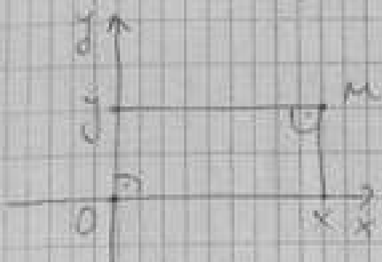
Лекция 1 — 07.10.14

Математически анализ

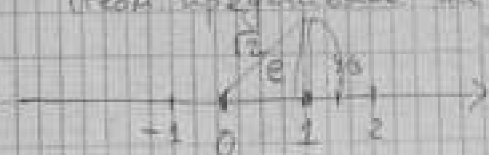
1. Пространство R^n

$$R^n = \{ \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_n)}_{\text{съвкупност от всички точки}} : x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,n} \}$$

$$R^2 = \{ (x, y) : x, y \in \mathbb{R} \}$$



(геом. представяне на основни числа)



$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

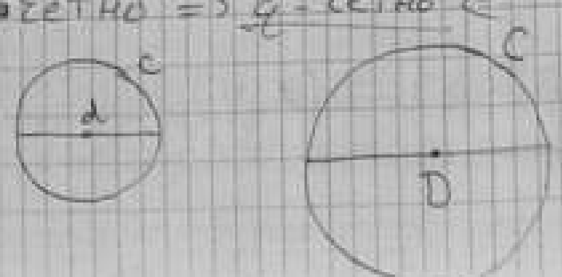
$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \}$

$\mathbb{I} = \{$ ирац., пр: $\pi, e, \sqrt{2} \}$

Тв. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Док. Допускаме $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $p, q \in$ [redacted] $\mathbb{N}$
(p, q) – вз. прости

$\sqrt{2} \cdot q = p \;\big|^2 \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ – четно $\Rightarrow$ p – четно
$\Rightarrow p = 2s \ (s \in \mathbb{N}) \Rightarrow 2q^2 = 4s^2 \Rightarrow q^2 = 2s^2 \Rightarrow$
q^2 – четно $\Rightarrow$ q – четно



$$\frac{C}{D} = \frac{c}{d} = \pi$$

за π
за e

$\mathbb{R}^n$

$x(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y(y_1, y_2, \dots, y_n)$

$x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

ε околност

$a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ако $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N_\varepsilon : \forall n > N$

$\longrightarrow |a-a_n| < \varepsilon \equiv a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

$x(x_1, x_2, \dots, x_n)$

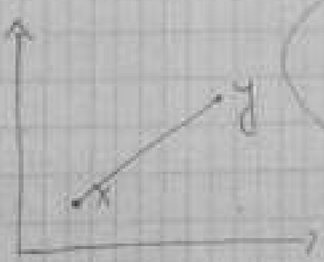
$y(y_1, y_2, \dots, y_n)$

разстоянието

$$\boxed{\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2}}$$

дължина

$$|xy| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$



разстояние $\to \rho(x,y)$

Свойства: 1. $\rho(x,y) \geq 0$

2. $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$

3. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

4. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

на ρ

Неравенство на Коши:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \quad (a_i, b_i \in \mathbb{R})$$

Неравенство на Минковски ([illegible])

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \quad (a_i, b_i \in \mathbb{R})$$

свойство 4:

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = \sqrt{\sum \big(\underbrace{(x_i-z_i)}_{a_i} + \underbrace{(z_i-y_i)}_{b_i}\big)^2} \le$$

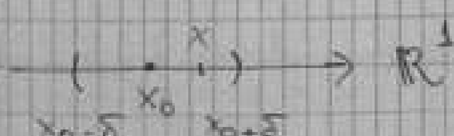
$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2} = \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

$$\rho(x,y) = \max(|x_i-y_i|)$$

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

Def: Нека $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$

$B_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x_0, x) < \delta\}$ ← δ-околност на т. x_0



$x^{(m)} \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)} \right)$ редица $m = 1, 2, \ldots \infty$

$M_m \left(x_1^{(m)}, y_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)} \right)_{m=1}^{\infty}$ $m \in \mathbb{N}$

размерност

$x^{(1)} \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1 \right)$

$x^{(2)} \left(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2 \right)$

Def. Нека $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$. Казваме, че $a(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е граница на редицата $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ ако $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, a) = 0$.

$x^m \to a \Leftrightarrow \rho(x^m, a) \to 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N_\varepsilon : \forall m > N \to \rho(x^{(m)}, a) < \varepsilon$

Th. Редицата $x^{(m)} (x_1^m, x_2^m, \ldots, x_n^m) \xrightarrow[m \to \infty]{} a(a_1, \ldots a_n)$ $\Leftrightarrow \forall i = \overline{1, n} : x_i^{(m)} \xrightarrow[m \to \infty]{} a_i$, т.е. $\lim\limits_{m \to \infty} x_i^{(m)} = a_i$

$A_m \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{2m} - 1 \right) \to A_0 (0, -1)$

Док.: $(\Rightarrow)$ $x^{(m)} \xrightarrow[m \to \infty]{} a \Rightarrow \underline{\forall \varepsilon > 0} \ \underline{\exists N = N_\varepsilon} : \forall m > N$ $\to \underline{\rho(x^{(m)}, a) < \varepsilon}$

$\rho(x^{(m)}, a) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - a_i)^2} < \varepsilon$

$\underline{|x_i^{(m)} - a_i|} = \sqrt{(x_i^{(m)} - a_i)^2} \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - a_i)^2} < \underline{\varepsilon}$ (фикс i)

$\Rightarrow x_i^m \xrightarrow[m \to \infty]{} a_i$, $(\forall i = \overline{1, n})$

3 =

$\Leftarrow$) Нека $x_i^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} a_i \ (\forall i = \overline{1,n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{c} > 0 \ \exists N_i : \forall n > N_i \to |x_i^{(m)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{c}$ $(\forall i = \overline{1,n})$

Нека $N = \max N_i$, $1 \le i \le n$, $\forall m > N \Rightarrow$

$\Rightarrow |x_i^{(m)} - a_i| < \frac{\varepsilon}{c}, \ (\forall i = \overline{1,n})$

$$\rho(x^{(m)}, a) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(m)} - a_i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^2} =$$

$$= (\varepsilon) \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c^2}} = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{c^2}} = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{c} = \varepsilon$$

при $c = \sqrt{n}$

$\Rightarrow \{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ е сх. и $\lim\limits_{m\to\infty} x^{m} = a$

Def. $\{a_n\}$ е огр., ако $\exists M > 0 ; \forall n \in \mathbb{N} \to$
$\to \underline{|a_n| \le M}$ или $a_n \in [-M, M]$!!!

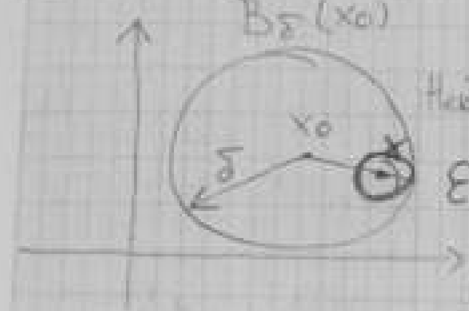
Def. $G \subset \mathbb{R}^n$

т. $x \in G$ се нарича вътрешна на G, ако $\exists B_\delta(x)$:
$B_\delta(x) \subset G$.

Деф:

Отворено множество се нарича множество, на което всяка негова точка е вътрешна.

(Т6) Мн. $B_\delta(x_0)$ е отворено множество



Док|

Нека $x \in B_\delta(x_0)$

$\varepsilon = \delta - \rho(x, x_0)$ т.е. $B_\varepsilon(x) \subset B_\delta(x_0)$

$y \in B_\varepsilon(x) : \rho(x, y) < \varepsilon = \delta - \rho(x, x_0)$

$\Rightarrow \rho(y, x_0) \leq \rho(x, y) + \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in B_\delta(x_0) \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset B_\delta(x_0)$

Лекция 2
Математически анализ

$M \subseteq \mathbb{R}^n$

Def $x_0 \in M$ е вътрешна точка, ако $\exists B_\delta(x_0) \subseteq B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n$

Def $\operatorname{int} M = M^\circ = \{x : x$ - вътрешна точка на $M\}$ - вътрешност на множ. M

Def Множеството M - отворено, ако $M = M^\circ$ (се състои само от вътрешни точки)

$B_\delta(x_0) = \{x : \rho(x, x_0) < \delta\}$ - отворено множ.

Свойства:

1) $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ - отворено множество
2) $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, G_α - отворени множества, където $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е фамилия [illegible] отв. множ.
3) $\bigcap_{k=1}^{n} G_k$ е отворено, където $\{G_k\}_{k=1}^{n}$ са отв. множества

Принцип на затворените отсечки

$\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ такива, че $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Св. за плътност: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a < b$ $\exists c \in \mathbb{R} : a < c < b$

Док:

2) $x \in \bigcup G_\alpha \Rightarrow \exists \alpha_0 \in A : x \in G_{\alpha_0}$ - отв. $\Rightarrow \exists B_\delta(x) : B_\delta(x) \subset G_{\alpha_0} \Rightarrow B_\delta(x) \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ - отв.

3) $\forall x \in \bigcap_{k=1}^{n} G_k \Rightarrow \forall k = \overline{1,n} : x \in G_k$ - отв $\Rightarrow \forall k \; \exists B_{\delta_k}(x)$, $\delta_k > 0 : B_{\delta_k}(x) \subset G_k$. Нека $\delta = \min_{1 \le k \le n} \delta_k > 0$

$B_\delta(x) \subset \underset{\cap \atop G_k}{B_{\delta_k}(x)} \; (\forall k = \overline{1,n}) \Rightarrow B_\delta(x) \subset \bigcap_{k=1}^{n} G_k \Rightarrow x \in$ отворено

$\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} G_k$ - отворено

Базови:

$f: X \to Y$

$\forall x \in X \xrightarrow[\text{ед. ел.}]{f} y \in Y$ $\Leftarrow$

$y = f(x)$

$f(X) = \{ f(x) : x \in X \}$

1) $f(X) = Y$ - f сюрекция!

2)

$f: X \to Y$

$\forall x_1, x_2 \in X, \; x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

f - инекция

3) 1 + 2 = биекция

Ако имаме биекция м/у две м-ва, то ж са равномощни.

Def | Нека $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Казваме, че F е затворено множество, ако $\mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено множество.

Свойства 1) $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ - затв. множ.

2) $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ - затворено, ако фам. $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е затв. м.

3) $\bigcup_{k=1}^{n} F_k$ е затворено, ако F_k; $k = \overline{1, n}$, са затворени множества

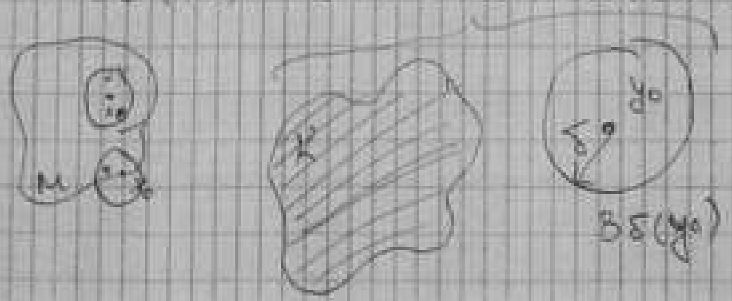
Док | ① $\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset \\ \emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}^n, \emptyset$ - затв. мн.

② $\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)}_{отв} = \underbrace{\bigcup_{\alpha \in A} (\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus F_\alpha}_{отв. мн.})}_{отв. мн.} \Rightarrow \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ е затв. мн.

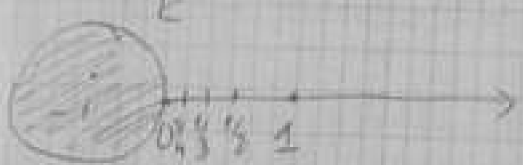
③ $\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)}_{отв} = \underbrace{\bigcap_{k=1}^{n} (\underbrace{\mathbb{R}^n \setminus F_k}_{отв})}_{отв} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ - затв.

Ф | $M \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Казваме, че x_0 е т. на сгъстяване на мн. M ако $\forall B_\delta(x_0) : \exists x \in M \cap B_\delta(x_0) : x \neq x_0$

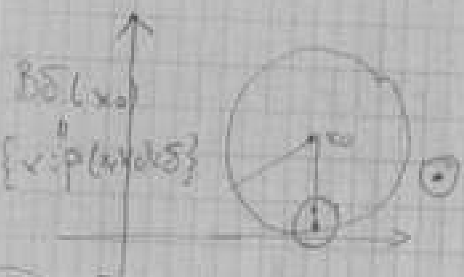


безброй много точки на отстояние.



$$M = R \cup \left\{ \frac{1}{n} ; \ldots \right\}$$

Def $M \cup \{$ вът. т. на сече на $M \} = \overline{M}$ - затворена обвивка на M



$$\overline{B_\delta}(x_0) = \{ x : \rho(x, x_0) \leq \delta \}$$

(18.) $\overline{M}$ - затв. множество $\Leftrightarrow R^n \setminus \overline{M}$ е отворено

$x \in R^n \setminus \overline{M} \Rightarrow x_0 \notin \overline{M} \Rightarrow x_0$ не е т. на сг. на M
$\Rightarrow \exists B_\delta(x_0) \quad B_\delta(x_0) \cap \overline{M} = \emptyset \Rightarrow x_0 \in \overline{M}$
$B_\delta(x_0) \subset R^n \setminus \overline{M} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$ отворено мн. $\Rightarrow \overline{M}$ - затворено

Математически анализ
лекция 3

<u>Th.</u> (Б-В)
От всяка ограничена редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ можем да изберем сходяща подредица

<u>Док.</u> $\{a_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$, т.е. $\{a_m(x_m, y_m)\}_{m=1}^{\infty}$, $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ е ограничена, т.е. $\exists r : \{A_m\}_{m=1}^{\infty} \subset B_r(0)$
$\Rightarrow \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset (-r, r) \Rightarrow \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ е ограничено $\overset{\text{Т.Б.В}}{\Longrightarrow} \exists$ сходяща подредица $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Вземаме подредицата $\{y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow$ огр. $\overset{\text{Т.Б.В}}{\Longrightarrow} \exists$ сходяща подредица $\{y_{m_{k_s}}\}_{s=1}^{\infty}$ на редицата $\{y_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow$
$\Rightarrow \{x_{m_{k_s}}\}_{s=1}^{\infty}$ е сходяща $\Rightarrow A_{m_{k_s}}(x_{m_{k_s}}, y_{m_{k_s}})$ е сходяща

Деф: Множеството $M \subset \mathbb{R}^n$ наричаме компактно, ако е <u>ограничено</u> и <u>затворено</u>!

