

ДУС - 2.

1

1. Неопределен интеграл.

заг. $F = ? : F'(x) = f(x) \leftarrow$ дадено

Пример: Дадено $f(x) = x : \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$

Лемо (Линдиференциал)

$$d(f(x)) = f'(x)dx$$

диференциал на f

$$d f(x) = f'(x) dx$$

израз от вида $g(x)dx$ се нарича диференциал

Свойства:

$$1) d(f+g) = df + dg$$

$$2) c \in \mathbb{R} \quad dcf = cdf$$

$$3) dfg = f dg + g df$$

Доказателство за (3): $d(fg) = (fg)' dx = (f'g + g'f) dx =$
 $= f dg + g df = \int f g' dx + \int g f' dx = \int (f g' + g f') dx$

$$4) d \frac{f}{g} = \frac{g df - f dg}{g^2}$$

$$5) d f(g) = f'(g) dg \quad \left(\begin{array}{l} \text{за диференциране на} \\ \text{съставна функция} \end{array} \right)$$

Д-во (5)

$$f'(g)dg = \underbrace{f'(g) \cdot g'(x)}_{df(g(x))} \cdot dx$$

Таблица на основните диференциали

$$p \in \mathbb{R} \quad dx^p = p x^{p-1} dx$$

$$de^x = e^x dx$$
$$(da^x = (\ln a) a^x dx, a > 0)$$

$$d \ln x = \frac{1}{x} dx$$

$$d \sin x = \cos x dx$$

$$d \cos x = -\sin x dx$$

$$d \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d \arctan x = \frac{dx}{1+x^2}$$

да се помни

$$d \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Заг!} \quad F = \int f(x) dx = dF(x)$$

Деф. $F(x)$ е примитивна (първообразна) на $f(x)$ в интервала (a, b) , ако $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b)$

Заб. Теорема (вер. 6): Ако $f(x)$ е непрекъсната в (a, b) , то $\exists F(x)$ примитивна за $f(x)$ в (a, b)

Твърдение: Ако F и G са примитивни на f в интервала (a, b) , то $\exists c \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = G(x) + C, \forall x \in (a, b)$$

Д-во: Нека $H(x) = F(x) - G(x) \stackrel{\text{по усл}}{\Rightarrow} H'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$
 $\forall x_1, x_2 \in (a, b) \ x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ (по теор. за ср. а. на Лагранжи)

$$\frac{H(x_1) - H(x_2)}{x_1 - x_2} = H'(\xi) = 0, \xi \in (a, b)$$

$$\text{т.е. } H(x_1) = H(x_2), \forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Следствие: Ако F е примитивна на f в (a, b) , то множеството на всички $\{G, G$ е примитивна на f в $(a, b)\} = \{F + c; c \in \mathbb{R}\}$

Деф. ~~Множество~~ ~~Неопределен интеграл~~

Неопределен интеграл от f е множеството от всички примитивни на f . Пишем:

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ където } F'(x) = f(x)$$

Зад. $\int dF(x) = F(x) + C$

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx, \text{ т.к. } dC = 0 \cdot dx$$

Основные интегралы:

$$p \neq -1$$

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$$

$$p \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln |1 + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$$

Свойства на $\int$:

$$① \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$② \int c f(x) dx = c \int f(x) dx, c \in \mathbb{R}$$

③ Твърдение (интегриране по части)

$$\int f(x) dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x) df(x), \text{ или}$$

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$

Твърдение (Интегриране чрез сублиституция)
Нека $f(x)$ е непрекъснатата в (a, b) . Има ли

Ако $\varphi: (c, d) \rightarrow (a, b)$ е строго монотонна
и φ' е непрекъснатата с постоянен знак то

$$\int_{x=\varphi(c)}^{x=\varphi(d)} f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt, \text{ като}$$

$$t \in (c, d)$$

$$x \in (a, b)$$

Доказ: Ако $F'(x) = f(x)$, то от ③
 $\int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_c^d f(\varphi(t)) d\varphi(t) =$
 $= dF(\varphi(t)) \text{ или}$

