теорема възлите на квадратурната формула на Лобато са нулите на $n-$тия ортогонален в $[a,b]$ полином по отношение на теглото $\sigma(x)(b-x)(x-a)$, а възлите на квадратурните формули на Радо са нулите на ортогоналните в $[a,b]$ полиноми от степен n по отношение съответно на теглата $\sigma(x)(x-a)$ и $\sigma(x)(b-x)$. Тъй като тези ортогонални полиноми са единствени за всяко фиксирано (нетривиално) тегло, следва, че единствени са и квадратурните формули на Гаус, Лобато и Радо.

Задача 2.44. Нека $\sigma(x)$ е теглова функция в интервала $[a,b]$, като $\int_a^b \sigma(x)\,dx > 0$. Докажете, че няма квадратурна формула с n възела за пресмятане на $\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx$ с алгебрична степен на точност, по-голяма от $2n-1$.

Задача 2.45. Докажете, че (при същото условие за σ) няма квадратурна формула дори от вида

$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \left[a_k f(x_k) + b_k f'(x_k)\right],$$

която да има по-висока алгебрична степен на точност от формулата на Гаус с n възела.

Задача 2.46. За квадратурните формули на Лобато и Радо докажете твърдения, аналогични на тези от зад. 2.44 и 2.45 .

Задача 2.47. Докажете, че ако $f \in C^{2n}[a,b]$, за грешката на квадратурната формула на Гаус с n възела е изпълнено

$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^G f(x_{k,n}^*)$$
$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \sigma(x)(x-x_{1,n}^*)^2 \dots (x-x_{n,n}^*)^2\,dx$$

за някое $\xi \in [a,b]$ и следователно

$$\left|\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx - Q_n^G(f)\right| \le \frac{M}{(2n)!}\int_a^b \sigma(x)\omega^2(x)\,dx,$$

където $M := \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)|$ и $\omega(x) = x^n + \dots$ е $n-$тият ортогонален полином в $[a,b]$ при тегло $\sigma(x)$.

Задача 2.48. Докажете, че ако $f \in C^{2n+2}[a,b]$, за грешката на квадратурната формула на Лобато е изпълнено

$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx - \left[\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^L f(x_{k,n}) + b_n^L f(a) + c_n^L f(b)\right]$$

$$= -\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \sigma(x)(x-a)(b-x)\omega^2(x)\, dx,$$

където $\xi \in [a,b]$ и $\omega(x) = x^n + \ldots$ е ортогоналният полином при тегло $\sigma(x)(x-a)(b-x)$. Като следствие, ако $M := \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n+2)}(x)|$, имаме оценката

$$\left| \int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx - Q_n^L(f) \right| \le \frac{M}{(2n+2)!} \int_a^b \sigma(x)(x-a)(b-x)\omega^2(x)\, dx.$$

Задача 2.49. Докажете, че ако $f \in C^{2n+1}[a,b]$, за грешката на квадратурните формули на Радо са изпълнени неравенствата

$$\left| \int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx - Q_n^R(f) \right| \le \frac{M}{(2n+1)!} \int_a^b \sigma(x)(x-a)\omega^2(x)\, dx$$

и

$$\left| \int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx - \tilde{Q}_n^R(f) \right| \le \frac{M}{(2n+1)!} \int_a^b \sigma(x)(b-x)\tilde{\omega}^2(x)\, dx,$$

където $M := \max_{x\in[a,b]} |f^{(2n+1)}(x)|$ и ω, $\tilde{\omega}$ са полиномите от степен n със старши коефициент 1, ортогонални в $[a,b]$ по отношение съответно на теглата $\sigma(x)(x-a)$ и $\sigma(x)(b-x)$.

Задача 2.50. Докажете, че в квадратурните формули на Гаус, Лобато и Радо всички коефициенти са положителни.

Нека $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ е редицата от ортонормирани полиноми в интервала $[a,b]$, относно тегловата функция $\sigma(x)$, $p_n(x) = k_n x^n + \ldots$, т. е.

$$\int_a^b \sigma(x) p_n(x) p_m(x)\, dx = \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots,$$

където $\delta_{n,m}$ е символът на Кронекер.

Задача 2.51. Докажете, че редицата $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ от ортонормирани полиноми удовлетворява тъждеството

$$p_0(x)p_0(y) + p_1(x)p_1(y) + \ldots + p_n(x)p_n(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}$$

(тъждество на Кристофел — Дарбу).

Задача 2.52. Като използувате тъждеството на Кристофел — Дарбу, докажете, че за коефициентите $a_{k,n}^G$ на Гаусовата квадратурна формула

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^G f(x_{k,n})$$

са валидни представянията

а) $a_{k,n}^G = \dfrac{k_{n+1}}{k_n} \dfrac{-1}{p_{n+1}(x_{k,n}) p_n'(x_{k,n})}$; б) $a_{k,n}^G = \dfrac{k_n}{k_{n-1}} \dfrac{1}{p_{n-1}(x_{k,n}) p_n'(x_{k,n})}$.

Задача 2.53. Докажете, че коефициентите на Гаусовата квадратурна формула могат да се пресметнат по формулата

$$a_{k,n}^G = \int_a^b \sigma(x) \left(\frac{p_n(x)}{p_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} \right)^2 dx.$$

Задача 2.54. Като използувате зад. 2.52, докажете, че квадратурната формула
$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k), \quad x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \ k=1,\ldots,n,$$
е точна за полиномите от степен, ненадминаваща $2n-1$, т. е. тя е Гаусова квадратурна формула (и същевременно квадратурна формула от Чебишов тип).

Задача 2.55. Ако $f \in C^{2n}[-1,1]$ е такава, че
$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)| \le M,$$
докажете, че за грешката на Гаусовата квадратурна формула от зад. 2.54 е изпълнено
$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\right| \le M\frac{\pi}{(2n)!2^{2n-1}}.$$

Задача 2.56. Като използувате зад. 2.52, докажете, че квадратурната формула
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}f(x)\,dx \approx \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{n+1}f(x_k), \ x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \ k=1,\ldots,n,$$
е Гаусова.

Задача 2.57. Ако $f \in C^{2n}[-1,1]$ е такава, че
$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)| \le M,$$
докажете, че за грешката на Гаусовата квадратурна формула от зад. 2.56 е изпълнено
$$\left|\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}f(x)\,dx - \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{k\pi}{n+1}f(x_k)\right| \le M\frac{\pi}{(2n)!2^{2n+1}}.$$

Задача 2.58. Докажете, че за коефициентите на квадратурната формула на Гаус
$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k-1}^{n} a_{k,n}^G f(x_{k,n})$$
е валидно представянето
$$a_{k,n}^G = \frac{2}{(1-x_{k,n}^2)[P_n'(x_{k,n})]^2},$$
където P_n е $n-$тият полином на Льожандър
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{2.1}$$

Задача 2.59. Докажете, че за коефициентите на квадратурната формула на Гаус с n възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ са изпълнени неравенствата
$$(0<)\ a_{k,n}^G < x_{k+1,n} - x_{k-1,n}, \quad k=1,2,\ldots,n,$$
където $x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{n,n}$ са нулите на $n-$тия полином на Льожандър и $x_{0,n} := -1, \quad x_{n+1,n} = 1$.

Задача 2.60. Нека, както в зад. 2.59, $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ са нулите на $n-$тия полином на Льожандър, наредени в нарастващ ред. Нека P е алгебричен полином от степен, ненадминаваща $2n$, за който $P(-1) = P(1)$. Докажете, че съществува точка $\xi \in (x_{1,n}, x_{n,n})$, такава че $P'(\xi) = 0$ (Л. Чакалов).

Задача 2.61. Нека $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ са нулите на полинома на Льожандър. Означаваме с $\mathcal{P}$ класа

$$\left\{P(x): \quad P(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n},\ P(x) \geq 0 \text{ при } x \in [-1,1]\right\}.$$

Да се докаже, че

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} \int_{-1}^{1} P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \omega^2(x)\,dx,$$

където $\omega(x) = (x - x_{1,n}) \dots (x - x_{n,n})$.

Задача 2.62. Нека

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = \int_a^b \omega(x)\omega_k(x)\,dx, \quad k = 1, \dots, n,$$

където $\omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$, $\omega_k(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{k-1})$, $\omega_0(x) := 1$. Да се докаже, че ако $\varphi_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ за $i = 1, \dots, n$, то

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = (-1)^{n-k-1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Задача 2.63. Намерете най-малкия затворен интервал $[a, b]$, съдържащ се в $[-1, 1]$ и притежаващ свойството: за всеки алгебричен полином P от степен, ненадминаваща $2n$, който е монотонно растящ в $[a, b]$, е изпълнено $P(1) \geq P(-1)$.

Задача 2.64. Докажете, че коефициентите на квадратурната формула на Лобато с $n{+}2$ възела за интервала $[-1, 1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ удовлетворяват неравенствата

$$(0 <)\ a_{k,n}^L < x_{k+1,n} - x_{k-1,n}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

където $x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n}$ са нулите на $n-$тия ортогонален полином в $[-1, 1]$ при тегло $\sigma(x) = 1 - x^2$ и $x_{0,n} := -1$, $x_{n+1,n} = 1$.

Задача 2.65. Да се докаже, че аналогични неравенства на тези от зад. 2.59 и 2.64 са валидни за коефициентите на квадратурната формула на Радо с $n + 1$ възела за интервала $[-1, 1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$.

Задача 2.66. Нека $K_2(Q_n^G; x)$, $K_2(Q_n^L; x)$ и $K_2(Q_n^R; x)$ са вторите ядра на Пеано за квадратурните формули съответно на Гаус, Лобато и Радо, използващи n вътрешни възела (за интервала (a, b)). Докажете, че:

а) $K_2(Q_n^G; x)$ има точно $2n - 2$ прости нули в (a, b) ;

б) $K_2(Q_n^R; x)$ има точно $2n - 1$ прости нули в (a, b) ;

в) $K_2(Q_n^L; x)$ има точно $2n$ прости нули в (a, b).

Задача 2.67. Докажете, че възлите и коефициентите на квадратурната формула на Гаус с n възела за интервала $[-1, 1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ удовлетворяват неравенствата

$$1 + x_{j,n} < \sum_{k=1}^{j} a_{k,n}^G < 1 + x_{j+1,n}, \quad j = 1, \dots, n, \tag{2.2}$$

където $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ са наредените нули на $n-$тия полином на Льожандър.

Задача 2.68. Решете зад. 2.59, използувайки неравенствата (2.2).

Задача 2.69. Ако $f \in C^{2n}[-1,1]$ е такава, че

$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(2n)}(x)| \le M,$$

докажете, че за грешката на Гаусовата квадратурна формула с n възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ е изпълнено

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} f(x_{k,n}) \right| \le M \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)!}.$$

Задача 2.70. Да се запише формулата на Гаус за произволен интервал $[a,b]$ при тегло $\sigma(x) \equiv 1$. Каква е оценката за грешката?

Задача 2.71. Ако $f \in C^{2n+2}[-1,1]$ е такава, че

$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(2n+2)}(x)| \le M,$$

докажете, че грешката на квадратурната формула на Лобато с $n+2$ възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ удовлетворява неравенството

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \left[\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{L} f(x_{k,n}) + b_n^L f(-1) + c_n^L f(1) \right] \right|$$

$$\le M \frac{2^{2n+3} n! [(n+1)!]^2 (n+2)!}{[(2n+2)!]^2(2n+3)!}.$$

Задача 2.72. Ако $f \in C^{2n+1}[-1,1]$ е такава, че

$$\max_{x\in[a,b]} |f^{(2n+1)}(x)| \le M,$$

докажете, че за грешката на квадратурната формула на Радо с $n+1$ възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ е изпълнено

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \left[\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{R} f(x_{k,n}) + b_n^R f(-1) \right] \right| \le M \frac{2^{2n+2}[n!]^2[(n+1)!]^2}{[(2n+1)!]^2(2n+2)!}.$$

Същата оценка на грешката е валидна и за квадратурната формула на Радо, използуваща като възел 1 вместо -1.

Задача 2.73. Докажете, че в квадратурната формула на Радо с $n+1$ възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ коефициентът пред $f(-1)$ е

$$b_n^R = \frac{2}{(n+1)^2}.$$

Задача 2.74. Докажете, че в квадратурната формула на Лобато с $n+2$ възела за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ коефициентите пред $f(-1)$ и $f(1)$ са

$$b_n^L = c_n^L = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Задача 2.75. Докажете, че коефициентите $\{a_{k,n}^L\}_{k=1}^n$ и вътрешните възли $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ на квадратурната формула на Лобато за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ удовлетворяват неравенствата

$$x_{k,n} + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \le \sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^L \le x_{k+1,n} + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}. \tag{2.3}$$

Задача 2.76. Докажете, че коефициентите $\{a_{k,n}^R\}_{k=1}^n$ и вътрешните възли $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ на квадратурната формула на Радо за интервала $[-1,1]$ и тегло $\sigma(x) \equiv 1$ удовлетворяват неравенствата

$$x_{k,n} + \frac{n^2+2n-1}{(n+1)^2} \leq \sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^R \leq x_{k+1,n} + \frac{n^2+2n-1}{(n+1)^2}. \tag{2.4}$$

Задача 2.77. Решете зад. 2.64 и 2.65, като използувате неравенствата (2.3) и (2.4).

Задача 2.78. Да се построи квадратурната формула на Гаус за интервала $[-1,1]$ при тегло $\sigma(x) \equiv 1$ за $n = 2, 3$. Дайте оценки за грешката.

Задача 2.79. Да се построи квадратурната формула на Гаус с 2 възела за интервала $[-1,1]$ при тегло $\sigma(x) = 1 - |x|$. Дайте оценка за грешката.

Задача 2.80. Да се построи квадратурната формула на Лобато за интервала $[-1,1]$ при тегло $\sigma(x) = \sqrt{1-x^2}$ за $n = 2$. Дайте оценка за грешката.

Задача 2.81. Покажете, че формулата

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f(2/3)$$

е квадратурната формула на Радо за $n = 1$, интервала $[0,1]$ и теглото $\sigma \equiv 1$. Докажете, че ако $f \in C^3[0,1]$, съществува $\xi \in [0,1]$, такова че

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \left[\frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f(2/3)\right] = \frac{f'''(\xi)}{216}.$$

Задача 2.82. Изведете квадратурната формула на Радо за $n = 2$, интервала $[-1,1]$ и теглото $\sigma \equiv 1$. Дайте оценка за грешката.

Задача 2.83. Покажете, че квадратурната формула на Симпсон е формулата на Лобато с един вътрешен възел за тегло $\sigma \equiv 1$.

Задача 2.84. Да се намери квадратурната формула на Лобато за $n = 2$, интервала $[-1,1]$ и теглото $\sigma \equiv 1$. Дайте оценка за грешката.

Задача 2.85. Да се докаже, че формулата

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx \approx \frac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) + \frac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2})$$

е точна за всички полиноми от степен ≤ 3, т. е. е Гаусова квадратурна формула.

Задача 2.86. Докажете, че формулата

$$I(f) := \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x)\,dx \approx \frac{\sqrt{\pi}}{6}\left[f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + 4f(0) + f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right] := Q(f)$$

е Гаусова квадратурна формула, т. е. е точна за всички полиноми от степен ≤ 5.

По–нататък с $f|_A$ ще означаваме рестрикцията на функцията f върху множеството A, съдържащо се в дефиниционната област на f.

Задача 2.87. Нека $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n-1} = 1$ и нека

$$X := \{f \in C[0,1],\ f|_{(x_i,x_{i+1})} \in \pi_1,\ i = 0,1,\ldots,2n-2\}.$$

(Лесно се вижда, че X е линейно пространство с размерност $2n$.) Докажете, че Гаусовата квадратурна формула за пространството X е

$$I(f) := \int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k f(\tau_k) =: Q_n^G(f),$$

където

$$a_1^G = \frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2},\quad \tau_1 = \frac{x_1x_2 - x_0^2}{x_1 + x_2 - 2x_0},$$

$$a_k^G = \frac{x_{2k-1} + x_{2k} - x_{2k-3} - x_{2k-2}}{2},\quad \tau_k = \frac{x_{2k-1}x_{2k} - x_{2k-3}x_{2k-2}}{x_{2k-1} + x_{2k} - x_{2k-3} - x_{2k-2}},$$

$$k = 2,3,\ldots,n-1,$$

$$a_n^G = \frac{2x_{2n-1} - x_{2n-2} - x_{2n-3}}{2},\quad \tau_n = \frac{x_{2n-1}^2 - x_{2n-3}x_{2n-2}}{2x_{2n-1} - x_{2n-2} - x_{2n-3}}.$$

Задача 2.88. Нека $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} = 1$ и нека Y е линейното пространство с размерност $2n+1$, зададено с

$$Y := \{f \in C[0,1]\ \ f|_{(x_i,x_{i+1})} \in \pi_1,\ i = 0,1,\ldots,2n-1\}.$$

Докажете че, квадратурната формула на Радо за пространството Y е

$$I(f) := \int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k^R f(\tau_k) + c^R f(1) =: Q_n^R(f),$$

където

$$a_1^R = \frac{x_1 + x_2 - 2x_0}{2},\quad \tau_1 = \frac{x_1x_2 - x_0^2}{x_1 + x_2 - 2x_0},$$

$$a_k^R = \frac{x_{2k-1} + x_{2k} - x_{2k-3} - x_{2k-2}}{2},\quad \tau_k = \frac{x_{2k-1}x_{2k} - x_{2k-3}x_{2k-2}}{x_{2k-1} + x_{2k} - x_{2k-3} - x_{2k-2}},$$

$$k = 2,3,\ldots,n,$$

$$c^R = \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2}.$$

Задача 2.89. Нека $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n+1} = 1$ и нека Z е линейното пространство с размерност $2n+2$, зададено със

$$Z := \{f \in C[0,1]:\ f|_{(x_i,x_{i+1})} \in \pi_1,\ i = 0,1,\ldots,2n\}.$$

Докажете, че квадратурната формула на Лобато за пространството Z е

$$I(f) := \int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n a_k^L f(\tau_k) + b^L f(0) + c^L f(1) =: Q_n^L(f),$$

където

$$a_k^L = \frac{x_{2k} + x_{2k+1} - x_{2k-1} - x_{2k-2}}{2},\quad \tau_k = \frac{x_{2k}x_{2k+1} - x_{2k-2}x_{2k-1}}{x_{2k} + x_{2k+1} - x_{2k-1} - x_{2k-2}},$$

$$k = 1,\ldots,n,$$

$$b^L = \frac{x_1 - x_0}{2},\quad c^L = \frac{x_{2n+1} - x_{2n}}{2}.$$

Задача 2.90. Докажете, че квадратурната формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$
$$\approx \frac{2}{2n-1}\left[\frac{3}{4}\left(f\left(\frac{2}{6n-3}\right)+f\left(\frac{6n-5}{6n-3}\right)\right)+\sum_{k=2}^{n-1} f\left(\frac{4k-3}{4n-2}\right)\right] =: \bar{Q}_n^G(f)$$

е точна за линейното пространство от функции с размерност $2n$

$$X := \{f \in C[0,1] :\ f|_{\left(i/(2n-1),(i+1)/(2n-1)\right)} \in \pi_1,\ i=0,1,\ldots,2n-2\}.$$

Докажете, че за грешката на тази формула в класа W_∞^2 е изпълнено

$$\sup_{f\in W_\infty^2}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \bar{Q}_n^G(f)\right| = \frac{n-1}{4(2n-1)^3}M.$$

Задача 2.91. Докажете, че квадратурната формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{3}{4n}f\left(\frac{1}{3n}\right)+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{4k-3}{4n}\right)+\frac{1}{4n}f(1) =: \bar{Q}_n^R(f)$$

е точна за линейното пространство от функции с размерност $2n+1$

$$Y := \{f \in C[0,1] :\ f|_{\left(i/(2n),(i+1)/(2n)\right)} \in \pi_1,\ i=0,1,\ldots,2n-1\}.$$

Докажете, че за грешката на тази формула в класа W_∞^2 е изпълнено

$$\sup_{f\in W_\infty^2}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \bar{Q}_n^R(f)\right| = \frac{3n-1}{96n^3}M.$$

Задача 2.92. Докажете, че квадратурната формула

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{2}{2n+1}\left[\frac{1}{4}(f(0)+f(1))+\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{4k-1}{2(2n+1)}\right)\right] =: \bar{Q}_n^L(f)$$

е точна за линейното пространство от функции с размерност $2n+2$

$$Z := \{f \in C[0,1] :\ f|_{\left(i/(2n+1),(i+1)/(2n+1)\right)} \in \pi_1,\ i=0,1,\ldots,2n\}.$$

Докажете, че за грешката на тази формула в класа W_∞^2 е изпълнено

$$\sup_{f\in W_\infty^2}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \bar{Q}_n^L(f)\right| = \frac{3n+1}{12(2n+1)^3}M.$$

Задача 2.93. Докажете, че квадратурната формула на Гаус за пространството от сплайни от степен 1 с възли

$$x_0=0,\ x_{2n-1}=1 \text{ и } x_{2k-1}=\frac{4k-1}{4n},\ x_{2k}=\frac{4k+1}{4n},\quad k=1,\ldots,n-1,$$

е

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{15}{32n}\right)+f\left(1-\frac{15}{32n}\right)+\sum_{k=2}^{n-1} f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right] =: Q_n^{GT}(f).$$

За грешката на тази квадратурна формула в W_∞^2 докажете

$$\sup_{f\in W_\infty^2}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - Q_n^{GT}(f)\right| = \left(\frac{1}{32}n^{-2}+\frac{29}{3072}n^{-3}\right)M.$$

РЕШЕНИЯ, УПЪТВАНИЯ И ОТГОВОРИ

2.1. ПРИБЛИЖЕНО ПРЕСМЯТАНЕ НА ОПРЕДЕЛЕНИ ИНТЕГРАЛИ ЧРЕЗ РАЗВИВАНЕ НА ПОДИНТЕГРАЛНАТА ФУНКЦИЯ В РЕД

2.1. От развитието на $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ в ред на Маклорен следва

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{0,5} \frac{\operatorname{tg} x}{x}\,dx = \int_0^{0,5}\left[1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \frac{17x^6}{315} + \frac{62x^8}{2835} + \cdots\right] dx \\ &\approx 0,5 + \frac{1}{9}(0,5)^3 + \frac{2}{75}(0,5)^5 + \frac{17}{2205}(0,5)^7 + \frac{62}{25515}(0,5)^9 = 0,5147872. \end{aligned}$$

(Знае се, че с точност до четвъртия знак $I = 0,5147$.)

2.2. а) П ъ р в о р е ш е н и е: Тъй като редът на Маклорен за $\sqrt{x}\sin x$ е равномерно сходящ (дори не само в [0,1]), имаме

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+3/2}}{(2k+1)!}\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!(2k+5/2)}. \end{aligned}$$

Полученият числов ред е алтернативен с намаляващ по абсолютна стойност общ член. За такива редове $|I - S_n| < |a_{n+1}|$, където $(-1)^n a_n$ е общият член на реда и S_n е $n-$тата му частична сума. В конкретния случай

$$\left|\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!(2k+5/2)}\right| < \frac{1}{(2n+3)!(2n+9/2)}.$$

Ето защо достатъчно е да изберем най-малкото n, за което

$$\frac{1}{(2n+3)!(2n+9/2)} < 10^{-5},$$

т. е. $n = 3$. Изпълнено е

$$I \approx \frac{1}{2,5} - \frac{1}{3!(2+2,5)} + \frac{1}{5!(4+2,5)} - \frac{1}{7!(6+2,5)} = 0,364221671,$$

и при това $|I - 0,364221671| < 3.10^{-7}$.

В т о р о р е ш е н и е: Ако използуваме остатъчния член във формулата на Тейлор, имаме

$$\int_0^1 \sqrt{x}\sin x\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!(2k+5/2)} + R_n,$$

където

$$R_n = \int_0^1 \sqrt{x}(-1)^{n+1}\sin\theta_x \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\,dx, \quad 0 \le \theta_x \le 1.$$

По теоремата за средните стойности при някакво θ, $0 \le \theta \le 1$,

$$|R_n| = \frac{\sin\theta}{(2n+2)!}\int_0^1 \sqrt{x}\,x^{2n+2}\,dx < \frac{1}{(2n+2)!(2n+7/2)}$$

(малко по-слаба оценка отколкото при първото решение), след което отново заключаваме, че $n = 3$ ще ни гарантира желаната точност.

б) От развитието на $\dfrac{\sin x}{x}$ в ред на Маклорен и почленно интегриране получаваме

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!(2k+1)}$$

и, както при решението на а), изпълнено е неравенството

$$\left| \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!(2k+1)} \right| < \frac{1}{(2n+3)!(2n+3)}$$

и е достатъчно n да бъде такова, че $\dfrac{1}{(2n+3)!(2n+3)} \le 10^{-5}$, откъдето определяме $n = 3$ и

$$I \approx 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} = 0,946082766, \quad \text{и} \quad |I - 0,946082766| < 3,1\,.10^{-7}.$$

Направете оценка и като използувате остатъчния член в реда на Маклорен.

в) Използувайки развитието

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^{4k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1.3.\dots.(2k-1)}{2^k\,k!} x^{4k},$$

валидно за всяко $x \in (-1,1)$, получаваме след почленно интегриране

$$I = \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1.3.\dots.(2k-1)}{2^{5k+1}k!(4k+1)}.$$

Тъй като редът в дясната страна на последното равенство е алтернативен с намаляващ по абсолютна стойност общ член, изпълнено е неравенството

$$\left| \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{1.3.\dots.(2k-1)}{2^{5k+1}k!(4k+1)} \right| < \frac{1.3.\dots.(2n+1)}{2^{5n+6}(n+1)!(4n+5)}$$

и е достатъчно дясната страна да не надминава 10^{-5}, което е изпълнено при $n = 2$, затова

$$I \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5.64} + \frac{1}{3.2^{12}} = 0,49695638, \quad \text{и} \quad |I - 0,49695638| < 6,5\,.10^{-6}.$$

г) Имаме

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!(2k+1)}$$

и най-малкото n, за което е изпълнено $\dfrac{1}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-5}$, е $n = 7$, затова

$$I \approx 1 - \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} - \frac{1}{5!11} + \frac{1}{6!13} - \frac{1}{7!15} = 0,746822806,$$

и $|I - 0,746822806| < 1,5\,.10^{-6}$.

2.2. ИНТЕРПОЛАЦИОННИ КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ

2.3. а) Вижда се, че

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \cdots + \frac{1}{1+n/n}\right]$$

е Риманова сума за $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, и затова търсената граница е равна на стойността на този интеграл, т. е. на $\ln 2 = 0,69314718\ldots$ За да оценим величината $|S_n - \ln 2|$, използуваме факта, че $\dfrac{1}{1+x}$ е намаляваща функция, следователно за $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+k/n} > \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{dx}{1+x} > \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(k+1)/n}$$

и затова

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} > \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k+1} = S_n,$$

и $0 < \ln 2 - S_n < \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+k+1}\right] = \frac{1}{2n}$.

б) Отново

$$S_n = n\left[\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+4} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2}$$

е Риманова сума за $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ и затова $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi}{4} = 0,785398163\ldots$ Тъй като подинтегралната функция е намаляваща в $(0, 1)$, изпълнено е

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+(k/n)^2} > \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{dx}{1+x^2} > \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+((k+1)/n)^2},$$

следователно

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k/n)^2} > \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} > \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+((k+1)/n)^2} = S_n$$

и $0 < \dfrac{\pi}{4} - S_n < \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{1+(k/n)^2} - \frac{1}{1+((k+1)/n)^2}\right] = \frac{1}{2n}$.

2.6. За да определим коефициентите A, B и C, са ни нужни три уравнения. Това са уравненията, които се получават от изискването квадратурната формула да бъде точна за $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2$. Имаме

$$\begin{aligned}
2h &= \int_0^{2h} 1\,dx = h(A+B+C),\\
\frac{(2h)^2}{2} &= \int_0^{2h} x\,dx = h(Bh+2Ch),\\
\frac{(2h)^3}{3} &= \int_0^{2h} x^2\,dx = h(Bh^2+4Ch^2).
\end{aligned}$$

Решаваме тази линейна система и получаваме $A = C = 1/3$, $B = 4/3$, следователно формулата има вида

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(h) + f(2h)\right].$$

Това очевидно е формулата на Симпсон за интервала $[0, 2h]$. Съгласно зад. 2.4 в) тя има алгебрична степен на точност 3.