<u>Th.</u> Множеството M е компактно $\Leftrightarrow \forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset M$, $\exists$ подредица $\{x_{m_s}\}_{s=1}^{\infty}$: $\lim\limits_{s\to\infty} x_{m_s} = a \in M$

<u>Док.</u> $\Rightarrow$) Нека M е компактно и нека $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset M$. Т.к. M е ограничено $\Rightarrow \{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ – ограничена $\overset{\text{Т.Б.В}}{\Longrightarrow} \exists$ сход. подредица $\{x_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ и нека $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k} = a \Rightarrow a$ е точка на сгъстяване и т.к. M е затворено $\Rightarrow M \ni a$
$\Leftarrow$) $\forall \{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset M$ $\exists$ сход. подредица $\{x_{m_s}\}_{s=1}^{\infty}$ и $\lim\limits_{s\to\infty} x_{m_s} = a \in M.$ б) – затворено. Нека a е т. на сгъстяване $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in M, x_\varepsilon \neq a :$
$\rho(x_\varepsilon, a) < \varepsilon$. Нека $\forall n \in \mathbb{N} : \varepsilon = \frac{1}{n}$
$\exists x_n \in M$, $x_n \neq a : \rho(x_n, a) < \frac{1}{n}$

$0 \le \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) \to 0$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0 \qquad 0$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow a \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \to b \in M$,

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to a \Rightarrow a \in M \Rightarrow M$ - затворено

iii) M - ограничено, ако $\exists r > 0 : M \subset B_r(0,0)$.

Да допуснем че M не е ограничено $\Rightarrow \forall r > 0$;

$\exists x_r \in M : \rho(x_r, 0) > r \quad \forall r = n \in \mathbb{N} : \exists x_m \in M$

$\rho(x_m, 0) > m$

$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset M \qquad \rho(x_m, 0) > m$

$\Downarrow$

$\exists$ сход. подредица $\{x_{m_s}\}_{s=1}^{\infty} \subset M$ и $\lim_{s \to \infty} x_{m_s}$

$\rho(x_{m_s}, 0) > m_s$, $\rho(x_{m_s}, a) \to 0$, $\rho(x_{m_s}, 0) \to \infty$

$\rho(x_{m_s}, 0) < \rho(x_{m_s}, a) + \rho(a, 0)$ - противоречие

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

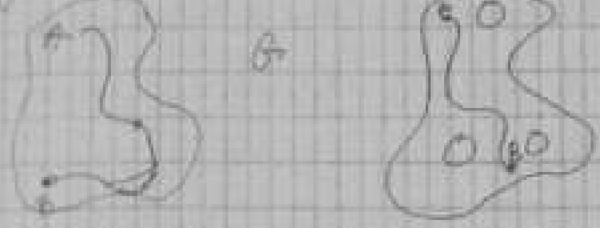
$+\infty \qquad 0 \qquad \rho(a,0)$

Деф. Нека $M \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Казваме, че x_0 е контурна или гранична точка на M, ако $\forall \delta > 0$: $B_\delta(x_0) \cap M \neq \emptyset$ и $B_\delta(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$

Деф. $\partial M = \{x : x$ - контурни точки на $M\}$ - граница на M. $\partial B_r(x_0) = \{x : \rho(x_0, x) = r\}$

Деф. Нека $x_i = \varphi_i(t)$ дефин. и непрек. в/у интервала $[\alpha, \beta]$. $\Gamma = \{(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots \varphi_n(t))\}$ $t \in [\alpha, \beta]$ - се нарича крива линия в $\mathbb{R}^n$

Деф Свързаност: Мн-во $G \subset \mathbb{R}^n$ наричаме свързано, ако $\forall A, B \in G$, $\exists \ell$ с краища A и B: $\ell \subset G$



Деф Едно множество, което е свързано и отворено се нарича област.

№ 2 Мярка на Жордан в $\mathbb{R}^n$

__Деф.__ A, B – множества. Декартово произведение на A и B наричаме множеството $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$

$\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\ x,y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

__Деф.__ Клетка в $\mathbb{R}$ се разбира краен интервал или $\emptyset$. $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $\emptyset$ $(a,b \in \mathbb{R})$

__Деф.__ Мярка на клетка I в $\mathbb{R}$ се нарича дължината на тази клетка ($m(I)$ = дължината на I; $|\langle a,b\rangle| = b-a$)

__Деф.__ Клетка в $\mathbb{R}^n$ наричаме $\forall$ множество $\Pi = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ (I_i – клетки в $\mathbb{R}$)

Мат. Анализ

Лекция 4

28.10.14

$< \in \{ (, [\}$

$> \in \{),] \}$

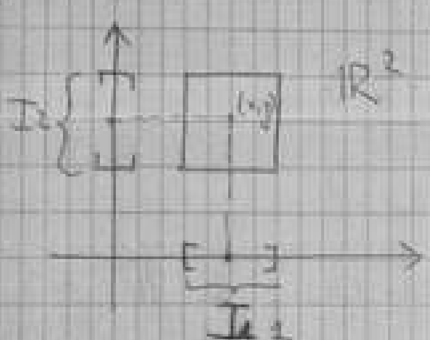
Def Клетка в $\mathbb{R}$ се нарича всеки краен интервал $I = \langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$. Мярка на клетката $I = \langle a, b \rangle$ се нарича числото:

$$m(I) = \text{дължината}(\langle a, b \rangle) = b - a$$

$m(\varnothing) = 0$ $\quad (a, a) = \{x : a < x < a\} = \varnothing$

$m(\{a\}) = 0$ $\quad [a, a] = \{x : a \le x \le a\} = \{a\}$

Def Нека $I_1, I_2, \dots, I_n$ са клетки в $\mathbb{R}$. Множеството $\Pi = \prod_{i=1}^{n} I_i = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ се нарича клетка в $\mathbb{R}^n$



$\mathbb{R}^2$ $\quad \Pi = I_1 \times I_2$

$m(\Pi) = \prod_{i=1}^{n} m(I_i) = m(I_1) m(I_2) \dots m(I_n)$ - мярка на клетката Π.

Свойства: $\boxed{1}$ $m(\Pi) = 0 \iff$ поне 1 от интервалите I_i е точка на $\varnothing$

$m(\Pi) = \prod_{i=1}^{n} m(I_i) = 0 \Rightarrow$ поне $m(I_i) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow I_i$ е или точка, или $\varnothing$

$\boxed{2}$ $m(\Pi) \neq 0 \Rightarrow$ всичките съставящи са отсечки I_i: $m(I_i) > 0$, които са различни от точка или $\varnothing$

$\boxed{3}$ Ако I е клетка в $R \Rightarrow I^0$ и $\overline{I}$ са също клетки и $m(I^0) = m(\overline{I}) = m(I)$

$I = [a,b) \to I^0 = (a,b)$ ← вътрешност

$I = \langle a,b \rangle \to \overline{I} = [a,b]$ ← затв. обвивка

$m(I^0) = m(\overline{I}) = m(I)$

<u>Свойство 4</u> Ако Π е клетка в $\mathbb{R}^n \Rightarrow \Pi^0$ и $\overline{\Pi}$ са клетки в $\mathbb{R}^n$ и $m(\Pi^0) = m(\overline{\Pi}) = m(\Pi)$

<u>Ако</u> $\Pi = \prod_{i=1}^{n} I_i$, $I_i \subset \mathbb{R}$ - клетки $\Rightarrow \Pi^0 = \prod_{i=1}^{n} I_i^0$
$\overline{\Pi} = \prod_{i=1}^{n} \overline{I_i}$

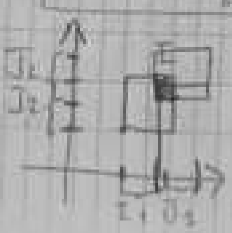
$$m(\Pi^0) = \prod_{i=1}^{n} m(I_i^0) = \prod_{i=1}^{n} m(I_i)$$

$$m(\overline{\Pi}) = \prod_{i=1}^{n} m(\overline{I_i}) = \prod_{i=1}^{n} m(I_i)$$

<u>Свойство 5</u> Нека I, J са клетки в $\mathbb{R}$ (числови) $\Rightarrow$
1) $I \cap J$ - клетка в $\mathbb{R}$
2) $I \setminus J$ - обединение на не повече от 2 непресичащи се клетки в $\mathbb{R}$.

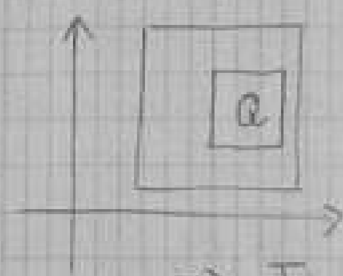
<u>Свойство 6</u> Нека Π и Q са клетки в $\mathbb{R}^n \Rightarrow$
$\Rightarrow \Pi \cap Q$ е клетка
$\Pi = \prod_{i=1}^{n} I_i$
$Q = \prod_{i=1}^{n} J_i$

$$\boxed{\Pi \cap Q = \prod_{k=1}^{n} (I_i \cap J_i)}$$



Свойство 7

Ако $П$ и Q са клетки такива, че $Q \subset П \Rightarrow$
$\Rightarrow m(Q) \leq m(П)$



$$П = \prod_{i=1}^{n} I_i$$

$$Q = \prod_{i=1}^{n} J_i$$

$$Q \subset П \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} J_i \subset \prod_{i=1}^{n} I_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J_i \subset I_i, \ (\forall i = \overline{1,n}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq m(J_i) \leq m(I_i) \ (\forall i = \overline{1,n}) \Leftrightarrow$$

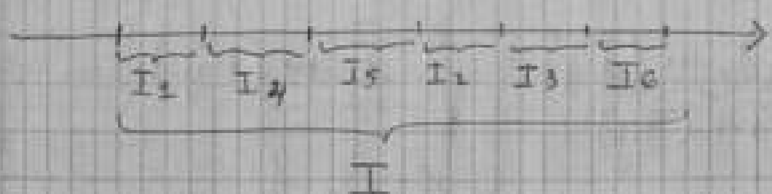
$$\Leftrightarrow m(Q) = \prod_{i=1}^{n} m(J_i) \leq \prod_{i=1}^{n} m(I_i) = m(П)$$

Def. Нека A е множество. Съвкупността от непразни мн. $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ се нарича разбиване на мн. A, …

1) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i,j = \overline{1,m}$, $i \neq j$
2) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$

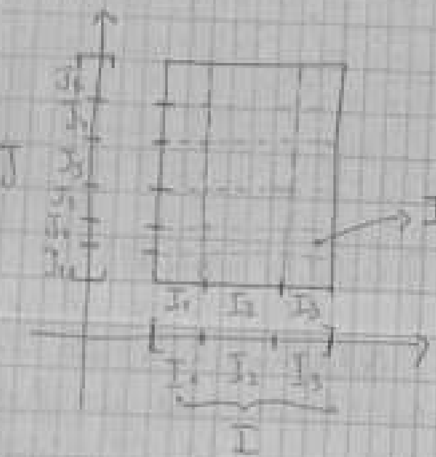
Свойство 8. Нека е съвкупността от клет $\{I_i\}_{i=1}^{m}$ е разбиване на клетката $I \Rightarrow$

$$m(I) = \sum_{i=1}^{m} m(I_i)$$



Свойство 9: Нека $\{I_1, I_2, \dots, I_m\}$ е разбиване на кл. $I \subset \mathbb{R}$ и $\{J_1, J_2, \dots, J_s\}$ е разбиване на $J \subset \mathbb{R} \Longrightarrow$ съвкупността от клетки $\{\Pi_{ij} = I_i \times J_j$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s}\}$ е разбиване на $\Pi = I \times J$ и $m(\Pi) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} m(\Pi_{ij})$

$\{\Pi_{ij}\}$



$\longrightarrow I_3 \times J_2 = \Pi_{32}$

$$\Pi = \bigcup_{j=1}^{s} \bigcup_{i=1}^{m} \Pi_{ij}$$

$(x, y) \in \Pi : x \in I = \bigcup_{i=1}^{m} I_i$

$\Rightarrow \exists!\, i \quad x \in I_i$

$y \in J = \bigcup_{j=1}^{s} J_j \Rightarrow \exists!\, j \quad y \in J_j \Rightarrow$

$\Rightarrow (x, y) \in I_i \times J_j = \Pi_{ij}$

$$m(I) = \sum_{i=1}^{m} (I_i)$$

$$m(J) = \sum_{j=1}^{s} (J_j)$$

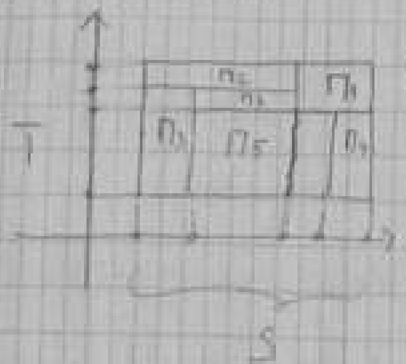
$$m(\Pi) = m(I) \cdot m(J) = \left(\sum_{i=1}^{m} m(I_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{s} m(J_j)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} \underbrace{m(I_i) \cdot m(I_j)}_{m(\Pi_{ij})} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} m(\Pi_{ij})$$

стандартно разбиване!