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$$

2. Интегриране на ~~матри~~ рационални функции

Рационална ф-я $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P и Q са полиноми

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n; a_0 \neq 0, \deg P = n$$

степен

$$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m, \deg Q = m$$

Def: $R(x)$ е правилна, ако $\deg P < \deg Q$

Тв. Ако $\deg P \geq \deg Q$, то $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$,
 $\deg R < \deg Q$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = ?$$

$$1) \frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \deg R < \deg Q$$

$\Rightarrow$ Б.О.О $\deg P < \deg Q$ 1) свен даме 10 правилна
 функции !!! винаги

$$2) Q(x) = (x-a_1)^{s_1} \dots (x-a_k)^{s_k} (x^2+p_1x+q_1)^{t_1} \dots (x^2+p_nx+q_n)^{t_n}$$

$$p_i^2 - 4q_i < 0$$

Теорема (Алгебра) Ако $\deg P < \deg Q$ и $Q(x) =$

$$= (x-a_1)^{s_1} \dots (x-a_k)^{s_k} (x^2+p_1x+q_1)^{t_1} \dots (x^2+p_nx+q_n)^{t_n},$$

$(p_i, q_i) \neq (p_j, q_j) \text{ if } i \neq j$

$p_i^2 - 4q_i < 0$, то

$$\text{Тв. } \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{s_1}} + \dots + \frac{A_1^{(k)}}{x-a_k} + \frac{A_2^{(k)}}{(x-a_k)^2} + \dots +$$

$$= \frac{A_k^{(k)}}{(x-a_k)^{s_k}} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_2^{(2)}x + C_2^{(2)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{t_1}^{(1)}x + C_{t_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{t_1}} +$$

$$+ \dots + \frac{B_1^{(n)}x + C_1^{(n)}}{x^2 + p_nx + q_n} + \dots + \frac{B_{t_n}^{(n)}x + C_{t_n}^{(n)}}{(x^2 + p_nx + q_n)^{t_n}}.$$

3) Разлагане на елементарни рационални функции

4) Интегриране на елементарни рационални функции.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = ?$$

$$\int \frac{(bx+c)}{(x^2+px+q)^n} dx = ?$$

$$p^2 - 4q < 0$$

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C$$

$$k \geq 2$$

$$\textcircled{2} \int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$$

$$\textcircled{3} \int \frac{(bx+c)}{x^2+px+q} dx = \frac{b}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(c - \frac{bp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{b}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(c - \frac{bp}{2}\right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} > 0$$

(5)

T.e. свенга се го $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d\frac{u}{a}}{(\frac{u}{a})^2+1} = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a} + C.$

$K \geq 2$

$$\begin{aligned} \int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^K} dx &= \frac{b}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^K} + (c - \frac{bp}{2}) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^K} = \\ &= \frac{b}{2(1-K)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{K-1}} + (c - \frac{bp}{2}) \int \frac{d(x + \frac{p}{2})}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right)^K} \end{aligned}$$

и се свенга го $\int \frac{du}{(u^2+a^2)^K}$

$$\int \frac{du}{(u^2+a^2)^K} = \frac{1}{a^{2K}} \int \frac{du}{\left(\left(\frac{u}{a}\right)^2+1\right)^K} = \frac{1}{a^{2K-1}} \int \frac{d\frac{u}{a}}{\left(\left(\frac{u}{a}\right)^2+1\right)^K}$$

$$I_K = \int \frac{dv}{(v^2+1)^K} = ?$$

$$d \frac{1}{s^{K-1}} = (1-K) \frac{ds}{s^K}$$

$$I_K = \int \frac{(1+v^2) - v^2}{(1+v^2)^K} dv = \int \frac{dv}{(1+v^2)^{K-1}} - \int \frac{v^2 dv}{(1+v^2)^K} =$$

$$= I_{K-1} - \frac{1}{2} \int v \frac{d(v^2+1)}{(v^2+1)^K} = I_{K-1} - \frac{1}{2(K-1)} \int v d \frac{1}{(v^2+1)^{K-1}} =$$