2.7. Опитваме се да определим параметрите a, b и c от условието формулата да е точна за първите три степени на x: $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2$. Получаваме системата

$$\begin{aligned} 2h &= \int_{-h}^{h} 1\,dx = 2c, \\ 0 &= \int_{-h}^{h} x\,dx = c(ah + bh), \\ \frac{2h^3}{3} &= \int_{-h}^{h} x^2\,dx = c[(ah)^2 + (bh)^2]. \end{aligned}$$

Оттук намираме $c = h$, $a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $b = -a$. Търсената формула е от вида

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx \approx h\left[f\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

Веднага се вижда, че тя е точна и за $f(x) = x^3$. При $f(x) = x^4$ имаме

$$\frac{2h^5}{5} = \int_{-h}^{h} x^4\,dx \neq h\left[f\left(-\frac{h}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{2h^5}{9}.$$

Следователно алгебричната точност на формулата е 3.

2.8. Ще се опитаме да определим параметрите A, a, b, c и d от условието формулата да бъде точна за $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Получаваме системата

$$\begin{aligned} 4 &= \int_{-2}^{2} 1\,dx = 4A; \\ 0 &= \int_{-2}^{2} x\,dx = A(a + b + c + d); \\ \frac{16}{3} &= \int_{-2}^{2} x^2\,dx = A(a^2 + b^2 + c^2 + d^2); \\ 0 &= \int_{-2}^{2} x^3\,dx = A(a^3 + b^3 + c^3 + d^3); \\ \frac{64}{5} &= \int_{-2}^{2} x^4\,dx = A(a^4 + b^4 + c^4 + d^4). \end{aligned}$$

От първото уравнение се вижда, че $A = 1$. Да въведем полинома

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

и нека $S_i = a^i + b^i + c^i + d^i$. По известните връзки на Нютон

$$0 = S_1 + a_1 = a_1; \qquad 0 = S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = \frac{16}{3} + 2a_2;$$

$$0 = S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 3a_3; \quad 0 = S_4 + a_1 S_3 + a_2 S_2 + a_3 S_1 + 4a_4$$
$$= \frac{64}{3} + a_2 \frac{16}{3} + 4a_4.$$

Решаваме тази система и получаваме $a_1 = a_3 = 0,\ a_2 = -\dfrac{8}{3}$ и $a_4 = \dfrac{16}{45}$, следователно имаме $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - \dfrac{8}{3}x^2 + \dfrac{16}{45}$. Оттук

$$a = -\sqrt{\frac{4}{3} + \frac{8}{3\sqrt{5}}},\quad b = -\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{8}{3\sqrt{5}}},\quad c = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{8}{3\sqrt{5}}},\quad d = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{8}{3\sqrt{5}}}.$$

Веднага се вижда, че така получената формула е точна и за $f(x) = x^5$. За $f(x) = x^6$ имаме

$$\frac{256}{7} = \int_{-2}^{2} x^6\,dx \neq 2\left[\left(\frac{4}{3} - \frac{8}{3\sqrt{5}}\right)^3 + \left(\frac{4}{3} + \frac{8}{3\sqrt{5}}\right)^3\right] = \frac{256.17}{135}.$$

Следователно алгебричната степен на точност на формулата е 5.

2.9. Коефициентите A, B, C, D и E се определят от условието формулата да бъде точна за функциите $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Получаваме системата

$$\begin{aligned}
2h &= \int_0^{2h} 1\,dx = h(A + B + C),\\
2h^2 &= \int_0^{2h} x\,dx = h(Bh + 2Ch) + h^2(D + E),\\
\frac{8h^3}{3} &= \int_0^{2h} x^2\,dx = h(Bh^2 + 4Ch^2) + h^2 E.4h,\\
4h^4 &= \int_0^{2h} x^3\,dx = h(Bh^3 + 8Ch^3) + h^2 12h^2 E,\\
\frac{32h^5}{5} &= \int_0^{2h} x^4\,dx = h(Bh^4 + 16Ch^4) + h^2 32h^3 E.
\end{aligned}$$

Решаваме тази система и намираме

$$A = C = \frac{7}{15},\quad B = \frac{16}{15},\quad D = -E = \frac{1}{15},$$

следователно търсената квадратурна формула е

$$\int_0^{2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{15}[7.f(0) + 16.f(h) + 7.f(2h)] + \frac{h^2}{15}[f'(0) - f'(2h)].$$

Проверява се, че така получената формула е точна и за $f(x) = x^5$, докато за $f(x) = x^6$ имаме

$$\frac{128\,h^7}{7} = \int_0^{2h} x^6\,dx \neq h\left(\frac{16}{15}h^6 + \frac{7}{15}64\,h^6\right) - h^2\left(\frac{1}{15}192h^5\right) = \frac{272}{15}h^7.$$

Следователно алгебричната степен на точност на формулата е 5.

2.10. Определяме A и B от условието формулата да бъде интерполационна, т. е. да е точна за $f(x)=1,\ x$. Получаваме

$$\mathrm{arctg} h=\int_0^h \frac{dx}{1+x^2}=A+B,\quad \frac{1}{2}\ln(1+h^2)=\int_0^h \frac{x\,dx}{1+x^2}=Bh.$$

Оттук $A=\mathrm{arctg} h-\frac{1}{2h}\ln(1+h^2)$, $B=\frac{1}{2h}\ln(1+h^2)$. При $f(x)=x^2$ така получената формула не е точна. Наистина

$$\int_0^h \frac{x^2\,dx}{1+x^2}=h-\mathrm{arctg} h<\frac{h}{2}\ln(1+h^2)\quad (h>0).$$

Следователно нейната алгебрична степен на точност е равна на 1.

2.11. Избираме коефициентите така, че формулата да бъде точна за $f(x)=x^k$, $k=0,1,2,3,4,5$. Получаваме системата

$$\begin{aligned}
2h &= \int_{-h}^h 1\,dx=h(a_1+a_2+a_3),\\
0 &= \int_{-h}^h x\,dx=h^2(-a_1+a_3)+h^2(b_1+b_2+b_3),\\
\frac{2h^3}{3} &= \int_{-h}^h x^2\,dx=h^3(a_1+a_3)+h^3(-2b_1+2b_3),\\
0 &= \int_{-h}^h x^3\,dx=h^4(-a_1+a_3)+h^4(3b_1+3b_3),\\
\frac{2h^5}{5} &= \int_{-h}^h x^4\,dx=h^5(a_1+a_3)+h^5(-4b_1+4b_3),\\
0 &= \int_{-h}^h x^5\,dx=h^6(-a_1+a_3)+h^6(5b_1+5b_3).
\end{aligned}$$

Решаваме тази система и намираме

$$a_1=a_3=\frac{7}{15},\quad a_2=\frac{16}{15},\quad b_1=-b_3=\frac{1}{15},\quad b_2=0,$$

т. е. получаваме квадратурната формула

$$\int_{-h}^h f(x)\,dx\approx\frac{h}{15}[7f(-h)+16f(0)+7f(h)]+\frac{h^2}{15}[f'(-h)-f'(h)]:=Q(f).$$

Проверката показва, че за $f(x)=x^6$ $\frac{2h^7}{7}=\int_{-h}^h x^6\,dx\neq Q(x^6)=\frac{2h^7}{15}$, следователно така получената формула има алгебрична степен на точност 5 (сравнете с квадратурната формула от зад. 2.9).

2.12. Достатъчно е да се провери, че формулата е точна за полиномите $1,\ x,\ x^2$ и x^3. Получаваме

$$
\begin{aligned}
h &= \int_0^h dx \approx h, \\
\frac{h^2}{2} &= \int_0^h x\,dx \approx \frac{h}{2}(0+h) = \frac{h^2}{2}, \\
\frac{h^3}{3} &= \int_0^h x^2\,dx \approx \frac{h}{2}(0+h^2) - \frac{h^2}{24}(2+2) = \frac{h^3}{3}, \\
\frac{h^4}{4} &= \int_0^h x^3\,dx \approx \frac{h}{2}(0+h^3) - \frac{h^3}{24}(0+6h) = \frac{h^4}{4}.
\end{aligned}
$$

Формулата не е точна за $f(x) = x^4$, защото

$$
\frac{h^5}{5} = \int_0^h x^4\,dx \approx \frac{h}{2}(0+h^4) - \frac{h^3}{24}(0+12h^2) = 0.
$$

2.13. Търсим такива коефициенти a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, че квадратурната формула

$$
\int_0^h f(x)\,dx \approx a_0 f(0) + b_0 f(h) + a_1 f'(0) + b_1 f'(h) + a_2 f''(0) + b_2 f''(h)
$$

да е точна за полиномите x^k, $k = 0, \dots, 5$. Получаваме системата уравнения

$$
\begin{aligned}
& h = a_0 + b_0, && \frac{h^2}{2} = b_0 h + a_1 + b_1, \\
& \frac{h^3}{3} = b_0 h^2 + 2b_1 h + 2a_2 + 2b_2, && \frac{h^4}{4} = b_0 h^3 + 3b_1 h^2 + 6b_2 h, \\
& \frac{h^5}{5} = b_0 h^4 + 4b_1 h^3 + 12 b_2 h^2, && \frac{h^6}{6} = b_0 h^5 + 5b_1 h^4 + 20 b_2 h^3.
\end{aligned}
$$

От 4-ото и 5-ото уравнение и от 5-ото и 6-ото уравнение, елиминирайки b_0, получаваме връзките $b_1 h + 6b_2 = -h^3/20$, $b_1 h + 8b_2 = -h^3/30$, откъдето намираме $b_1 = -h^2/10$, $b_2 = h^3/120$. От 6-ото уравнение определяме $b_0 = h/2$. По-нататък последователно намираме от 1-вото, 2-рото и 3-тото уравнение на системата $a_0 = h/2$, $a_1 = h^2/10$, $a_2 = h^3/120$.

2.14. Непосредствената проверка показва, че формулата е точна за всяка от функциите 1, x, x^2.

2.3. СЪСТАВНИ КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ. ОЦЕНКА НА ГРЕШКАТА

2.15. Съгласно дефиницията на $n-$тата съставна квадратурна формула върху всеки от интервалите $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, $k = 0, \dots, n-1$, се прилага базисната квадратурна формула, след което се сумират резултатите от тях. Имаме

$$
\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f\left(\frac{k+u}{n}\right) du \approx Q\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k+\cdot}{n}\right)\right), \; k = 0, \dots, n-1.
$$

Тогава

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,dx$$

$$\approx \sum_{k=0}^{n-1} Q\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k+\cdot}{n}\right)\right) = Q\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\cdot}{n}\right)\right) = Q(\varphi_n).$$

(В последното равенство сме използували линейността на Q.)

2.16. Съгласно дефиницията си ядрото на Пеано за квадратурната формула е

$$K_r(Q;t) = \int_a^b \frac{(x-t)_+^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{(r-1)!}$$

$$= \int_t^b \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{(r-1)!} = \frac{(b-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{(r-1)!},$$

с което формулата а) е доказана. За да докажем формулата б), ще използуваме тъждеството

$$(x-t)_+^{r-1} = (x-t)^{r-1} + (-1)^r (t-x)_+^{r-1}.$$

То се установява, като се разгледат поотделно случаите $x \ge t$ и $x < t$ и се приложи дефиницията за отсечената степенна функция. Наистина при $x \ge t$ имаме $(x-t)_+^{r-1} = (x-t)^{r-1}$, $(t-x)_+^{r-1} = 0$ и двете страни са идентични. При $x < t$ $(x-t)_+^{r-1} = 0$, $(t-x)_+^{r-1} = (t-x)^{r-1} = (-1)^{r-1}(x-t)^{r-1}$ и отново имаме $0 \equiv 0$. Тогава, отчитайки, че квадратурната формула е точна за $f(x) = (x-t)^{r-1}$, получаваме

$$K_r(Q;t) = \int_a^b \frac{(x-t)^{r-1} + (-1)^r (t-x)_+^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - Q\left(\frac{(\cdot-t)^{r-1} + (-1)^r (t-\cdot)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)$$

$$= \int_a^b \frac{(-1)^r (t-x)_+^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - Q\left(\frac{(-1)^r (t-\cdot)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)$$

$$= (-1)^r \left[\frac{(t-a)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n a_k \frac{(t-x_k)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right],$$

с което и формулата б) е установена.

2.17. Използувайки формулата б) от зад. 2.16 и

$$\frac{d}{dt}(t-\alpha)_+^{r-1} = (r-1)(t-\alpha)_+^{r-2},$$

получаваме $K_r^{(r-1)}(Q;t) = (-1)^r \left[t - a - \sum_{k=0}^n a_k (t-x_k)_+^0\right]$, откъдето

$$K_r^{(r-1)}(Q;x_j+0) - K_r^{(r-1)}(Q;x_j-0) = (-1)^{r+1}\left[\sum_{k=0}^{j-1} a_k - \sum_{k=0}^{j} a_k\right] = (-1)^r a_j.$$

2.18. Следва от $\frac{d}{dt}(t-\alpha)_+^{r-1} = (r-1)(t-\alpha)_+^{r-2}$ и от представянето б) на $K_r(Q;t)$ от зад. 2.16.

2.19. Формулата на трапеците се получава от интегрирането на интерполационния полином на Лагранж
$$P_1(f;x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$
За $x \in [a,b]$ е изпълнено
$$|f(x) - P_1(f;x)| \le \frac{b-x}{b-a}|f(x)-f(a)| + \frac{x-a}{b-a}|f(x)-f(b)| \le \omega(f;b-a).$$
Следователно
$$\begin{aligned} \left|I(f) - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right| &= \left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b P_1(f;x)\,dx\right| \\ &\le \int_a^b |f(x)-P_1(f;x)|\,dx \le (b-a)\omega(f;b-a). \end{aligned}$$
За да получим оценката за съставната формула на трапеците, използваме последното неравенство, приложено за интервалите
$$\left[a + k\frac{b-a}{n},\ a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right],\ k = 0,\ldots,n-1,$$
а именно
$$|I(f) - Q^n{}_{\text{тр}}(f)| \le \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}\omega\left(f;\frac{b-a}{n}\right) = (b-a)\omega\left(f;\frac{b-a}{n}\right).$$

2.20. Ще използуваме представянето б) от зад. 2.16. Тъй като формулата е симетрична, изпълнени са $a+b-t-x_k = x_{n+1-k}-t$ и $a_k = a_{n+1-k}$. Имаме
$$\begin{aligned} K_r(Q;a+b-t) &= (-1)^r\left[\frac{(a+b-t-a)^r}{r!} - \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(a+b-t-x_k)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right] \\ &= (-1)^r\left[\frac{(b-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} \frac{(x_{n+1-k}-t)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right] \\ &= (-1)^r\left[\frac{(b-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(x_k-t)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right] = (-1)^r K_r(Q;t) \end{aligned}$$
съгласно представянето а) от зад. 2.16.

2.21. Имаме
$$\int_a^b |K_r(Q;x)|\,dx = \int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q;x)|\,dx + \int_{(a+b)/2}^b |K_r(Q;x)|\,dx.$$
Във втория интеграл правим смяната $x = a+b-t$ и получаваме
$$\int_{(a+b)/2}^b |K_r(Q;x)|\,dx = \int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q;a+b-t)|\,dt = \int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q;x)|\,dx$$
съгласно зад. 2.20. Оттук
$$\int_a^b |K_r(Q;x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_r(Q;x)|\,dx.$$

2.22. Съгласно зад. 2.15 $n-$тата съставна квадратурна формула $S_n(f)$, получена на базата на Q, може да се представи като

$$Q(\varphi_n) = Q\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+\cdot}{n}\right)\right).$$

Тогава съгласно теоремата на Пеано ще бъде изпълнено

$$\int_0^1 f(x)\,dx - S_n(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - Q(\varphi_n) = \int_0^1 K_r(Q;x)\varphi_n^{(r)}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 K_r(Q;x) f^{(r)}\left(\frac{k+x}{n}\right)dx$$

$$= \frac{1}{n^r}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} K_r(Q;nx-k) f^{(r)}(x)\,dx = \int_0^1 K_r(S_n;x) f^{(r)}\,dx,$$

откъдето получаваме желаната формула.

2.23. Без ограничение върху общността на разсъжденията можем да считаме $[a,b]\equiv[0,1]$. Използуваме следствие 2.1 от теоремата на Пеано и зад. 2.15:

$$\sup_{f\in W_\infty^r[0,1]}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - Q(f)\right| = M\int_0^1 |K_r(Q;x)|\,dx = A,$$

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - S_n(f)\right| = \left|\int_0^1 K_r(Q;x)\varphi_n^{(r)}(x)\,dx\right|.$$

Тъй като

$$\varphi_n^{(r)}(x) = \frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=0}^{n-1} f^{(r)}\left(\frac{k+x}{n}\right),$$

заключаваме, че функцията $n^r\varphi(x)$ е от класа $W_\infty^r[0,1]$. Оттук

$$\sup_{f\in W_\infty^r[0,1]}\left|\int_0^1 f(x)\,dx - S_n(f)\right| = \frac{1}{n^r}M\int_0^1 |K_r(Q;x)|\,dx = \frac{A}{n^r},$$

с което доказателството е завършено.

2.24. Фактът, че $\tau\in(0,1)$ е нула на $K_r(Q;x)$, означава (вж. зад. 2.16 б)), че

$$\frac{\tau^r}{r!} - \sum_{k=0}^{n} a_k\frac{(\tau-x_k)_+^{r-1}}{(r-1)!} = 0.$$

От друга страна,

$$\int_0^1 \frac{(x-\tau)_+^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - Q\left(\frac{(\cdot-\tau)_+^{r-1}}{(r-1)!}\right)$$

$$= \int_\tau^1 \frac{(x-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k\frac{(\tau-x_k)_+^{r-1}}{(r-1)!} = K_r(Q;\tau) = 0,$$

което показва, че разглежданата квадратурна формула е точна за функцията $f(x) = \dfrac{(x-\tau)_+^{r-1}}{(r-1)!}$, а значи и за $(x-\tau)_+^{r-1}$. Условието $\tau\in(0,1)$ да е $s-$кратна нула на $K_r(Q;x)$ означава, че $K_r^{(j)}(Q;\tau)=0$, $j=0,\dots,s-1$, което съгласно зад. 2.18 е еквивалентно на $K_{r-j}(Q;\tau)=0$, $j=0,\dots,s-1$. Това влече от току–що доказаното квадратурната формула да бъде точна за функциите $f_j(x)=(x-\tau)_+^{r-j},\ j=1,\dots,s,$ с което е доказано твърдението в общия случай.

2.25. а) П ъ р в о р е ш е н и е: За функциите от $W_\infty^1[a,b]$ са изпълнени неравенствата $f(\xi)-M|x-\xi|\le f(x)\le f(\xi)+M|x-\xi|$ почти за всички $x\in[a,b]$. Ето защо

$$R(\xi)=\sup_{f\in W_\infty^1[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx-f(\xi)(b-a)\right|$$

$$=\sup_{f\in W_\infty^1[a,b]}\left|\int_a^b [f(x)-f(\xi)]\,dx\right|\le\sup_{f\in W_\infty^1[a,b]}\int_a^b|f(x)-f(\xi)|\,dx$$

$$\le\int_a^b M|x-\xi|\,dx=\frac{M}{2}[(b-\xi)^2+(\xi-a)^2].$$

Лесно се проверява, че $\min\limits_{a\le\xi\le b}R(\xi)=R\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\dfrac{M}{4}(b-a)^2$ (т. е. най-малка грешка има симетричната формула на правоъгълниците).

В т о р о р е ш е н и е (за симетричната формула на правоъгълниците): Формулата

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)=Q_{\text{пр}}(f)$$

има ядро на Пеано

$$K_1(Q_{\text{пр}};x)=-\left[(x-a)-(b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)_+^0\right],\ a\le x\le b.$$

Съгласно следствие 2.1 от теоремата на Пеано грешката се задава с

$$M\int_a^b|K_1(Q_{\text{пр}};x)|\,dx.$$

Поради симетрията можем да приложим зад. 2.21:

$$\sup_{f\in W_\infty^1[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx-Q_{\text{пр}}(f)\right|=M\int_a^b|K_1(Q_{\text{пр}};x)|\,dx$$

$$=2M\int_a^{(a+b)/2}|K_1(Q_{\text{пр}};x)|\,dx=2M\int_a^{(a+b)/2}(x-a)\,dx=M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

б) За формулата на трапеците ядрото на Пеано е

$$K_1(Q_{\text{тр}};x)=(b-x)-\frac{b-a}{2}[(a-x)_+^0+(b-x)_+^0]=\frac{a+b}{2}-x,\quad a\le x\le b.$$

Тя е симетрична, затова

$$\sup_{f\in W_\infty^1[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx-Q_{\text{тр}}(f)\right|=2M\int_a^{(a+b)/2}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\,dx=M\frac{(b-a)^2}{4}.$$

в) За формулата на Симпсон ядрото на Пеано е

$$K_1(Q_{\text{C}};x) = (b-x) - \frac{b-a}{6}\left[(a-x)_+^0 + 4\left(\frac{a+b}{2} - x\right)_+^0 + (b-x)_+^0\right],$$

или след извършване на опростявания

$$K_1(Q_{\text{C}};x) = \begin{cases} \dfrac{5a+b}{6} - x & \text{за} \quad a \le x \le \dfrac{a+b}{2}, \\ x - \dfrac{a+5b}{6} & \text{за} \quad \dfrac{a+b}{2} \le x \le b. \end{cases}$$

Вижда се, че $K_1(Q_{\text{C}};x)$ сменя два пъти знака си в (a,b). Формулата на Симпсон е симетрична, затова

$$\int_a^b |K_1(Q_{\text{C}};x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_1(Q_{\text{C}};x)|\,dx$$

$$= 2\left[\int_a^{(5a+b)/6} K_1(Q_{\text{C}};x)\,dx - \int_{(5a+b)/6}^{(a+b)/2} K_1(Q_{\text{C}};x)\,dx\right]$$

$$= -\,\big((5a+b)/6 - x\big)^2\Big|_a^{(5a+b)/6} + \big((5a+b)/6 - x\big)^2\Big|_{(5a+b)/6}^{(a+b)/2} = \frac{5(b-a)^2}{36}.$$

Следователно

$$\sup_{f\in W_\infty^1[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{C}}(f)\right| = M\frac{5(b-a)^2}{36}.$$

За да намерим грешките на съответните съставни квадратурни формули, използуваме зад. 2.23. Грешката на $n-$тите съставни квадратурни формули са:

$$M\frac{(b-a)^2}{4n} \tag{2.5}$$

за формулите на правоъгълниците и трапеците и

$$M\frac{5(b-a)^2}{36n} \tag{2.6}$$

за формулата на Симпсон.

2.26. а) Квадратурната формула на правоъгълниците има ядро на Пеано

$$\begin{aligned} K_2(Q_{\text{пр}};x) &= \frac{(x-a)^2}{2!} - (b-a)\big(x - (a+b)/2\big)_+ \\ &= \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{2!} & \text{за} \quad a \le x \le (a+b)/2; \\ \dfrac{(b-x)^2}{2!} & \text{за} \quad \dfrac{a+b}{2} \le x \le b. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.7}$$

В частност виждаме, че $K_2(Q_{\text{пр}};x) \ge 0$ за $x \in (a,b)$. За да оценим грешката в класа $W_\infty^2[a,b]$, прилагаме следствие 2.1 от теоремата на Пеано

$$\sup_{f\in W_\infty^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{пр}}(f)\right| = M\int_a^b |K_2(Q_{\text{пр}};x)|\,dx.$$

Тъй като формулата е симетрична, можем да приложим зад. 2.21, получавайки

$$\int_a^b |K_2(Q_{\text{ пр}};x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_2(Q_{\text{ пр}};x)|\,dx$$

$$= 2\int_a^{(a+b)/2} \frac{(x-a)^2}{2!}\,dx = \frac{(b-a)^3}{24},$$

ето защо

$$\sup_{f\in W^2_\infty[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{ пр}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^3}{24};$$

б) Квадратурната формула на трапеците

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = Q_{\text{ тр}}(f)$$

има ядро на Пеано

$$K_2(Q_{\text{ тр}};x) = \frac{(b-x)^2}{2!} - \frac{b-a}{2}[(a-x)_+ + (b-x)_+] = \frac{(b-x)(a-x)}{2} \tag{2.8}$$

$(a\le x\le b)$, следователно $K_2(Q_{\text{ тр}};x)\le 0,\ x\in(a,b)$. Прилагайки следствие 2.1 от теоремата на Пеано, получаваме

$$\sup_{f\in W^2_\infty[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{ тр}}(f)\right| = M\int_a^b \frac{(b-x)(x-a)}{2}\,dx = M\frac{(b-a)^3}{12};$$

в) Ядрото на Пеано за квадратурната формула на Симпсон

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] =: Q_{\text{ С}}(f)$$

е

$$K_2(Q_{\text{ С}};x) = \frac{(x-a)^2}{2!} - \frac{b-a}{6}\left[(x-a)_+ + 4\left(x-\frac{a+b}{2}\right)_+ + (x-b)_+\right],$$

което след опростяване води до представянията

$$K_2(Q_{\text{ С}};x) = \begin{cases} \dfrac12(x-a)\left(x-\dfrac{2a+b}{3}\right) & \text{за }\ a\le x\le \dfrac{a+b}{2},\\[2mm] \dfrac12(b-x)\left(\dfrac{2b+a}{3}-x\right) & \text{за }\ \dfrac{a+b}{2}\le x\le b,\end{cases}$$

(2.9) или еквивалентно

$$K_2(Q_{\text{ С}};x) = \begin{cases} \dfrac12(x-a)^2 - \dfrac{b-a}{6}(x-a) & \text{за }\ a\le x\le \dfrac{a+b}{2};\\[2mm] \dfrac12(b-x)^2 - \dfrac{b-a}{6}(b-x) & \text{за }\ \dfrac{a+b}{2}\le x\le b.\end{cases}$$

(Тъй като квадратурната формула на Симпсон е симетрична, втората част може да се получи от първата, като се приложи зад. 2.20.) Вижда се че, ядрото има две смени на знака в (a,b), затова

$$\int_a^b |K_2(Q_{\text{ С}};x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_2(Q_{\text{ С}};x)|\,dx$$

$$= 2\left[-\int_a^{(2a+b)/3} K_2(Q_{\text{ С}};x)\,dx + \int_{(2a+b)/3}^{(a+b)/2} K_2(Q_{\text{ С}};x)\,dx\right]$$

$$= -2\left(\frac{(x-a)^3}{6} - \frac{b-a}{12}(x-a)^2\right)\Bigg|_a^{(2a+b)/3}$$

$$+2\left(\frac{(x-(2a+b)/3)^3}{6} + \frac{b-a}{12}\left(x - \frac{2a+b}{3}\right)^2\right)\Bigg|_{(2a+b)/3}^{(a+b)/2} = \frac{(b-a)^3}{81}.$$

Следователно за грешката на формулата на Симпсон в $W^2_\infty[a,b]$ имаме

$$\sup_{f\in W^2_\infty[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{С}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^3}{81}.$$

Грешките на $n-$тите съставни квадратури в класа $W^2_\infty[a,b]$, съгласно зад. 2.23 са съответно

$$\sup_{f\in W^2_\infty[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx - S^n_{\text{пр}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^3}{24n^2} \tag{2.10}$$

за формулата на правоъгълниците;

$$\sup_{f\in W^2_\infty[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx - S^n_{\text{тр}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^3}{12n^2} \tag{2.11}$$

за формулата на трапеците и

$$\sup_{f\in W^2_\infty[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx - S^n_{\text{С}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^3}{81n^2} \tag{2.12}$$

за формулата на Симпсон.

2.27. В решението на зад. 2.26 беше показано, че ядрата $K_2(Q_{\text{пр}};x)$ и $K_2(Q_{\text{тр}};x)$ не сменят знака си в (a,b) (първото е положително, а второто отрицателно). Можем следователно да приложим следствие 2.2 от теоремата на Пеано, за да получим желаните представяния на грешките.

2.28. Условието функцията да е изпъкнала в $[a,b]$ се изразява аналитично с неравенствата

$$f(\lambda y + (1-\lambda)x) \le \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x) \quad \text{за всеки} \quad x,y\in[a,b] \quad \text{и } \lambda\in[0,1].$$

Ако направим смяната $x = \lambda b + (1-\lambda)a$, получаваме

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a)\,d\lambda$$

$$\le (b-a)\int_0^1 [\lambda f(b) + (1-\lambda)f(a)]\,d\lambda = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)],$$

с което второто неравенство е доказано. За да докажем първото неравенство, използуваме факта, че поради изпъкналостта на f за всяко $x\in[a,b]$ имаме

$$f((a+b)/2) \le [f(x) + f(a+b-x)]/2.$$

Интегрирането на двете страни на това неравенство ни дава

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left[\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f(a+b-x)\,dx\right] = \int_a^b f(x)\,dx,$$

с което и второто неравенство е доказано.

Задачата има проста геометрична интерпретация. Да предположим, че функцията f е положителна в $[a,b]$ и диференцируема в точката $\dfrac{a+b}{2}$.