съвкупността от клетки

<u>Свойство 10.</u> Нека $\{\Pi_i\}_{i=1}^{m}$ е разбиване на клетката Π в $\mathbb{R}^2 \Rightarrow m(\Pi) = \sum_{i=1}^{m} m(\Pi_i)$

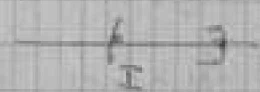


<u>Док.</u>

Нека $\Pi_i = I_i \times J_j \ (i = \overline{1,m})$

$$S = \bigcup_{i=1}^{m} \partial I_i$$

$$T = \bigcup_{i=1}^{m} \partial J_j$$



$(S, T) \xrightarrow{\text{поражда}}$ стандартно разбиване

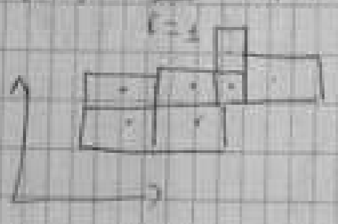
(S, T) поражда стандартно разбиване на $\forall \Pi_i$ и нека $\{\Pi_i^{j}\}_{j=1}^{p_i}$ е стандартно разбиване на Π_i

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} \{\Pi_i^{j}\}_{j=1}^{p_i}$ - стандартно разбиване на Π

$\overset{\text{от св. 9}}{\Longrightarrow} \quad m(\Pi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p_i} m(\Pi_i^{j}) = \sum_{i=1}^{m} m(\Pi_i)$

<u>Деф.</u> Мн. $A \subset \mathbb{R}^n$ се нарича клетъчно м-во, ако $\exists \{\Pi_i\}_{i=1}^{p}$ клетки $\Pi_i \subset \mathbb{R}^n$: $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$ $\forall i, j = \overline{1,p}$, $i \neq j$ и $\boxed{A = \bigcup_{i=1}^{p} \Pi_i}$

$$m(A) = \sum_{i=1}^{p} m(\Pi_i)$$



клетъчно множество

Док: Коректност на дефиницията

$m(A)$ е коректно дефинирано

Нека $\{\Pi_i\}_{i=1}^{p}$, $\{Q_j\}_{j=1}^{q}$ са разбивания от клетки на A.

$\Pi_{ij} = \Pi_i \cap Q_j$ $(i=\overline{1,p},\ j=\overline{1,q})$ - клетки

$\{\Pi_{ij}\}_{i,j}$ - взаимно не пресичащи се клетки

i-фиксирано $\{\Pi_{ij}\}_{j=1}^{q}$ е разбиване на Π_i

$$m(\Pi_i) = \sum_{j=1}^{q} m(\Pi_{ij})$$

$$\sum_{i=1}^{p} m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m(\Pi_{ij}) = \sum_{j=1}^{q} \underbrace{\sum_{i=1}^{p} m(\Pi_{ij})}_{m(Q_j)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} m(Q_j) \Rightarrow m(A) \text{ е \underline{коректно}}$$

$$\left(\sum m(Q_j) = m(A) \quad \sum m(\Pi_i) = m(A) \right)$$

Свойства на кл. мн.:

Свойство 1 Ако A и B са кл. мн. и $A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow$ 1) $A \cup B$ е кл. множество

2) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

<u>Док</u> Т.к. А, В са кл. множества

$\Rightarrow \exists$ разбиване от клетки за А и В и нека $\{\Pi_i\}_{i=1}^{p}$ е разб. от кл. на А

и $\{Q_j\}_{j=1}^{q}$ е разбиване от кл. на В

$\{\Pi_i\}_{i=1}^{p} \cup \{Q_j\}_{j=1}^{q}$ - разбиване от кл. на мн на $A \cup B$

Ако док. $\Pi_i \cap Q_j \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$

$\left(\bigcup_{i=1}^{p} \Pi_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{q} Q_j\right) = A \cup B \Rightarrow A \cup B$ е кл. множество

$m(A \cup B) = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} m(\Pi_i)}_{= m(A)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{q} m(Q_i)}_{= m(B)} = m(A) + m(B)$

04.11.14 Лекция 5 =1=

Математически анализ

Def.

$A \subset \mathbb{R}^n$

A - клетъчно множество, $A = \bigcup_{i=1}^{m} \Pi_i$, където $\{\Pi_i\}_{i=1}^{m}$ са клетки и $\Pi_i \cap \Pi_k = \emptyset$; $\forall i,k = \overline{1,m}, i \neq k$

$$m(A) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{m} m(\Pi_i)$$

Св 1 Ако A и B са клетъчни множества такива се $A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow$ 1) $A \cup B$ е кл. мн.

2) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ / Следствие 1

Св 2 Ако A и B са кл. мн. $\Rightarrow A \cap B$ е кл. мн.

Следствие 2/ Ако $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ - кл. мн. $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{m} A_i$ - кл. мн.

Следствие 1/ Ако $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ - кл. мн. $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i,j = \overline{1,m}$, $i \neq j$

$\Rightarrow$ 1) $\bigcup_{i=1}^{m} A_i$ - кл. мн.

2) $m\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} m(A_i)$

Док на Св. 2/

Нека A и B - кл. мн. $\Rightarrow A = \bigcup_{i=1}^{m} \Pi_i$, $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$ $i \neq j$ и

$B = \bigcup_{j=1}^{p} Q_j$, $Q_j \cap Q_k = \emptyset$, $j \neq k$

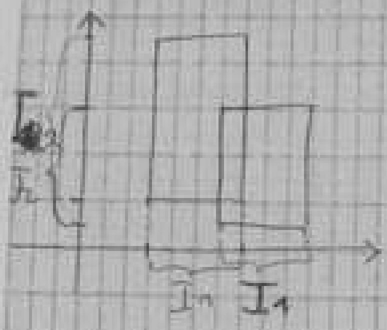
$\Rightarrow A \cap B = \left(\bigcup_{i=1}^{m} \Pi_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{p} Q_j\right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{p} \underbrace{(\Pi_i \cap Q_j)}_{\Pi_{ij}\text{ - клетки взаимно непресичащи се}} \Rightarrow$

$\Rightarrow A \cap B$ е кл. мн.

$(\Pi - Q)$

Свойство 3 Нека Π и Q - клетки $\Rightarrow \Pi \setminus Q$ е кл. мн.

Док-во Нека Π и Q са кл. в $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \Pi = I_1 \times I_2$, $Q = J_1 \times J_2$, $\{ I_1, I_2$ - кл. ~~множество~~ J_1, J_2 - кл. $\} \mathbb{R}$



$$\Pi \setminus Q = \overbrace{\left[(I_1 \setminus J_1) \times I_2 \right]}^{A_1 \text{ кл. мн. в } \mathbb{R}^2} \cup$$

$$\cup \left[\underbrace{(I_1 \cap J_1) \times (I_2 \setminus J_2)}_{A_2 \text{ кл. мн. в } \mathbb{R}^2} \right]$$

A кл. множество $\qquad A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Свойство 4 Нека A и B са кл. множества $\Rightarrow$ $A \setminus B$ кл. множество

Д-во:

A - кл. мн., $B = \Pi$ - клетка

$A = \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i$, $\Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\{ \Pi_i \}_{i=1}^{n}$ - клетки в $\mathbb{R}^2$

$$A \setminus \Pi = \left(\bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i \right) \setminus \Pi = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{(\Pi_i \setminus \Pi)}_{\boxed{\text{кл. мн.}} \boxed{\text{Св. 1}}} \qquad \{ \Pi_i \setminus \Pi \}_{i=1}^{n} \text{ - взаимно непресичащи се}$$

A - кл. мн.

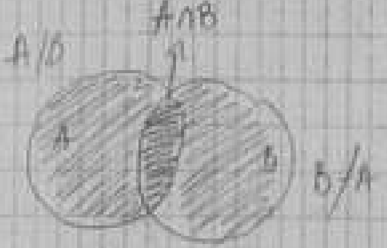
$B = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$, $Q_j \cap Q_k = \emptyset$, $j \neq k$ $\{ Q_j \}_1^m$ са клетки

$$A \setminus B = A \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m} Q_j \right) = \bigcap_{j=1}^{m} \underbrace{(A \setminus Q_j)}_{\text{кл. мн.}} \xleftarrow{\text{Св. 2}} \text{кл. мн.}$$

Свойство 5| Нека A и B са кв. множества $\Rightarrow$
$\Rightarrow A \cup B$ - кв. мн.

Док $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

взаимно непресичащи се кв. мн. $\cap = \emptyset$



$\Rightarrow A \cup B$ - кв. мн.

Св 6| Нека A и B кв. мн. и $A \subset B$
$\Rightarrow$ 1) $m(B) = m(A) + m(B \setminus A)$

2) $m(A) \leq m(B)$

Док: $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A) \overset{\text{Св1}}{\Rightarrow} m(B) = m(A) + m(B \setminus A) \geq m(A)$

$A \cap \overset{\text{кв. мн.}}{(B \setminus A)}$?

Свойство 7|
Ако $\{A_i\}_{i=1}^{p}$ - кв. мн. и $A = \bigcup_{i=1}^{p} A_i \Rightarrow m(A) = m\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right) \leq$
$\leq \sum_{i=1}^{p} m(A_i)$

Док-во:

i) $p = 1$
$m(A_1) = m(A_1)$

ii) m: $m\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} m(A_i)$ ← вярно по допускане

iii) $m\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) \overset{?}{\leq} \sum_{i=1}^{m+1} m(A_i)$

$B = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$

$\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i = B \cup A_{m+1} = B \cup (A_{m+1} \setminus B)$

$m\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) = m(B) + m(A_{m+1} \setminus B) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) + m(A_{m+1}) \stackrel{\text{ИП}}{\leq}$

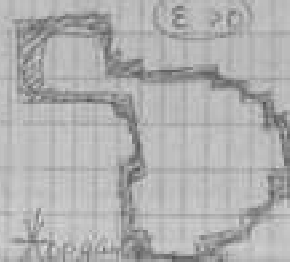
$\leq \sum_{i=1}^{m} m(A_i) + m(A_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} m(A_i)$

Def] Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Казваме, че мн. Ω е измеримо по Жордан, ако $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ кл. мн. A и B:

1) $A \subset \Omega \subset B$

2) $\underbrace{m(B) - m(A)}_{m(B \setminus A)} < \varepsilon$

$\varepsilon > 0$



Def] Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е измеримо по Жордан. Едно число $m(\Omega)$ се нарича мярка на Жордан на Ω, ако $\forall$ кл. мн. A, B: $A \subset \Omega \subset B \Rightarrow m(A) \leq$
$\leq m(\Omega) \leq m(B)$

ТВ) Деф. за мярка на Жордан е коректна, т.е. $\exists$ единствено число $m(\Omega)$. При това

$$m(\Omega) = \sup_{A \subset \Omega} m(A) = \inf_{\Omega \subset B} m(B)$$

Д-во: Нека $m(\Omega)$ е мярка на Жордан на измеримото по Ж. мн. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Нека $\mathcal{A} = \{A : A \subset \Omega\}$, $\underline{\mathcal{B} = \{B : \Omega \subset B\}}$ $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}: A \subseteq B$
$\Rightarrow m(A) \leq m(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \{m(A) : A \in \mathcal{A}\}$ е ограничено отгоре $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \sup\limits_{A \in \mathcal{A}} m(A) = \sup\limits_{A \subset \Omega} m(A) \leq m(B),\ B \in \mathcal{B}$

$\sup\limits_{A \subset \Omega} m(A)$ е д.гр. на $\{m(B) : B \in \mathcal{B}\}$

$\sup\limits_{A \subset \Omega} m(A) \leq \inf\limits_{B \in \mathcal{B}} m(B) = \inf\limits_{\Omega \subset B} m(B)$

$m(A) \leq \sup\limits_{A \subset \Omega} m(A) \leq \inf\limits_{\Omega \subset B} m(B) \leq m(B)$ $\forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$
или $\forall A, B : A \subset \Omega \subset B$

(-1) $\quad -\sup\limits_{A \subset \Omega} m(A) \leq -m(A)$

$0 \leq \inf\limits_{\Omega \subset B} m(B) - \sup\limits_{A \subset \Omega} m(A) \leq m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon$

Тъй като Ω е измеримо по Ж. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon$ кл. мн.:
1) $A_\varepsilon \subset \Omega \subset B_\varepsilon$
2) $m(B_\varepsilon) - m(A_\varepsilon) < \varepsilon$

$0 \leq a - b < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \inf\limits_{\Omega \subset B} m(B) = \sup\limits_{A \subset \Omega} m(A) = m(\Omega)$

Теорема: ~~Кр за измеримост~~
Множеството $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е измеримо по Ж $\Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0, \exists$ изм по Ж мн. Ω_1, Ω_2:
1) $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$
2) $m(\Omega_2) - m(\Omega_1) < \varepsilon$

Док. $\Rightarrow$ Ако Ω е [illegible] K.

11.11.13 Анализ

Твр Мн. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е измеримо по Жордан $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ измеримо по Жордан множество Ω_1 и Ω_2:

1) $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$
2) $m(\Omega_2) - m(\Omega_1) < \varepsilon$

Д-во: $\Rightarrow$) Ω - измеримо по Жордан $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ клетъчно множество A, B:

1) $A \subset \Omega \subset B$
2) $m(B) - m(A) < \varepsilon$

и т.к. $\forall$ клетъчно множество е измеримо по Ж.

$\Leftarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ измеримо по Жордан множество Ω_1, Ω_2:

1) $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$
2) $m(\Omega_2) - m(\Omega_1) < \frac{\varepsilon}{3}$

$m(\Omega_1) = \sup\limits_{A \subset \Omega_1} m(A)$ $\qquad$ $m(\Omega_2) = \inf\limits_{\Omega_2 \subset B} m(B)$

За $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, $\exists$ кл. мн. A_ε

1) $A_\varepsilon \subset \Omega_1$
2) $m(\Omega_1) - \frac{\varepsilon}{3} < m(A_\varepsilon)$

За $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, $\exists$ кл. мн. B_ε

1) $\Omega_2 \subset B_\varepsilon$
2) $m(B_\varepsilon) < m(\Omega_2) + \frac{\varepsilon}{3}$

Def. Нека $E \subset \mathbb{R}^n$. Казваме, че E е множество с Жорданова мярка нула, ако $\underbrace{\exists}_{\forall \varepsilon > 0}$ кластерно множество A:

1) $E \subset A$
2) $m(A) < \varepsilon$

Свойства:

1) Ако E е множество с ЖМО (жорданова мярка 0) $\Rightarrow E$ е измеримо по Жордан и $m(E) = 0$

Док: E е множество с ЖМО $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ кл. мн. A:

$$\begin{rcases} 1)\ E \subset A \\ 2)\ m(A) < \varepsilon \end{rcases} \Rightarrow \begin{cases} 1)\ \emptyset \subset E \subset A, \quad \emptyset \text{ - кл. мн.} \\ 2)\ m(A) - m(\emptyset) = m(A) < \varepsilon \end{cases}$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0, \exists$ кл. мн. $\emptyset$ и A:

1) $\emptyset \subset E \subset A$
2) $m(A) - m(\emptyset) < \varepsilon \Rightarrow E$ е измеримо по Ж

$$m(E) = \inf_{E \subset A} m(A) < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists$ кл. мн. A $m(A) < \varepsilon$ $E \subset A$

т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\boxed{0 \le m(E) < \varepsilon}$!

Нека $m(E) \neq 0$ $0 < m(E)$. Нека $\varepsilon = \frac{m(E)}{2} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < m(E) < \frac{m(E)}{2}$ $\lightning$

Свойство 2 Ако $E' \subset E \overset{\text{и } E}{\underset{\text{е}}{}}$ с ЖМО $\Rightarrow E'$ е мн. с ЖМО

Док E - ЖМО $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ кл. мн. A:

1) $E \subset A$ но $E' \subset E \subset A \overset{\text{def}}{\Rightarrow} E'$ - ЖМО
2) $m(A) < \varepsilon$

Свойство 3/ Ако E_1 и E_2 са мн. с ЖМО $\Rightarrow$
$\Rightarrow E_1 \cap E_2$ и $E_1 \setminus E_2$ са мн. с ЖМО.

$E_1 \cap E_2 \subset E_1$ (E_2) по св 2 $\Rightarrow E_1 \cap E_2$ - ЖМО

$E_1 \setminus E_2 \subset E_1 (E_2)$ по св 2 $\Rightarrow E_1 \setminus E_2$ - ЖМО

Свойство 4/ Ако E_1 и E_2 са мн. с ЖМО $\Rightarrow$
$\Rightarrow E_1 \cup E_2$ е мн. с ЖМО

Док: E_1 и E_2 - ЖМО $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists$ кл. мн. A_1 и A_2:

1) $E_1 \subset A_1$, $E_2 \subset A_2$

2) $m(A_1) < \frac{\varepsilon}{2}$, $m(A_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$

1) $E_1 \cup E_2 \subset A_1 \cup A_2$ } кл. мн.

2) $m(A_1 \cup A_2) \leq m(A_1) + m(A_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ кл. мн. $A_1 \cup A_2$ $\Rightarrow$ е ЖМО

Теорема: (Критерий за измеримост)
Множеството $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ е измеримо по Ж.
$\Leftrightarrow$ 1) Ω е ограничено мн.
2) $\partial \Omega$ е мн. с ЖМО $m(\partial\Omega) = 0$

1

Док: $\Rightarrow$ Нека Ω е изм. по Ж.

$\exists$ кл. мн. B: $\Omega \subset B$ $\leftarrow$ огр. ①

ограничено

② Нека $\varepsilon > 0$ $\exists$ клетъчни множества A, B: 1) $A \subset \Omega \subset B$, 2) $m(B) - m(A) < \varepsilon$

$A^\circ \subset A \subset \Omega \subset B \subset \overline{B}$ $\quad$ $m(A^\circ) = m(A) = m(\overline{A})$

$m(B) = m(\overline{B})$

кл. мн.:

$C = \overline{B} \setminus A \Rightarrow \boxed{\partial\Omega \subset \overline{B} \setminus A^\circ}$

кл. мн.

$\overline{B} = A^\circ \cup (\overline{B} \setminus A^\circ)$

$m(\overline{B}) = m(A^\circ) + m(\underbrace{\overline{B} \setminus A^\circ}_{C})$

$m(C) = m(\overline{B}) - m(A^\circ) = m(B) - m(A) < \varepsilon$

i.e. $\exists\, C = \overline{B} \setminus A$:

1) $\partial\Omega \subset C$ $\Rightarrow$ $\partial\Omega$ е мн. с ЖМО

2) $m(C) < \varepsilon$

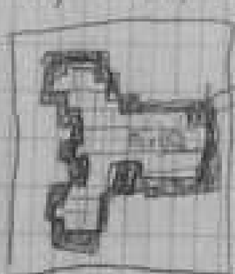
<u>Д-во</u> $\Leftarrow$) Нека 1) Ω - огр. 2) $\partial\Omega$ е мн. с Ж

Т.к. Ω е огр. $\Rightarrow \exists$ кл. Π : $\Omega \subset \Pi$

Т.к. $\partial\Omega$ е мн. с ЖМО $\Rightarrow \boxed{\forall \varepsilon > 0}$ $\exists$ кл. мн. A:

1) $\partial\Omega \subset A$

2) $m(A) < \varepsilon$ $\qquad$ $\Pi \setminus A$ - кл. мн. $\Rightarrow \Pi \setminus A = \bigcup_{i=1}^{N} \Pi_i$,



Π_i - клетки. $\forall i$: $\Pi_i \cap \partial\Omega = \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow$ или $\Pi_i \cap \Omega = \emptyset$ или $\Pi_i \subset \Omega$

$C = \bigcup_{\Pi_i \subset \Omega} \Pi_i$ - кл. мн. $\qquad$ $B = A \cup C$

$A \cap C = \emptyset$

1) $C \subset \Omega \subset B$

2) $m(B) - m(C) = \underline{m(A) < \varepsilon}$ <u>по условие</u>

$\Rightarrow$ Ω е измеримо по Ж.

Свойства:

Ако Ω_1 и Ω_2 са множества измерими по Ж

$\Rightarrow \Omega_1 \cup \Omega_2,\ \Omega_1 \cap \Omega_2,\ \Omega_1 \setminus \Omega_2$ са мн. изм. по Ж

Ω_1, Ω_2 - са изм. по Ж $\Rightarrow$ Ω_1 и Ω_2 са огр. и $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ са мн. с ЖМО

ЖМО
$$\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2) \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$$
$$\partial(\Omega_1 \cap \Omega_2) \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$$
$$\partial(\Omega_1 \setminus \Omega_2) \subset \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$$

Ω_1 и Ω_2 са огр. $\Rightarrow \left.\begin{matrix}\Omega_1 \cup \Omega_2 \\ \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ \Omega_1 \setminus \Omega_2\end{matrix}\right\}$ огр.

$\Rightarrow$ 1) $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2), \partial(\Omega_1 \cap \Omega_2), \partial(\Omega_1 \setminus \Omega_2)$ - ЖМО

2) $\Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2, \Omega_1 \setminus \Omega_2$ - ограничени

$\Rightarrow \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2, \Omega_1 \setminus \Omega_2$ - измерими по Ж.

18.11.14 =1=

Анализ

Св. 2 Нека Ω_1 и Ω_2 са измерими по Ж.

$\Rightarrow$ 1) $m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$

2) ако $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing \Rightarrow m(\Omega_1 \cup \Omega_2) = m(\Omega_1) + m$

Док. (1) Ω_1, Ω_2 - измерими по Ж.

$(i = 1,2)$ $m(\Omega_i) = \inf m(B)$ $\Omega \subset B$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists B_i^{\varepsilon}$ - кл. множество:

1) $\Omega_i \subset B_i^{\varepsilon}$

2) $m(B_i^{\varepsilon}) < m(\Omega_i) + \varepsilon$

$\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset B_1^{\varepsilon} \cup B_2^{\varepsilon}$

$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(B_1^{\varepsilon} \cup B_2^{\varepsilon}) \leq m(B_1^{\varepsilon}) + m(B_2^{\varepsilon}) <$

$< (m(\Omega_1) + \varepsilon) + (m(\Omega_2) + \varepsilon) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2) + 2\varepsilon$

т.е. $\forall \varepsilon > 0$:

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(\Omega_1) + m(\Omega_2) + 2\varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

$$\Downarrow$$

$$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$$

(2) $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$ $(i = 1,2)$ $m(\Omega_i) = \sup\limits_{A \subset \Omega_i} m(A)$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ клетъчно множество A_i^{ε}:

1) $A_i^{\varepsilon} \subset \Omega_i$

2) $m(\Omega_i) - \varepsilon < m(A_i^{\varepsilon})$

$\Omega_1 \cup \Omega_2 \supset A_1^{\varepsilon} \cup A_2^{\varepsilon}$, $\quad A_1^{\varepsilon} \cap A_2^{\varepsilon} = \varnothing$

$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq m(A_1^{\varepsilon} \cup A_2^{\varepsilon}) = m(A_1^{\varepsilon}) + m(A_2^{\varepsilon}) >$

$> (m(\Omega_1) - \varepsilon) + (m(\Omega_2) - \varepsilon) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2) - 2\varepsilon$

т.е. $\forall \varepsilon > 0$: $m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq m(\Omega_1) + m(\Omega_2) - 2\varepsilon$

$\Rightarrow m(\Omega_1 \cup \Omega_2) \geq m(\Omega_1) + m(\Omega_2) \Leftrightarrow$

$m(\Omega_1 \cup \Omega_2) = m(\Omega_1) + m(\Omega_2)$

Следствие/ Ако $\{\Omega_i\}_{i=1}^{N}$ - измерими по Ж...
$\Rightarrow$ 1) $m\left(\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} m(\Omega_i)$

2) $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \forall i,j = \overline{1,N} \quad i \neq j$
$m\left(\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i\right) = \sum_{i=1}^{N} m(\Omega_i)$

Край D

Въпрос 3

от Дис II

D./ Ако $\exists I \in \mathbb{R}$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:
$\forall \tau = \{x_i\}_{i=0}^{N}$, $\delta_\tau < \delta$, $\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{N}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
$\rightarrow |I - \sigma_\tau(f; \xi)| = \left|I - \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < \varepsilon$,

то казваме, че $f(x)$ е интегруема в/у $[a, b]$

$I = \int_a^b f(x)dx$

$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ако } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, \text{ако } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \end{cases}$

$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$
$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

Кратен интеграл на Риман в $\mathbb{R}^n$

Нека $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дефинирана в/у измеримо по Жордан множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$T = \{G_i\}_{i=1}^{N}$: ← разбиване на Ω

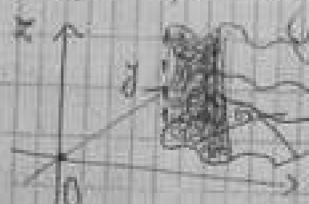
1) $G_i \subset \Omega$
2) G_i - измерими по Жордан
3) $G_i \cap G_j \overset{\circ}{=} \emptyset,\ \forall i, j = \overline{1,N},\ i \neq j$
4) $\bigcup\limits_{i=1}^{N} G_i = \Omega$

Големина на разбиването T $\quad \delta_T = \max\limits_{1 \le i \le N} \operatorname{diam}(G_i)$

$\operatorname{diam}(G_i) = \sup\limits_{x,y \in G_i} \rho(x,y)$ ← най малка горна граница

$\forall i = \overline{1,N} : \xi_i(\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_n^i) \in G_i, \quad \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{N}$

$\sigma_T(f, \xi) = \sum f(\xi_i) \cdot m_x(G_i) = \sum f(\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_n^i) \cdot m(G_i)$ - сума на Риман.



Деф | Нека $f(x)$ е деф. в/у измеримо по Ж множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Казваме, че $f(x)$ е интегруема по Риман в/у Ω, ако $\exists\, I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall\, \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N}$, $\delta_\tau < \delta$, $\forall\, \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{N}$, $\xi_i \in G_i$ $(i = \overline{1,N}) \rightarrow |I - \sigma_\tau(f, \xi)| < \varepsilon$

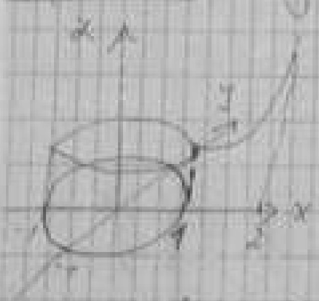
$$I = \int\limits_{\Omega} f(x)\,dx = \underbrace{\int\!\!\int \ldots \int}_{n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$$

n-кратен интеграл

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy \qquad \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Пример |

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 \le 1 \\ \frac{1}{2-x}, & 1 \le x < 2,\ y = 0 \end{cases}$$



$D = B_1(0,0) \cup [1,2)$

$f(x,y)$ - не е огр. в/у D

$f(x,y)$ е интегруема по Р. в/у D

Деф | Нека $f(x)$ е дефинирана в/у измеримо по Ж. множество $G \subset \mathbb{R}^n$

① Казваме, че $f(x)$ е съществено ограничена в/у G, ако $\exists$ измеримо по Ж. $G' \subset G$ такова, че

$G \setminus G'$ е с ЖМН и $f(x)$ е ограничено в/у G'

2) Функцията $f(x)$ е <u>съществено неограничена</u>, ако $\forall$ изм. по Ж. $G' \subset G : m(G \setminus G') = 0$, $f(x)$ не е ограничена в/у G'

<u>Теорема</u> Ако $f(x)$ е съществено неограничено в/у измеримо по Ж множество $G \subset \mathbb{R}^n$, то $f(x)$ не е интегруема в/у G.

<u>Док.</u>

Допускаме, че $f(x)$ е интегруема в/у G т.е $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 . \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N}, \delta_\tau < \delta$

$\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{N}, \ \xi_i \in G_i \ (i = \overline{1,N}) \longrightarrow$

$$\rightarrow \left| I - \sigma_\tau(f, \xi) \right| = \left| I - \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) m(G_i) \right| < \varepsilon$$

Нека $\boxed{\varepsilon = 1}$ $\exists \delta = \delta(1) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N}, \delta_\tau < \delta,$

$\forall \xi = \{\xi_i\}_{i}^{N} \Rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) m(G_i) \right| < 1$ $\hat{\tau} = \{\hat{G}_i\}_{i=1}^{N}$ $\delta_{\hat{\tau}} < \delta$. $\Rightarrow$

$\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{N}, \ \xi_i \in \hat{G}_i \ (\forall i = \overline{1,N})$ $\leftarrow$ фиксираме

$$\left| I - \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) m(\hat{G}_i) \right| < 1$$

$\Downarrow$

$$I - 1 < \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) m(\hat{G}_i) < I + 1$$

$f(x)$ е същ. неограничено в/у $G = \bigcup_{i=1}^{N} \hat{G}_i \Rightarrow \exists i_0$ $f(x)$ е неограничено в/у $\hat{G}_{i_0}$. Ще считаме БОО че $f(x)$ е неограничено в/у $\hat{G}_1$.

$\xi = \{\xi_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \dots \hat{\xi}_n\}$, $\xi_1 \in \hat{G}_1$, $\underbrace{\hat{\xi}_i \in \hat{G}_i \ (i = \overline{2,N})}_{\text{фиксираме}}$

$$I - 1 < f(\xi_1) . m(\hat{G}_1) + \underbrace{\sum_{i=2}^{N} f(\hat{\xi}_i) m(\hat{G}_i)}_{A} < I + 1$$

$$\Leftarrow\; I-1-A < f(\xi_1)\cdot \underbrace{m(\hat{G}_1)}_{\neq 0} < I+1-A \quad :/m(\hat{G}_1) \neq 0$$

$$\underbrace{\frac{I-1-A}{m(\hat{G}_1)}}_{\text{фикс.}} < f(\xi_1) < \underbrace{\frac{I+1-A}{m(\hat{G}_1)}}_{\text{фикс.}}$$

$\forall \xi_1 \in \hat{G}_1$ $f(x)$ е ограничена в/у $\hat{G}_1$

противоречие!