Поради изпъкналостта на функцията хордата, свързваща крайните точки от графиката на функцията, е над самата графика, което показва, че формулата на трапеците дава оценка отгоре за $\int_a^b f(x)\,dx$. От друга страна, лицето на правоъгълника, изразено по формулата на правоъгълниците, е равно на лицето на правоъгълния трапец, ограничен от абсцисната ос, правите $x = a$ и $x = b$ и допирателната към графиката на функцията в точката с координати $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. Остава да отбележим, че понеже функцията е изпъкнала, нейната графика е над тази допирателна.

2.29. Третото ядро на Пеано за формулата на Симпсон е

$$K_3(Q_{\mathrm{C}};x) = -\left[\frac{(x-a)^3}{3!} - \frac{b-a}{6}\left(\frac{(x-a)_+^2}{2!} + 4\frac{(x-(a+b)/2)_+^2}{2!} + \frac{(x-b)_+^2}{2!}\right)\right],$$

или след опростяване

$$K_3(Q_{\mathrm{C}};x) = \begin{cases} -\dfrac{(x-a)^2}{6}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right) & \text{за } a \le x \le \dfrac{a+b}{2}, \\[2ex] -\dfrac{(b-x)^2}{6}\left(\dfrac{a+b}{2} - x\right) & \text{за } \dfrac{a+b}{2} \le x \le b. \end{cases}$$

Пресмятаме

$$\int_a^b |K_3(Q_{\mathrm{C}};x)|\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} |K_3(Q_{\mathrm{C}};x)|\,dx = \frac{(b-a)^4}{576}.$$

За оценка на грешката прилагаме следствие 2.1.

2.30. Ядрото на Пеано за квадратурната формула на Симпсон е

$$K_4(Q_{\mathrm{C}};x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{b-a}{6}\left[\frac{(x-a)_+^3}{3!} + 4\frac{(x-(a+b)/2)_+^3}{3!} + \frac{(x-b)_+^3}{3!}\right]$$

и след извършване на опростявания

$$K_4(Q_{\mathrm{C}};x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^3}{3!}\left[\dfrac{x-a}{4} - \dfrac{b-a}{6}\right] & \text{за } a \le x \le \dfrac{a+b}{2}, \\[2ex] \dfrac{(b-x)^3}{3!}\left[\dfrac{b-x}{4} - \dfrac{b-a}{6}\right] & \text{за } \dfrac{a+b}{2} \le x \le b, \end{cases}$$

(2.13) или еквивалентно

$$K_4(Q_{\mathrm{C}};x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^3}{4!}\left(x - \dfrac{a+2b}{3}\right) & \text{за } a \le x \le \dfrac{a+b}{2}, \\[2ex] \dfrac{(b-x)^3}{4!}\left(\dfrac{2a+b}{3} - x\right) & \text{за } \dfrac{a+b}{2} \le x \le b. \end{cases}$$

Вижда се, че $K_4(Q_{\mathrm{C}};x)$ няма нули в (a,b), и поради симетрията

$$\sup_{f\in W_\infty^4[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\text{C}}(f)\right| = 2M\int_a^{(a+b)/2}|K_4(Q_{\text{C}};x)|\,dx$$

$$= -2M\int_a^{(a+b)/2}\left[\frac{(x-a)^4}{4!}-\frac{b-a}{6}\frac{(x-a)^3}{3!}\right]dx$$

$$= 2M\left[\frac{(b-a)^5}{2^5 4!3}-\frac{(b-a)^5}{2^5 5!}\right] = M\frac{(b-a)^5}{2880}.$$

Съгласно зад. 2.23 грешката на съставната формула на Симпсон е

$$\sup_{f\in W_\infty^4[a,b]}\left|\int_a^b f(x)\,dx - S^n_{\text{C}}(f)\right| = M\frac{(b-a)^5}{2880n^4}. \tag{2.14}$$

2.31. Упътване: Тъй като ядрото на Пеано $K_4(Q_{\text{C}};x)$ е по–малко или равно на 0 в (a,b) (вж. (2.13)), прилагаме следствие 2.2 от теоремата на Пеано.

2.32. Имаме (вж. също зад. 2.5)

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{6}\left[f(0)+4f(1/2)+f(1)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^1 f(x)\,dx - f(1/2)\right] + \frac{1}{3}\left[\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{2}(f(0)+f(1))\right]$$

$$= \frac{2}{3}\frac{f''(\xi_1)}{24} - \frac{1}{3}\frac{f''(\xi_2)}{24} = \frac{1}{36}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)] = \frac{f'''(\eta)}{36}(\xi_1-\xi_2).$$

Тъй като $f\in W_\infty^3[0,1]$, от зад. 2.29 знаем

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{6}\left[f(0)+4f(1/2)+f(1)\right]\right| \le \frac{M}{576}.$$

Тогава от горното неравенство следва

$$\frac{m}{36}|\xi_1-\xi_2| \le \left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{6}\left[f(0)+4f(1/2)+f(1)\right]\right| \le \frac{M}{576},$$

откъдето $|\xi_1-\xi_2| \le \min\left\{\frac{M}{16m},\,1\right\}$.

2.33. Дадените квадратурни формули се представят като линейни комбинации на квадратурните формули на правоъгълниците и трапеците, а именно

$$Q_1(f) := 2f(1/2) - \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] = 2Q_{\text{пр}}(f) - Q_{\text{тр}}(f),$$

$$Q_2(f) := \frac{4}{3}f(1/2) - \frac{1}{6}[f(0)+f(1)] = \frac{4}{3}Q_{\text{пр}}(f) - \frac{1}{3}Q_{\text{тр}}(f).$$

Ако означим $I(f) := \int_0^1 f(x)\,dx$ и използуваме зад. 2.27, получаваме

$$I(f) - Q_1(f) = 2[I(f)-Q_{\text{пр}}(f)] - [I(f)-Q_{\text{тр}}(f)] = 2\frac{f''(\xi_1)}{24} + \frac{f''(\xi_2)}{12}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{f''(\xi_1)+f''(\xi_2)}{2} = \frac{f''(\eta_1)}{6};$$

$$I(f) - Q_2(f) = \frac{4}{3}[I(f) - Q\ \text{пр}(f)] - \frac{1}{3}[I(f) - Q\ \text{тр}(f)]$$
$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{f''(\xi_1)}{24} + \frac{1}{3} \cdot \frac{f''(\xi_2)}{12} = \frac{1}{12}\left[\frac{2}{3}f''(\xi_1) + \frac{1}{3}f''(\xi_2)\right] = \frac{f''(\eta_2)}{12}.$$

Задачата може да се реши и като се изследват ядрата на Пеано за квадратурните формули, след което се приложи следствие 2.2 от теоремата на Пеано.

2.34. Ядрото на Пеано за разглежданата квадратурна формула е

$$K_2(Q;x) = \frac{x^2}{2!} - \frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)_+ + \left(x - \frac{3}{4}\right)_+\right],$$

или след опростяване

$$K_2(Q;x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{за } x \in (0, \frac{1}{4}), \\ \dfrac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{2} & \text{за } \frac{1}{4} \le x \le \frac{3}{4}, \\ \dfrac{(x-1)^2}{2} & \text{за } \frac{3}{4} \le x \le 1. \end{cases} \tag{2.15}$$

Понеже $K_2(Q;x) \ge 0$ в (0,1), можем да приложим следствие 2.2 от теоремата на Пеано. Формулите (2.15) дават $\int_0^1 K_2(Q;x)\,dx = \frac{1}{96}$, откъдето следва исканото представяне на грешката.

2.35. Решава се както зад. 2.34.

2.36. Прилагаме следствие 2.1 от теоремата на Пеано, като използваме намерените при решението на зад. 2.26 представяния на съответните ядра.

За формулата на правоъгълниците имаме, поради (2.7) и симетрията

$$\int_a^b [K_2(Q\ \text{пр};x)]^2\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} [K_2(Q\ \text{пр};x)]^2\,dx$$
$$= 2\int_a^{(a+b)/2} \frac{(x-a)^4}{4}\,dx = \frac{(b-a)^5}{320},$$

затова

$$\sup_{f \in W_2^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q\ \text{пр}(f)\right| = M\left(\int_a^b [K_2(Q\ \text{пр};x)]^2\,dx\right)^{1/2} = M\frac{(b-a)^{5/2}}{8\sqrt{5}}.$$

За формулата на трапеците, отчитайки (2.8), получаваме

$$\int_a^b [K_2(Q\ \text{тр};x)]^2\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4}\,dx = \frac{(b-a)^5}{30},$$

следователно

$$\sup_{f \in W_2^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q\ \text{тр}(f)\right| = M\left(\int_a^b [K_2(Q\ \text{тр};x)]^2\,dx\right)^{1/2} = M\frac{(b-a)^{5/2}}{\sqrt{30}}.$$

За формулата на Симпсон, като вземем предвид (2.9) и симетрията, получаваме

$$\int_a^b [K_2(Q_{\rm C};x)]^2\,dx = 2\int_a^{(a+b)/2} [K_2(Q_{\rm C};x)]^2\,dx$$

$$= \int_a^{(a+b)/2} \left[\frac{(x-a)^4}{2} - \frac{b-a}{3}(x-a)^3 + \frac{(b-a)^2}{18}(x-a)^2\right]\,dx = \frac{(b-a)^5}{4320},$$

следователно

$$\sup_{f\in W_2^2[a,b]} \left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_{\rm C}(f)\right| = M\frac{(b-a)^{5/2}}{12\sqrt{30}},$$

т. е. в класа $W_2^2[a,b]$ формулата на Симпсон има 12 пъти по-малка грешка от формулата на трапеците.

2.37. Непосредствено се проверява, че разглежданата квадратурна формула има алгебрична степен на точност 3 и че ядрото ѝ на Пеано

$$K_4(Q;x) = \frac{(x-a)^4}{4!} - \frac{b-a}{8}\left[\frac{(x-x_0)_+^3}{3!} + 3\frac{(x-x_1)_+^3}{3!} + \frac{3(x-x_2)_+^3}{3!}\right]$$

е неположително в $[a,b]$. Пресмятаме стойността на интеграла

$$\int_a^b K_4(Q;x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)^4}{4!}\,dx - \frac{b-a}{8}\int_a^b \frac{(x-a)^3}{3!}\,dx$$

$$-\frac{3(b-a)}{8}\int_{x_1}^b \frac{(x-x_1)^3}{3!}\,dx - \frac{3(b-a)}{8}\int_{x_2}^b \frac{(x-x_2)^3}{3!}\,dx$$

$$= \frac{(b-a)^5}{5!} - \frac{(b-a)^5}{8.4!} - \frac{3(b-a)}{8.4!}\left(\frac{2(b-a)}{3}\right)^4 - \frac{3(b-a)}{8.4!}\left(\frac{b-a}{3}\right)^4$$

$$= -\frac{3}{80}\left(\frac{b-a}{3}\right)^5.$$

Прилагаме следствие 2.2 от теоремата на Пеано, за да получим

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{3}{8}h[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)] = -f^{(4)}(\xi)\frac{3}{80}h^5,$$

което трябваше и да докажем.

2.38. Решава се както предишната задача.

2.39. В зад. 2.25 определихме точните горни граници за грешките на съставните формули на правоъгълниците, трапеците и Симпсон. Достататъчно е да изберем такива n, за които тези граници не надминават 10^{-3}. Съгласно (2.5) за формулите на правоъгълниците и трапеците е достатъчно n да е такова, че $\dfrac{1}{4n} \le 10^{-3}$, което е изпълнено при $n \ge 250$, т. е. трябва да разделим $[0,1]$ на $n \ge 250$ равни части и върху всеки подинтервал да приложим елементарната квадратура. За съставната квадратурна формула на Симпсон е достатъчно (вж. (2.6)) n да удовлетворява $\dfrac{5}{36n} \le 10^{-3}$, което е изпълнено за $n \geq 139$. Ако сравняваме обаче броя на възлите, които ще ни се наложи да използуваме, за да пресметнем интеграла с исканата точност, най-малък — 250, той ще е за съставната формула на правоъгълниците срещу 251 и 279 съответно за формулите на трапеците и Симпсон.

2.40. а) Функцията $f(x) = 1/(1+x)$ има непрекъснати производни от всякакъв ред в интервала $[0,1]$, затова можем да се възползуваме от оценките за грешките на съставните формули на правоъгълниците и трапеците в класовете W_∞^r, $r = 2,3$ (съответно (2.5), (2.10) и (2.11)), както и за съставните формули на Симпсон в класовете W_∞^r, $r = 1,2,3,4$ (вж. (2.6), (2.12) и (2.14)). Изпълнено е

$$\max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \leq 1, \ \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| \leq 2, \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| \leq 24.$$

Ако приложим съставната формула на правоъгълниците, достатъчно е n да е такова, че $2/(24n^2) \leq 10^{-5}$, т. е. $n \geq 92$. Ако изберем да прилагаме съставната формула на Симпсон, достатъчно е n да бъде такова, че $24/(2880n^4) \leq 10^{-5}$, т. е. $n \geq 6$. За съставната формула на трапеците трябва $2/(12n^2) \leq 10^{-5}$, което е изпълнено за $n \geq 130$.

б) Решава се както а).

2.41. Грешката на съставната формула на Симпсон (вж. (2.14)) може да се запише и като

$$\sup_{f\in W_\infty^4[a,b]} \left| \int_a^b f(x)\,dx - S^n_{\mathrm{C}}(f) \right| \leq \frac{h^4(b-a)}{180} \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|,$$

където $h = (b-a)/N$ е разстоянието между два съседни възела на съставната квадратура. За четвъртата производна на $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ получаваме

$$f^{(4)}(x) = \frac{\sin x}{x} + 4\frac{\cos x}{x^2} - 12\frac{\sin x}{x^3} - 24\frac{\cos x}{x^4} + 24\frac{\sin x}{x^5} = p(x) - q(x),$$

където

$$p(x) = \frac{\sin x}{x}\left(1 - \frac{12}{x^2} + \frac{24}{x^4}\right) \quad \text{и} \quad q(x) = 4\,\frac{\cos x}{x^2}\left(\frac{6}{x^2} - 1\right).$$

Вижда се, че в интервала $[\pi/4, \pi/2]$ функциите p и q са положителни и монотонно намаляващи, следователно те достигат своя максимум при $x = \pi/4$. Тогава

$$\left(|p(x)| + |q(x)|\right)\Big|_{x=\pi/4} < 81.$$

Стъпката h тогава определяме да удовлетворява $\dfrac{h^4\pi.81}{4.180} \leq 10^{-3}$. Оттук получаваме $h < 0,164$. Изборът $h = \pi/24 \approx 0,13$ удовлетворява това неравенство, следователно можем да осигурим пресмятане на интеграла с желаната точност, избирайки $N = (\pi/2 - \pi/4)/h = 6$.

2.42. Правим смяната $x = \cos t$ и получаваме

$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x)\,dx = \int_0^\pi \sin^2 t f(\cos t)\,dt.$$

Разделяме интервала $[0,\pi]$ на n равни части и във всеки подинтервал прилагаме формулата на правоъгълниците с възел левия край. Получаваме

$$I \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f(\cos \frac{k\pi}{n}) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f(\cos \frac{k\pi}{n}),$$

което представлява желаната формула. За оценка на грешката използваме зад. 2.25, където установихме неравенството

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - (b-a) f(\xi) \right| \leq \frac{M}{2}[(b-\xi)^2 + (\xi - a)^2] \tag{2.16}$$

за $\xi \in [a,b]$ и $M = \max_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. В конкретния случай, ако означим

$$M = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)|, \quad M_1 = \max_{x\in[-1,1]} |f'(x)|$$

и приложим (2.16) за всеки интервал $[k\pi/n, (k+1)\pi/n]$, $k = 0,\dots,n-1$ с $\xi = k\pi/n$, получаваме оценката

$$\max_{t\in[0,\pi]} |\{\sin^2 t f(\cos t)\}'| \leq M + M_1,$$

$$\left| I - \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f(\cos \frac{k\pi}{n}) \right| \leq n \frac{M+M_1}{2} \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 = \frac{\pi^2(M+M_1)}{2n}.$$

2.43. Аналогично на предишната задача след смяната $x = \cos^2 t$ и прилагане на съставната формула на правоъгълниците получаваме

$$\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} f(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t f(\cos^2 t) 2 \sin t \cos t dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, f(\cos^2 t)\, dt \approx \frac{\pi}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n} f(\cos^2 \frac{k\pi}{2n}).$$

2.4. КВАДРАТУРНИ ФОРМУЛИ ОТ ГАУСОВ ТИП

2.44, 2.45. Допускаме, че съществува квадратурна формула от вида

$$I(f) := \int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} [a_k f(x_k) + b_k f'(x_k)] := Q(f),$$

която да е точна за полиномите от степен $\geq 2n$. Тогава тя трябва да бъде точна и за полинома $P(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \dots (x-x_n)^2$, който е от степен $2n$. Но $P(x_i) = P'(x_i) = 0$ за $i = 1,\dots,n$, затова $Q(P) = 0$. Но тогава трябва да е изпълнено и $\int_a^b \sigma(x) P(x)\, dx = 0$, тъй като по предположение трябва $I(P) = Q(P)$. Последното обаче е невъзможно, тъй като $P(x) > 0$ за $x \in [a,b] \backslash \{x_i\}_1^n$ и следователно $\int_a^b \sigma(x) P(x)\, dx > 0$. Полученото противоречие показва, че няма квадратурна формула от разглеждания вид с алгебрична степен на точност $\geq 2n$ (в частност няма и такава, за която $b_k = 0$, $k = 1,\dots,n$).

2.46. Упътване: Използува се идеята от предишната задача, като се прилага квадратурната формула към подходящо избран полином.

2.47. Нека $\{x^*_{k,n}\}_{k=1}^n$ са нулите на полинома от степен n, ортогонален в $[a,b]$ при тегло $\sigma(x)$ (известно е, че $\{x^*_{k,n}\}_{k=1}^n$ са реални, различни и лежат в (a,b)). Нека $H_{2n-1}(f;x)$ е полиномът от степен $\le 2n-1$, който интерполира функцията f и нейната първа производна в точките $\{x^*_{k,n}\}_{k=1}^n$, т. е. който удовлетворява равенствата

$$H_{2n-1}(f;x^*_{k,n}) = f(x^*_{k,n}) \quad \text{и} \quad H'_{2n-1}(f;x^*_{k,n}) = f'(x^*_{k,n}) \quad \text{за} \quad k=1,2,\dots,n.$$

Този полином може да се запише във вида

$$H_{2n-1}(f;x) = \sum_{k=1}^n [h_{k,0}(x) f(x^*_{k,n}) + h_{k,1}(x) f'(x^*_{k,n})],$$

където $h_{k,j} \in \pi_{2n-1}$ са определени от равенствата

$$h^{(s)}_{k,j}(x^*_{r,n}) = \delta_{rk}.\delta_{sj} \quad \text{за } k,r=1,\dots,n \quad \text{и} \quad j,s=0,1.$$

Знаем, че за грешката при интерполацията е изпълнено

$$f(x) - H_{2n-1}(f;x) = \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!}(x-x^*_{1,n})^2 \dots (x-x^*_{n,n})^2. \tag{2.17}$$

Ако умножим двете страни на (2.17) със $\sigma(x)$ и интегрираме в граници от a до b, ще получим

$$\begin{aligned}
\int_a^b \sigma(x) f(x)\,dx &= \sum_{k=0}^n [a_k f(x^*_{k,n}) + b_k f'(x^*_{k,n})] \\
&+ \int_a^b \sigma(x) \frac{f^{(2n)}(\xi(x))}{(2n)!}(x-x^*_{1,n})^2 \dots (x-x^*_{n,n})^2\,dx \\
&= \sum_{k=0}^n [a_k f(x^*_{k,n}) + b_k f'(x^*_{k,n})] \\
&+ \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \sigma(x)(x-x^*_{1,n})^2 \dots (x-x^*_{n,n})^2\,dx
\end{aligned} \tag{2.18}$$

за някое $\xi \in [a,b]$, където $a_k = \int_a^b \sigma(x) h_{k,0}(x)\,dx$, $b_k = \int_a^b \sigma(x) h_{k,1}(x)\,dx$, $k = 1,\dots,n$. Очевидно квадратурната формула (2.18) е точна за всяко $f \in \pi_{2n-1}$. При това, тъй като

$$h_{k,1}(x) = c_k \omega(x) \frac{\omega(x)}{x - x^*_{k,n}} \quad \text{и} \quad \omega(x)/(x-x^*_{k,n}) \in \pi_{n-1},$$

поради ортогоналността е изпълнено $b_k = 0$, $k=1,\dots,n$. Следователно квадратурната формула (2.18) не използува стойности на производните на подинтегралната функция, т. е. (2.18) е Гаусовата квадратурна формула.

2.48. Построяваме интерполационния полином на Ермит

$$H_{2n+1}(f;x) \in \pi_{2n+1},$$

удовлетворяващ условията

$$H^{(j)}_{2n+1}(f;x_{k,n}) = f^{(j)}(x_{k,n}), \; k=1,\dots,n \quad \text{и } j=0,1;$$

$$H_{2n+1}(f;a) = f(a), \quad H_{2n+1}(f;b) = f(b),$$
където $\{x_{k,n}\}_{k=1}^n$ са нулите на $n-$тия ортогонален полином за интервала $[a,b]$ и тегло $\sigma(x)(x-a)(b-x)$. За грешката тогава е изпълнено
$$f(x) - H_{2n+1}(f;x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi(x))}{(2n+2)!}(x-a)(x-x_{1,n})^2 \ldots (x-x_{n,n})^2(x-b).$$
Умножаваме двете страни на това равенство със $\sigma(x)$ и интегрираме в граници от a до b, при което след прилагане на теоремата за средните стойности получаваме равенството
$$\int_a^b \sigma(x)f(x)\,dx = a_0 f(a) + a_{n+1}f(b) + \sum_{k=1}^n [a_k f(x_{k,n}) + b_k f'(x_{k,n})] - R(f),$$
$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \sigma(x)(x-a)(b-x)(x-x_{1,n})^2 \ldots (x-x_{n,n})^2\,dx.$$
Очевидно квадратурната формула, получена след пренебрегване на $R(f)$, е точна за полиномите от степен, ненадминаваща $2n+1$. Остава да се забележи, че $b_k = \int_a^b \sigma(x)h_{k,1}(x)\,dx$, където $h_{k,1} \in \pi_{2n+1}$ удовлетворява условията $0 = h_{k,1}(a) = h_{k,1}(b) = h_{k,1}(x_{j,n})$, $j = 1,\ldots,n$, и следователно може да се представи във вида $(x-a)(b-x)\omega(x)p(x)$, $p \in \pi_{n-1}$. От ортогоналността тогава следва $b_k = 0$, $k = 1,\ldots,n$, откъдето заключаваме, че тази квадратурна формула е именно формулата на Лобато, с което задачата е решена.

2.49. Решава се както предишните две задачи.

2.50. Нека $\{x_{k,n}^*\}_{k=1}^n$ са възлите на квадратурната формула на Гаус и нека за произволно $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ полиномът $p_k \in \pi_{2n-2}$ е определен от условията
$$p_k(x_{i,n}^*) = p'(x_{i,n}^*) = 0 \text{ за } i \in \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{k\}, \quad p_k(x_{k,n}^*) = 1.$$
Очевидно p_k няма други нули освен тези с кратност 2 във възлите на квадратурната формула на Гаус (изключвайки $x_{k,n}^*$), затова p_k не сменя своя знак върху реалната права и по-точно $p_k \geq 0$ за всяко реално x, тъй като $p_k(x_{k,n}^*) = 1$. Квадратурната формула на Гаус пресмята точно интеграла от p_k, затова
$$0 < \int_a^b \sigma(x)p_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^n a_{k,n}^G p_k(x_{k,n}^*) = a_{k,n}^G$$
и понеже k беше произволно избрано, доказали сме, че всички коефициенти в Гаусовата квадратурна формула са положителни.

По подобен начин, прилагайки квадратурните формули на Лобато и Радо към подходящо избрани неотрицателни полиноми, установяваме положителността на техните коефициенти.

2.51. Използуваме рекурентната връзка за ортогоналните полиноми, записана във вида
$$x\,p_m(x) = A_m p_{m+1}(x) + B_m p_m(x) + C_m p_{m-1}(x);$$
(2.19)
$$A_m = \frac{k_m}{k_{m+1}}, \quad C_m = \frac{k_{m-1}}{k_m}$$

(явният вид на B_m няма да ни е нужен), валидна за $m = 0, 1, \ldots$, като сме положили $p_{-1} := 0$. От равенството (2.19) получаваме

$$x\, p_m(x)p_m(y) = \frac{k_m}{k_{m+1}} p_{m+1}(x)p_m(y) + B_m p_m(x)p_m(y) + \frac{k_{m-1}}{k_m} p_{m-1}(x)p_m(y).$$

От последното тъждество изваждаме почленно тъждеството, което се получава, като разменим местата на x и y, което дава

$$\begin{aligned}(x-y)p_m(x)p_m(y) &= \frac{k_m}{k_{m+1}}[p_{m+1}(x)p_m(y) - p_m(x)p_{m+1}(y)] \\ &- \frac{k_{m-1}}{k_m}[p_m(x)p_{m-1}(y) - p_{m-1}(x)p_m(y)].\end{aligned}$$

Сумираме тези равенства по m от 0 до n:

$$(x-y)\sum_{m=0}^{n} p_m(x)p_m(y) = \frac{k_n}{k_{n+1}}[p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)].$$

За да получим тъждеството на Кристофел — Дарбу, трябва само да разделим последното равенство на $x - y$.

2.52. а) Във формулата на Кристофел — Дарбу полагаме $y = x_{\nu,n}$, където $x_{\nu,n}$ е ν-тата нула на p_n и получаваме

$$\sum_{m=0}^{n} p_m(x)p_m(x_{\nu,n}) = -\frac{k_n}{k_{n+1}}\,\frac{p_n(x)p_{n+1}(x_{\nu,n})}{x - x_{\nu,n}}.$$

Умножаваме двете страни на това равенство със $\sigma(x)$ и интегрираме по x в граници от a до b. Тъй като системата $\{p_m(x)\}_{m=0}^{n}$ е ортонормирана, имаме

$$\begin{aligned}1 &= -\frac{k_n}{k_{n+1}} p_{n+1}(x_{\nu,n}) \int_a^b \sigma(x)\frac{p_n(x)}{x - x_{\nu,n}}\,dx \\ &= -\frac{k_n}{k_{n+1}} p_{n+1}(x_{\nu,n})p_n'(x_{\nu,n}) \int_a^b \sigma(x)\frac{p_n(x)}{(x - x_{\nu,n})p_n'(x_{\nu,n})}\,dx \\ &= -\frac{k_n}{k_{n+1}} p_{n+1}(x_{\nu,n})p_n'(x_{\nu,n}).a_{\nu,n}^G\,,\end{aligned}$$

откъдето следва

$$a_{\nu,n}^G = \frac{k_{n+1}}{k_n}\,\frac{-1}{p_{n+1}(x_{\nu,n})p_n'(x_{\nu,n})}.$$

б) Полагаме $y = x_{\nu,n}$ в тъждеството на Кристофел — Дарбу

$$\sum_{m=0}^{n-1} p_m(x)p_m(y) = \frac{k_{n-1}}{k_n}\,\frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{x-y},$$

и получаваме

$$\sum_{m=0}^{n-1} p_m(x)p_m(x_{\nu,n}) = \frac{k_{n-1}}{k_n}\,\frac{p_{n-1}(x_{\nu,n})p_n(x)}{x - x_{\nu,n}}.$$

Желаната формула намираме, като умножим последното равенство със $\sigma(x)$ и интегрираме в граници от a до b.

2.53. Функцията $f(x) = \left(\dfrac{p_n(x)}{p_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})} \right)^2$ е полином от степен $2n-2$, удовлетворяващ условията

$$f(x_{j,n}) = \delta_{j,k}, \ j = 1, \dots, n,$$

затова Гаусовата квадратурна формула е точна за f и

$$\int_a^b \sigma(x) f(x)\, dx = \sum_{j=1}^n a_{j,n}^G f(x_{j,n}) = a_{k,n}^G.$$

2.54. Наистина възлите на квадратурната формула на Гаус са нулите на ортогоналния полином в $[-1, 1]$ с тегло $\sigma(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ и това е $T_n(x) = \cos n \arccos x$. Можем да приложим коя да е от формулите а), б) от зад. 2.52, за да намерим коефициентите на квадратурната формула. Ортонормираната система се състои от полиномите $\sqrt{1/\pi}$, $\sqrt{2/\pi}\, T_1(x)$, $\sqrt{2/\pi}\, T_2(x), \dots, \sqrt{2/\pi}\, T_n(x)$ и старшите коефициенти на тези полиноми при $n \geq 1$ са $k_n = \sqrt{2/\pi}\, 2^{n-1}$. Освен това имаме

$$T_{n+1}(x_k) = \cos \frac{(n+1)(2k-1)\pi}{2n} = (-1)^{k-1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

$$T_n'(x_k) = n \frac{\sin \dfrac{(2k-1)\pi}{2}}{\sin \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}} = n \frac{(-1)^k}{\sin \dfrac{(2k-1)\pi}{2n}}.$$

Като приложим формулата а) от зад. 2.52, получаваме за коефициентите на Гаусовата квадратурна формула

$$a_k = 2 \frac{-1}{\sqrt{2/\pi}(-1)^{k-1} \sin \dfrac{(2k-1)\pi}{2n} \sqrt{2/\pi}\ n(-1)^k \left(\sin \dfrac{(2k-1)\pi}{2n} \right)^{-1}} = \frac{\pi}{n},$$

с което задачата е решена.