$f(x)$ деф. $[a,b]$

$T = \{x_i\}_{i=0}^{N}$

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad (i=\overline{1,N})$$

$$\left.\begin{array}{l} s_T = \sum_{i=1}^{N} m_i \Delta x_i \leftarrow \text{малка} \\ S_T = \sum_{i=1}^{N} M_i \Delta x_i \leftarrow \text{голяма} \end{array}\right\} \text{сума на Дарбу}$$

Суми на Дарбу

Нека $f(x)$ е ограничено в/у измеримо по Ж. множество $G \subset \mathbb{R}^n$ и нека $\tau = \{G_i\}_{i=1}^N$ е разбиване на G

и $m_i = \inf\limits_{x \in G_i} (f(x))$, $M_i = \sup\limits_{x \in G_i} (f(x))$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^N m_i \cdot m(G_i) = s_\tau \text{ – малка} \\ &\sum_{i=1}^N M_i \cdot m(G_i) = S_\tau \text{ – голяма} \end{aligned}\right\} \text{ суми на Дарбу}$$

Св 1 $\forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^N$, $\forall \xi = \{\{\xi_i\}_{i=1}^N, \xi_i \in G_i\}$

$\Rightarrow s_\tau \le \sigma_\tau(f, \xi) \le S_\tau$

$\forall i: m_i = \inf\limits_{x \in G_i} f(x) \le f(\xi_i) \le$

$\le M_i = \sup\limits_{x \in G_i} f(x) \quad / \cdot m(G_i)$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \cdot m(G_i)}_{s_\tau} \le \underbrace{\sum_{i=1}^N f(\xi_i)\, m(G_i)}_{\sigma_\tau(f,\xi)} \le \underbrace{\sum_{i=1}^N M_i \cdot m(G_i)}_{S_\tau}$$

$s_\tau \le \sigma_\tau(f, \xi) \le S_\tau$

Св 2 $\forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^N$, $s_\tau = \inf\limits_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$

$S_\tau = \sup\limits_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$

$s_\tau \overset{?}{=} \inf\limits_{\xi} \sigma_\tau(f, \xi)$ $\quad \tau = \{G_i\}_{i=1}^N$, $\xi_i \in G_i$ $(M_i$

$S_\tau \le \sigma_\tau(f;\xi), \ \forall \xi$

2) $\forall \varepsilon>0 \ \exists \xi_\varepsilon = \{\xi_i^\varepsilon\}: \ \sigma_\tau(f;\xi_\varepsilon) < S_\tau + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{m(G)}, \quad m(G) > 0$

$S_\tau = \sum_{i=1}^{N} m_i\, m(G_i), \quad m_i = \inf_{x \in G_i} f(x)$

$\Rightarrow \varepsilon_0 > 0, \ \exists \xi_i^0 \in G_i: \ f(\xi_i^0) < m_i + \varepsilon_0 \quad (\forall i = \overline{1,N})$

$\xi^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^{N} \quad \sigma_\tau(f;\xi^0) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i^0)\, m(G_i) <$

$< \sum_{i=1}^{N} (m_i + \varepsilon_0)\, m(G_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, m(G_i) + \varepsilon_0 \sum m(G_i) =$

$= S_\tau + \varepsilon_0\, m(G) = S_\tau + \frac{\varepsilon}{m(G)}\, m(G) = S_\tau + \varepsilon$

Д] Нека $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{N}$ и $\tau' = \{a_j\}_{j=1}^{N'}$ на G. Казваме, че τ' е подразделение (по-фино) разбиване на τ, ако $\forall j = \overline{1,N'} \ \exists i = \overline{1,N}: a_j \subset G_i$ и записваме $\boxed{\tau' \prec \tau}$

Св.3] $\tau = \{G_i\}_{i=1}^{N}$ и $\tau' = \{a_j\}_{j=1}^{N'}$ са разбивания на G.

Ако $\tau' \prec \tau \Rightarrow S_\tau \le S_{\tau'} \le \overline{S}_{\tau'} \le \overline{S}_\tau$

Нека $\tau' \prec \tau$ и $S_\tau = \sum_{i=1}^{N} m_i\, m(G_i), \ m_i = \inf_{x \in G_i} f(x)$

$$S_{\tau'} = \sum_{j=1}^{N'} m'_j\, m(a_j), \quad m'_j = \inf_{x \in a_j} f(x)$$

$S_{\tau'} = \sum_{j=1}^{N'} m'_j\, m(a_j) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{a_j \subset G_i} m'_j\, m(a_j) \ge \sum_{i=1}^{N} \sum m_i\, m(G_i)$

$=$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \underbrace{\sum_{a_j \subset G_i} m(a_j)}_{m(G_i)} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, m(G_i) = \underline{\underline{s_\tau}}$$

<u>Св. 4)</u> $\forall \tau, \tau'$ разбиване на $G \Rightarrow s_{\tau'} \le S_\tau$

$\tau' = \{a_j\}_{j=1}^{M}, \quad \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N}$

Нека $\tau'' = \{a_j \cap G_i, \; i = \overline{1,N}, \; j = \overline{1,M}\}$

$\tau'' \prec \tau', \; \tau'' \prec \tau \Rightarrow s_{\tau'} \le s_{\tau''} \le S_{\tau''} \le S_\tau \Rightarrow s_{\tau'} \le S_\tau$

<u>Св. 5)</u> $\exists \, \underline{I} = \sup_\tau s_\tau, \quad \exists \, \overline{I} = \inf_\tau S_\tau$

При това $s_\tau \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_\tau, \; (\forall \tau)$

$\forall \tau, \tau' \Rightarrow s_\tau \le S_{\tau'}$

τ' - фикс., $\forall \tau \Rightarrow s_\tau \le S_{\tau'} \Rightarrow \exists \sup_\tau s_\tau \le S_{\tau'}$
$\forall \tau' \Rightarrow \sup s_\tau$ е долна граница на $\{S_\tau, \tau$ разбиване на $G\}$

$\exists \inf_\tau S_\tau \Rightarrow \underline{I} = \sup_\tau s_\tau \le \inf_\tau S_\tau = \overline{I}$

02.12.14

Мат анализ

Лекция

Т Критерий за интегруемост

Ф-та $f(x)$ ограничена в/у измеримо по Ж множество G. G е интегруема $\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)>0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N},\ \delta\tau<\delta \rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

горна Σ, долна Σ на Дарбу

Римана интеграл

Д-во:

$\Rightarrow$ Нека $f(x)$ е интегруема в/у G. $\rightarrow \exists I \in$

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N},\ \delta_\tau<\delta,$

$\forall \xi = \{\xi_i\},\ \xi_i \in G_i,\ (i=\overline{1,N}) \rightarrow |I - \sigma_\tau(f,\xi)| < \varepsilon/3$

$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma_\tau(f,\xi) < I + \varepsilon/3 \Rightarrow S_\tau$

$\Rightarrow I - \frac{\varepsilon}{3} \le \inf_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi) \le \sigma_\tau(f,\xi) \le \sup_{\xi} \sigma_\tau(f,\xi) \le I + \varepsilon/3$

т.е. $I - \frac{\varepsilon}{3} \le s_\tau \le S_\tau \le I + \varepsilon/3$

$S_\tau \le I + \varepsilon/3 \quad -s_\tau \le -I + \frac{\varepsilon}{3}$

$0 \le S_\tau - s_\tau \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$

$\Leftarrow$ Имаме, че $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\delta(\varepsilon)>0 : \forall \tau = \{G_i\}^{N}$

$\delta_\tau < \delta \rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

$\forall \tau : s_\tau \le \underline{I} \le \overline{I} \le S_\tau$

$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S_\tau - s_\tau$

$\forall \varepsilon>0 : 0 \le \overline{I} - \underline{I} < S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

т.е.

$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le \varepsilon \Rightarrow \overline{I} = \underline{I} = I$

$\varepsilon = \overline{I} - \underline{I}$

$0 < \overline{I} - \underline{I}$

$1 < \frac{1}{2}\xi$

$I = \overline{I} = \underline{I} \qquad s_T \leq I \leq S_T \ (1)$

$\forall T = \{G_i\}_{i=1}^{N}, \ \forall \xi = \{\xi_i\}, \ \xi_i \in G_i \ (i = \overline{1,N}) \Rightarrow$

$\Rightarrow s_T \leq \sigma_T(f; \xi) \leq S_T \ (2)$

$$\oplus \begin{cases} s_T \leq I \leq S_T \\ -S_T \leq -\sigma_T(f;\xi) \leq -s_T \end{cases}$$

$$-(S_T - s_T) \leq I - \sigma_T(f;\xi) \leq S_T - s_T$$

$$\Downarrow$$

$$|I - \sigma_T(f;\xi)| \leq \underline{S_T - s_T}$$

$\forall \xi = \{\xi_i\}, \ \xi_i \in G_i, \ i = \overline{1,N} \quad |I - \sigma_T(f;\xi)| <$
$< S_T - s_T < \varepsilon \quad \Rightarrow$ $f(x)$ е интегруема по Риман в/у G

Def. Нека $f(x)$ е ограничена в/у мн. $G \subset \mathbb{R}^n$. От огр. на $f(x) \Rightarrow \exists \sup\limits_{x \in G} f(x) = M$ и
и $\inf\limits_{x \in G} f(x) = m$

Колебание на $f(x)$ в/у G наричаме числото $\omega(f) = M - m$

$\boxed{\text{Тв.}}$ $\omega(f) = \sup\limits_{x', x'' \in G} |f(x') - f(x'')|$

$f(x) = \sin(x) \qquad \omega(\sin x) = 1 - (-1) = 2$

Нека $f(x)$ е огр. в/у изм по $\mathcal{Ж}$ множест. $G \subset \mathbb{R}^n$ и $\tau_N = \{G_i\}_{i=1}^{N}$ разбиване на $G \Rightarrow$

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{N} M_i \cdot m(G_i) - \sum_{i=1}^{N} m_i\, m(G_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \underbrace{(M_i - m_i)}_{\omega_i(f)} m(G_i) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\, m(G_i)$$

Т Нека $f(x)$ е огр. в/у изм по $\mathcal{Ж}$ мн. $G \subset \mathbb{R}^n$. Ф-та $f(x)$ е инт. в/у $G \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N},\ \delta_\tau < \delta \longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\, m(G_i) < \varepsilon$

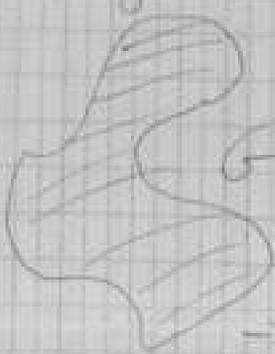
сл

Т Нека $f(x)$ е огр в/у изм по $\mathcal{Ж}$ мн. $G \subset \mathbb{R}^n$. Ф-та $f(x)$ е интегруема в/у $G \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N} : S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

$\boxed{\text{Без док}}$!!! Облекчение !

Класове от интегруеми $\int$.

(T) Ако ф-та $f(x)$ е непрекъсната в/у компактното изм. по Ж мн. $G \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x)$ е интегруема в/у G.



Д-во: $(m(G)>0)$

Т.к. $f(x)$ е непрекъсната в/у компактното мн. $G \Rightarrow f(x)$ е равномерно непрекъсната, т.е $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta=\delta(\varepsilon)>0$: $\forall x', x'' \in G$, $\rho(x', x'')<\delta$

$\Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

$\underline{\forall \varepsilon > 0}$ т.к $f(x)$ е равномерно неп., то за
$\varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon}{2m(G)} > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon_0) = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x', x'' \in G$
$; \rho(x', x'') < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon_0$

Вземаме $T = \{G_i\}_{i=1}^N$ - разб. на G такива, че $\delta_T < \delta$

$S_T - s_T = \sum_{i=1}^{N} \omega_i(f)\, m(G_i) \le \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_0\, m(G_i) = \varepsilon_0 . m(G)$

$\delta_T = \max\limits_{1 \le i \le N} \operatorname{diam}(G_i)$

$\omega_i(f) = \sup\limits_{x', x'' \in G_i} |f(x') - f(x'')|$

$x', x'' \in G_i \Rightarrow \rho(x', x'') \le \operatorname{diam} G_i = \sup\limits_{x_1, x_2 \in G_i} \rho(x_1, x_2)$

$< \delta_T$ $\quad 0 < \delta_T \le \delta$

$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon_0 \quad \omega_i(f) = \sup\limits_{x', x'' \in G_i} |f(x') - f(x'')| \le \varepsilon_0$

$= \frac{\varepsilon}{2\,m(G)} \cancel{m(G)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\Longrightarrow f(x)$ е инт. в/у G.