2.55. Използуваме резултата от зад. 2.47, като вземем предвид, че $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots = 2^{n-1}\omega(x)$ и

$$\int_{-1}^1 T_n^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad n \geq 1.$$

Тогава

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^{-1} \omega^2(x)\, dx$$

$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} . 2^{-2(n-1)} \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^{-1} T_n^2(x)\, dx = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \cdot \frac{\pi}{2^{2n-1}},$$

откъдето получаваме нужната оценка.

2.56. Възлите $x_k = \cos \dfrac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, \dots, n$, на квадратурната формула са нули на полинома на Чебишов от втори род

$$U_n(x) = \frac{\sin{(n+1)} \arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

който е ортогонален в интервала $[-1,1]$ при тегло $\sigma(x) = \sqrt{1-x^2}$. Необходимо е още да покажем, че коефициентите на Гаусовата квадратурна формула за това тегло са $a_k = \dfrac{\pi}{n+1}\sin^2\dfrac{k\pi}{n+1}$. Ортонормираните полиноми са $\sqrt{2/\pi}\,U_n(x)$, $n = 0,1,\ldots,$ и старшите им коефициенти са $k_n = \sqrt{2/\pi}\,2^n$. Пресмятаме

$$U_{n+1}(x_k) = \frac{\sin\dfrac{(n+2)k\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}} = \frac{(-1)^k\sin\dfrac{k\pi}{n+1}}{\sin\dfrac{k\pi}{n+1}} = (-1)^k,$$

$$U_n'(x_k) = -(n+1)\frac{\cos k\pi}{1-\cos^2\dfrac{k\pi}{n+1}} = (n+1)\frac{(-1)^{k+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{n+1}}.$$

Тогава от формула а) от зад. 2.52 имаме

$$a_k = 2\frac{-1}{(-1)^k\sqrt{2/\pi}(n+1)(-1)^{k+1}\sqrt{2/\pi}\left(\sin^2\dfrac{k\pi}{n+1}\right)^{-1}} = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\frac{k\pi}{n+1},$$

което и трябваше да докажем.

2.57. Тъй като

$$U_n(x) = 2^n x^n + \ldots = 2^n\omega(x) \quad \text{и} \quad \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}U_n^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2},$$

съгласно зад. 2.47, имаме

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}f(x)\,dx - \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^n \sin^2\frac{k\pi}{n+1}f(x_k)$$

$$= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\left(\frac{U_n(x)}{2^n}\right)^2 dx = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\cdot\frac{\pi}{2^{2n+1}},$$

откъдето резултатът следва, като вземем предвид

$$\max_{x\in[-1,1]}|f^{(2n)}(x)| \le M.$$

2.58. Полиномът $q_k(x) = P_n(x)P_n'(x)/(x-x_{k,n})$ е от степен $2n-2$ и за него е изпълнено

$$q_k(x_{j,n}) = 0 \ \text{ за } j = 1,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n, \ \ q_k(x_{k,n}) = [P_n'(x_{k,n})]^2.$$

Гаусовата квадратурна формула ще бъде точна за q_k, затова

$$\int_{-1}^1 q_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^n a_{k,n}^G q_k(x_{k,n}) = a_{k,n}^G[P_n'(x_{k,n})]^2.$$

От друга страна, след интегриране по части ще получим

$$\int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{x-x_{k,n}}P_n'(x)\,dx = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{x-x_{k,n}}d(P_n(x))$$

$$= \left.\frac{P_n^2(x)}{x-x_{k,n}}\right|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n(x)\left(\frac{P_n(x)}{x-x_{k,n}}\right)'dx.$$

Поради ортогоналността последният интеграл е 0. Затова, като отчетем и факта, че $P_n(1) = (-1)^n P_n(-1) = 1$, получаваме

$$a_{k,n}^G [P_n'(x_{k,n})]^2 = \frac{1}{1 - x_{k,n}} - \frac{1}{-1 - x_{k,n}} = \frac{2}{1 - x_{k,n}^2},$$

откъдето намираме исканото представяне на $a_{k,n}^G$.

2.59. За произволно $k \in \{2, \ldots, n-1\}$ разглеждаме $q_k \in \pi_{2n-2}$, определен от интерполационните условия

$$q_k(x_{i,n}) = 1 \quad \text{за} \quad i = 1, \ldots, k-1; \quad q_k(x_{i,n}) = 0 \quad \text{за} \quad i = k, \ldots, n;$$
$$q_k'(x_{i,n}) = 0 \quad \text{за} \quad i = 1, \ldots, k-2, k, \ldots, n.$$

По теоремата на Рол q_k' има поне по една нула във всеки от интервалите $(x_{i,n}, x_{i+1,n})$, $i = 1, \ldots, k-2, k, \ldots, n-1$, и отчитайки и $(n-1)$-те нули в точките $x_{i,n}$, $i = 1, \ldots, k-2, k, \ldots, n$, общо поне $2n-3$ нули. Тъй като $q_k' \in \pi_{2n-3}$, нулите му са точно $2n-3$, т. е. q_k' няма други нули освен посочените по-горе. Същите съображения показват, че q_k няма други нули освен тези, зададени с дефиницията му. Оттук заключаваме, че $q_k(x) \geq 1$ в $[-1, x_{k-1,n}]$, $q_k(x) \geq 0$ в $[x_{k-1,n}, 1]$ и понеже Гаусовата квадратурна формула ще бъде точна за q_k, получаваме

$$\int_{-1}^{1} q_k(x)\, dx = \sum_{j=1}^{k-1} a_{j,n}^G > \int_{-1}^{x_{k-1,n}} dx = x_{k-1,n} + 1. \tag{2.20}$$

Аналогично дефинираме полином $r_k \in \pi_{2n-2}$, определен от интерполационните условия

$$r_k(x_{i,n}) = 0 \quad \text{за} \quad i = 1, \ldots, k; \quad r_k(x_{i,n}) = 1 \quad \text{за} \quad i = k+1, \ldots, n;$$
$$r_k'(x_{i,n}) = 0 \quad \text{за} \quad i = 1, \ldots, k, k+2, \ldots, n,$$

и както по-горе заключаваме, че $r_k(x) \geq 0$ в $[-1, x_{k+1,n}]$, $r_k(x) \geq 1$ в $[x_{k+1,n}, 1]$. Като приложим Гаусовата квадратурна формула за r_k, получаваме

$$\int_{-1}^{1} r_k(x)\, dx = \sum_{j=k+1}^{n} a_{j,n}^G > \int_{x_{k+1,n}}^{1} dx = 1 - x_{k+1,n}. \tag{2.21}$$

Събираме неравенствата (2.20) и (2.21):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{j,n}^G - a_{k,n}^G = 2 - a_{k,n}^G > 2 + x_{k-1,n} - x_{k+1,n}.$$

Тук използувахме, че $\sum_{j=0}^{n} a_{j,n}^G = \int_{-1}^{1} dx = 2$, следователно

$$a_{k,n} < x_{k+1,n} - x_{k-1,n} \quad \text{за} \quad k = 2, 3, \ldots, n-2.$$

За $k = 1$ дефинираме $r_1 \in \pi_{2n-2}$ с равенствата

$$r_1(x_{1,n}) = 0, \quad r_1(x_{i,n}) = 1, \; i = 2, \ldots, n,$$
$$r_1'(x_{i,n}) = 0, \quad \text{за} \quad i = 1, 3, \ldots, n.$$

За r_1 е изпълнено $r_1(x) \geq 0$ в $[-1, x_{2,n})$ и $r_1(x) \geq 1$ в $[x_{2,n}, 1]$. Прилагането на квадратурната формула към r_1 води до

$$\int_{-1}^{1} r_1(x)\, dx = \sum_{j=2}^{n} a_{j,n}^G = 2 - a_{1,n}^G > \int_{x_{2,n}}^{1} dx = 1 - x_{2,n},$$

поради което $a_{1,n}^G < x_{2,n} + 1$, и е доказано неравенството за $k = 1$. Аналогично се получава и неравенството за $k = n$.

2.60. Тъй като $P' \in \pi_{2n-1}$, квадратурната формула на Гаус ще пресмята точно $\int_{-1}^{1} P'(x)\,dx$. Тогава

$$0 = P(1) - P(-1) = \int_{-1}^{1} P'(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} P'(x_{k,n}).$$

Тъй като коефициентите $a_{k,n}^{G}$ са положителни (вж. зад. 2.50), следва, че или е изпълнено $P'(x_{k,n}) = 0$ за всяко k, или има такива $i, j \in \{1, \dots, n,\}$, че $P'(x_{i,n})P'(x_{j,n}) < 0$. И в двата случая следва твърдението на задачата.

2.61. Нека $P(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n}$ е произволен полином от изследвания вид. Тогава $P(x) - \omega^2(x) \in \pi_{2n-1}$ и тъй като квадратурната формула на Гаус е точна за π_{2n-1}, получаваме

$$\int_{-1}^{1} [P(x) - \omega^2(x)]\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} P(x_{k,n}^{G}) \geq 0$$

(отчитаме, че $a_{k,n}^{G} > 0$ и $\omega(x_{k,n}) = 0$).

2.62. Очевидно $\{x_k\}$ са нулите на квадратурната формула на Гаус за интервала (a, b). Ако $\{A_k\}$ са коефициентите на тази формула, имаме

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} &= -\int_a^b \omega_k^2(x) \prod_{i=k+1}^{n} (x - x_i)\,dx = -\int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_k} \omega_k(x)\,dx \\
&= -\int_a^b \frac{\omega(x)}{x - x_k} \{[\omega_k(x) - \omega_k(x_k)] + \omega_k(x_k)\}\,dx \\
&= -\omega_k(x_k) \int_a^b \frac{\omega(x)\omega_k'(x_k)}{(x - x_k)\omega_k'(x_k)}\,dx = -\omega_k(x_k)\omega_k'(x_k) A_k .
\end{aligned}$$

Тъй като $A_k > 0$, $\operatorname{sgn} \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} = -\operatorname{sgn} \omega_k(x_k).\operatorname{sgn} \omega_k'(x_k) = (-1)^{n-k-1}$.

2.63. Търсеният интервал е $[x_{1,n}, x_{n,n}]$, определен от първата и последната нула на полинома на Льожандър: ако $[a, b] \supset [x_{1,n}, x_{n,n}]$, ще бъде изпълнено

$$P(1) - P(-1) = \int_{-1}^{1} P'(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} P'(x_{k,n}) \geq 0,$$

тъй като $P'(x) \geq 0$ в интервала $[a, b]$. Ако предположим, че $a > x_{1,n}$, може да се построи контрапример — например полиномът

$$P(x) = \int_c^x (t - a)(t - x_{2,n})^2 (t - x_{3,n})^2 \dots (t - x_{n,n})^2 dt$$

е от степен $2n$, $P'(x) = (x-a)(x-x_{2,n})^2(x-x_{3,n})^2 \dots (x-x_{n,n})^2 \geq 0$ за $x \geq a$, но $P(1) - P(-1) = a_{1,n}^{G} P'(x_{1,n}) < 0$. Следователно трябва да е изпълнено $a \leq x_{1,n}$. Аналогично, ако предположим $b < x_{n,n}$, полиномът

$$P(x) = \int_c^x (b - t)(t - x_{1,n})^2 (t - x_{2,n})^2 \dots (t - x_{n-1,n})^2 dt$$

е от степен $2n$, $P'(x) = (b - x)(x - x_{1,n})^2 (x - x_{2,n})^2 \dots (x - x_{n-1,n})^2 \geq 0$ за $x \leq b$, докато $P(1) - P(-1) = a_{n,n}^{G} P'(x_{n,n}) < 0$. Следователно необходимо е

$b \ge x_{n,n}$. Получихме, че $[a,b] \supset [x_{1,n}, x_{n,n}]$, с което задачата е решена.

2.64, 2.65. Вж. решението на зад. 2.59.

2.66. а) Съгласно теоремата на Пеано е изпълнено

$$\int_a^b f(x)\,dx - Q_n^G(f) = \int_a^b K_2(Q_n^G;x)f''(x)\,dx$$

и двете страни на това равенство са равни на нула за всеки полином от степен, ненадминаваща $2n-1$. Ако допуснем, че $K_2(Q_n^G;x)$ има най-много $2n-3$ различни нули в (a,b), бихме могли да построим алгебричен полином $P(x) \in \pi_{2n-1}$, чиято втора производна да следва смените на знака на $K_2(Q_n^G;x)$, т. е. P'' сменя знака си точно в тези точки от (a,b), където сменя знака си и $K_2(Q_n^G;x)$. Но тогава квадратурната формула няма да е точна за $P(x)$, тъй като $\int_a^b K_2(Q_n^G;x)P''(x)\,dx \neq 0$. Полученото противоречие показва, че $K_2(Q_n^G;x)$ има поне $2n-2$ смени на знака в (a,b). От друга страна, тъй като $K_2(Q_n^G;x)$ е парабола върху всеки от интервалите $(x_{k,n},\, x_{k+1,n})$, $k = 1,\dots,n-1$, и

$$K_2(Q_n^G;x) = \frac{(x-a)^2}{2} \ \text{ за } x \in (a, x_{1,n}); \quad K_2(Q_n^G;x) = \frac{(b-x)^2}{2} \text{ за } x \in (x_{n,n}, b),$$

виждаме, че $K_2(Q_n^G;x)$ не може да има повече от $2n-2$ нули в (a,b). Доказателството на б) и в) е аналогично.

2.67. Според зад. 2.66 $K_2(Q_n^G;x)$ трябва да има две различни реални нули $\tau_{1,j}$ и $\tau_{2,j}$ във всеки от интервалите

$$(x_{j,n}, x_{j+1,n}),\ j = 1,\dots,n-1.$$

Но за $x \in (x_{j,n}, x_{j+1,n})$

$$\begin{aligned} K_2(Q_n^G;x) &= \frac{(x+1)^2}{2} - \sum_{k=1}^{j} a_{k,n}^G (x - x_{k,n}) \\ &= \frac{1}{2}\left[x^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{j} a_{k,n}^G - 1\right)x + 1 + 2\sum_{k=1}^{j} a_{k,n}^G x_{k,n}\right]. \end{aligned}$$

Прилагайки формулите на Виет, получаваме

$$2x_{j,n} < \tau_{1,j} + \tau_{2,j} = 2\left(\sum_{k=1}^{j} a_{k,n}^G - 1\right) < 2x_{j+1,n},$$

а това са точно неравенствата (2.2).

2.68. Съгласно (2.2) е изпълнено

$$x_{k+1,n} - x_{k-1,n} > \sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^G - \sum_{j=1}^{k-1} a_{j,n}^G = a_{k,n}^G.$$

2.69. Използуваме резултата от зад. 2.47. За полиномите на Льожандър P_n знаем, че $P_n(x) = \dfrac{(2n)!}{2^n[n!]^2}x^n + \cdots$ и $\int_{-1}^1 P_n^2(x)\,dx = 2/(2n+1)$. Съгласно зад. 2.47 имаме

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} f(x_{k,n}) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\left(\frac{(2n)!}{2^n[n!]^2}\right)^{-2}\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx$$
$$= f^{(2n)}(\xi)\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^2(2n+1)!},$$

и оттук можем да установим исканата оценка.

2.70. Нека $\{x_{k,n}\}_{k=1}^{n}$ са нулите на полинома на Льожандър и $\{a_{k,n}^{G}\}_{k=1}^{n}$ са коефициентите на квадратурната формула на Гаус за интервала $[-1,1]$. След смяна на променливата $t = \dfrac{b-a}{2}x + \dfrac{a+b}{2}$ получаваме

$$I(f) = \int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right)\,dx$$
$$= \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{G} f(t_{k,n}) + R_n(f),$$

където $t_{k,n} = \dfrac{b-a}{2}x_{k,n} + \dfrac{a+b}{2}$, $k = 1,\dots,n$, и

$$R_n(f) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1}\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{1}\omega^2(x)\,dx$$
$$= \frac{(b-a)^{2n+1}}{2n+1}\frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3}f^{(2n)}(\xi), \quad a \le \xi \le b.$$

2.71. Възлите на квадратурната формула на Лобато са нулите на $n-$тия ортогонален полином в $[-1,1]$ за теглото $\sigma(x) = 1 - x^2$, т. е. на полинома на Якоби $P_n^{(1,1)}$. Както е известно,

$$P_n^{(1,1)}(x) = \frac{(2n+2)!}{2^n n!(n+2)!}x^n + \dots$$

и

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)[P_n^{(1,1)}(x)]^2\,dx = \frac{2^3[(n+1)!]^2}{n!(n+2)!(2n+3)}.$$

Тогава съгласно зад. 2.48

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \left[\sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^{L} f(x_{k,n}) + b_n^L f(-1) + c_n^L f(1)\right]$$
$$= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\left(\frac{P_n^{(1,1)}(x)}{\frac{(2n+2)!}{2^n n!(n+2)!}}\right)^2\,dx$$
$$= \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\left(\frac{(2n+2)!}{2^n n!(n+2)!}\right)^{-2}\frac{2^3[(n+1)!]^2}{n!(n+2)!(2n+3)}$$
$$= f^{(2n+2)}(\xi)\frac{2^{2n+3}n![(n+1)!]^2(n+2)!}{[(2n+2)!]^2(2n+3)!},$$

откъдето получаваме желания резултат.

2.72. Решава се както предишните две задачи.

2.73. Възлите на квадратурната формула на Радо са нулите на полинома на Якоби $P_n^{(0,1)}(x)$. Използуваме, че $y(x) = P_n^{(0,1)}(x)$ удовлетворява диференциалното уравнение

$$(1-x^2)y'' - (3x+1)y' + n(n+2)y = 0. \tag{2.22}$$

Ако приложим квадратурната формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^R f(x_{k,n}) + b_n^R f(-1)$$

за $f(x) := y(x)$, ще получим равенството $\int_{-1}^{1} y(x)\,dx = b_n^R y(-1)$ и следователно $b_n^R = \dfrac{\int_{-1}^{1} y(x)\,dx}{y(-1)}$. За да намерим $\int_{-1}^{1} y(x)\,dx$, интегрираме уравнението (2.22) в граници от -1 до 1, като последователно чрез интегриране по части получаваме

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dy'(x) - \int_{-1}^{1} (3x+1)\,dy(x) + n(n+2)\int_{-1}^{1} y(x)\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} xy'(x)\,dx - (3x+1)y(x)\Big|_{-1}^{1} + 3\int_{-1}^{1} y(x)\,dx + n(n+2)\int_{-1}^{1} y(x)\,dx \\
&= 2x.y(x)\Big|_{-1}^{1} - 4y(1) + 2y(-1) + (n^2+2n+1)\int_{-1}^{1} y(x)\,dx \\
&= -2y(-1) + (n+1)^2 \int_{-1}^{1} y(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Оттук намираме

$$b_n^R = \frac{\int_{-1}^{1} y(x)\,dx}{y(-1)} = \frac{2}{(n+1)^2}.$$

2.74. Възлите на квадратурната формула на Лобато

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} a_{k,n}^L f(x_{k,n}) + b_n^L f(-1) + c_n^L f(1)$$

са нулите на полинома на Якоби $P_n^{(1,1)}(x)$. Ще използваме следните две свойства на полиномите $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$:

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+n+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x); \tag{2.23}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}. \tag{2.24}$$

Формулата на Лобато е точна за полинома $(1+x)P_n^{(1,1)}(x)$, следователно

$$\int_{-1}^{1} (1+x)P_n^{(1,1)}(x)\,dx = 2c_n^L P_n^{(1,1)}(1),$$

и предвид (2.24)

$$c_n^L = \frac{1}{2(n+1)} \int_{-1}^{1} (1+x) P_n^{(1,1)}(x)\, dx. \tag{2.25}$$

За да пресметнем интеграла, използваме формулата (2.23) и виждаме, че

$$\frac{d}{dx} P_{n+1}(x) = \frac{n+2}{2} P_n^{(1,1)}(x),$$

където $P_{n+1}(x)$ е полиномът на Льожандър. Тогава

$$\int_{-1}^{1} (1+x) P_n^{(1,1)}(x)\, dx = \frac{2}{n+2} \int_{-1}^{1} (1+x) dP_{n+1}(x)$$

$$= \frac{2}{n+2} \left[(1+x) P_{n+1}(x) \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)\, dx \right] = \frac{4}{n+2}$$

(в последното равенство $P_{n+1}(1) = 1$ съгласно (2.24), интегралът е 0 поради ортогоналността). Като заместим стойността на интеграла в (2.25), получаваме формулата за c_n^L. Коефициентът b_n^L е равен на c_n^L поради симетрията.

2.75. Съгласно зад. 2.66 второто ядро на Пеано за формулата на Лобато има $2n$ прости нули в $[-1, 1]$ и следователно по две нули $\tau_{1,k}$ и $\tau_{2,k}$ във всеки интервал $(x_{k,n}, x_{k+1,n})$, $k = 1, \dots, n-1$. От друга страна, предвид зад. 2.74 за $x \in (x_{k,n}, x_{k+1,n})$ имаме

$$K_2(Q_n^L; x) = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{2}{(n+1)(n+2)}(x+1) - \sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^L (x - x_{j,n})$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^L - \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \right) x + \sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^L x_{j,n} + \frac{1}{2} - \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

От формулите на Виет тогава получаваме

$$2x_{k,n} < \tau_{1,k} + \tau_{2,k} = 2 \sum_{j=1}^{k} a_{j,n}^L - 2 \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} < 2x_{k+1,n},$$

и това са точно желаните неравенства.

2.76. Решава се като зад. 2.75.

2.77. Решава се като зад. 2.68.

2.78. Възлите на квадратурните формули са нулите на полиномите на Льожандър $P_2(x)$ и $P_3(x)$, които са (вж. (2.1))

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

откъдето намираме

$$x_{1,2} = -\sqrt{3}/3, \ x_{2,2} = \sqrt{3}/3, \quad x_{1,3} = -\sqrt{3/5}, \ x_{2,3} = 0, \quad x_{3,3} = \sqrt{3/5}.$$

От условието квадратурните формули да са точни съответно за $1, x$ и $1, x, x^2$ намираме

$$a_{1,2}^G = a_{2,2}^G = 1; \quad a_{1,3}^G = a_{3,3}^G = \frac{5}{9}, \quad a_{2,3}^G = \frac{8}{9}.$$

За оценка на грешката можем да се възползуваме от зад. 2.69, откъдето получаваме

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - [f(-\sqrt{3}/3) + f(-\sqrt{3}/3)]\right| \le \frac{M_4}{135},$$

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \frac{1}{9}[5f(-\sqrt{3/5}) + 8f(0) + 5f(\sqrt{3/5})]\right| \le \frac{M_6}{15750},$$

тук $M_4 = ||f^{(4)}||_{C[-1,1]}$, $M_6 = ||f^{(6)}||_{C[-1,1]}$.

2.79. Намираме полинома $p(x) = x^2 + ax + b$, ортогонален на π_1 по отношение на теглото $\sigma(x) = 1 - |x|$. Условията са

$$\int_{-1}^{1} (1-|x|)(x^2 + ax + b)x^k\,dx = 0, \quad k = 0, 1,$$

откъдето получаваме $a = 0$, $b = -1/6$, $p(x) = x^2 - 1/6$. Следователно възлите на търсената квадратурна формула ще бъдат

$$x_1 = -1/\sqrt{6},\ x_2 = 1/\sqrt{6}.$$

Условието формулата да е точна за $f(x) = 1$, x води до системата

$$\begin{aligned} a_1.1 + a_2.1 &= \int_{-1}^{1} (1-|x|)1\,dx = 1, \\ a_1(-1/\sqrt{6}) + a_2(1/\sqrt{6}) &= \int_{-1}^{1} (1-|x|)x\,dx = 0, \end{aligned}$$

откъдето намираме $a_1 = a_2 = 1/2$. За грешката на получената квадратурна формула съгласно зад. 2.47 имаме

$$\left|\int_{-1}^{1} (1-|x|)f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(-1/\sqrt{6}) + f(\sqrt{6})]\right|$$
$$\le \frac{M_4}{4!}\int_{-1}^{1} (1-|x|)(x^2 - \frac{1}{6})^2\,dx = \frac{7M_4}{4320}.$$

2.80. Възлите на квадратурната формула са нулите на полинома $p(x) = x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$, ортогонален на π_1 в $[-1,1]$ по отношение на теглото $\sigma(x) = \sqrt{1-x^2}(1-x^2)$. Условията за ортогоналност налагат системата

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}(1-x^2)(x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2)\,dx &= 0, \\ \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}(1-x^2)(x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2)x\,dx &= 0, \end{aligned}$$

откъдето намираме

$$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_2 = -1/6,\ \ p(x) = x^2 - 1/6 \quad \text{и} \quad x_1 = -1/\sqrt{6},\ x_2 = 1/\sqrt{6}.$$

Ако търсената квадратурна формула има вида

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}f(x)\,dx$$
$$\approx bf(-1) + cf(1) + a_1 f(-1/\sqrt{6}) + a_2 f(1/\sqrt{6}) := Q(f),$$

коефициентите b, c, a_1 и a_2 намираме от условието квадратурната формула да е точна за $f(x) = 1, x, x^2$ и x^3. Имаме

$$\begin{aligned} Q(1) &= b + c + a_1 + a_2 = I(1) = \frac{\pi}{2}, \\ Q(x) &= -b + c - \frac{1}{\sqrt{6}} a_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} a_2 = I(x) = 0, \\ Q(x^2) &= b + c + \frac{1}{6} a_1 + \frac{1}{6} a_2 = I(x^2) = \frac{\pi}{8}, \\ Q(x^3) &= -b + c - \frac{1}{6\sqrt{6}} a_1 + \frac{1}{6\sqrt{6}} a_2 = I(x^3) = 0. \end{aligned}$$

Решението на тази система е $b = c = \dfrac{\pi}{40}$, $a_1 = a_2 = \dfrac{9\pi}{40}$. За грешката на формулата на Лобато е изпълнено

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} f(x)\, dx - \frac{\pi}{40} [f(-1) + f(1) + 9f(-1/\sqrt{6}) + 9f(1/\sqrt{6})] \right| \\ &\qquad \le \frac{M_6}{6!} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}(1-x^2)[x^2 - 1/6]^2\, dx = \frac{M_6 \pi}{55296}, \end{aligned}$$

където $M_6 = \max_{x\in[-1,1]} |f^{(6)}(x)|$.

2.81. Проверява се, че квадратурната формула е точна за полиномите от степен, ненадминаваща 2, следователно наистина е формулата на Радо (която е единствена при фиксирано n). Ако $P(f;x) \in \pi_2$ интерполационен полином на Ермит за функцията $f \in C^3[-1,1]$, построен по стойностите $f(2/3)$, $f'(2/3)$ и $f(0)$, изпълнено е

$$f(x) - P(f;x) = \frac{f'''(\xi(x))}{3!} x(x-2/3)^2.$$

Като интегрираме това равенство в граници от 0 до 1 и приложим теоремата за средните стойности, ще получим желаната формула (задачата може да се реши и като се изследва ядрото на Пеано за квадратурната формула).

2.82. Намираме полинома $p(x) = x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$, ортогонален в $[-1,1]$ по отношение на теглото $\sigma(x) = 1 + x$. Получаваме

$$p(x) = x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5},$$

следователно нулите му $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{6}}{5}$ и $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{6}}{5}$ са вътрешните възли на квадратурната формула на Радо. От условието формулата да бъде точна за $1, x, x^2$ намираме коефициентите пред $f(-1)$, $f(x_1)$ и $f(x_2)$ съответно $\dfrac{2}{9}$, $\dfrac{16+\sqrt{6}}{18}$, $\dfrac{16-\sqrt{6}}{18}$. За грешката на формулата на Радо е изпълнено

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} f(x)\, dx - \frac{1}{18}\left[4f(-1) + (16+\sqrt{6}) f\left(\frac{1-\sqrt{6}}{5}\right) + (16-\sqrt{6}) f\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}\right)\right] \\ &\qquad = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \int_{-1}^{1} (1+x)\left[x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}\right]^2 dx = \frac{f^{(5)}(\xi)}{1125}. \end{aligned}$$

2.84. Възлите на формулата на Лобато са нулите на полинома от втора степен, ортогонален по отношение на теглото $\sigma(x) = 1 - x^2$, а той е $p(x) = x^2 - 1/5$ и следователно $x_1 = -1/\sqrt{5}$, $x_2 = 1/\sqrt{5}$. От условието формулата да е точна за $1, x, x^2, x^3$ намираме и коефициентите на формулата

$$I(f) := \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}[f(-1) + 5f(-1/\sqrt{5}) + 5f(1/\sqrt{5}) + f(1)] := Q(f).$$

За грешката на формулата е изпълнено

$$I(f) - Q(f) = -\frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}\int_{-1}^{1}(1-x^2)[x^2 - 1/5]^2\,dx = -\frac{2f^{(6)}(\xi)}{23625}.$$

2.85. Лесно се проверява, че $I_n := \int_0^\infty e^{-x}x^n\,dx = n!$ (I_n е всъщност Ойлеровата функция $\Gamma(n+1)$). Непосредствената проверка показва, че $Q(x^k) = k!$, $k = 0, 1, 2, 3$, докато $Q(x^4) = 20 \neq 4!$.

2.86. Нека $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}x^n\,dx$. Като интегрираме по части, получаваме рекурентната връзка $I_n = \dfrac{n-1}{2}I_{n-2}$. Тъй като $I_0 = \sqrt{\pi}$ (това е известният интеграл на Поасон) и $I_1 = 0$, то

$$I_{2n-1} = 0,\ I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi},\quad n = 1, 2, \dots$$

От друга страна, за приближената стойност $Q(f)$ получаваме

$$\begin{aligned}
&Q(x^{2n-1}) = 0 = I_{2n-1}, && n = 1, 2, \dots,\\
&Q(x^{2n}) = 2\frac{\sqrt{\pi}}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{3^{n-1}}{2^n}\sqrt{\pi}, && n = 1, 2, \dots,\\
&Q(x^0) = I_0 = \sqrt{\pi},\\
&Q(x^6) = \frac{9}{8}\sqrt{\pi} \neq \frac{15}{8}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

2.87. Добавяме два произволни възела $x_{-1} < 1$ и $x_{2n} > 1$. B–сплайните

$$\{B_i(t)\}_{i=1}^{2n},\quad B_i = (\cdot - t)_+[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$$

тогава образуват базис за пространството X, следователно търсената квадратурна формула трябва да бъде точна за всяка от функциите $\{B_i(t)\}_{i=1}^{2n}$. Тъй като B–сплайните са неотрицателни, следва, че всеки един от интервалите (x_{i-1}, x_{i+1}), $i = 2, \dots, 2n-3$, както и (x_0, x_1) и (x_{2n-2}, x_{2n-1}), трябва да съдържа възел на квадратурната формула. От друга страна, формулата има само n възела, следователно $\tau_k \in (x_{2k-2}, x_{2k-1})$, $k = 1, \dots, n$. От свойствата на B–сплайните следва

$$\int_0^1 B_i(t) = 1/2,\quad i = 2, \dots, 2n-1,$$

а изискването квадратурната формула да е точна за B–сплайните води до

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 B_{2k-1}(t)dt = a_k B_{2k-1}(\tau_k) = 1/2, \quad k = 2, \dots, n,\\
&\int_0^1 B_{2k}(t)dt = a_k B_{2k}(\tau_k) = 1/2, \quad k = 1, \dots, n-1,
\end{aligned}$$

което показва, че $B_{2k-2}(\tau_k) = B_{2k-1}(\tau_k)$, т. е. $\{\tau_k\}_{k=2}^{n-1}$ са точно абсцисите на пресечните точки на графиките на $B_{2k-1}(t)$ и $B_{2k}(t)$. От явния вид на B–сплайните

$$B_i(t) = \begin{cases} \dfrac{t - x_{i-2}}{(x_i - x_{i-2})(x_{i-1} - x_{i-2})} & \text{за } x_{i-2} \le t < x_{i-1}, \\ \dfrac{x_i - t}{(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})} & \text{за } x_{i-1} \le t \le x_i, \\ 0 \quad \text{в останалите случаи,} \end{cases}$$

намираме търсените формули за a_k и τ_k, $k = 2, \dots, n-1$. За определяне на крайните възли и коефициенти, освен условията

$$\int_0^1 B_2(t)dt = a_1 B_2(\tau_1) = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 B_{2n-2}(t)dt = a_n B_{2n-2}(\tau_n) = \frac{1}{2},$$

използуваме още равенствата

$$\int_0^1 B_1(t)dt = a_1 B_1(\tau_1) = \frac{x_1 - x_0}{2(x_1 - x_{-1})},$$

$$\int_0^1 B_{2n}(t)dt = a_n B_{2n}(\tau_n) = \frac{x_{2n-1} - x_{2n-2}}{2(x_{2n} - x_{2n-2})},$$

които лесно се извеждат от явния вид на B–сплайните.

2.88, 2.89. Решават се както зад. 2.87.

2.90. Непосредствено се проверява, че разглежданата квадратурна формула е точна за функциите $1, x$. Ядрото на Пеано за квадратурната формула е

$$\begin{aligned} K_2(Q;x) &= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4n-2}\left(x - \frac{2}{6n-3}\right)_+ \\ &- \frac{2}{2n-1}\sum_{k=2}^{n-1}\left(x - \frac{4k-3}{4n-2}\right)_+ - \frac{3}{4n-2}\left(x - \frac{6n-5}{6n-3}\right)_+. \end{aligned}$$

Като използваме това представяне, показваме индуктивно, че ако означим с $\{\tau_k\}_{k=1}^{n}$ възлите на разглежданата квадратурна формула, изпълнено е

$$K_2(Q;x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & \text{за } 0 \le x \le \tau_1, \\ \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{2k-1}{2n-1}\right)\left(x - \dfrac{2k}{2n-1}\right) & \text{за } \tau_k \le x \le \tau_{k+1}, \\ \qquad k = 1, \dots, n-1, & \\ \dfrac{1}{2}(x-1)^2 & \text{за } \tau_n \le x \le 1. \end{cases}$$

Съгласно зад. 2.24 квадратурната формула ще бъде точна за всяка от функциите

$$\left(x - \frac{i}{2n-1}\right)_+, \quad i = 1, 2, \dots, 2n-2,$$

с което е установено, че формулата е точна за пространството X, тъй като тези функции заедно с $1, x$ образуват базис в това пространство. Използувайки последното представяне на $K_2(Q;x)$, пресмятаме

$$\int_0^1 |K_2(Q;x)|\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} |K_2(Q;x)|\,dx = \frac{n-1}{4(2n-1)^3},$$

където $\tau_0 := 0$, $\tau_{n+1} := 1$. Формулата за грешката сега се получава от следствие 2.2 от теоремата на Пеано.

Разглежданата квадратурна формула може да се получи и като се използуват формулите от зад. 2.87.

2.91, 2.92, 2.93. Решават се както зад. 2.90.

Глава 3

РАВНОМЕРНИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

С $C_{[a,b]}$ ще означаваме множеството на всички непрекъснати функции в интервала $[a,b]$.

Ако функцията f е дефинирана в интервала $[a,b]$, то $w(f;\delta)$ се нарича *модул на непрекъснатост* на f и се определя чрез

$$w(f;\delta) = \sup_{|x'-x''|\le\delta} |f(x') - f(x'')|, \quad x', x'' \in [a,b].$$

За функцията f, дефинирана в интервала $[a,b]$, с $\|f\|$ ще означаваме равномерната норма, определена чрез $\|f\| = \sup_{a\le x\le b} |f(x)|$. С π_n ще означаваме съвкупността на всички алгебрични полиноми от степен, неповисока от n. Ако функцията f е дефинирана в интервала $[a,b]$, то $E_n(f)$ се нарича *най-добро равномерно приближение на* f с полиноми от π_n и се определя чрез $E_n(f) = \inf_{p\in\pi_n} \|f - p\|$.

Теорема 3.1 (Борел). *За всяко естествено n и всяка непрекъсната в интервала $[a,b]$ функция f съществува алгебричен полином P от n-та степен на най-добро равномерно приближение, т. е. такъв, че*

$$E_n(f) = \|f - P\|.$$

Ако функцията $f \in C_{[a,b]}$, то полиномът ѝ на най-добро равномерно приближение от n-та степен е единствен.

Теорема 3.2 (Чебишов). *Нека f е непрекъсната функция в интервала $[a,b]$. Необходимо и достатъчно условие P да бъде алгебричен полином на най-добро равномерно приближение от n-та степен за f е да съществуват такива $n+2$ точки $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$ в интервала $[a,b]$, че*

$$f(x_i) - P(x_i) = \varepsilon(-1)^i \|f - P\|, \quad \text{където } \varepsilon \text{ е или } 1, \text{ или } -1.$$

Точките $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ се наричат *точки на Чебишов алтернанс.*

Теорема 3.3 (Вайерщрас). *Ако $f \in C_{[a,b]}$, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват такова цяло положително число n и такъв алгебричен полином P от n-та степен, че $\|f - P\| < \varepsilon$.*

Съответствието L, с което на всяка функция $f \in A$ се съпоставя една функция $L(f) \in V$, се нарича *оператор с дефиниционна област A и област на стойности V*. Стойността на $L(f)$ в точката x ще означаваме с $L(f; x)$. Операторът L се нарича *линеен*, ако $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$, където α и β са числа.

Операторът L се нарича *положителен*, ако от $f(x) \geq 0$ за всяко $x \in [a,b]$ следва $L(f; x) \geq 0$ за всяко $x \in [a,b]$.

Теорема 3.4 (Коровкин). *Нека L е линеен положителен оператор, дефиниран в $C_{[a,b]}$ и*

$$L(1; x) = 1,$$
$$L(t; x) = x + \alpha(x),$$
$$L(t^2; x) = x^2 + \beta(x).$$

Тогава за всяка функция $f \in C_{[a,b]}$ е изпълнено

$$L(f; x) = f(x) + \gamma(x),$$

където

$$|\gamma(x)| \leq 2\omega\Big(f; \sqrt{\beta(x) - 2x\alpha(x)}\Big).$$

Полиномите на Бернщайн (операторите на Бернщайн) в интервала $[0,1]$ се определят чрез

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Задача 3.1. Покажете, че:
а) $\omega(|x|; \delta) \leq \delta$; б) $\omega(x^{\frac{1}{3}}; \delta) \leq (4\delta^{\frac{1}{3}})$; в) $\omega(\sin x; \delta) \leq \delta$.

Задача 3.2. Докажете, че $\lim_{\delta \to 0} \omega\left(\cos \frac{\pi}{x}; \delta\right) = 2$ при $x \in (0,1)$.

Задача 3.3. Докажете, че $f \in C_{[a,b]}$ тогава и само тогава, когато $\lim_{\delta \to 0} \omega(f; \delta) = 0$.

Задача 3.4. Да се докаже, че за всяка функция f и за произволни $\delta \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ е изпълнено $0 \leq \omega(f; \delta) \leq \omega(f; \delta + \varepsilon) \leq \omega(f; \delta) + \omega(f; \varepsilon)$.

Задача 3.5. Покажете, че за всяко $\lambda \geq 0$ е в сила неравенството $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$.

Задача 3.6. Да означим $\mathrm{Lip}_H\alpha = \{f : |f(x_1) - f(x_2)| \le H|x_1 - x_2|^\alpha\}$. Докажете, че $f \in \mathrm{Lip}_H\alpha$ тогава и само тогава, когато $\omega(f;\delta) \le H\delta^\alpha$.

Задача 3.7. Докажете, че ако $f \in C_{[a,b]}$, то $\omega(f;\delta)$ е непрекъсната функция на δ; $\delta \ge 0$.

Задача 3.8. Нека $f \in C_{[0,1]}$ и

$$S_n(x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{2i-1}{2n}\right) & \text{за } x \in \left(\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right), \quad i = 1,2,\dots,n, \\ f\left(\dfrac{i}{n}\right) & \text{за } x = \dfrac{i}{n}, \quad i = 0,1,\dots,n. \end{cases}$$

Докажете, че $\|f - S_n\|_C \le \omega\left(f; \dfrac{1}{2n}\right)$.

Задача 3.9. Покажете, че:
а) $\omega(\operatorname{sgn} x;\delta) = 1, \quad x \ge 0$; б) $\omega(x \operatorname{sgn} x;\delta) \le \delta$;
в) $\omega(x^2 \operatorname{sgn} x;\delta) \le \delta(2-\delta)$ при $0 \le \delta \le 1, \quad -1 \le x \le 1$;
$\omega(x^2 \operatorname{sgn} x;\delta) = 2 - 2\delta + \delta^2$ при $1 < \delta \le 2, \quad -1 \le x \le 1$.

Задача 3.10. Докажете, че за всеки две функции f и g е изпълнено $\omega(f+g;\delta) \le \omega(f;\delta) + \omega(g;\delta)$.

Задача 3.11. Докажете, че ако $\delta_1 \le \delta_2$, то $\omega(f;\delta_2)/\delta_2 \le 2\omega(f;\delta_1)/\delta_1$.

Задача 3.12. Да се докаже, че ако $f_1 \in C_{[-1,1]}$ и $f_2 \in C_{[0,\pi]}$, където $f_2(x) = f_1(\cos x)$, то $\omega(f_2;\delta) \le \omega(f_1;\delta)$.

Задача 3.13. Ако $f \in C_{[a,b]}$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от нулева степен и пресметнете $E_0(f)$.

Задача 3.14. Нека $f \in C^2_{[a,b]}$ и $f'' \ne 0$ има постоянен знак. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен на f.

Задача 3.15. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен на функцията $\sqrt{x}, x \in [0,1]$.

Задача 3.16. За функцията $f(x) = \arcsin x, x \in [0,1]$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен и пресметнете $E_1(f)$.

Задача 3.17. За функцията $f(x) = 1/(x+2)$, $x \in [0,1]$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен и пресметнете $E_1(f)$.

Задача 3.18. За функцията $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in [0,1]$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от първа степен и пресметнете $E_1(f)$.

Задача 3.19. Докажете, че ако $f \in C_{[-a,a]}$ е четна (нечетна) функция, то полиномът на най-добро равномерно приближение на f от степен n е също четен (нечетен).

Задача 3.20. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен на функцията $|x|$ в интервала $[-1,1]$.

Задача 3.21. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен на функцията $f_m(x) = \operatorname{arctg}(mx^2)$ в интервала $[-1,1]$. Изследвайте $E_2(f_m)$ при $m \to \infty$.

Задача 3.22. За функцията $\sqrt[m]{|x|}, x \in [-1,1]$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен и най-доброто приближение $E_2(\sqrt[m]{|x|})$. Изследвайте $E_2(\sqrt[m]{|x|})$ при $m \to \infty$.

Задача 3.23. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен на функцията $f_m(x) = 1/(mx^2+1)$ в интервала $[-1,1]$. Изследвайте $E_2(f_m)$ при $m \to \infty$.

Задача 3.24. За функцията

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{за } -1 \le x < -\alpha, \\ \dfrac{x}{\alpha} & \text{за } -\alpha \le x < \alpha, \\ 1 & \text{за } \alpha < x \le 1, \end{cases}$$

където $0 < \alpha < 1$, намерете полинома на най-добро равномерно приближение от нулева, първа, втора, трета и четвърта степен и пресметнете съответните най-добри приближения.

Задача 3.25. Нека $f(x) = |x - 0,5|$, $x \in [-1,1]$. Намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен на f и пресметнете $E_2(f)$.

Задача 3.26. Нека $f(x) = A\sin nx,\ x \in [0, 2\pi]$. Намерете $E_0(f)$, $E_1(f), \dots, E_{2n-2}(f)$.

Задача 3.27. Нека $f \in C_{[0,1]}$, $g \in C_{[0,1]}$. Докажете, че:

а) $E_n(f+g) \le E_n(f) + E_n(g)$; б) $E_n(\gamma f) = |\gamma| E_n(f)$;

в) ако $g \in \pi_n$, то $E_n(f+g) = E_n(f)$; г) $E_n(f) \le \|f\|$.

Задача 3.28. Нека $f \in C_{[0,1]}$, $g \in C_{[0,1]}$ и $\psi(\lambda) = E_n(f + \lambda g)$. Докажете, че:

а) $\psi(\lambda)$ е непрекъсната функция; б) $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} \psi(\lambda) = \infty$;

в) $\psi(\lambda)$ е изпъкнала функция.

Задача 3.29. Нека за $x \in [a,b]$ е изпълнено $f^{(n+1)}(x) > 0$ и

$$E_n(f) = \|f - P\|,\ P \in \pi_n.$$

Докажете, че уравнението $f(x) - P(x) = 0$ има точно $n+1$ корена в интервала $[a,b]$.

Задача 3.30. Нека $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ е полиномът на най-добро равномерно приближение от степен n на функцията $\sqrt{x}$ в интервала $[0,1]$. Докажете, че $a_0 > 0$ и $\mathrm{sgn} a_i = (-1)^{i+1}$ за $i \ge 1$.

Задача 3.31. Нека $f, g \in C_{[a,b]}$ и $E_n(f) = \|f - P\|$, $E_n(g) = \|g - Q\|$. Докажете, че:

а) $|E_n(f) - E_n(g)| \le \|f - g\|$; б) $\|P - Q\| \le 2(E_n(f) + \|f - g\|)$.

Задача 3.32. Нека $f \in C_{[a,b]}$ и $\varepsilon > 0$. Докажете, че съществува такова $\delta > 0$, че ако $\|Q - P\| < \varepsilon$, $E_n(f) = \|f - P\|$ за някой полином $Q \in \pi_n$, то $\|Q - f\| \le (1+\delta) E_n(f)$.

Задача 3.33. За функцията $f(x) = 1/(x-a)$ в интервала $[-1,1]$ намерете $E_n(f)$ и полинома на най-добро равномерно приближение от степен n при $a > 1$.

Задача 3.34. Нека за функциите f и g в интервала $[-1,1]$ е изпълнено условието $0 < f^{(n+1)}(x) < g^{(n+1)}(x)$. Докажете, че $E_n(f) \le E_n(g)$.

Задача 3.35. Докажете, че за всяка функция $f \in C_{[a,b]}$ съществува такава триъгълна матрица от възли $\{x_{n,i}\}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, че ако $L_n(f)$ е интерполационният полином на Лагранж за f по възлите $x_{n0}, x_{n1}, \dots, x_{nn}$, то $\|L_n(f) - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Задача 3.36. Докажете, че за функцията $f(x) = \cos x$ в интервала $[-1, 1]$ е в сила $E_n(f) \le 1/[2^{n-1}(n+1)!]$.

Задача 3.37. Докажете, че за функцията $f(x) = e^x$ в интервала $[-1, 1]$ е изпълнено $E_{10}(f) < 10^{-10}$.

Задача 3.38. Докажете, че в интервала $[-1, 1]$ е изпълнено равенството

$$|x| = 1 - \frac{1}{2}(1-x^2) - \frac{1}{2.4}(1-x^2)^2 - \cdots - \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2.4\ldots 2n}(1-x^2)^n - \cdots$$

Пресметнете скоростта на сходимост на горния ред.

Задача 3.39. Нека $\psi \in C_{[a,b]}$ и $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$. Да се докаже, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува полином R, за който

$$R(x_k) = \psi(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{и} \quad \|R - \psi\| < \varepsilon.$$

Задача 3.40. Използувайки теоремата на Вайерщрас, докажете, че ако $f \in C_{[a,b]}$ и $\int_a^b x^k f(x)dx = 0,\ k = 0, 1, \ldots,$ то $f(x) = 0$.

Задача 3.41. Ако $f \in C_{[a,b]}$, то покажете, че съществува редица полиноми $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ с цели коефициенти, за които $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ за $x \in [a, b]$, където $[a, b] \subset (0, 1)$.

Задача 3.42. Чрез директно пресмятане покажете, че във всеки краен интервал $B_n(t^3; x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^3$, където $B_n(t^3; x)$ е полиномът на Бернщайн за функцията x^3.

Задача 3.43. Покажете, че за полиномите на Бернщайн $B_n(f)$ е изпълнено $\|B_n(f)\| \le \|f\|$.

Задача 3.44. Да се докаже, че ако $f \in C^1_{[a,b]}$, то за полиномите на Бернщайн $B_n(f)$ е изпълнено $\|(B_n(f))' - f'\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Задача 3.45. Да се докаже, че ако функцията $f \in C^1_{[a,b]}$, то за всяко $\varepsilon > 0$ съществува полином P, за който $\|f^{(i)} - P^{(i)}\| < \varepsilon,\ i = 0, 1$.

Задача 3.46. Ако $f_{n0}(x) = 1,\ f_{nm}(x) = x\,(x - 1/n)\cdots(x - (m-1)/n)$, то покажете, че полиномите на Бернщайн $B_n(f_{nm})$ удовлетворяват равенството $B_n(f_{nm}; x) = x^m f_{nm}(1),\ n \ge m$.

Задача 3.47. Намерете полиномите на Бернщайн за функциите

$$f(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = e^x$$

в интервала $[0, 1]$.

Задача 3.48. Напишете явния вид на полиномите на Бернщайн в интервала $[a, b]$.

Задача 3.49. За функцията e^{kx}, $x \in [a, b]$, намерете $B_n(e^{kt}; x)$.

Задача 3.50. Постройте $B_{2n}(|t|; x)$ в интервала $[-1, 1]$.

Задача 3.51. За функцията $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$, $x \in [-1, 1]$, намерете $B_4(f; x)$.

Задача 3.52. Докажете, че ако $f \in \pi_k$, то $B_n(f) \in \pi_k$ за $n \geq k$.

Задача 3.53. Да се докаже, че ако $f'' \in C_{[0,1]}$, то

$$|f(x) - B_n(f; x)| \leq \frac{x(1-x)}{n} \|f''\|.$$

Задача 3.54. За функцията x^n в интервала $[-1, 1]$ намерете полинома на най-добро равномерно приближение от $(n-1)-$ва степен.

Задача 3.55. Измежду всички полиноми от вида $Ax^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, където $A \neq 0$ е дадено число, намерете полином, отклоняващ се най-малко от нулата в интервала $[a, b]$.

Задача 3.56. Докажете, че за полиномите на Чебишов от първи род $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ е изпълнено:

а) $T_{m+n} + T_{m-n} = 2T_m T_n$; б) $T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$;

в) $T_{2n} = 2T_n^2 - 1$; г) $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$.

Задача 3.57. Докажете, че:

а) $T'_{n+1}/(n+1) = 2T_n + T'_{n-1}/n - 1, n > 1$;

б) $T'_{2n}/(2n) = 2(T_{2n-1} + T_{2n-3} + \cdots + T_1)$;

в) $T'_{2n+1}/(2n+1) = 2(T_{2n} + T_{2n-2} + \cdots + T_2) + 1$.

Задача 3.58. Докажете, че

$$T_{2k+1}(x)/x = 2T_{2k}(x) - 2T_{2k-2}(x) + 2T_{2k-4}(x) + \cdots + (-1)^k T_0(x).$$

Задача 3.59. Нека T_n^* е полиномът на Чебишов в интервала $[0,1]$. Докажете, че :

а) $T_n^*(x) = T_n(2x-1)$;
б) $T^*_{n+1}(x) = (4x-2)T_n^*(x) - T^*_{n-1}(x)$.

Задача 3.60. За $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$, $x \in [-1,1]$, покажете, че $E_1(f) > 0,021$ и $E_2(f) < 0,016$.

Задача 3.61. Покажете, че измежду всички полиноми от степен, не по-висока от n, приемащи в точката ξ стойност η, $|\xi| > 1$, полиномът $\eta T_n(x)/T_n(\xi)$ се отклонява най-малко от нулата в интервала $[-1,1]$.

Задача 3.62. Докажете, че ако полиномът P от степен, не по-висока от n, удовлетворява неравенството $\max_{-1\le x\le 1}|P(x)| \le L$, то за всяко $x \ge 1$ е изпълнено

$$P(x) \le \frac{L}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n].$$

Задача 3.63. За полинома ax^3+bx^2+cx+d намерете полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен в интервала $[-1,1]$.

Задача 3.64. Докажете, че ако функциите f и g удовлетворяват в интервала $[-1,1]$ неравенството $|f^{(n+1)}(x)| < g^{(n+1)}(x)$, то $E_n(f) < 2E_n(g)$.

Задача 3.65. Докажете, че:

а) $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$;
б) $\dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x), \quad -1 < t < 1$;
в) $T_n(x) = x^n - \dbinom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \dbinom{n}{4}4x^{n-4}(1-x^2)^2 + \cdots$;
г) $T_n(T_m(x)) = T_{nm}(x)$; д) $T_{2n}(x) = T_n(2x^2-1)$;
е) $\int T_n(x)dx = T_{n+1}(x)/(2n+2) - T_{n-1}(x)/(2n-2)$.

Задача 3.66. Нека S е съвкупност от краен брой рационални числа в интервала $[-1,1]$. Докажете, че съществува такова цяло положително n, че ако означим с $R_n = \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ нулите на T_n, то $S \bigcap R_n = \emptyset$.

Задача 3.67. Нека $E_n(f) = \inf_{P\in\pi_n} \|f - P\|$, а γ и
$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$
се определят от условията $(-1)^i\gamma + P_n(x_i) = f(x_i),\ i = 1,2,\dots,n+2$, т. е. $\gamma = \gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$, където $a \le x_1 < x_2 < \cdots x_{n+2} \le b$. Докажете, че ако $f \in C_{[a,b]}$, то $E_n(f) = \max_{x_1<x_2<\cdots<x_{n+2}} |\gamma(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})|$.

Задача 3.68. Нека $f \in C_{[a,b]}$ и $B_n(f)$ е n-тият полином на Бернщайн на f в интервала $[0,1]$. Докажете, че $\|B_n(f) - f\| \le 2\omega(f; \dfrac{1}{2\sqrt{n}})$.

Задача 3.69. Нека $M_n(f;x) = e^{-nx}\sum\limits_{k=0}^{\infty} f(\dfrac{k}{n})\dfrac{(nx)^k}{k!}$. Докажете, че за всяка функция $f \in C_{[0,\infty]}$ е в сила $|f(x) - M_n(f;x)| \le 2\omega(f; \sqrt{\dfrac{x}{n}})$.

Задача 3.70. Докажете, че $\|f - K_n(f)\| \le c\omega(f; \dfrac{1}{\sqrt{n}})$, където $f \in C_{[0,1]}$ и
$$K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)\,dt,$$
а константата c не зависи от n и f.

Задача 3.71. Нека $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$, а $g_i,\ i = 1,2,\dots,n$, са функции, дефинирани в $[a,b]$. Докажете, че $L_n(f;x) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)g_i(x)$ е линеен положителен оператор тогава и само тогава, когато $g_i(x) \ge 0$ за всяко $x \in [a,b]$ и всяко $i = 1,2,\dots,n$.

Задача 3.72. Докажете, че ако $f \in C_{[0,\ 1+1/n]}$ и
$$f_n(x) = n\int_0^{1/n} f(x+t)\,dt,$$
то $\|f - f_n\| \le \omega(f; \dfrac{1}{n})$.

Задача 3.73. Нека полигонът l_n с възли $x_i = \dfrac{i}{n},\ i = 0,1,\dots,n$, интерполира функцията $f \in C_{[0,1]}$ в точките $x_i,\ i = 0,1,\dots,n$. Докажете, че
$$\|f - l_n\| \le 3\omega\left(f; \frac{1}{2n}\right).$$

Задача 3.74. Нека полиномът $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ удовлетворява неравенството

$$\max_{-1\le x\le 1} P_n(x) \le L.$$

Да се докаже, че $|a_0| \le 2^{n-1}L$.

Задача 3.75. Нека $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ и числото γ се определя от линейната система $(-1)^i\gamma + P(x_i) = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, n+2$, където f е функция, определена в точките $x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n+2$. Докажете, че

$$\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\alpha_i}{\alpha} f(x_i),$$

където

$$\alpha_i = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n+2} (x_i - x_j)^{-1} \quad \text{и} \quad \alpha = \sum_{i=1}^{n+2} (-1)^i \alpha_i.$$

РЕШЕНИЯ, УПЪТВАНИЯ И ОТГОВОРИ

3.1. в) Следва от $|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\dfrac{x-y}{2}\right|\ \left|\cos\dfrac{x+y}{2}\right| \le |x-y|$.

3.2. Изберете $x_n = 1/n$, $y_n = 1/n{+}1$ и образувайте $\left|\cos\dfrac{\pi}{x_n} - \cos\dfrac{\pi}{y_n}\right|$.

3.3. Следва от дефиницията на равномерно непрекъсната функция.