(T) Нека $f(x)$ е ограничена в/у компактното измеримо мн. $G \subset \mathbb{R}^n$ и мн. от т. на прекъсване е с ЖМН. $\Rightarrow f(x)$ е инт. в/у G

Т.к. $f(x)$ е огр. в/у $G \Rightarrow \exists M > 0 : \forall x \in G \rightarrow$
$\rightarrow |f(x)| \le M$

$E = \{x \in G : f$ е прекъсната в т. $x \in G\}$ – с ЖМН
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ изм. ~~отворено~~ мн. A_ε : 1) $E \subset A_\varepsilon$
2) $m(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4M}$

Нека $G' = G \setminus A_\varepsilon \leftarrow$ компактно т.е. огр. и зат.
$G \setminus A_\varepsilon = G \cap (\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon) \rightarrow$ зат. Ф-ята $f(x)$ е непрекъсната в/у G' – компактно $\Rightarrow f(x)$ е инт. в/у G' $\overset{\text{СКИ}}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau' = \{G_i\}_{i=2}^{N}$ разбиване на G':
$S_{\tau'} - s_{\tau'} < \frac{\varepsilon}{2}$

$G_1 = G \cap A_\varepsilon$ – изм. по Ж множ. и $m(G_1) = m(G \cap A_\varepsilon) \le m(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4M}$
$G \cap A_\varepsilon \subseteq A_\varepsilon$

$\tau = \{G_1\} \cup \tau' = \{G_i\}_{i=1}^{N}$ – разбиване ~~G~~
$= G \cap A_\varepsilon$

$$S_\tau - s_\tau = (M_1 - m_1)\, m(G_1) + \sum_{i=2}^{N} (M_i - m_i) \cdot m(G_i) = (M_1 - m_1)\, m(G_1) + (S_{\tau'} - s_{\tau'}) <$$

$$< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \overset{\text{СКИ}}{\Longrightarrow} f(x) \text{ е инт. в/у } G.$$

Свойства на кратните интеграли

Св. 1 | $G \subset \mathbb{R}^n$

① $\int\limits_G 1dx = m(G)$

Св. 2

② Нека $G' \subset G$ – изм. по Ж. Ако $f(x)$ е инт. в/у $G \Rightarrow f(x)$ е инт. в/у G'

~~$\forall \varepsilon > 0 \quad \tau' = \{G_i'\}_{i=1}^{N}$ разб. на G'~~

$f(x)$ е инт. в/у $G \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$\forall \tau = \{G_i\}_{i=1}^{N}, \ \delta_\tau < \delta \Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

$\forall \tau' = \{G_i'\}_{i=1}^{M}$ разбиване на $G' : \delta_{\tau'} < \delta$

$\tau'' = \{G_i''\}_{i=1}^{M''}$ разбиване на $G \setminus G'$, $\delta_{\tau''} < \delta$

Вземам $\tau = \tau' \cup \tau'' \Rightarrow \delta_\tau = \max\{\delta_{\tau'}, \delta_{\tau''}\} < \delta$
$\Rightarrow S_\tau - s_\tau < \varepsilon$

$\varepsilon > S_\tau - s_\tau = S_{\tau'} - s_{\tau'} + \cancel{S_{\tau''} - s_{\tau''}} \geq S_{\tau'} - s_{\tau'}$

$S_{\tau'} - s_{\tau'} < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ е инт. в/у G'

10.12.14. Свойства на кратните интеграли

Св. 1 $\int\limits_G 1\,dx = m(G)$, $G \subset \mathbb{R}^n$ $(x = (x_1, x_2, \dots, x_n))$

Св. 2 Нека $G' \subset G \subset \mathbb{R}^n$ и G', G са измерими по Жордан. Ако $f(x)$ е интегруема в/у G => $f(x)$ е интегруема в/у G'.

Св. 3 Ако $f(x)$ е интегруема в/у измеримото по Жордан м-во G, то $\lambda f(x)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ е интегруема в/у G и $\int\limits_G \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_G f(x)dx$

Док. За $\lambda \neq 0$, използваме $|I - \sigma_T(f; \xi)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$; $|\lambda I - \sigma(\lambda f; \xi)| < \varepsilon$

Св. 4 Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в/у измеримото по Ж. м-во G => $f(x) + g(x)$ е интегруема в/у G и $\int\limits_G (f(x) + g(x))dx = \int\limits_G f(x)dx + \int\limits_G g(x)dx$

Док. $\exists I_1, I_2 : \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T = \{G_i\}_{i=1}^N$ $d_T < \delta$, $\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^N$, $\xi_i \in G_i$ $\forall i = \overline{1, N}$ => $|(I_1 + I_2) - (\sigma_T(f, \xi) + \sigma_T(g, \xi))| < \varepsilon \Leftarrow \left| \begin{array}{l} |I_1 - \sigma| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |I_2 - \sigma| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$

Св 5| Ако $f(x) \ge 0$ е интегруема в/у измеримото по Жордан м-во G => $\int_G f(x)dx \ge 0$

Док| $\int_G f(x)dx = \sup_\tau s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{N} m_i . m(G_i)$, $m_i = \inf_{x \in G_i} f(x) \Rightarrow \forall i,\ m_i \ge 0 \Rightarrow$

$\sup_\tau s_\tau(f) \ge 0$

Св 4| Ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в/у измеримото по Ж. м-во G и $f(x) \le g(x)$ =>
=> $\int_G f(x)dx \le \int_G g(x)dx$

Док| Разглеждаме $F(x) = g(x) - f(x) \ge 0$ и инт. в/у F

Св 6| Ако $f(x)$ е интегруема в/у измеримото по Ж. м-во G, => $|f(x)|$ е интегруема в/у G и $\left|\int_G f(x)dx\right| \le \int_G |f(x)|dx$

Док Използваме, че $||a|-|b|| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$ $\forall a, b$ => $\omega_i(|f(x)|) = \sup ||f(x')| - |f(x'')|| \le \sup |f(x') - f(x'')| = \omega_i(f)$. След това интегрираме $|f(x)|$ с/с суми на Дарбу и е док. че $S_\tau(|f|) - s_\tau(|f|) < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$

Св 7| Нека $\{G_1, G_2\}$ е разбиване на измеримото по Ж. мн-во G (т.е. G_1 и G_2 са измерими по Ж., $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $G_1 \cup G_2 = G$) Тогава $f(x)$ е интегруема в/у G <=> $f(x)$ е интегруема в/у G_1 и G_2. При това $\int_G f(x)dx = \int_{G_1} f(x)dx + \int_{G_2} f(x)dx$

Док.) $\Rightarrow$) Очевидно по Св. 2

$\Leftarrow$) Използваме силния критерий за интегруемост: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \tau_1 = \{G_i\}_{i=1}^{N}, \tau_2 = \{G_i'\}$:

$S_{\tau_1} - s_{\tau_1} < \varepsilon/2$ | $S_\tau = S_{\tau_1} + S_{\tau_2}$ | $(\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ разбиване на $G)$

$S_{\tau_2} - s_{\tau_2} < \varepsilon/2$ | $s_\tau = s_{\tau_1} + s_{\tau_2}$

Накрая използваме СКИ наобратно

$\Rightarrow$ $f(x)$ е интегруема в/у G. Нека $I = \int_G f(x)dx$, $I_1 = \int_{G_1} f(x)dx$, $I_2 = \int_{G_2} f(x)dx$

Ще докажем, че $\forall \varepsilon > 0$ $|I - (I_1 + I_2)| < \varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $I = I_1 + I_2$, $I = \int_G f(x)dx$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0(\varepsilon) > 0 \ \forall \tau = \{Q_i\}_{i=1}^{N}$ на G, $\delta_\tau < \delta_0$,
$\forall \xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{N}, \xi_i \in Q_i, i = \overline{1,N} \Rightarrow |I - \sigma_\tau(f, \xi)| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$\exists \delta_1(\varepsilon) > 0 \ \forall \tau_1 = \{Q_i'\}_{i=1}^{N'}$ на G_1, $\delta_{\tau_1} < \delta_1$,

$\forall \xi' = \{\xi_i'\}_{i=1}^{N'}, \xi_i' \in Q_i' \ (i = \overline{1,N'}) \Rightarrow$

$\Rightarrow |I_1 - \sigma_{\tau_1}(f, \xi')| < \varepsilon/3$, $\exists \delta_2(\varepsilon) > 0 \ \forall \tau_2 = \{Q_i''\}_{i=1}^{N''}$
на G_2, $\delta_{\tau_2} < \delta_2$ $\forall \xi'' = \{\xi_i''\}_{i=1}^{N''}, \xi_i'' \in Q_i'' \ (i = \overline{1,N''})$
$\Rightarrow |I_2 - \sigma_{\tau_2}(f, \xi'')| < \varepsilon/3$

Сега фиксираме $\delta = \min(\delta_0, \delta_1, \delta_2) > 0$ и разбивания τ_1 и τ_2 такива, че $\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2} < \delta$.
Образуваме разбиването $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ на цялото G, такова, че $\delta_\tau < \delta$ $(\delta_\tau = \max(\delta_{\tau_1}, \delta_{\tau_2}))$
Фиксираме $\xi' = \{\xi_i'\}_{i=1}^{N'}, \xi_i' \in Q_i' \ (i = \overline{1,N'})$ и
$\xi'' = \{\xi_i''\}_{i=1}^{N''}, \xi_i'' \in Q_i'' \ (i = \overline{1,N''})$ и $\xi = \xi' \cup \xi''$.

Тогава $\sigma_{\tau_1}(f, \xi') = \sum_{i=1}^{N'} f(\xi_i') m(Q_i')$,

$\sigma_{\tau_2}(f, \xi'') = \sum_{i=1}^{N''} f(\xi_i'') m(Q_i'')$

$\sigma_{\tau_1}(f,\xi') + \sigma_{\tau_2}(f,\xi'') = \sigma_{\tau}(f,\xi) \Rightarrow |I-(I_1+I_2)|$

$= |I - \sigma_{\tau}(f,\xi) + \sigma_{\tau}(f,\xi) - (I_1+I_2)| =$

$= |(I - \sigma_{\tau}(f,\xi)) - (I_1 - \sigma_{\tau_1}(f,\xi')) - (I_2 - \sigma_{\tau_2}(f,\xi''))|$

$\leq |I - \sigma_{\tau}(f,\xi)| + |I_1 - \sigma_{\tau_1}(f,\xi')| + |I_2 - \sigma_{\tau_2}(f,\xi'')|$

$\leq \varepsilon$

Сл. 1 Ако $f(x)$ е интегруема в/у измеримо мн. X и G и $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ е разбиване на G $\Rightarrow \int_G f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{G_i} f(x)dx$

Сл. 2 Ако $f(x) \geq 0$ е интегруема в/у G и $G' \subseteq G$ е изм. мн. $\Rightarrow \int_{G'} f(x)dx \leq \int_G f(x)dx$

16.12.14.

Лекция

Св. 9 Ако $f(x)$ е интегруема в/у изм. по Ж. мн. $G \subset \mathbb{R}^n$ и $\{G_k\}_{k=1}^{\infty} : G_k \subset G$, G_k – измерими такива, че

$$\lim_{k \to \infty} m(G_k) = m(G)$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{k \to \infty} \int_{G_k} f(x)\,dx = \int_{G} f(x)\,dx$$

Док. $$\underbrace{\left| \int_{G} f(x)\,dx - \int_{G_k} f(x) \right|}_{\Downarrow \ ①} = \left| \int_{G \setminus G_k} f(x)\,dx \right| \le$$

$$G = G_k \cup (G \setminus G_k)$$

$$\int_{G} = \int_{G_k} + \int_{G \setminus G_k}$$

$f(x)$ е интегруема $\Rightarrow$ $f(x)$ е ограничена $\Rightarrow \exists M > 0$: $|f(x)| \le M$ в/у G

$$\le \int_{G \setminus G_k} |f(x)|\,dx \le \int_{G \setminus G_k} M\,dx = M \int_{G \setminus G_k} 1\,dx = M \cdot m(G \setminus G_k)$$

$$= M \, [\underbrace{m(G) - m(G_k)}_{0}] \to \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

① $$\lim_{k \to \infty} \int_{G_k} f(x)\,dx = \int_{G} f(x)\,dx$$

Свойство 10/ Нека $f(x)$ е непрекъсната в/у компактното измеримо по Ж. мн. $G \subset \mathbb{R}^m \Rightarrow$
$$\exists \xi \in G: \int_G f(x)dx = f(\xi) \cdot m(G)$$

$$f(\xi) = \frac{1}{m(G)} \int_G f(x)dx \leftarrow$$ средна стойност на $f(x)$ в/у G.

От анализ 1

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\,(b-a)$$

Д-во:/ По Т. Вайерщрас $\exists x_0, x_1 \in G$ $\forall x \in G \Rightarrow$
$$\underset{m}{\underset{\shortparallel}{f(x_0)}} \le f(x) \le \underset{M}{\underset{\shortparallel}{f(x_1)}}$$

$$\forall x \in G \Rightarrow m \le f(x) \le M \leftarrow /\int$$

$$m\int_G dx = \int_G m\,dx \le \int_G f(x)dx \le \int_G M\,dx = M\int_G dx$$

$$m \cdot m(G) \le \int_G f(x)dx \le M \cdot m(G) \quad /: m(G)>0$$

$$m \le \frac{1}{m(G)} \int_G f(x)dx \le M \overset{\text{Т-ма межд. ст.}}{\Rightarrow} \exists \xi \in G: f(\xi) = \frac{1}{m(G)} \int_G f(x)dx \Rightarrow$$

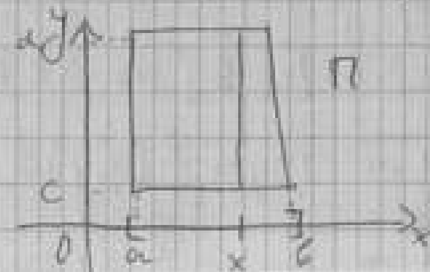
$$\Rightarrow \int_G f(x)\,dx = f(\xi)\cdot m(G)$$

16.12.14 = 1.

11 Въпрос: Свеждане на многократния интеграл към повторен.

(Т.) Нека ф-ята $f(x,y)$ е интегруема в/у правоъгълника $\Pi = [a,b]\times[c,d]$ и $\forall x \in [a,b]$ $\exists \int_c^d f(x,y)\,dy \Rightarrow$ ф-та $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, $x \in [a,b]$ е интегруема в/у $[a,b]$ и

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

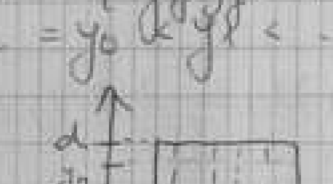


Док: $T = \{x_i\}_{i=0}^{n}$ на $[a,b]$ – разбиване

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

$T' = \{y_j\}_{j=1}^{m}$ на $[c,d]$

$c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$



$T \to \{\Pi_i\}_{i=1}^{n}$ $\Pi_i \cap \Pi_k = \emptyset \ (i \neq k)$

$[x_0, x_1) \cup [x_1, x_2) \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$

$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$

$\Pi_1 \quad \Pi_2 \quad \Pi_n$

$$|\Pi_i| = \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$
$$|\Pi'_j| = \Delta y_j = y_j - y_{j-1}$$

$$T' \to \{\Pi'_j\}_{j=1}^{m}, \quad \Pi'_j \cap \Pi'_s = \emptyset \quad (j \neq s)$$

$$\Pi_{ij} = \Pi_i \times \Pi'_j \quad (i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m})$$

$$T = \{\Pi_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}} \text{ е разбиване на } \Pi$$

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in\Pi_{ij}} f(x,y)$$
$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in\Pi_{ij}} f(x,y)$$

$$\delta_T = \max |\Pi_i|, \quad \delta_{T'} = \max_j |\Pi'_j|$$

$$\delta_{\mathbb{T}} = \max_{(i,j)} \operatorname{diam}(\Pi_{ij}) \qquad \delta_T < \delta_{\mathbb{T}} \quad \delta_{T'} < \delta_{\mathbb{T}}$$

Нека $x \in [a,b] \Rightarrow x \in \Pi_i$ е единствено

$$\forall j = \overline{1,m} \quad m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij}, \quad y \in \Pi'_j$$

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij}\,dy \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} M_{ij}\,dy$$

$$m_{ij}(\Delta y_j) \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \le M_{ij}\,\Delta y_j \quad (\forall j = \overline{1,m})$$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\cdot\Delta y_j \le \sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta y_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta y_j \le \int_{c}^{d} f(x,y)\,dy \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta y_j$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta y_j \le F(x) \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta y_j \quad (\forall x \in \Pi_i)$$

$\Rightarrow$ F(x) е ограничена в/у интервала $\overline{T_i}$ $\Rightarrow$

F(x) е огр. в/у [a, b].

$m_i = \inf\limits_{x \in T_i} F(x)$, $M_i = \sup\limits_{x \in T_i} F(x)$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij} \Delta y_j \le m_i \le M_i \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \Delta y_j \ (\forall i = \overline{1,n})$$

$$\sum_{i=1}^{m} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \le m_i \Delta x_i \le M \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{m} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

$(\forall i = \overline{1,m})$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

$$\Rightarrow \quad s_T(f) \le s_T(F) \le S_T(F) \le S_T(f)$$

$$\Rightarrow 0 \le S_T(F) - s_T(F) \le S_T(f) - s_T(f)$$

$\downarrow$ 0 $\quad \downarrow \delta_T \to 0$ 0 $\quad \downarrow \delta_T \to 0$ 0 $\quad \delta_T \to 0$

$\Rightarrow$ F(x) е интегруема в/у [a, b]

$$\text{i.e. } \exists \int_a^b F(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

и т.т. (1) . $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} x\,dx$

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta y_j \,dx \le \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\,dx \le \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta y_j \,dx$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta y_j\right)\Delta x \le \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\,dx \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \le \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\,dx \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta x\,\Delta y_j \quad (*) \quad i=\overline{1,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} F(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j$$

$$s_T(f) \le \int\limits_a^b F(x)\,dx \le S_T(f) \quad (1)$$

$f(x,y)$ е инт. в/у Π $\Rightarrow$ $s_T(f) \le \iint\limits_\Pi f(x,y)\,dx\,dy \le S_T(f)$ (2). Тогава от (1) и (2) $\boxed{\Pi}$ $\Rightarrow$ $< \varepsilon$

$$= \left|\iint\limits_\Pi f(x,y)\,dx\,dy - \int\limits_a^b F(x)\,dx\right| \le S_T(f) - s_T(f)$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\Downarrow$

$$\iint\limits_\Pi f(x,y)\,dx\,dy - \int\limits_a^b F(x)\,dx = 0$$

$$\iint\limits_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b F(x)\,dx = \int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

Сл| Нека $f(x,y)$ е интегруема в/у $\Pi = [a,b]\times[c,d]$ и

1) $\forall x \in [a,b]$, $\exists \int_c^d f(x,y)dy$

2) $\forall y \in [c,d]$, $\exists \int_a^b f(x,y)dx$

$\Rightarrow (*)\ \iint_{\Pi} f(x,y)dydx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx =$

$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$

Сл| Ако $f(x,y)$ е непр в/у $\Pi \Rightarrow (*)$ е из

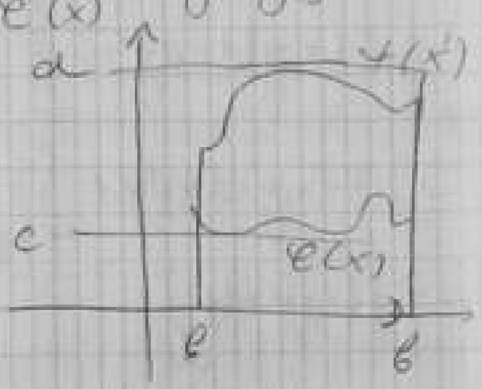
Т. Нека $f(x,y)$ е инт. в/у крив трапец

$D = \{(x,y)\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$

и нека $\exists \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right]dx =$

$= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$



Dok: $c = \min_{x \in [a,b]} \varphi(x)$

$d = \max_{x \in [a,b]} \psi(x)$

$\Pi = [a,b] \times [c,d] \supset D$

Деф. $F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in \Pi \setminus D \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x,y)$ е инт. в/у Π

$\forall x \in [a,b]$: $F(x,y)$ - инт. по y $\Rightarrow F(x,y)$ е инт. в/у Π

$$\int_c^d F(x,y)\,dy = \underbrace{\int_c^{\varphi(x)} F(x,y)\,dy}_{0} + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x,y)\,dy + \underbrace{\int_{\psi(x)}^{d} F(x,y)\,dy}_{0}$$

$$= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x,y)\,dy$$

$$\iint_{\Pi} F(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d F(x,y)\,dy\right] dx$$

$$\underbrace{\iint_D F(x,y)\,dx\,dy}_{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy} + \underbrace{\iint_{\Pi \setminus D} F(x,y)\,dx\,dy}_{0} = \int_a^b \left[\int_c^{\varphi(x)} F(x,y)\,dy\right] dx + \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} F(x,y)\,dy\right] dx$$

$$+ \int_a^b \left[\int_{\psi(x)}^{d} F(x,y)\,dy\right] dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

06.01.14. =1=

Лекция анализ

Криволинеен интеграл от II род.

Нека $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ - област (отворено свързано м-во)
$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$

$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$
вектор на поле

- $P, Q, R \to$ непр. $\to \boxed{\vec{F} \text{ е непр.}}$
- P, Q, R - непр $\to$ диференцуеми
$\to \boxed{\vec{F} \text{ е непр. диференцуемо}}$

Деф | Нека $\vec{F}$ е непрекъснато в. поле деф. в/у обл. Ω. $\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a,b]$
$\Gamma \subset \Omega$

Интеграла $\int_a^b (\vec{F}, \vec{r}\,')\,dt =$

$$= \int_a^b \left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t) \right] dt$$

се нарича криволинеен инт. от II род.

$$\int_a^b (\vec{F}, \vec{r}\,')\,dt = \int_\Gamma (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Св 1| Стойността на криволинейните интеграли от 2-ри род не се променя от параметризацията на кр. Γ

Св 2| Стойността на криволинейния инт. от 2-ри род си променя знака при преминаване към противоположно ориентираната крива Γ, т.е.

$$\int_{\Gamma} (\vec{F}, d\vec{r}) = -\int_{\Gamma^-} (\vec{F}, d\vec{r})$$

Док|

$$\Gamma : \vec{r} = \vec{r}(t), \ t \in [\alpha, \beta]$$

$$\Gamma^- : \vec{\rho} = \vec{\rho}(t) = \vec{r}(\beta + \alpha - t), \ t \in [\alpha, \beta]$$

$$\vec{F}(P, Q, R)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(x(t), y(t), z(t)), \ t \in [\alpha, \beta]$$

$$\vec{\rho} = \vec{\rho}(x(\beta+\alpha-t), y(\beta+\alpha-t), z(\beta+\alpha-t))$$

$$\int_{\Gamma^-} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(\beta+\alpha-t), y(\beta+\alpha-t), z(\beta+\alpha-t)) \cdot$$

$$\cdot x'(\beta+\alpha-t) + Q(x(\beta+\alpha-t), y(\beta+\alpha-t), z(\beta+\alpha-t)) \cdot y'(\beta+\alpha-t)$$

$$+ R(x(\beta+\alpha-t), y(\beta+\alpha-t), z(\beta+\alpha-t)) \cdot z'(\beta+\alpha-t)] dt =$$

$= \boxed{\tau = \beta + \alpha - t}$ $\begin{matrix} t = \alpha \longrightarrow \tau = \beta \\ t = \beta \longrightarrow \tau = \alpha \end{matrix}$ $=$

$= \int_\beta^\alpha \Big(P(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) [-x'(\tau)] + Q(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot$

$\cdot [-y'(\tau)] + R(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot [-z'(\tau)] \Big) \cdot$

$\cdot (-d\tau) = \int_\beta^\alpha P(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) x'(\tau) + Q(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot$

$\boxed{dt = d(\alpha + \beta - \tau) = (\alpha + \beta - \tau)' \cdot d\tau} = -d\tau$

$y'(\tau) + R(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot z'(\tau) =$

$= - \int_\alpha^\beta \Big(P(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot x'(\tau) + Q(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot$

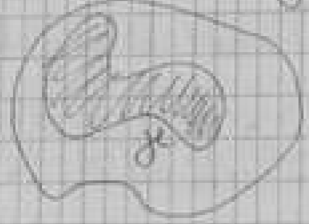
$\cdot y'(\tau) + R(x(\tau), y(\tau), z(\tau)) \cdot z'(\tau) \Big) d\tau =$

$= - \int_\Gamma (\vec{F}, d\vec{r})$

$\boxed{\text{Cb 3}}$ Ako $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$\int_\Gamma (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_{\Gamma_1} (\vec{F}, d\vec{r}) + \int_{\Gamma_2} (\vec{F}, d\vec{r})$

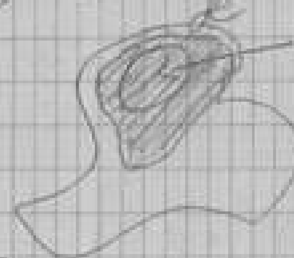
D. Ω - едносвързана област, ако



$\forall$ контур $\gamma \subset \Omega$, отсича $\Omega_\gamma \subset \Omega$

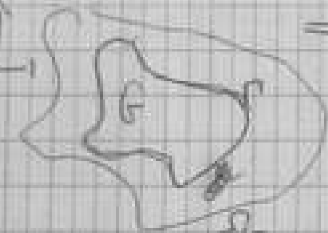
$\Omega_\gamma \subset \mathbb{R}^2$ т.е да няма дупки

$\Omega_\gamma \not\subset \Omega$



T. (Грийн) Green

Нека ф-те $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са непрекъснато диференц. в/у едносвързаната област $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и нека Γ е прост контур $\Gamma \subset \Omega$ и G е областта която се отсича от Γ $\Rightarrow$

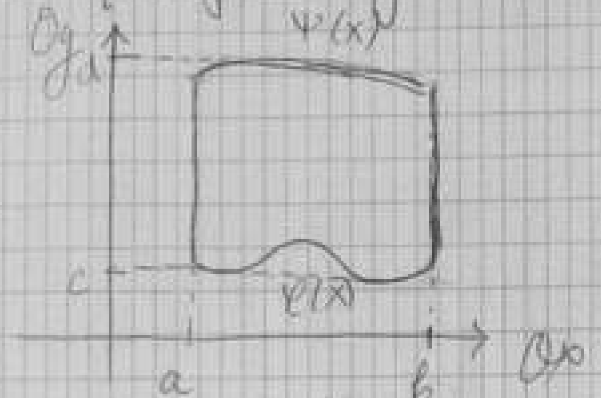


$$\Rightarrow \int_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \iint_{G} \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dx\,dy, \text{ където}$$

∂G са граничните точки на G и контура е пол. ориентиран

Док-во / Нека $G = \{(x,y) : a \le x \le b, \varphi(x) \le$
$\le y \le \psi(x)\}$

$G = \{(x,y) : c \le y \le d, \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$



$$\iint\limits_G \left(-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dx\,dy = -\iint\limits_G \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dx\,dy =$$

$$= -\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy\right) dx = -\int_a^b P(x,y)\Big|_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} dx =$$

$$= -\int_a^b \left[P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))\right] dx = -\int_a^b P(x,\psi(x)) + \int_a^b P(x,\varphi(x))dx = \int_{\Gamma_\psi} P dx + \int_{\Gamma_\varphi} P dx + \underbrace{\int_{\text{ВС}} P dx}_{0} + \int_{DA} P dx \quad (*)$$

$$\int_a^b P(x,\varphi(x))dx = \int_{\Gamma_\varphi} P dx \qquad -\int_a^b P(x,\psi(x))\,dx = -\int P dx$$

$y = \varphi(x) \to \Gamma_\varphi : \begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases} \; t \in [a,b] \quad \left(\int_a^b -P(x,\psi(x))dx = \dots\right.$

$BC: \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [\varphi(b), \psi(b)]$

$$\int\limits_{BC} P\,dx = \int\limits_{\varphi(b)}^{\psi(b)} P(b,t)\cdot \underset{0}{\underset{\shortparallel}{(b)'}}\,dt = 0$$

$\Gamma_\varphi \cup BC \cup \Gamma_\psi^- \cup DA = \partial G$

$$(*) = \int\limits_{\underset{\text{anon.}}{\partial G}} P\,dx$$

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{\partial G} Q\,dy \quad (2)$$

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} \right) dx\,dy = \int\limits_{\partial G} P\,dx + Q\,dy$$

$\boxed{11}$ Независимост от пътя за интегриране

(Т)

Нека $(P(x,y), Q(x,y))$ - непрекъснато поле деф. в/у $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогава следните условия са еквивалентни:

1) $\int_L Pdx + Qdy = 0$ в/у $\forall$ затворена начупена линия $L \subset G$

2) $\int_{L_{AB}} Pdx + Qdy$ не зависи от начупената линия $L_{AB} \subset G$ свързваща т. A и B

3) Векторното поле $(P(x,y), Q(x,y))$ е потенциално т.е.

$\exists$ непр. - диф. ф-я $U(x,y)$:

$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$ в/у G

[ф-та $U(x,y)$ е диференцируема в/у G

$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$]

$$\begin{array}{ccc} 1) & \rightarrow & 2) \\ \nwarrow & & \swarrow \\ & 3) & \end{array}$$

Док. 1) => 2)

$L = L_1 \cup L_2^-$ — замкнена насонена лінія.

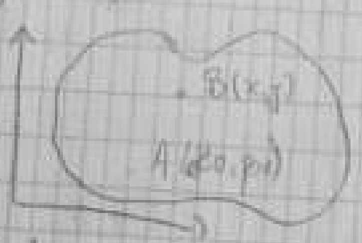
От т8 1 $\Rightarrow \oint_L P dx + Q dy = 0$

$= \int_{L_1} Pdx + Qdy + \int_{L_2^-} Pdx + Qdy =$

$= \int (Pdx + Qdy) - \int_{L_2} Pdx + Qdy \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$

2) => 3)



L_{AB} — насонена ото.