3.4. За $h \in [0, \varepsilon + \delta]$ нека $h = h_1 + h_2$, където $h_1 \in [0, \delta]$ и $h_2 \in [0, \varepsilon]$. Тогава

$$\begin{aligned}\omega(f;\delta+\varepsilon) &= \sup_{0\le h_1\le\delta;\ 0\le h_2\le\varepsilon} \|f(x+h_1+h_2)-f(x)\| \\ &\le \sup_{0\le h_1\le\delta} \|f(x+h_1+h_2)-f(x+h_2)\| \\ &+ \sup_{0\le h_2\le\varepsilon} \|f(x+h_2)-f(x)\| \le \omega(f;\delta)+\omega(f;\varepsilon).\end{aligned}$$

3.5. Първо се доказва неравенството $\omega(f; n\delta) \le n\omega(f;\delta)$, където n е цяло положително число. При $n = 1$ твърдението е вярно. Нека то е вярно за $n = k$. Тогава при $n = k+1$ предвид зад. 3.4 следва

$$\omega(f;(k+1)\delta)) \le \omega(f;k\delta) + \omega(f;\delta) \le k\omega(f;\delta) + \omega(f;\delta) = (k+1)\omega(f;\delta),$$

т. е. за естествено n твърдението е доказано по индукция. За $\lambda > 0$ се получава $\omega(f;\lambda\delta) \le \omega(f;[\lambda+1]\delta) \le [\lambda+1]\omega(f;\delta) \le (\lambda+1)\omega(f;\delta)$, където $[\lambda]$ означава цялата част на λ.

3.6. Нека $\omega(f;\delta) \le H\delta^a$. Тогава за всеки две точки x и y е изпълнено $|f(x) - f(y)| \le \omega(f; x-y|) \le H|y-x|^\alpha$. Обратно, ако $f \in \mathrm{Lip}_H\alpha$, то при $|x-y| \le \delta$ е в сила $|f(x)-f(y)| \le H|y-x|^\alpha \le H\delta^\alpha$. Тъй като последното неравенство е изпълнено за всеки две точки, за които $|x-y| \le \delta$, то и $\omega(f;\delta) \le H\delta^\alpha$.

3.7. От зад. 3.4 следва, че ако $0 \le \alpha \le \beta < b - a$, то

$$\omega(f;\beta) \le \omega(f;\beta-\alpha+\alpha) \le \omega(f;\beta-\alpha) + \omega(f;\alpha),$$

т. е. $\omega(f;\beta) - \omega(f;\alpha) \le \omega(f;\beta-\alpha)$. От последното неравенство при произволни $\delta, \delta+h \in [0, b-a]$ следва неравенството $|\omega(f;\delta+h) - \omega(f;\delta)| \le \omega(f;h)$. Но $\omega(f;h) \to 0$, тъй като f е равномерно непрекъсната в $[a,b]$.

3.8. Ако $x \in \left(\dfrac{i-1}{n}, \dfrac{i}{n}\right)$, то

$$|f(x) - S_n(x)| = \left|f(x) - f\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\right| \le \omega\left(f; \frac{1}{2n}\right).$$

3.11. Тъй като $\delta_2/\delta_1 \ge 1$, то

$$\begin{aligned}\omega(f;\delta_2)/\delta_2 &= \omega(f;\delta_1\delta_2/\delta_1)/\delta_2 \le (\delta_2/\delta_1+1)\omega(f;\delta_1)/\delta_2 \\ &= (1/\delta_1 + 1/\delta_2)\omega(f;\delta_1) \le 2\omega(f;\delta_1)/\delta_1.\end{aligned}$$

3.12. Следва от $|\cos x - \cos y| \le |x-y|$.

3.13. Нека $M = \max\limits_{a\le x\le b} f(x),\ m = \min\limits_{a\le x\le b} f(x)$. Тогава от теоремата на Чебишов следва, че $p(x) = \dfrac{M+m}{2}$ и $E_0(f) = \dfrac{M-m}{2}$.

3.14. Нека $p(x) = Ax + B$ е полиномът на най-добро равномерно приближение и $x_1 < x_2 < x_3$ са точките на алтернанс, $x_2 \in (a,b)$, т. е. x_2 е точка на екстремум на $f - p$. Тогава $f'(x_2) - p'(x_2) = 0$ и следователно $A = f'(x_2)$. Тъй като f'' не си мени знака, то f' или строго расте, или строго намалява. Следователно само в точката x_2 функцията f' приема стойност A, т. е. $x_1 = a,\ x_3 = b$. Да означим $x_2 = c$. От теоремата на Чебишов получаваме $f(a) - p(a) = -(f(c) - p(c)) = f(b) - p(b)$, или

$$A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},\quad f'(c) = A,\quad B = \frac{f(a)+f(c)}{2} - A\frac{a+c}{2}.$$

3.15. $p(x) = x + 1/8$ — вж. зад. 3.14.

3.16. $p(x) = \dfrac{\pi}{2}x - E_1(f),\ E_1(f) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{1-4/\pi^2} - \arcsin\sqrt{1-4/\pi^2}\right)$.

3.17. $p(x) = -\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{2} - E_1(f),\ E_1(f) = \dfrac{5-2\sqrt{6}}{12}$.

3.18. $p(x) = \ln 2 . x + E_1(f),\ E_1(f) = (\ln 2 - \ln\ln 2 - 1)/2$.

3.19. Нека f е четна функция. Ако $p_n(x)$ е полином на най-добро равномерно приближение на f от n–та степен, покажете, че и полиномът $p_n(-x)$ е също полином на най-добро равномерно приближение на f. След това използувайте, че полиномът на най-добро равномерно приближение е единствен.

3.20. Полиномът на най-добро равномерно приближение от степен 2 е също полином на най-добро равномерно приближение от степен 3 (вж. зад. 3.19.) и има вида $p(x) = ax^2 + b$. Нека точките на алтернанс са $x_1 = -1,\ x_2 = -\alpha,\ x_3 = 0,\ x_4 = \alpha,\ x_5 = 1$. От теоремата на Чебишов следва $|x_i| - p(x_i) = (-1)^i \varepsilon E_2(|x|),\ \varepsilon = \pm 1,\ i = 3,4,5$, и заедно с условието $(|x| - p(x))'_{x=\alpha} = 0$ след пресмятане се получава $a = 1,\ b = 1/8,\ E_2(|x|) = b$.

3.21. Вж. зад. 3.20. $p(x) = ax^2 + b,\ a = \operatorname{arctg} m$,

$$b = E_2(f) = (\operatorname{arctg} m\alpha - (\operatorname{arctg} m)\alpha)/2,$$
$$\alpha = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{m}{\operatorname{arctg} m} - 1},\quad \lim_{m\to\infty} E_2(f) = \frac{\pi}{4}.$$

3.22. Вж. зад. 3.20. $p_2(x) = ax^2 + b,\ a = 1$,

$$b = E_2(f) = \left[\left(\frac{1}{2m}\right)^{1/(2m-1)} - \left(\frac{1}{2m}\right)^{2m/(2m-1)}\right]\Big/2,\quad \lim_{m\to\infty} E_2(f) = \frac{1}{2}.$$

3.24. Нека полиномите на най-добро приближение са съответно P_0, P_1, P_2, P_3, P_4. Тъй като f е нечетна функция, то $P_1 = P_2,\ P_3 = P_4$ и съответно $E_1(f) = E_2(f),\ E_3(f) = E_4(f)$. Очевидно $P_0(x) \equiv 0,\ E_0(f) = 1$. Нека $P_1(x) = ax$ и точките на алтернанс са $x_1 = -1,\ x_2 = -\alpha,\ x_3 = \alpha, x_4 = 1$. От системата $f(x_i) - P_1(x_i) = \varepsilon(-1)^i E_1(f),\ i = 1,2,\ \varepsilon = \pm 1$, се получава $a = \dfrac{2}{1+\alpha},\ E_1(f) = \dfrac{1-\alpha}{(1+\alpha)}$. Нека сега $P_3(x) = ax^3 + bx$. Шестте точки на алтернанс $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ удовлетворяват условията $x_1 = -x_6,\ x_2 = -x_5,\ x_3 = -x_4$. Точките $x_4, x_5, x_6 > 0$ се определят измежду четирите точки y_j, които се задават с $0 < y_1 < y_2 = \alpha < y_3 < y_4 = 1$ и $f'(y_j) - P_3'(y_j) = 0$ за $j = 1,3$. Така имаме $y_1 = \sqrt{\dfrac{\alpha - b}{3a}}$ и $y_3 = \sqrt{\dfrac{-b}{3a}}$, в случай че съществуват.

По-нататък изследваме последователно случаите 3 от тези точки да са точките x_4, x_5, x_6, след което проверяваме дали за така намерените a, b и $E_3(f)$ се удовлетворява условието $|f(y_j) - P_3(y_j)| \le E_3(f)$ за четвъртата точка y_j.

В зависимост от α имаме различни възможности. Нека

$$\alpha_1 = \frac{1}{22}(6\sqrt{3} - 8 + \sqrt[4]{12}(5\sqrt{3} - 2) \approx 0,5876$$

е корен на уравнението $11\alpha^2 - 2(3\sqrt{3} - 4)\alpha + 8 - 6\sqrt{3} = 0$, а $\alpha_2 = \sqrt{3} - 1 \approx 0,732$ е корен на $\alpha^3 - 6\alpha + 4 = 0$. Тогава окончателно получаваме следните три случая:

1. $\alpha \in (0, \alpha_1] :\ x_4 = y_2 = \alpha,\ x_5 = y_3,\ x_6 = y_4 = 1$. Тогава

$$a = \frac{2}{(1+\beta)(\beta^2 - \beta - \alpha^2 - \alpha)},\ b = \frac{2(1+\alpha+\alpha^2)}{(1+\beta)(\beta^2 - \beta - \alpha^2 - \alpha)},$$

$$E_3(f) = \frac{(1+\beta)(\beta^2 - \beta - \alpha^2 - \alpha) + 2\alpha^2 + 2\alpha}{(1+\beta)(\beta^2 - \beta - \alpha^2 - \alpha)},$$

където $\beta = \dfrac{\sqrt{1+\alpha+\alpha^2}}{\sqrt{3}}$;

2. $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] :\ x_4 = y_1,\ x_5 = y_2 = \alpha,\ x_6 = y_3$. Тогава

$$a = -\frac{4\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{9\alpha^3},\quad b = \frac{2\sqrt{3}}{3\alpha},\quad E_3(f) = \frac{2\sqrt{3}-3}{9};$$

3. $\alpha \in [\alpha_2, 1] :\ x_4 = y_1,\ x_5 = y_2 = \alpha,\ x_6 = y_4 = 1$. Тогава

$$a = 4(\alpha - 1)\mu,\ b = (4 - 2\alpha^3)\mu,\ E_3(f) = 2\alpha(\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2)\mu,$$

където $\mu = \dfrac{1}{\alpha(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4)}$.

3.25. Нека $p(x) = ax^2 + bx + c$ и точките на алтернанс са $x_1 = -1$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 1$. От системата

$$|x_i - 1/2| - p(x_i) = (-1)^i \varepsilon E_2(f), \quad \varepsilon = \pm 1; \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

и условието $(|x - 1/2| - p(x))'_{x=\alpha} = 0$ следва

$$a = \frac{16}{25}, \ b = -\frac{17}{25}, \ c = \frac{9}{25}, \ \alpha = -\frac{1}{4}, \ E_2(f) = \frac{9}{50}.$$

За така намерения полином се проверява лесно, че $\|f - p_2\| = \dfrac{9}{50} = E_2(f)$.

3.26. От теоремата на Чебишов и от факта, че функцията $A \sin nx$ приема в $2n$ последователни точки от интервала стойности A и $-A$, следва

$$E_0(f) = E_1(f) = \cdots = E_{2n-2}(f) = |A|.$$

3.27. Нека $E_n(f) = \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x) - P(x)|, \ E_n(g) = \max\limits_{0 \le x \le 1} |g(x) - Q(x)|$.

Тогава:

а) $E_n(f+g) \le \|f+g-P-Q\| \le \|f-P\| + \|g-Q\| = E_n(f) + E_n(g)$;

б) $E_n((\lambda f) = \inf\limits_{R \in \pi_n} \|\lambda f - R\| = |\lambda| \inf\limits_{R \in \pi_n} \|f - R/\lambda\| = |\lambda| E_n(f)$;

в) $E_n(f+g) = \inf\limits_{R \in \pi_n} \|f + g - R\| = \inf\limits_{R \in \pi_n} \|f - R\| = E_n(f)$;

г) $E_n(f) \le \|f - 0\| = \|f\|$.

3.28. а) Да фиксираме $\lambda = \lambda_0$. Нека за функцията $f + \lambda_0 g$ полиномът на най-добро приближение от $n-$та степен е P_0. Тогава

$$\psi(\lambda) = \inf_{P \in \pi_n} \|f + \lambda g - P\|$$
$$\le \|f + \lambda_0 g - P_0\| + \|\lambda g - \lambda_0 g\| = \psi(\lambda_0) + |\lambda - \lambda_0| \|g\|,$$

т. е. $\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0) \le |\lambda - \lambda_0|.\|g\|$. Аналогично намираме

$$\psi(\lambda_0) - \psi(\lambda) \le |\lambda - \lambda_0| \|g\|.$$

б) $|\lambda| E_n(g) = E_n(\lambda g) \le E_n(f + \lambda g) + E_n(-f) = \psi(\lambda) + E_n(f)$ и при $\lambda \to \infty$ следва твърдението;

в) следва от

$$\psi(\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu) = E_n(f + (\alpha\lambda + (1-\alpha)\mu)g)$$
$$= E_n(\alpha(f + \lambda g) + (1-\alpha)(f + \mu g)) \le \alpha E_n(f + \lambda g) + (1-\alpha) E_n(f + \mu g)$$
$$= \alpha\psi(\lambda) + (1-\alpha)\psi(\mu), \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

3.29. От теоремата на Чебишов следва, че уравнението

$$f(x) - P(x) = 0$$

има поне $n+1$ корена в интервала $[a, b]$. Нека то има $n+2$ корена $\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$. Тогава полиномът P може да се представи като интерполационен полином веднъж по точките $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$:

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_1(x))}{(n+1)!}(x-x_1)\dots(x-x_{n+1}),$$

и втори път по точките $\{x_i\}_{i=2}^{n+2}$:

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_2(x))}{(n+1)!}(x-x_2)\dots(x-x_{n+2}).$$

От двете представяния следва

$$f^{(n+1)}(\xi_1(x))(x-x_1) = f^{(n+1)}(\xi_2(x))(x-x_{n+2}),$$

което противоречи на условието $f^{(n+1)}(x) > 0$.

3.30. От зад. 3.29 следва, че функцията

$$p(x) - \sqrt{x}, \quad p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n,$$

има $n+1$ нули в интервала $[0,1]$. Полиномът $q(t) = p(t^2) - t$ има също $n+1$ нули в интервала. Остава да се приложи правилото на Декарт за смяна на знаците пред коефициентите на полинома $q(t)$.

3.31. Нека $E_n(f) = \|f-P\|, E_n(g) = \|g-Q\|$:

а) $E_n(f) = \|f-P\| \le \|f-Q\| = \|f-g+g-Q\| \le \|f-g\| + E_n(g)$ и от обратното $E_n(g) \le \|f-g\| + E_n(f)$ следва $|E_n(f) - E_n(g)| \le \|f-g\|$;

б) $\|P-Q\| = \|P-f+f-Q+g-g\| \le E_n(f) + E_n(g) + \|f-g\|$ и от условието а) се получава $\|P-Q\| \le 2(E_n(f) + \|f-g\|)$.

3.32. Нека $\delta = \varepsilon / E_n(f)$. Тогава

$$\begin{aligned}\|Q-f\| &= \|Q-f+P-P\| \le \|Q-P\| + \|P-f\| \\ &\le \varepsilon + E_n(f) = \delta E_n(f) + E_n(f) = (1+\delta)E_n(f).\end{aligned}$$

3.33. Нека полиномът на най-добро равномерно приближение на функцията $1/(x-a)$ е P. Тогава функцията $1/(x-a) - P$ трябва да достига максималното си отклонение от нулата L поне $n+2$ пъти с алтернативно сменящи се знаци. Но функцията $R(x) \equiv 1/(x-a) - P(x)$, където

$$\begin{aligned}R(x) \ &= \ \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n[ax-1+\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]}{2(x-a)(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} \\ &+ \ \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n[ax-1-\sqrt{(x^2-1)(a^2-1)}]}{2(x-a)(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n}\end{aligned}$$

притежава исканите свойства. Наистина числителят на R е полином от $(n+1)-$ва степен и от $\lim_{x\to a}(x-a)R(x) = 1$ следва, че $1/(x-a) - R \in \pi_n$. Нека

$$x = \cos\theta, \ \sin\theta = \sqrt{1-x^2}, \ \frac{ax-1}{x-a} = \cos\psi, \ \frac{\sqrt{(1-x^2)(a^2-1)}}{x-a} = \sin\psi,$$

т. е. $R(x) = L\cos(n\theta + \psi)$, където $L = 1/(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n$. Тогава при $x \in [-1,1], \ 0 \le \theta \le \pi, \ -\pi \le \psi \le 0$ и е ясно, че R достига L точно $n+2$ пъти със смяна на знаците, т. е. $E_n(f) = L$.

3.34. Нека P и Q са интерполационните полиноми на Лагранж съответно на f и g по възлите $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ и нека

$$f(x) - P(x) = R(x); \quad g(x) - Q(x) = S(x).$$

Функцията

$$\Phi(z) = R(x)S(z) - S(x)R(z)$$

при произволно, но фиксирано $x \in [-1,1]$, $x \neq x_i$, $i = 1,2,\dots,n+1$, се анулира в точките $x, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$. По теоремата на Рол съществува такава точка $\xi \in (-1,1)$, че $\Phi^{(n+1)}(\xi) = R(x)S^{(n+1)}(\xi) - S(x)R^{(n+1)}(\xi) = 0$, т. е. $R(x)S^{(n+1)}(\xi) = S(x)R^{(n+1)}(\xi)$. От последното равенство и от

$$R^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi), \quad S^{(n+1)}(\xi) = g^{(n+1)}(\xi)$$

следва

$$R(x)|g^{(n+1)}(\xi)| = |S(x)||f^{(n+1)}(\xi)|.$$

Оттук $|R(x)| < |S(x)|$ или $|f(x) - P(x)| < |g(x) - Q(x)|$. Нека $\overline{Q}$ е полиномът на най-добро равномерно приближение на функцията g от степен n. Според теоремата на Чебишов $g - \overline{Q}$ си мени знака в $n+1$ точки в интервала $[-1,1]$. Ако $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ се изберат да бъдат точките, където $g - \overline{Q}$ си мени знака, то $Q \equiv \overline{Q}$. От последното неравенство следва $\|f - P\| < E_n(g)$ и от очевидното неравенство $E_n(f) \le \|f - P\|$ се получава $E_n(f) < E_n(g)$.

3.35. Нека $E_n(f) = \|f - P_n\|, P_n \in \pi_n, n = 0,1,\dots$. Изберете триъгълната матрица $\{x_{n,i}\}_{i=0}^{n}$, $n = 0,1,\dots$, чийто $n-$ти ред се състои от точките $\{x_{n,i}\}_{i=0}^{n}$, в които P_n съвпада с f. Тогава интерполационният полином, построен по възлите $\{x_{n,i}\}_{i=0}^{n}$, ще съвпада с P_n, т. е.

$$\|L_n(f) - f\| = \|P_n - f\| = E_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3.36. Използувайте остатъчния член на интерполационния полином на Лагранж, когато възлите са нули на полинома на Чебишов.

3.37. Вж. зад. 3.36.

3.38. Като се приложи формулата на Тейлор с остатъчен член в интегрална форма

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m} f_{(a)}^{(k)} \frac{(t-a)^k}{k!} + \frac{1}{m!} \int_a^t (t-u)^m f^{(m+1)}(u)du$$

(доказателството се получава просто след $m-$кратно интегриране по части на остатъчния член) към функцията $|x| = \sqrt{1-(1-x^2)}$, се получава при $1 - x^2 = t$ формулата

$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2.4} - \dots - \frac{1.3\dots2(n-3)}{2.4\dots2n} t^n + R_n,$$

където $a = 0$ и

$$R_n(t) = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-u)^n f^{(n+1)}(u)du = \frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!} \int_0^t \left(\frac{t-u}{1-u}\right)^n \frac{du}{\sqrt{1-u}}$$

$$\leq \frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}\int_0^t \frac{du}{\sqrt{1-u}} \leq \frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \frac{(2n)!}{2.[(2n)!!]^2}.2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}.(n!)^2}.$$

След това приложете формулата на Стирлинг $n! \approx n^n.e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ при $n \to \infty$.

3.39. Нека $q = \min\limits_{1\leq k\leq n-1}(x_{k+1}-x_k)$ и $M = 1+n\left(\dfrac{b-a}{q}\right)^{n-1}$. По теоремата на Вайерщрас съществува такъв полином P_ε, че $|P_\varepsilon(x)-\phi(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ за всяко $\varepsilon > 0$. Ако $\rho_k = P_\varepsilon(x_k)-\phi(x_k)$, то полиномът

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)}\rho_k$$

удовлетворява условията $Q(x_k) = \rho_k$, $|Q(x)| < \varepsilon n(b-a)^{n-1}/Mq^{n-1}$ и търсеният полином е $R(x) = P_\varepsilon(x) - Q(x)$.

3.40. Нека $\varepsilon > 0$. От теоремата на Вайерщрас следва, че съществува полином P, за който $\|f-P\| \leq \varepsilon$. От

$$\int_a^b (f-P)^2\,dx \leq \varepsilon^2(b-a),$$

$$\int_a^b (f-P)^2\,dx = \int_a^b f^2\,dx - 2\int_a^b fP\,dx + \int_a^b P^2\,dx,$$

$$\int_a^b fP\,dx = 0,$$

следва $\int_a^b f^2dx \leq \varepsilon^2(b-a)$ и тъй като ε е произволно, $f \equiv 0$.

3.41. Нека $\alpha = \max(b, 1-a)$ и $\overline{B}_n(f;x) = \sum\limits_{k=0}^{n}\left[\dbinom{n}{k}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right]x^k(1-x)^{n-k}$.

Полиномът $\overline{B}_n(f)$ е с цели коефициенти и

$$\|f-\overline{B}_n(f)\| \leq \|f-B_n(f)\| + \|B_n(f)-\overline{B}_n(f)\|.$$

Тъй като $\|f-B_n(f)\| \to 0$, остава да се покаже, че $\|B_n(f)-\overline{B}_n(f)\| \to 0$. Наистина

$$\|B_n(f)-\overline{B}_n(f)\| = \max_{a\leq x\leq b}\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\left[\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\right]-\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \max_{a\leq x\leq b}\sum_{k=0}^{n}\left|x^k(1-x)^{n-k}\right| \leq \sum_{k=0}^{n}\alpha^k\alpha^{n-k} = (n+1)\alpha^n \to 0,\ \alpha < 1.$$

3.42. Първо покажете с директни пресмятания, че

$$B_n(t^3;x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)x^3 + \frac{3}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2 + \frac{x}{n}.$$

3.44. Нека $\phi_n(x) = n\left[f\left(\dfrac{n-1}{n}x+\dfrac{1}{n}\right) - f\left(\dfrac{n-1}{n}x\right)\right]$. От неравенството $\|B_n(f)\| \leq \|f\|$ (зад. 3.43) и равенствата

$$(B_n(f))' = B_{n-1}(\phi_n), \quad \lim_{n\to\infty} \|f' - \phi_n\| = 0$$

следва

$$\|f' - (B_n(f))'\| = \|B_{n-1}(\phi_n) - f'\|$$
$$\le \|B_{n-1}(\phi_n) - B_{n-1}(f')\| + \|B_{n-1}(f') - f'\| \le \|\phi_n - f'\| + \|B_{n-1}(f') - f'\|$$

и тъй като $\|B_n(f') - f'\| \to 0$, окончателно се получава $\|f' - (B_n(f))'\| \to 0$.

3.45. Използувайте зад. 3.44.

3.46. $$B_n(f_{nm};x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{n^m} x^k(1-x)^{n-k}$$
$$= \frac{1}{n^m} \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-m)!} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} x^m \sum_{k=0}^{n-m} \binom{n-m}{k} x^k (1-x)^{n-m+k}$$
$$= \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{n^m} x^m = x^m f_{nm}(1).$$

3.47. $1, x, x^2 + \dfrac{x(1-x)}{n}, \ \left(1 + (e^{1/n} - 1)x\right)^n.$

3.48. $$B_n(f;x) = \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \binom{n}{k} (x-a)^k (b-x)^{n-k}.$$

3.49. $$B_n(e^{kt};x) = \sum_{i=0}^{n} e^{k(a+i(b-a)/n)} \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}$$
$$= e^{ka} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left[e^{k(b-a)/n} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]^i \cdot \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-i}$$
$$= e^{ka} \left[e^{k(b-a)/n} \left(\frac{x-a}{b-a}\right) + \frac{b-x}{b-a}\right]^n = e^{ka} \left[1 + \left(e^{k(b-a)/n} - 1\right) \frac{x-a}{b-a}\right]^n.$$

3.50. Според зад. 3.48

$$B_{2n}(|t|;x) = \sum_{k=0}^{2n} \left|-1 + \frac{k}{n}\right| \binom{2n}{k} \frac{(1+x)^k (1-x)^{2n-k}}{4^n}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{n} \binom{2n}{k} \frac{(1+x)^k (1-x)^{2n-k}}{4^n}$$
$$+ \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{-n+k}{n} \binom{2n}{k} \frac{(1+x)^k (1-x)^{2n-k}}{4^n}$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} \binom{2n}{n-i} \frac{(1+x)^{n-i} (1-x)^{n+i}}{4^n}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \binom{2n}{n+i} \frac{(1+x)^{n+i} (1-x)^{n-i}}{4^n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \binom{2n}{n-i} \frac{(1+x)^{n-i}(1-x)^{n+i} + (1+x)^{n+i}(1-x)^{n-i}}{4^n}$$
$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \sum_{i=1}^{n} i \binom{2n}{n-i} \left[\left(\frac{1-x}{1+x} \right)^i + \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^i \right].$$

3.51. Полиномите на Бернщайн са линейни и положителни оператори и
$$B_4\left(\frac{t+|t|}{2}; x\right) = \frac{1}{2} B_4(t; x) + \frac{1}{2} B_4(|t|; x).$$
От зад. 3.50 следва $B_4(|t|; x) = \dfrac{1}{16}((1-x)^3(3+x) + (1+x)^3(3-x))$, а от зад. 3.47 следва $B_4(t; x) = x$. Окончателно
$$B_4\left(\frac{t+|t|}{2}; x\right) = \frac{x}{2} + \frac{1}{32}((1-x)^3(3+x) + (1+x)^3(3-x)).$$

3.52. Достатъчно е да се докаже твърдението при
$$f(x) = x^m, \quad m = 0, 1, \ldots, k,$$
при което $B_n(t^m; x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{i^m}{n^m} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$, и остава да се покаже, че
$$\sum_{i=0}^{n} i^m \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \in \pi_m.$$
За тази цел тъждеството $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i = (1+z)^n$ се диференцира и умножава на z последователно m пъти. Получава се $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^m \binom{n}{i} z^i = (1+z)^{n-m} P_m(z)$, където P_m е полином от степен m на z. Последното равенство се умножава с $(1-x)^n$ и се прави смяната $z = \dfrac{x}{1-x}$, т. е.
$$\sum_{i=0}^{n} i^m \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-1} = (1-x)^m P_m\left(\frac{x}{1-x}\right),$$
и тъй като P_m е полином от степен m, то всичко е доказано.

3.53. За всеки $x, t \in [0,1]$ и за всяка функция $f \in C^2_{[0,1]}$ е в сила формулата на Тейлор
$$f(t) = f(x) + \frac{t-x}{1!} f'(x) + \int_0^x (\theta - t)_+ f''(\theta)\, d\theta + \int_x^1 (t-\theta)_+ f''(\theta)\, d\theta,$$
където $x_+ = \max(0, x)$ (доказателството се извършва чрез интегриране по части на определените интеграли). Към двете страни на формулата на Тейлор по отношение на t се прилага операторът на Бернщайн и тъй като $B_n(1; x) = 1,\ B_n(t; x) = x$, то
$$B_n(f; x) = f(x) + B_n\left(\int_0^x (\theta - t)_+ f''(\theta)\, d\theta + \int_x^1 (t-\theta)_+ f''(\theta)\, d\theta;\ x\right),$$

$$
\begin{aligned}
|B_n(f;x)-f(x)| &\le B_n\left(\int_x^1 (t-\theta)_+|f''(\theta)|\,d\theta+\int_0^x(\theta-t)_+|f''(\theta)|\,d\theta;\ x\right)\\
&\le \|f''\|B_n\left(\int_x^t (t-\theta)_+\,d\theta+\int_t^x(\theta-t)_+\,d\theta;\ x\right)\\
&\le \|f''\|B_n\left(\int_x^t (t-\theta)\,d\theta+\int_t^x(\theta-t)\,d\theta;\ x\right)\\
&= \|f''\|B_n((t-x)^2;x)=\|f''\|\frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}
$$

3.54. Нека R е полиномът на най-добро равномерно приближение от $(n-1)$-ва степен. Тогава полиномът $T(x)=x^n-R(x)$ достига $n+1$ пъти максималното си отклонение в $[-1,1]$, $\|x^n-R\|=L$.