$U(x,y) = \int_{AB} Pdx + Qdy$

Дефо в/у G

①

Криволинейни интеграли от II род и [illegible]

Т. Нека (P, Q) е непрекъснато поле в обл. $G \subset \mathbb{R}^2$. Тогава следните твърдения са еквивалентни:

1) $\oint\limits_{[illegible]} P\,dx + Q\,dy = 0$

в/у [illegible] затворена линия L

2) $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$

[illegible] от [illegible] линия L_{AB} [illegible] т. A и B

3) Векторното поле $(P(x,y), Q(x,y))$ е потенциално т.е.

$\exists$ скал. функция $U(x,y)$:

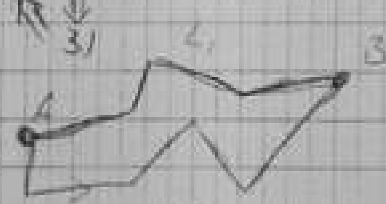
$\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x,y)$, $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$ в/у G

Тогава $U(x,y)$ е диференцируема в/у G

$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

Д-во) 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1)

1) $\Rightarrow$ 2)

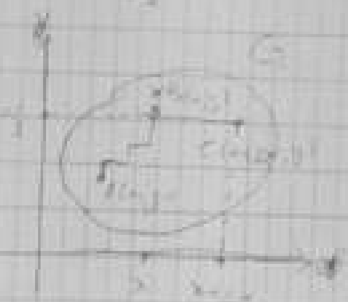


$L = L_1 \cup L_2$ [illegible] затворена линия [illegible] $\oint P\,dx + Q\,dy = 0$

$$\int_{L_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{L_2} P\,dx + Q\,dy = \int P\,dx + Q\,dy - \int P\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_{L_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{L_2} P\,dx + Q\,dy$$

2) ⇒ 3)



[illegible]

$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy = U(x,y)$ [illegible]

$\frac{\partial U}{\partial x} = P$ $\quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} =$

$= \frac{1}{\Delta x}\left[\int_{AC} P\,dx + Q\,dy - \int_{AB} P\,dx + Q\,dy\right] =$

$= \frac{1}{\Delta x}\left[\int_{AB} + \int_{BC} - \int_{AB}\right] = \frac{1}{\Delta x}\int_{BC} P\,dx + Q\,dy$

[illegible]

[illegible]

$\Rightarrow \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = 0$ [illegible]

$x = x(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$

$y = y(t)$

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)]\,dt$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} U(x(t), y(t))\,dt =$$

$$dU(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy$$

$$U(x(t), y(t))' = U'_x\,x'(t) + U'_y\,y'(t)$$

$$= U(x(t), y(t))\Big|_\alpha^\beta = U(x(\beta), y(\beta)) - U(x(\alpha), y(\alpha)) = 0$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$= \frac{1}{\Delta x} \int [\,P(x,y)\ldots + \ldots\,]\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)\,dt = \quad \exists\, 0 < \theta < 1 \ =$$

$$= \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{\partial P(x+\theta\Delta x, y)\cdot \Delta x}{\ldots} = \frac{\partial P(x+\theta\Delta x)}{\ldots}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim P(x+\theta\Delta x, y) = P(x,y), \text{ т.е.}$$

[illegible] $\exists$ [illegible] на $P(x,y)$

т.е. $\exists \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$.

аналогично $\exists \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$

$\Rightarrow U(x,y)$ е потенциал на полето (P,Q)

Ортогонални системи от функции. Ред на Фурие от ортогонална система.

Def. Нека $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (редица от ф.), $\varphi_n(x) \not\equiv 0$, $\varphi_n(x)$ непрекъснати в/у $[a,b]$. Система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ наричаме ортогонална в/у $[a,b]$, ако

$$(1) \quad \int_a^b \varphi_n(x)\cdot\varphi_m(x)\,dx = 0, \quad \forall n,m;\ n \neq m$$

Ако за ортогоналната система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в/у $[a,b]$ имаме, че

$$(2) \quad \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

то ортогоналната система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ се нарича ортонормирана.

Пример $\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}$ - тригонометрична ортогонална система в/у $[-l,l]$

1) $l = \pi$

$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx$

орт. в/у $[-\pi,\pi]$

$$\int_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}2\ell = \frac{\ell}{2} \quad \frac{\ell}{2}$$

$$\frac{2}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = 1 \Rightarrow \int_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\ell}}\right)^2 dx = \int_{-\ell}^{\ell}\left(\frac{1}{\sqrt{2\ell}}\right)^2 dx = 1$$

$\Rightarrow$ ~~орто~~ ортонормир. система.

$$\frac{1}{\sqrt{2\ell}},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin x,\ \dots,\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin nx \dots$$

Пр. $L_0 = 1$,

$$L_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \ (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ в/у } [-1,1] \text{ - орт.}$$

Ф

Д. Нека $f(x)$ непрекъсната в/у $[a,b]$ и $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - ортогонална в/у $[a,b]$. Казваме че $f(x)$ се разлага в ред по ортогоналната система, ако $\exists \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

1) функционалния ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ е сходящ в/у $[a,b]$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = f(x),\ \forall x \in [a,b]$

a_n – коеф. на Фурие

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \cup \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

тригонометричен ред на Фурие в/у $[-\ell,\ell]$

Т. Ако функционалния ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ е равномерно сходящ в/у $[a,b]$ и $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ в/у $[a,b]$ $\Rightarrow a_n = \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)dx}$ $(\forall n \in N)$

Равномерна сх.!

Note!

$$f_n(x) \overset{E}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f(x) \quad (E \subset \mathbb{R})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n > N \ \forall x \in E \to |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Док.!

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ е равномерно сходящ в/у $[a,b]$

$m \in N$: $\varphi_m(x)$: $f(x)\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)\varphi_m(x)$ е равномерно сходящ в/у $[a,b]$ т.к. $\varphi_m(x)$ са непрекъснати $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)\varphi_m(x)\right)dx$$

$$\overset{\text{равн. сх.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_a^b \varphi_n(x)\cdot\varphi_m(x)dx}_{0 \ n\neq m}$$

$$= a_m \int_a^b \underbrace{\varphi_m^2(x)dx}_{\neq 0} : \int_a^b \varphi_m^2(x)dx$$

$\varphi_m(x) \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$a_m = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx}{\int_a^b \varphi_m^2(x)dx}$$

6

Тригонометрични редове на Фурие. Лема на Риман.

Д/ Нека $f(x)$ е интегруема в/у $[a,b]$ и $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ е ортогонална система в/у $[a,b]$

$\forall n: \quad a_n = \dfrac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx}$, $\quad f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$

ред на Фурие
отг. на ф-та f

$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \dots \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l} \dots$ в/у $[a,b]$

и $f(x)$ е интегруема в/у $[-l,l]$

$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$

$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

$$f(x) \sim \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}}$$

тр. ред на Фурие отг. на $f(x)$ в/у $[-l,l]$

$(l=\pi) - f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx$

Формула на Дирихле

Ф/ Ф-ята $D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

се нарича $\boxed{\text{Ядро на Дирихле}}$

Св. 1) $D_n(x)$ – 2π - ~~пер~~ пер.; непр.; ∞ - пъти диференц., четна

2) $D_n(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$, $x \neq 2k\pi$; $(k \in \mathbb{Z})$

3) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)dx = 1$

$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}$ $[-l; l]$

$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\frac{\pi k x}{l} + b_k \sin\frac{\pi k x}{l}$

Т) $S_n(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x+t) D_n\left(\frac{\pi}{l}t\right)dt$ или

$S_n(x) = \frac{1}{l}\int_{0}^{l} (f(x+t) + f(x-t)) D_n\left(\frac{\pi}{l}t\right)dt$

I. $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right) + b_k \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x+t) D_n\left(\frac{\pi}{l} t\right)$

Док: $S_n(x) = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\left(\frac{\pi k t}{l}\right)dt \cdot \cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right)\right) +$

$\left[\begin{array}{l} a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\,dt \\ a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \\ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \end{array}\right]$ $+ \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\left(\frac{\pi k t}{l}\right)dt \cdot \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) =$

$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{\pi k t}{l}\cos\frac{\pi k x}{l} + \sin\frac{\pi k t}{l}\sin\frac{\pi k x}{l}\right)\right)$

$= \left[\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\right] = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi k(x-t)}{l}\right)dt =$

$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t) D_n\left(\frac{\pi}{l}(x-t)\right)dt = \left[\cos - \text{четна}\right] = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t) D_n\left(\frac{\pi}{l}(t-x)\right)$

$= \left[\begin{array}{l} u = t-x \\ t = u+x \end{array}\right] = \frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} f(x+u) D_n\left(\frac{\pi}{l}\cdot u\right)du = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x+u) D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right)du$

Заб. $f(x) \to 2l$-периодична; $D_n(x) \to 2\pi$-периодична $\Rightarrow$
$\Rightarrow D_n\left(\frac{\pi}{l}\cdot x\right)$ също е $2l$ периодична.
($\cos(x) \to 2\pi$-периодична $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{l}\cdot x\right) \to 2l$-периодична)

Тв. (принцип за локализация) Нека $f(x)$ е непрекъсната, 2π-периодична ф-ция в/у $\mathbb{R}$. Сумата на триг. ред на Фурие в т. x_0 зависи от поведението на ф-цията $f(x)$ в достатъчно малка околност $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Твърдение: (Принцип за локализация)

Нека $f(x)$ е непрекъсната 2π-~~период~~ периодична ф-я в/у $\mathbb{R}$. Сумата на Ф. на ф. в т. x_0 зависи от поведението на $f(x)$ в достатъчно малка околност $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x_0)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]D_n(t)\,dt\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x_0)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{[f(x_0+t)+f(x_0-t)]}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\right]$$

$0<\delta<\pi$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x_0)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\right]+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=0$$

непр. ф-я в/у $[\delta,\pi]$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin\omega t\,dt=0}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[S_n(x_0)-\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt\right]=0 \quad (*)$$

$\Downarrow$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

$(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$f(x) \equiv \frac{1}{2}$

$a_0 = 1$

$a_n, b_n = 0$

$S_n(x) = \frac{1}{2}$, $(\forall n)$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \underbrace{\lim \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt}_{(\forall \delta > 0) \quad (0<\delta<\pi)} = \frac{1}{2}$$

T Нека $f(x)$, 2π е периодична и непрекъсната в/у $\mathbb{R}$ и диференцируема в т. x_0. Тогава сумата на Реда на ФS в т. x_0 е равна на $f(x_0)$, т.е.

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0$$

Док.

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}} \cdot \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

Доказахме, че границата

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt - \frac{1}{2} \right) = 0 \quad \cdot (2f(x_0))$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2f(x_0)}{2\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt - f(x_0) \right) = 0$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\underbrace{\frac{[f(x_0+t)-f(x_0)]+[f(x_0-t)-f(x_0)]}{2\sin\frac{t}{2}}}_{\Phi(t)}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt+f(x_0)\right] =$$

$$\overset{\text{Т. Риман}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\Phi(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt+f(x_0)=0+f(x_0)=f(x_0)$$

$\Phi(t)$ - непрекъсната $[0,\delta]$ и ограничена в/у $[0,\delta]$

$\Rightarrow \Phi(t)$ интегруема в/у $[0,\delta]$.

Почленно диференциране и интегриране на Фурие ред

(Т) Нека $f(x)$ 2π-период в/у $\mathbb{R}$ и има непрекъсната $f'(x)$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)'$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)'$$

(T) Ако $f(x)$ 2π периодична и непрекъсната

нека $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

$$\Rightarrow \int_0^t f(x)dx = \int_0^t \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\right] dx$$

$$= \int_0^t \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t [a_k \cos kx + b_k \sin kx] dx$$

Равномерна сходимост на тригонометрични редове на Фурие. Неравенство на Бесел.

(T) Нека $f(x)$ е 2π-периодична и има непр. производна в/у $[-\pi, \pi]$ ($f'(x)$ в/у)

$\Rightarrow$ Редът на Фурие е равномерно сходящ

(T) Нека $f(x)$ е ~~[illegible]~~ непрекъсната в/у $[a, b]$ и $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормирана с-ма в/у $[a, b]$ ($\varphi_n(x) \neq 0$)

$\Rightarrow$ Коеф. на Фурие $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовл. неравенството

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx$$

Неравенство на Бесел.

$$a_k = \int_a^b f(x)\cdot\varphi_k(x)\,dx$$

Док)

Разгл. $0 \le \int_a^b \Big[f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\Big]^2 dx =$

$$= \int_a^b \Big[f^2(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \varphi_k^2(x) - 2\sum_{k=1}^{n} f(x) a_k \varphi_k(x) +$$

$$+ \sum_{k \ne s} \underbrace{\varepsilon_{ks}}_{a_k \cdot a_s} \overset{s \ne k}{\varphi_k(x)}\, \varphi_s(x)\Big] dx = \qquad \boxed{\varepsilon_{ks} = \pm 1}$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \underbrace{\int_a^b \varphi_k^2(x)\,dx}_{1} +$$

ортонорм. система

$$+ \sum_{k \ne s} \varepsilon_{ks} a_k a_s \underbrace{\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_s(x)\,dx}_{0}$$

$$- 2\sum_{k=1}^{n} a_k \underbrace{\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx}_{a_k} =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 0 =$$

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \Rightarrow \quad 0 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \le \int_a^{b} f^2(x)\,dx \quad (\forall n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Нека $f(x)$ е непр. и 2π - пер. ф-я 5.

и $S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

$\boxed{Д.}$ $\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}$

Сума на Фейер

Т Ако $f(x)$ е непр. 2π пер. ф-я

$\Rightarrow \sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$

Ако $f(x) \frac{\text{непр}}{\text{разгл.}} [-\pi, \pi]$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N_\varepsilon, \forall n > N, \forall x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$\max\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$

D) Ф-я от вида

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

се нарича тригонометричен полином.

(T.) (В) Ако $f(x)$ е непр. в/у $\mathbb{R}$ =>

=> $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ тригон. пол. $T_n(x)$:

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T_n(x)| < \varepsilon$$

(T.) Ако $f(x)$ е непр. в/у $[a, b]$

=> $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $P_n(x)$ - полином от n-та ст.

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_{n-1} x^1 + a_n$$