Тъй като T' е полином от $(n-1)$-ва степен, то вътрешните екстремни точки са най-много $n-1$. Следователно точките -1 и 1 са точки от алтернанса. Полиномите $L^2-T^2(x)$ и $(1-x^2)T'^2(x)$ имат едни и същи корени и се различават само с постоянен множител, който се определя, като се сравнят коефициентите пред x^{2n}, т. е.

$$n^2(L^2-T^2(x))=(1-x^2)T'^2(x).$$

Общият интеграл на последното диференциално уравнение е

$$T(x)=L\cos(n\arccos x+C),$$

но само при $C=0$ е полином. От изискването коефициентът пред x^n да е 1 следва $L=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

3.55. Задачата е еквивалентна на намирането на полином на най-добро равномерно приближение от $(n-1)$-ва степен в интервала $[a,b]$ на функцията Ax^n. От зад. 3.54 следва, че полиномът

$$\cos\left(n\arccos\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)$$

достига в $n+2$ различни точки максималното си отклонение в $[a,b]$, което е 1, но коефициентът му пред x^n е $2^n\times 2^{n-1}/(b-a)^n$. Тогава полиномът

$$T(x)=\frac{A(b-a)^n}{2^{2n-1}}\cos\left(n\arccos\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

има коефициент пред x^n, равен на A, и следователно

$$Ax^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k=T(x).$$

3.56. а) Решението следва от равенството

$$\cos(m+n)\theta+\cos(m-n)\theta=2\cos m\theta\cos\theta$$

след полагане на $\theta=\arccos x$;

б) следва от а) при $n=1$;

в) следва от а) при $n=m$;

г) следва от б).

3.57. а) От

$$\frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \ \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} = \frac{\sin[(n-1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}$$

при $\theta = \arccos x,\ \sqrt{1-x^2} = \sin\theta$ следва

$$\frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} = \frac{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta}{\sin\theta} = 2\cos n\theta = 2T_n(x);$$

б) следва от а) за n нечетно;

в) следва от а) за n четно.

3.58. Следва по индукция от зад. 3.56 б).

3.59. В полинома на Чебишов направете линейна смяна на x с $2t-1$, т. е. трансформирайте интервала $[-1,1]$ в $[0,1]$.

3.60. За доказателството на $E_1(f) > 0,021$ използувайте зад. 3.14, а за доказателството на $E_2(f) < 0,016$ вместо полинома на най-добро равномерно приближение от втора степен вземете интерполационния полином на Лагранж от втора степен, като възлите на интерполиране да бъдат нулите на полинома на Чебишов от трета степен.

3.61. Нека $R_n(x) = \eta T_n(x)/T_n(\xi)$. В точките

$$x_i = \cos\frac{n-i}{n}\pi,\ i = 0,1,\ldots,n,$$

е в сила $T_n(x_i) = (-1)^{n+1}$. Тъй като $\|T_n\| = 1$, то

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|\eta\frac{T_n(x)}{T_n(\xi)}\right| = \frac{\eta}{|T_n(\xi)|} = L.$$

Ако съществува полином P от степен n, за който $P(\xi) = \eta$ и

$$\max_{-1\le x\le 1}|P(x)| < L,$$

то $(-1)^{n+i}\{R_n(x_i) - P(x_i)\} \geq 0$ и от очевидното равенство $R_n(\xi) = P(\xi) = \eta$ следва, че полиномът $R_n - P$ има $n+1$ нули, т. е. $R_n \equiv P$.

3.62. Покажете, че $T_n(x) = \dfrac{1}{2}[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n]$ и използувайки зад. 3.61, докажете, че за всяко $|x| \geq 1$ е изпълнено

$$|P(x)| \leq L|T_n(x)|.$$

3.63. Нека за полинома $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ полиномът

$$P_2(x) = b_1x^2 + c_1x + d_1$$

да бъде полином на най-добро равномерно приближение от втора степен. Тогава

$$\begin{aligned}\max_{-1\le x\le 1}|P_3(x) - P_2(x)| &= |a|\max_{-1\le x\le 1}\left|x^3 + \frac{b-b_1}{a}x^2 + \frac{c-c_1}{a}x + \frac{d-d_1}{a}\right| \\ &= |a|\max_{-1\le x\le 1}\left|\frac{T_3(x)}{2^2}\right| = \frac{a}{4}.\end{aligned}$$

Тъй като $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, то $\dfrac{b - b_1}{a} = 0$, $\dfrac{c - c_1}{a} = -\dfrac{3}{4}$, $d - d_1 = 0$. Окончателно $P_2(x) = bx^2 + \left(c + \dfrac{3a}{4}\right)x + d$.

3.64. От $E_n(f) = E_n\left(\dfrac{f+g}{2} + \dfrac{f-g}{2}\right) \leq E_n\left(\dfrac{f+g}{2}\right) + E_n\left(\dfrac{f-g}{2}\right)$ и

$$0 < \frac{g^{(n+1)}(x) + f^{(n+1)}(x)}{2} < g^{(n+1)}(x),$$

$$0 < \frac{g^{(n+1)}(x) - f^{(n+1)}(x)}{2} < g^{(n+1)}(x)$$

и от зад. 3.34 следва $E_n\left(\dfrac{f+g}{2}\right) \leq E_n(g)$, $E_n\left(\dfrac{f-g}{2}\right) \leq E_n(g)$. От получените неравенства се вижда, че $E_n(f) \leq 2E_n(g)$.

3.65. б) Редът вдясно е реалната част на $\sum_{n=0}^{\infty}(te^{i\theta})^n$ при $x = \cos\theta$;

в) Полиномът вдясно е реалната част на $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ при $x = \cos\theta$.

3.66. Нека $S = \left\{\dfrac{p_i}{q_i}\right\}_{i=1}^{r}$, p_i и q_i са несъкратими. От $\left|\dfrac{p_i}{q_i}\right| < 1$ следва, че съществуват p_i^*, q_i^*, за които

$$\cos\frac{p_i^*}{q_i^*}\pi = \frac{p_i}{q_i},\ 0 \leq \frac{p_i^*}{q_i^*} \leq 1.$$

Нека $n = 2mq_1^*q_2^*\ldots q_r^*$. Ако

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi = \frac{p_i}{q_i} = \cos\frac{p_i^*}{q_i^*}\pi,$$

то $\dfrac{2k-1}{2n}\pi = \dfrac{p_i^*}{q_i^*}\pi$, откъдето стигаме до противоречието

$$2k - 1 = 4mp_i^*q_1^*q_2^*\ldots q_{i-1}^*q_{i+1}^*\ldots q_r^*.$$

3.67. От теоремата на Чебишов следва, че $|\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})|$ е най-доброто равномерно приближение на f на множеството $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ с полиноми от степен не по-висока от n. Ще покажем, че за произволни точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ е изпълнено $E_n(f) \geq |\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})|$, където $E_n(f)$ е най-доброто равномерно приближение на f с полиноми от степен n в целия интервал. Наистина, ако полиномите на най-добро равномерно приближение на f съответно в $[a, b]$ и в множеството от точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ са P и Q, то

$$|\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})| = \max_{x=x_i}|f(x) - Q(x)| \leq \max_{x=x_i}|f(x) - P(x)|$$
$$\leq \max_{a\leq x\leq b}|f(x) - P(x)| = E_n(f),$$

т. е. $|\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})| \leq E_n(f)$. Ако точките $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ са точките на алтернанс на f в интервала $[a,b]$, то очевидно $E_n(f) = |\gamma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})|$, с което твърдението е доказано.

3.68. Използувайте, че

$$B_n(1;x) = 1,\ B_n(t;x) = x,\ B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

(вж. зад. 3.47), и приложете теоремата на Коровкин.

3.69. След като покажете, че

$$M_n(1;x) = 1,\ M_n(t;x) = x,\ M_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x}{n},$$

приложете теоремата на Коровкин.

3.70. Покажете, че $K_n(1;x) = 1,\ K_n(t;x) = x + \dfrac{1-2x}{2(n+1)}$,

$$K_n(t^2;x) = x^2 + \frac{1 - 6nx - (9n+3)x^2}{3(n+1)^2},$$

и приложете теоремата на Коровкин.

3.71. Ако $g_i(x) \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,n$, очевидно е, че $L_n(f;x)$ е линеен и положителен оператор. Обратно, нека $L_n(f;x)$ е линеен и положителен оператор. Ще докажем, че $g_i(x) \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,n$. Да допуснем, че $g_l(z) < 0,\ a < z < b,\ 1 \leq l \leq n$. За положителната функция f, определена чрез $f(x_i) = 0,\ i = 1,2,\ldots l-1, l+1,\ldots,n,\ f(x_l) = 1$ и линейна между точките x_i, е изпълнено

$$0 \leq L_n(f;x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)g(x_i) = f(x_l)g_l(x) = g_l(x),$$

което противоречи на $0 \leq L_n(f;z) = g_l(z) < 0$.

3.72. Следва от

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| n\int_0^{1/n} (f(x) - f(x+t))\,dt \right| \\ &\leq n\int_0^{1/n} \omega(f;1/n)\,dt = \omega\left(f;\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

3.73. $l_n(x)$ може да се разглежда като линеен положителен оператор, притежаващ свойствата $l_n(1;x) = 1,\ l_n(t;x) = x,\ l_n(t^2;x) = x^2 + \alpha(x)$, като $\|\alpha\| = \dfrac{1}{4n^2}$ и от теоремата на Коровкин следва търсеното неравенство.

3.74. Използувайте зад. 3.61.

3.75. Нека $g(x) = f(x) - P(x)$ при $g(x_i) = (-1)^i\lambda$. Тогава

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}),$$

където $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+2})$ е разделената разлика на f от $(n+1)$-ви ред, и от свойствата на разделените разлики следва

$$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{g(x_i)}{\omega'(x_i)} = \lambda \sum_{i=1}^{n+2} \frac{(-1)^i}{\omega'(x_i)},$$

където $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+2})$. От тези равенства твърдението се получава директно.

Глава 4

СРЕДНОКВАДРАТИЧНИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Както обикновено с π_n ще означаваме съвкупността на всички алгебрични полиноми от степен, не по-висока от n.

Ако f и g са функции с интегруем квадрат в интервала $[a,b]$, $p(x) \geq 0$ е непрекъсната функция в $[a,b]$ и $\int_\beta^\alpha p(x)dx > 0$ за всеки $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, то

$$\|f-g\|_{L_2} = \left\{\int_a^b p(x)|f(x)-g(x)|^2dx\right\}^{1/2}$$

се нарича *средноквадратично разстояние с тегло p между f и g*, а с $\|f\|_{L_2}$ се означава *средноквадратичната норма на f*.

С $E_n(f)_{L_2} = \inf\limits_{p\in\pi_n} \|f-p\|_{L_2}$ се означава най-доброто приближение на функцията f с полиноми от π_n относно средноквадратичното разстояние, а полиномът $Q \in \pi_n$, за който $E_n(f)_{L_2} = \|f-Q\|_{L_2}$, се нарича *полином на най-добро средноквадратично приближение за f*.

За всяка интегруема функция f и за всяко естествено n съществува в π_n единствен полином на най-добро средноквадратично приближение.

Нека са фиксирани точки $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ и положителни числа (тегла) $\gamma_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,m$. За функция f с дефиниционна област съвкупността $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ определяме

$$\|f\|_{l_2} = \left\{\sum_{i=1}^m \gamma_i|f(x_i)|^2\right\}^{1/2}.$$

Задачата за намиране на алгебричен полином $P \in \pi_n$, минимизиращ нормата $\|f-P\|_{l_2}$, се нарича *приближение по метода на най–малките квадрати.*

Задача 4.1. Дадена е таблицата $\{x_i, y_i\}_{i=0}^n, \quad x_0 < x_1 < \ldots < x_m$. Намерете права $p(x) = Mx + B$, за която величината

$$S(M, B) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - Mx_i - B)^2$$

да е минимална. Докажете, че задачата има винаги единствено решение.

Задача 4.2. За таблицата $\{x_m, f(x_m)\}_{m=0}^n$, $x_m = m/n$, намерете при ближение с полином от първа степен по метода на най–малките квадрати.

Задача 4.3. По метода на най–малките квадрати намерете полином от първа степен за таблицата :

x	0	1	2	3	4
y	1	2	1	0	4

.

Задача 4.4. По метода на най–малките квадрати намерете параболите, които приближават следните таблици:

а)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	15	-9	10	7	6

;

б)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	15	1	10	7	6

;

в)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	7	4	-1	1	5	6	13

.

Задача 4.5. Покажете, че ако функцията f е четна (нечетна) в интервала $[-a, a]$, то полиномът ѝ на най-добро средноквадратично приближение от произволна степен е също четен (нечетен).

Задача 4.6. По метода на най–малките квадрати намерете полином от трета степен, приближаващ функцията $\sin \pi x$, като използувате само стойностите ѝ в точките

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1.$$

В следващите четири задачи (4.7—4.10) да се минимизира l_2—разстоянието между логаритмите на данните и приближението.

Задача 4.7. Намерете формула от вида $y(x) = Ae^{Mx}$ за приближаване на $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$.

Задача 4.8. Намерете формула от вида $y(x) = A2^{Mx}$ за приближаване на

x	1	2	3	4	5
y	1	2	4	8	32

.

Задача 4.9. Намерете формула от вида $y(x) = Ae^{Mx} + B$ за приближаване на $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$.

Задача 4.10. Намерете формула от вида $y(x) = ax^b + B$ за приближаване на $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$.

Задача 4.11. По метода на най–малките квадрати намерете полином от първа степен за таблицата

x	x_0	x_1	$\dots$	x_{n-1}	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_{n-1}	y_n
p	p_0	p_1	$\dots$	p_{n-1}	p_n

,

където p_i е теглото в точката x_i.

Задача 4.12. Нека $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}x_i = b_k,\ k = 1, 2, \dots, m,\ m \geq n$, е линейна система с n неизвестни $x_1, x_2, \dots, x_n$ и m уравнения. Докажете, че системата $\dfrac{\partial s}{\partial x_p} = 0,\ p = 1, 2, \dots, n$, където $s(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{m} \left(b_k - \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}x_i \right)^2$, е еквивалентна на системата $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$ (тук с A е означена матрицата $\|a_{ik}\|,\ i = 1, 2, \dots, m,\ k = 1, 2, \dots, n$, а A^{T} е транспонираната ѝ матрица).

Задача 4.13. По метода на най–малките квадрати решете преопределената система

$$\left| \begin{array}{l} x - y = 1, \\ x + y = 1, \\ x + y = -1, \\ x - y = -1. \end{array} \right.$$

Дайте геометричен смисъл на решението.

Задача 4.14. Като използувате зад. 4.12, решете системите:

а) $\left|\begin{array}{l} x+1=1, \\ y+z=1, \\ x+z=1, \\ x-y+z=1; \end{array}\right.$ б) $\left|\begin{array}{l} x+y=3, \\ 2x-y=0,2, \\ x+3y=7, \\ 3x+y=5; \end{array}\right.$

в) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=1, \\ x+2y+z=2, \\ x+3y+z=3, \\ x-4y+z=4, \\ x+5y+z=4. \end{array}\right.$

Задача 4.15. Дадена е таблицата $\{x_i, y_i\}_{i=0}^n$, $x_i = x_0 + ih$. По метода на най–малките квадрати намерете парабола, която приближава дадената таблица.

Задача 4.16. Като използувате парабола, построена по метода на най–малките квадрати за точките

$$\{x_i, y_i\}_{i=k-2}^{k+2},\ x_{k+i} = x_{k-2} + (i+2)h,\ \ i = -2, -1, \dots, 2,$$

изведете формулите

а) $y(x_{k-2}) \approx y_{k-2} + \dfrac{1}{5}\Delta^3 y_{k-2} + \dfrac{3}{35}\Delta^4 y_{k-2}$;

б) $y(x_{k-1}) \approx y_{k-1} - \dfrac{2}{5}\Delta^3 y_{k-2} - \dfrac{1}{7}\Delta^4 y_{k-2}$;

в) $y(x_k) \approx y_k - \dfrac{3}{35}(y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2})$;

г) $y'(x_k) \approx \dfrac{1}{10h}(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2})$.

Задача 4.17. Като използувате парабола, построена по метода на най–малките квадрати по точките $\{x_i, y_i\}_{i=0}^3$, $x_i = x_0 + ih$, изведете формулите:

а) $y'_0 \approx \dfrac{1}{20h}(-21y_0 + 13y_1 + 17y_2 - 9y_3)$;

б) $y'_1 \approx \dfrac{1}{20h}(-11y_0 + 3y_1 + 7y_2 + y_3)$;

в) $y'_2 \approx \dfrac{1}{20h}(-11y_3 - 3y_2 - 7y_1 - y_0)$;

г) $y'_3 \approx \dfrac{1}{20h}(21y_3 - 13y_2 - 17y_1 + 9y_0)$.

Задача 4.18. Като използувате парабола, построена по метода на най–малките квадрати по точките $\{x_i, y_i\}_{i=-3}^{3}$, $x_i = x_{-3}+(i+3)h$, изведете следната приближена формула за числено диференциране:

$$y_0' \approx \frac{1}{28h}(-3y_{-3} - 2y_{-2} - y_{-1} - y_1 + 2y_2 + 3y_3).$$

Задача 4.19. Нека $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ е полиномът на най-добро средноквадратично приближение от степен n на функцията f в интервала $[0,1]$. Покажете, че съществуват сериозни изчислителски трудности, ако коефициентите a_i, $i = 1,2,\ldots,n$, при $n > 4$ се определят от линейната система $\dfrac{\partial s}{\partial a_k} = 0$, $k = 0,1,\ldots,n$, където $s(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)^2 dx$.

Задача 4.20. Нека $p_k(x) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i^{(k)} x^i$, $k = 0,1,\ldots$, е редица от ортогонални полиноми относно скаларното произведение (f,g), за което $(xf,g) = (f,xg)$. Докажете, че е в сила рекурентната зависимост

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})p_n(x) + \beta_{n+1}p_{n-1}(x), \qquad n = 1,2,\ldots,$$

където $\alpha_{n+1} = (xp_n, p_n)/(p_n, p_n)$; $\quad \beta_{n+1} = -(p_n, p_{n-1})/(p_{n-1}, p_{n-1})$.

Задача 4.21. Нека $p_k(x) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i^{(k)} x^i$, $k = 0,1,\ldots$, е редица от ортогонални полиноми относно скаларното произведение (f,g). Докажете, че:

а) два съседни полинома не могат да имат обща нула;

б) ако $(f,g) = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx, p(x) \geq 0$, то всички нули на полинома p_k, $k = 1,2,\ldots$, са различни, реални и лежат в интервала (a,b);

в) ако $(xf,g) = (f,xg)$, то от $p_{k+1}(x_0) = 0$ следва

$$\mathrm{sgn} p_k(x_0) = -\mathrm{sgn} p_{k+2}(x_0);$$

г) ако $(f,g) = \int_a^b p(x)f(x)g(x)dx$, $p(x) \geq 0$, то нулите на p_k и p_{k+1} взаимно се разделят.

Задача 4.22. Докажете, че полиномите на Льожандър

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^n] \tag{4.1}$$

удовлетворяват диференциалните уравнения:

а) $(1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$;

б) $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = -(2n+1)P_n'(x)$.

Задача 4.23. Нека $P_n(x)$ е полином на Льожандър, вж. (4.1). Докажете, че:

а) $P_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n \, d\theta$ (формула на Лаплас);

б) $|P_n(x)| \leq 1$ за всяко $x \in [-1,1]$.

Задача 4.24. Докажете, че

$$(1-x)^n P_n\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 1 + \binom{n}{1}^2 x + \binom{n}{2}^2 x^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 x^{n-1} + x^n,$$

където $P_n(x)$ е полином на Льожандър, вж. (4.1).

Задача 4.25. Докажете, че за полиномите на Якоби

$$(4.2)\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}],$$

$\alpha, \beta > -1$, е изпълнено:

а) $P_n^{(\alpha,\beta)}x = \dfrac{1}{2^n n!}\left[\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^n + (\alpha-\beta)\dfrac{n\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^{n-1} + \ldots\right];$

б) $$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{за } m \neq n, \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} & \text{за } m = n. \end{cases}$$

Задача 4.26. Докажете, че полиномите на Якоби, дефинирани с (4.2), удовлетворяват рекурентната зависимост

$$\frac{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$= (x - \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)})P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$+ \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x).$$

Задача 4.27. Докажете, че полиномите на Якоби, дефинирани с (4.2), удовлетворяват

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}, \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = \frac{(-1)^n\Gamma(\beta+n+1)}{n!\Gamma(\beta+1)}.$$

Задача 4.28. Докажете, че полиномите на Чебишов от първи род

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad |x| \leq 1,$$

и от втори род

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| \leq 1,$$

удовлетворяват равенствата:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{1} U_k(x)U_i(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{за } k \neq i, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{за } k = i, \end{cases}$;

б) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{за } m \neq n, \\ \pi & \text{за } n = m \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{за } n = m = 0; \end{cases}$

в) $U_n(x) = T'_{n+1}(x)/(n+1)$;

г) $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$;

д) $(1-x^2)U''_n(x) - 3xU'_n(x) + (n^2-4n)U_n(x) = 0$.

Задача 4.29. Докажете, че полиномите на Лагер

$$L_n^{(a)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}), \alpha > -1$$

удовлетворяват условията:

а) $L_n^{(a)}(x) = x^n - n(\alpha+n)x^{n-1} + \dots$;

б) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_m^{(a)}(x) L_n^{(a)}(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{за } m \neq n, \\ n!\Gamma(\alpha+n+1) & \text{за } m = n; \end{cases}$

в) $x\left[L_n^{(a)}(x)\right]'' + (\alpha+1-x)\left[L_n^{(a)}(x)\right]' + nL_n^{(a)}(x) = 0$;

г) $L_{n+1}^{(a)}(x) - (x-\alpha-2n-1)L_n^{(a)}(x) + n(\alpha+n)L_{n-1}^{(a)}(x) = 0$.

Задача 4.30. Докажете, че полиномите на Ермит

$$H_n(x) = e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

удовлетворяват условията:

а) $H_n(x) = (-2)^n x^n + \dots$;

б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x)q(x)dx = 0$, ако q е полином от степен $\leq n-1$;

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$;

г) $H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0$;

д) $H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0$.

РЕШЕНИЯ, УПЪТВАНИЯ И ОТГОВОРИ

4.1. Условията за минимум на функцията $s(M, B)$ са

$$\frac{\partial s}{\partial M} = -2\sum_{i=0}^{n}(y_i - Mx_i - B)x_i = 0,\ \frac{\partial s}{\partial B} = -2\sum_{i=0}^{n}(y_i - Mx_i - B) = 0$$

и ако $s_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k,\ t_k = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k,\ k = 0, 1, 2,$ то

$$M = \frac{s_0 t_1 - s_1 t_0}{s_0 s_2 - s_1^2},\quad B = \frac{s_2 t_0 - s_1 t_1}{s_0 s_2 - s_1^2}.$$

Единствеността следва от

$$s_0 s_2 - s_1^2 = (n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 > 0.$$

Последното неравенство е пряко следствие от неравенството на Коши — Буняковски

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \sum_{i=0}^{n} b_i^2 \quad \text{при} a_i = x_i \ \text{ и } b_i = 1.$$

Равенство се достига само при $a_i = b_i,\ i = 0, 1, \ldots, n$ — условия, които тук не са изпълнени.

4.2. След директно използване на зад. 4.1 се получава, че търсеният полином има вида

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)[(2n - 3i + 1) + 3(2i - n)x].$$

4.3. Пряко от зад. 4.1 следва $y(x) = \frac{2}{5}(x+2)$.

4.4. а) Нека търсеният полином е $P(x) = Ax^2 + Bx + C$, т. е. трябва да се минимизира функцията $s(A, B, C) = \sum_{i=0}^{5}(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C)^2$. От условията за минимум

$$\frac{\partial s}{\partial A} = -2\sum_{i=0}^{5}(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C)x_i^2 = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial B} = -2\sum_{i=0}^{5}(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C)x_i = 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial C} = -2\sum_{i=0}^{5}(y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C) = 0$$

се получава $P(x) = \frac{1}{7}(-2x^2 + 11x + 30)$;

б) $P(x) = -x^2 + 2x + 8$;

в) $P(x) = x^2 + x + 1$.

4.5. Нека за определеност f е четна функция и $P(x)$ е полиномът ѝ на най-добро средноквадратично приближение от степен n. От

$$\begin{aligned}\left(\int_{-a}^{a}(f(x)-P(x))^2\,dx\right)^{1/2} &= \left(\int_{-a}^{a}(f(-t)-P(-t))^2\,dt\right)^{1/2}\\ &= \left(\int_{-a}^{a}(f(x)-P(-x))^2\,dx\right)^{1/2}\end{aligned}$$

следва, че и полиномът $P(-x)$ е полином на най-добро средноквадратично приближение на f от степен n. От единствеността на полинома следва, че $P(x) \equiv P(-x)$, а това е възможно само ако P е четен.

4.6. $P(x) = \dfrac{8}{3}(x-x)^3$.

4.7. Нека $z = \ln y,\ B = \ln A$. Тогава $z = \ln y = B + Mx$ и във формулата $z = B + Mx$ коефициентите B и M се определят от таблицата, както в зад. 4.1. Окончателно

$$A = e^B,\ M = \frac{s_0t_1 - s_1t_0}{s_0s_2 - s_1^2},\ B = \frac{s_2t_0 - s_1t_1}{s_0s_2 - s_1^2},$$

където $s_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k,\ t_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \ln y_i,\ k = 0, 1, 2.$

4.8. Аналогично на зад. 4.7 след полагането $z = \log_2 y,\ B = \log_2 A$, се получава $z = B + Mx$, като B и M се определят от таблицата

$$\{x_i, z_i\}_{i=1}^5 = \{x_i, \log_2 y_i\}_{i=1}^5.$$

Окончателно $M = 6/5,\ B = -7/5$ и $y(x) = 2^{(6x-7)/5}$.

4.9. След логаритмуване се получава $\ln(y - B) = \ln A + Mx$ и B се определя по следния начин: от

$$y_1 = Ae^{Mx_1} + B,\ y_n = Ae^{Mx_n} + B,\ \bar{y} = Ae^{M\bar{x}} + B,$$

където $\bar{x} = (x_1 + x_n)/2$, а $\bar{y}$, което съответства на $\bar{x}$, може да се получи чрез линейна интерполация от две съседни стойности. От равенствата

$$\begin{aligned}(y_1 - B)(y_n - B) &= A^2e^{Mx_1}e^{Mx_n} = A^2e^{M(x_1+x_n)}\\ &= A^2e^{2M\bar{x}} = (Ae^{M\bar{x}})^2 = (\bar{y} - B)^2,\end{aligned}$$

т. е. $(y_1 - B)(y_n - B) = (\bar{y} - B)^2$ и $B = (y_1y_n - \bar{y}^2)/(y_1 + y_n - 2\bar{y})$. След определянето на B задачата става еквивалентна на зад. 4.7.

4.10. След полагането $\ln(y - c) = Y,\ \ln x = X,\ \ln a = A$ се получава $Y = bX + A$. Първо се определя c от равенствата

$$y_1 = c_1 + ax_1^b,\ y_n = c + ax_n^b,\ \bar{y} = c + a\bar{x}^b,$$

където $\bar{x} = \sqrt{x_1x_n}$, а $\bar{y}$ е съответната на $\bar{x}$ стойност, получена например чрез линейна интерполация на две съседни на $\bar{x}$ точки. От

$$(y_1 - c)/(y_n - c) = a^2(x_1x_n)^b = (a\bar{x}^b)^2 = (\bar{y} - c)^2$$

следва $(y_1 - c)(y_n - c) = (\bar{y} - c)^2$, откъдето $c = (y_1 y_n - \bar{y}^2)/(y_1 + y_n - 2\bar{y})$. По-нататък намирането на A и b във формулата $Y = bX + A$ от таблицата $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^n = \{\ln x_i, \ln(y_i - c)\}_{i=1}^n$ става, както в зад. 4.1.

4.11. Ако търсеният полином е $P(x) = ax + b$, то трябва да се минимизира функцията $s(a, b) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 p_i$. От условията за минимум на $s(a, b)$ се получава

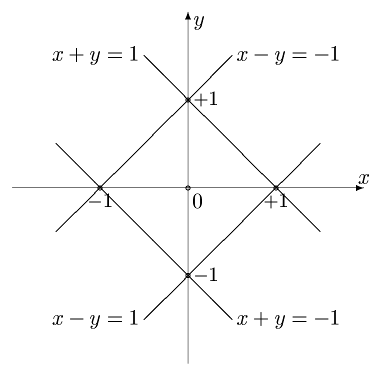
$$\frac{\partial s}{\partial a} = -2 \sum_{i=0}^{n} (y_i - ax_i - b) p_i x_i = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial b} = -2 \sum_{i=0}^{n} (y_i - ax_i - b) p_i = 0,$$

т. е. $a = \dfrac{s_0 t_1 - s_1 t_0}{s_0 s_2 - s_1^2}$, $b = \dfrac{s_2 t_0 - s_1 t_1}{s_0 s_2 - s_1^2}$, където

$$s_k = \sum_{i=0}^{n} p_i x_i^k, \; t_k = \sum_{i=0}^{n} p_i y_i x_i^k, \; k = 0, 1, 2.$$

4.12. Еквивалентността се проверява директно.

4.13. От зад. 4.12 следва $x = y = 0$. За геометричния смисъл вижте следния чертеж:



4.14. а) $x = 3/7, \; y = 3/7, \; z = 3/7$;
б) $x = 161.8/155, \; y = 302/155$;
в) $x = p, \; y = 7/10, \; z = \dfrac{1}{2} - p$, където p е параметър.

4.15. Нека търсената парабола е $p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$. След смяната $t = \dfrac{x - x_k}{h}$, $0 \le k \le n$, се получава $p_2(x) = p_2(x_k + ht) = \bar{p}_2(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ и

$$\begin{aligned} s(b_0,b_1,b_2) &= \sum_{i=0}^{n}(y_i - p_2(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{n}(y_i - p_2(x_k+t_ih))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n}(y_i - \bar{p}_2(t_i))^2 = \sum_{i=0}^{n}(y_i - a_0 - a_1t_i - a_2t_i^2) \\ &= B(a_0,a_1,a_2). \end{aligned}$$

От условието за минимум на функцията $B(a_0,a_1,a_2)$ следва

$$\frac{\partial B}{\partial a_0} = -2\sum_{i=0}^{n}(y_i - a_0 - a_1t_i - a_2t_i^2) = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial a_1} = -2\sum_{i=0}^{n}(y_i - a_0 - a_1t_i - a_2t_i^2)t_i = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial a_2} = -2\sum_{i=0}^{n}(y_i - a_0 - a_1t_i - a_2t_i^2)t_i^2 = 0$$

и след полагането

$$s_p = \sum_{i=0}^{n} t_i^p = \sum_{i=0}^{n}(i-k)^p,\ T_p = \sum_{i=0}^{n} t^iy_i = \sum_{i=0}^{n}(i-k)^p y_i$$

условията за минимум на $B(a_0,a_1,a_2)$ приемат вида

$$\begin{aligned} a_2s_2 + a_1s_1 + a_0s_0 &= T_0, \\ a_2s_3 + a_1s_2 + a_0s_1 &= T_1, \\ a_2s_4 + a_1s_3 + a_0s_2 &= T_2. \end{aligned}$$

Ако

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_0 \\ s_3 & s_2 & s_1 \\ s_4 & s_3 & s_2 \end{vmatrix},\ \Delta_0 = \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & T_0 \\ s_3 & s_2 & T_1 \\ s_4 & s_3 & T_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} s_2 & T_0 & s_0 \\ s_3 & T_1 & s_1 \\ s_4 & T_2 & s_2 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} T_0 & s_1 & s_0 \\ T_1 & s_2 & s_1 \\ T_2 & s_3 & s_2 \end{vmatrix},$$

от формулите на Крамер следва

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta},\ a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

4.16. При означенията от зад. 4.15 и $t = \dfrac{x - x_k}{h}$ се получава

$$t_{k-2} = -2,\ t_{k-1} = -1,\ t_k = 0,\ t_{k+1} = 1,\ t_{k+2} = 2;$$
$$s_0 = 5,\ s_1 = 0,\ s_2 = 10,\ s_3 = 0,\ s_4 = 34.$$

От

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 0 \\ 34 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -700,$$

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 10 & 0 & T_0 \\ 0 & 10 & T_1 \\ 34 & 0 & T_2 \end{vmatrix} = \frac{17T_0 - 5T_2}{35},$$

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 10 & T_0 & 5 \\ 0 & T_1 & 0 \\ 34 & T_2 & 10 \end{vmatrix} = \frac{T_1}{10},$$

$$a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} T_0 & 0 & 5 \\ T_1 & 10 & 0 \\ T_2 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \frac{T_2 - 2T_0}{14},$$

където $T_p = \sum_{i=k-2}^{k+2} t_i^p y_i,\ p = 0, 1, 2;$

$$\begin{aligned}
\text{а) } y(x_{k-2}) &\approx \bar{p}_2(t_{k-2}) = a_0 - 2a_1 + 4a_2 = \frac{17T_0 - 5T_2}{35} - 2\frac{T_1}{10} + 4\frac{T_2 - 2T_0}{14} \\
&= \frac{5T_2 - 7T_1 - 3T_0}{35} = \frac{5(4y_{k-2} + y_{k-1} + y_{k+1} + 4y_{k+2})}{35} \\
&- \frac{7(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2})}{35} \\
&- \frac{3(y_{k-2} + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + y_{k+2})}{35} \\
&= y_{k-2} + \frac{1}{5}\Delta^3 y_{k-2} + \frac{3}{35}\Delta^4 y_{k-2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{б) } y(x_{k-1}) &\approx \bar{p}_2(t_{k-1}) = a_0 - a_1 + a_2 = \frac{17T_0 - 5T_2}{35} - \frac{T_1}{10} + \frac{T_2 - 2T_0}{14} \\
&= \frac{24T_0 - 7T_1 - 5T_2}{70} = \frac{24(y_{k-2} + y_{k-1} + y_k + y_{k+1} + y_{k+2})}{70} \\
&- \frac{7(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2})}{70} \\
&- \frac{5(4y_{k-2} + y_{k-1} + y_{k+1} + y_{k+2})}{70} \\
&= y_{k-1} - \frac{2}{5}\Delta^3 y_{k-2} - \frac{1}{7}\Delta^4 y_{k-2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{в) } y(x_k) &\approx \bar{p}_2(t_k) = a_0 = \frac{17T_0 - 5T_2}{35} \\
&= \frac{-3y_{k-2} + 12y_{k-1} + 17y_k + 12y_{k+1} - 3y_{k+2}}{35} \\
&= y_k - \frac{3}{35}(y_{k-2} - 4y_{k-1} + 6y_k - 4y_{k+1} + y_{k+2});
\end{aligned}$$

г) $$y'(x_k) \approx \frac{d\bar{p}_2(t)}{dt}.\frac{dt}{dx}\Big|_{t=t_k} = \bar{p}_2'(t_k).\frac{1}{h} = \bar{p}_2'(0).\frac{1}{h} = \frac{T_1}{10h} = \frac{1}{10h}(-2y_{k-2} - y_{k-1} + y_{k+1} + 2y_{k+2}).$$

4.17. При означенията от зад. 4.15 и $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ следва

$$t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 3;$$
$$s_0 = 4,\ s_1 = 6,\ s_2 = 14,\ s_3 = 36,\ s_4 = 98;$$
$$T_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3,\ T_1 = y_1 + 2y_2 + 3y_3,\ T_2 = y_1 + 4y_2 + 9y_3.$$

От тях се получава

$$a_2 = (T_2 - 3T_1 + T_0)/4, \quad a_1 = (-15T_2 + 49T_1 - 21T_0)/20,$$
$$a_0 = (19T_0 - 21T_1 + 5T_2)/20;$$

а) $$y_0' \approx \frac{d\bar{p}_2(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\Big|_{t=t_0} = \bar{p}_2'(t_0).\frac{1}{h} = \bar{p}_2'(0)\frac{1}{h} = \frac{a_1}{h} = \frac{-15T_2 + 49T_1 - 21T_0}{20h} = \frac{1}{20h}(-21y_0 + 13y_1 + 17y_2 - 9y_3);$$

б) $$y_1' \approx \frac{d\bar{p}_2(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\Big|_{t=t_1} = \bar{p}_2'(t_1).\frac{1}{h} = \bar{p}_2'(1)\frac{1}{h} = \frac{a_1 + 2a_2}{h} = \frac{1}{20h}(-11y_0 + 3y_1 + 7y_2 + y_3);$$

в) $$y_2' \approx \frac{d\bar{p}_2(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\Big|_{t=t_2} = \bar{p}_2'(t_2).\frac{1}{h} = \bar{p}_2'(2)\frac{1}{h} = \frac{a_1 + 4a_2}{h} = \frac{1}{20h}(-y_0 - 7y_1 - 3y_2 + 11y_3);$$

г) $$y_3' \approx \frac{d\bar{p}_2(t)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\Big|_{t=t_3} = \bar{p}_2'(t_3).\frac{1}{h} = \bar{p}_2'(3)\frac{1}{h} = \frac{a_1 + 6a_2}{h} = \frac{1}{20h}(9y_0 - 17y_1 - 13y_2 + 21y_3).$$

4.18. При означенията от зад. 4.15 и $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ следва

$$t_{-3} = -3,\ t_{-2} = -2,\ t_{-1} = -1,\ t_0 = 0,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 3,$$
$$s_0 = 7,\ s_1 = 0,\ s_2 = 28,\ s_3 = 0,\ s_4 = 196,$$
$$T_0 = y_{-3} + y_{-2} + y_{-1} + y_0 + y_1 + y_2 + y_3,$$
$$T_1 = -3y_{-3} - 2y_{-2} - y_{-1} + y_1 + 2y_2 + 3y_3,$$
$$T_2 = 9y_{-3} + 4y_{-2} + y_{-1} + y_1 + 4y_2 + 9y_3 \ \text{ и } \ y_0' \approx \frac{a_1}{h} = \frac{T_1}{28h}.$$

4.19. Линейната система $\dfrac{\partial s}{\partial a_k} = 0,\ k = 0,1,\dots,n,$ има за матрица матрицата на Хилберт

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}.$$

За пресмятане на детерминантата на матрицата на Хилберт от всички редове се изважда последният

$$\det H_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

и след това от всички стълбове се изважда последният

$$\begin{aligned} \det H_n &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{n-1}{2(n+1)} & \dots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{n+1} \\ \frac{n}{2(n+2)} & \frac{n-1}{3(n+2)} & \dots & \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{n}{n.2n} & \frac{n-1}{(n+1)2n} & \dots & \frac{1}{(2n-1)2n} & \frac{1}{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \det H_{n-1}. \end{aligned}$$

От получената рекурентна връзка следва

$$\det H_n = \frac{(n!(n-1)!\dots 1!)^3}{(2n+1)!\dots(n+1)!}$$

и при $n=5$ $\det H_5 < 10^{-15}$, т. е. $\det H_5$ ще се запише като числото нула в паметта на действуващите в момента компютри.

4.20. Нека $p_{n+1}(x) = xp_n(x) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{n+1,i} p_i(x)$. От $(p_{n+1}, p_n) = 0$ намираме $\alpha_{n+1,i} = -(xp_n, p_i)/(p_i, p_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, а от

$$(xp_n, p_i) = (p_n, xp_i) = (p_n, p_{i+1} - \sum_{j=0}^{i} \alpha_{i+1,j} p_j) = 0, \; i+1 < n,$$

следва $\alpha_{n+1,i} = 0$ за $i < n-1$ и оттук

$$\alpha_{n+1} = -\alpha_{n+1,n} = \frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)}, \; \beta_{n+1} = \alpha_{n+1,n-1} = -\frac{(xp_n, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})}$$

$$= \frac{(p_n, xp_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})} = -\frac{\left(p_n, p_n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i\right)}{(p_{n-1}, p_{n-1})} = -\frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})}.$$

4.21. а) Ако $p_k(x_0) = p_{k-1}(x_0) = 0$, то от рекурентната връзка между p_k, p_{k-1}, p_{k-2} (вж. зад. 4.20) следва $p_{k-2}(x_0) = 0$. Така се стига до противоречието $p_0(x_0) \equiv 1 = 0$;

б) От $\int_a^b p(x) p_n(x)\, dx = 0$ следва, че p_n има поне една реална нула с нечетна кратност в (a, b). Нека нулите с нечетна кратност са $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$, $r < n$. Тогава

$$\int_a^b p(x)(x-\xi_1)\dots(x-\xi_r) p_n(x)\, dx = 0,$$

но това равенство е невъзможно, тъй като полиномът $(x-\xi_1)\dots(x-\xi_r)p_n(x)$ има само нули с четна кратност в (a, b), т. е. допускането $r < n$ доведе до противоречие;

в) От зад. 4.20 следва $p_{n+1}(x_0) = \beta_{n+1} p_{n-1}(x_0)$. Ето защо е достатъчно да се покаже, че $\beta_{n+1} < 0$. От $xp_{n-1}(x) = p_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(x)$ и израза за β_{n+1} от зад. 4.20 следва

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= -\frac{(xp_n, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})} = \frac{(p_n, xp_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})} \\ &= -\frac{\left(p_n, p_n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i\right)}{(p_{n-1}, p_{n-1})} = -\frac{(p_n, p_n)}{(p_{n-1}, p_{n-1})} < 0. \end{aligned}$$

г) Нека $p_1(x_1^{(1)}) = 0$, $x_1^{(1)} \in (a, b)$. От в) и от $p_0(x) = 1$ следва

$$v_2(x_1^{(1)}) < 0.$$

Нека нулите на p_2 са $x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}$. От

$$\operatorname{sgn} p_2(a) = \operatorname{sgn} p_2(b) = \operatorname{sgn} p_2(\pm\infty) > 0,\ p_2(x_1^{(1)}) < 0,$$

следва $a < x_1^{(2)} < x_1^{(1)} < x_2^{(2)} < b$ и твърдението е доказано за $k = 1$. Да допуснем, че то е вярно за $k = n$, и да го докажем за $k = n+1$. Да отбележим, че $p_n(b) > 0$ и $\operatorname{sgn} p_n(a) = (-1)^n$, тъй като $\operatorname{sgn} p_n(a) = \operatorname{sgn} p_n(-\infty)$ и $\operatorname{sgn} p_n(b) = \operatorname{sgn} p_n(\infty)$. Нека $\{x_i^{(n+1)}\}_{i=1}^{n+1}$ са нулите на p_{n+1} в интервала (a, b). От

$$\operatorname{sgn} p_{n+2}(a) = \operatorname{sgn} p_n(a),\ \operatorname{sgn} p_{n+2}(x_1^{(n+1)}) = \operatorname{sgn} p_n(x_1^{(n+1)}),$$

следва, че p_{n+2} има нула в $(a, x_1^{(n+1)})$, тъй като p_n не си мени знака в $[a, x_1^{(n+1)}]$. Като използуваме отново, че $\operatorname{sgn} p_{n+2}(x_2^{(n+1)}) = -\operatorname{sgn} p_n(x_2^{(n+1)})$ и че p_n си мени знака само веднъж в $(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)})$, получаваме, че p_{n+2} има нула в този интервал. По аналогичен начин се доказва, че в интервалите

$$(a, x_1^{(n+1)}),\quad (x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}), \dots,\quad (x_{n+1}^{(n+1)}, b)$$

лежи по една нула на p_{n+2}.

4.22. а) След диференциране на $\varphi(x) = (x^2-1)^n$ и умножаване с $x^2 - 1$ се получава $\varphi'(x)(x^2-1) = 2n\varphi(x)$, откъдето следва

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[\varphi'(x)(x^2-1)] = 2n\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[x\varphi(x)]$$

и след прилагане на формулата на Лайбниц за диференциране на произведение

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\varphi^{(n+2-k)}(x)(x^2-1)^{(k)} = 2n\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\varphi^{(n+1-k)}(x)x^{(k)},$$

т. е.

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+2)}(x)(x^2-1) + (n+1)(2x\varphi^{(n+1)}(x) + n(n+1)\varphi^{(n)}(x)\\ = 2n[x\varphi^{(n+1)}(x) + (n+1)\varphi^{(n)}(x)]\end{aligned}$$

и от факта, че $\varphi^{(n)}(x) = cP_n(x)$, където c е константа, се получава твърдението;

б) Доказателството следва от

$$\begin{aligned}\bar{P}'_{n+1}(x) - \bar{P}'_{n-1}(x) &= \left\{\left(\frac{(x^2-1)^{n+1}}{(2n+2)!!}\right)^{(n+1)} - \left(\frac{(x^2-1)^{n-1}}{(2n-2)!!}\right)^{(n-1)}\right\}'\\ &= \left\{\left(\frac{(x^2-1)^{n+1}}{(2n+2)!!}\right)'' - \frac{(x^2-1)^{n-1}}{(2n-2)!!}\right\}^{(n)}\\ &= \left\{\left(\frac{(2n+1)x^2-1}{(2n)!!} - \frac{1}{(2n-2)!!}\right)(x^2-1)^{n-1}\right\}^{(n)}\end{aligned}$$

$$= \frac{(2n+1)}{(2n)!!}((x^2-1)^n)^{(n)} = \frac{(2n+1)}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)} = (2n+1)\bar{P}_n(x),$$

ако $\bar{P}_n(x) = \frac{1}{2^n n!}[(x^2-1)^n]^{(n)} = (2n+1)\bar{P}_n(x) = (-1)^n P_n(x)$.

4.23. а) Ако

$$R_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta)^n\,d\theta,$$

то за функциите R_n е в сила рекурентната зависимост (същата, както за полиномите на Льожандър)

$$(n+1)R_{n+1}(x) = (2n+1)xR_n(x) - nR_{n-1}(x), \quad n=1,2,\ldots.$$

Наистина нека $Z = x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta$. Тогава

$$(n+1)R_{n+1}(x) - (2n+1)xR_n(x) + nR_{n-1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi WZ^{n-1}\,d\theta,$$

където

$$\begin{aligned} W &= (n+1)\left[x^2+2x\sqrt{x^2-1}\cos\theta+(x^2-1)\cos^2\theta\right] \\ &\quad -(2n+1)x[x+\sqrt{x^2-1}\cos\theta]+n \\ &= -nx^2+x\sqrt{x^2-1}\cos\theta+(n+1)(x^2-1)\cos^2\theta+n^2 \\ &= -n(x^2-1)(1-\cos^2\theta)+x\sqrt{x^2-1}\cos\theta+(x^2-1)\cos^2\theta \\ &= -n(x^2-1)\sin^2\theta+\left[x+\sqrt{x^2+1}\cos\theta\right]\sqrt{x^2-1}\cos\theta = U+V, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_0^\pi WZ^{n-1}\,d\theta = \int_0^\pi UZ^{n-1}\,d\theta + \int_0^\pi VZ^{n-1}\,d\theta.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_0^\pi VZ^{n-1}\,d\theta &= \sqrt{x^2-1}\int_0^\pi Z^n\,d\theta \\ &= \sqrt{x^2-1}\left[Z^n\sin\theta\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \sin\theta n Z^{n-1}\sqrt{x^2-1}\sin\theta\,d\theta\right] \\ &= n(x^2-1)\int_0^\pi Z^{n-1}\sin^2\theta\,d\theta = -\int_0^\pi UZ^{n-1}\,d\theta, \end{aligned}$$

т. е. $\int_0^\pi WZ^{n-1}\,d\theta = 0$. Тъй като

$$R_0(x) = P_0(x) = 1,\ \ R_1(x) = P_1(x) = x,$$

то $R_n(x) = P_n(x)$ за всяко n;

б) Решението следва от представянето в точка а) и нера венството

$$\left|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right| = \sqrt{x^2\sin^2\theta+\cos^2\theta} \le 1,$$

вярно за всяко $x \in [-1,1]$.

4.24. Използувайте представянето

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}[(1-x^2)^n]^{(n)} \\ &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}\frac{n!}{k!}(1+x)^{n-k}(1-x)^k. \end{aligned}$$

4.25. а) При $x > 1$ имаме

$$(x-1)^{\alpha+n} = x^{\alpha+n}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha+n} = x^{\alpha+n} - (\alpha+n)x^{\alpha+n-1} + \cdots,$$

$$(x+1)^{\beta+n} = x^{\beta+n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\beta+n} = x^{\beta+n} + (\beta+n)x^{\beta+n-1} + \cdots,$$

откъдето

$$\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}]$$
$$= (\alpha+\beta+2n)\dots(\alpha+\beta+n+1)x^{\alpha+\beta+n}$$
$$+(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2n-1)\dots(\alpha+\beta+n)x^{\alpha+\beta+n-1} + \cdots,$$

или

$$\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}] = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^{\alpha+\beta+n}$$
$$+(\beta-\alpha)\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)}x^{\alpha+\beta+n-1} + \cdots$$

Аналогично

$$(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta} = x^{-\alpha-\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\beta}$$
$$= x^{-\alpha-\beta} + (\alpha-\beta)x^{-\alpha-\beta-1} + \cdots$$

От последните две равенства следва

$$P_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{2^n n!}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}]$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^n + \frac{(\alpha-\beta)n}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^{n-1} + \cdots$$

б) Да означим

$$I^{(m,n)} = \int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx,$$
$$\varphi_n(x) = (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n},$$
$$Y_m(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^m}{dx^m}[(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}],$$
$$I_1^{(m,n)} = \int_{-1}^{1}Y_m(x)\varphi_n^{(n)}(x)dx.$$

След интегриране по части следва

$$I_1^{(m,n)} = (-1)^m\int_{-1}^{1}Y_m^{(m)}(x)\varphi_n^{(n-m)}(x)dx$$
$$= (-1)^{m+1}\int_{-1}^{1}Y_m^{(m+1)}(x)\varphi_n^{(n-m-1)}(x)\,dx.$$

От а) следва, че $Y_n(x) = (-1)^n\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}x^n + \dots$ (Y_n е полином от степен n) и следователно

$$I_1^{(m,n)} = \begin{cases} 0 & \text{за} \ \ m < n, \\ n!\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \displaystyle\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx & \text{за} \ \ m = n. \end{cases}$$

За пресмятането на $\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx$ се прави смяната $x = 2t-1$ и

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx - 2^{\alpha+\beta+2n+1}\int_0^1 (1-t)^{\alpha+ntb+n}\,dt.$$

Известно е, че интеграли от вида $B(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{p-1}x^{q-1}dx$ се наричат *интеграли на Ойлер* и се изразяват чрез гама-функции $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} \varphi_n(x)dx = 2^{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

От получените равенства и от $I^{(m,n)} = \dfrac{(-1)^{m+n} + I_1^{(m,n)}}{2^{m+n}n!m!}$ следва твърдението.

4.26. От зад. 4.25 следва, че полиномите

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{2^n n!\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

са ортогонални в $[-1,1]$ с тегло $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ и имат коефициент пред най-високата степен единица. От зад. 4.20 следва, че за тях е в сила

$$Q_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = (x-\alpha_{n+1})Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \beta_{n+1}Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

където

$$\beta_{n+1} = -\frac{(Q_n^{(\alpha,\beta)}, Q_n^{(\alpha,\beta)})}{(Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)}, Q_{n-1}^{(\alpha,\beta)})}.$$

От зад. 4.25 следва

$$\begin{aligned} (P_n^{(\alpha,\beta)}, P_n^{(\alpha,\beta)}) &= \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(P_n^{(\alpha,\beta)}(x))^2\,dx \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} \end{aligned}$$

и

$$\beta_{n+1} = \frac{4n(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n)^2(\alpha+\beta+2n-1)}.$$

Определянето на α_{n+1} става от рекурентната връзка за полиномите $Q_n^{(\alpha,\beta)}$ чрез сравняване на коефициентите пред x^n от двете страни на равенството, като се използува, че коефициентът пред x^{n-1} в полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}$ е равен на $\dfrac{(\alpha-\beta)n\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{2^n n!\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$ (вж. зад. 4.25). Получава се

$$\alpha_{n+1} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

За окончателното доказателство остава да се премине обратно от $Q_n^{(\alpha,\beta)}$ към $P_n^{(\alpha,\beta)}$.

4.27. Използувайте представянето:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n-k+1)\Gamma(\beta+k+1)}(x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

4.28. а) След смяната $x = \cos t$ се получава

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}.U_k(x)U_i(x)\,dx = \int_0^{\pi}\sin(k+1)t\sin(i+1)t\,dt = \begin{cases} 0 & \text{за } k \neq i, \\ \frac{\pi}{2} & \text{за } k = i. \end{cases}$$

г) Решението следва от равенството

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\sin n\theta\cos\theta$$

след полагане $\theta = \arccos x$.

4.29. а) Решението следва от тъждеството

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\dots(\alpha+n-k+1)x^{\alpha+n-k}e^{-x}.$$

б) От тъждеството

$$I = \int_0^{\infty}x^{\alpha}e^{-x}L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)\,dx = (-1)^n\int_0^{\infty}L_m^{(\alpha)}(x)\varphi_n^{(n)}(x)\,dx,$$

$\varphi_n(x) = x^{\alpha+n}e^{-x}$, след интегриране по части на интеграла вдясно се получава

$$I = (-1)^{n+m}\int_0^{\infty}(L_m^{(\alpha)}(x))^{(m)}\varphi_n^{(n-m)}(x)\,dx$$

и след още едно интегриране по части при $n > m$, като се има предвид, че $L_m^{(\alpha)}$ е полином от степен m, намираме

$$I = (-1)^{n+m+1}\int_0^{\infty}(L_m^{(\alpha)}(x))^{(m+1)}\varphi_n^{(n-m-1)}(x)\,dx = 0.$$

При $m = n$ от предпоследното равенство следва

$$I = \int_0^{\infty}(L_m^{(\alpha)}(x))^{(n)}\varphi_n(x)\,dx = n!\int_0^{\infty}\varphi_n(x)dx = n!\Gamma(\alpha+n+1),$$

като е използувано, че коефициентът пред x^n в $L_n^{(\alpha)}$ е равен на единица. От последните две равенства следва твърдението.

в) Нека $z(x) = x^{n+\alpha}e^{-x}$. След диференциране следва

$$xz' = (n+\alpha-x)z$$

и след $(n+1)-$кратно диференциране намираме

$$xz^{(n+2)} + (1-\alpha+x)z^{(m+1)} + (n+1)z^{(n)} = 0.$$

В това равенство заместваме $z^{(n+2)}$ и $z^{(n+1)}$, определени от

$$z^{(n)}(x) = (-1)^n x^\alpha e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x),$$

и търсеното тъждество се получава.

г) От зад. 4.20 следва

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - \alpha_{n+1}) L_n^{(\alpha)}(x) + \beta_{n+1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

където

$$\beta_{n+1} = -\frac{(L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)})}{(L_{n-1}^{(\alpha)}, L_{n-1}^{(\alpha)})} = -n(n+\alpha),$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{(xL_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)})}{(L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)})} = \frac{(x^{n+1} - n(\alpha+n)x^n + \dots,\ L_n^{(\alpha)})}{(L_n^{(\alpha)}, L_n^{(\alpha)})} = 2n + \alpha + 1.$$

4.30. а) Нека $z(x) = e^{-x^2}$. По индукция се вижда, че

$$z^{(n)}(x) = [(-2)^n x^n + \dots] e^{-x^2}.$$

Остава да се използува фактът, че $H_n(x) = e^{x^2} z^{(n)}(x)$.

б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) q(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) q(x)\,dx;$

след $n-$кратно интегриране по части

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) q(x)\,dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} q^{(n)}(x)\,dx = 0,$$

ако q е полином от степен, по-малка от n.

в) Решението следва от б) при $q(x) = H_n(x)$, предвид

$$H_n(x) = (-2)^n x^n + \dots \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

г) Полиномите $\bar{H}_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{2^n} H_n(x)$ имат вида $\bar{H}_n(x) = x^n + \dots$ и от зад. 4.20 следва, че $\bar{H}_{n+1}(x) = (x - \alpha_{n+1})\bar{H}_n(x) + \beta_{n+1}\bar{H}_{n-1}(x)$, където

$$\beta_{n+1} = -\frac{(\bar{H}_n, \bar{H}_n)}{(\bar{H}_{n-1}, \bar{H}_{n-1})} = -\frac{(\bar{H}_n, \bar{H}_n)}{4(\bar{H}_{n-1}, \bar{H}_{n-1})} = -\frac{n}{2}, \quad \alpha_{n+1} = 0,$$

тъй като H_n съдържа само четни (нечетни) степени на x, ако n е четно (нечетно).

д) Нека $z(x) = e^{-x^2}$. Тогава $z'(x) = -2xz(x)$ и диференцирайки $n+1$ пъти, получаваме $z^{(n+2)}(x) + 2xz^{(n+1)}(x) + 2(n+1)z^{(n)}(x) = 0$. Остава да се вземе предвид $z^{(n)}(x) = e^{-x^2} H_n(x)$.