$$= I_{K-1} + \frac{1}{2(K-1)} \frac{v}{(v^2+1)^{K-1}} - \left[\frac{1}{2(K-1)} \int \frac{dv}{(v^2+1)^{K-1}} \right] \stackrel{(\text{---})}{=} I_{K-1} =$$

$$= \frac{1}{2(K-1)} \frac{v}{(v^2+1)^{K-1}} + \frac{2K-3}{2(K-1)} I_{K-1} + C.$$

$$I_k = \frac{1}{2(k-1)} \frac{v}{(v^2+1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)} I_{k-1} + C$$

$$= \dots = I_{k-2} = \dots = I_1$$

Пример:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{x^2}{x^2+1} dx =$$

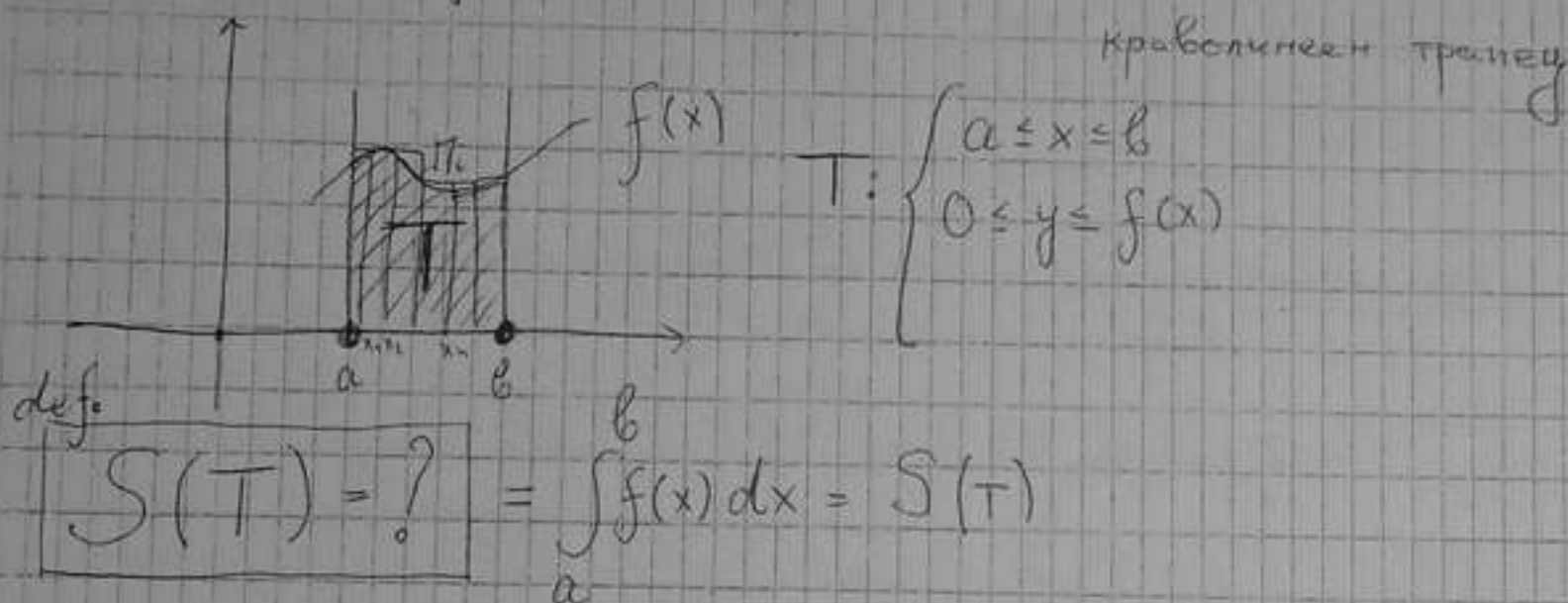
$$= \arctg x - \int \frac{1}{x^2+1} dx =$$

$$\frac{x^2 \cdot x^2 + 1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

$$= \arctg x - x + \arctg x =$$

$$= 2\arctg x - x + C$$

3. Интеграл на Риман-Стилтес. Дефиниция, свойства и интерпретация.

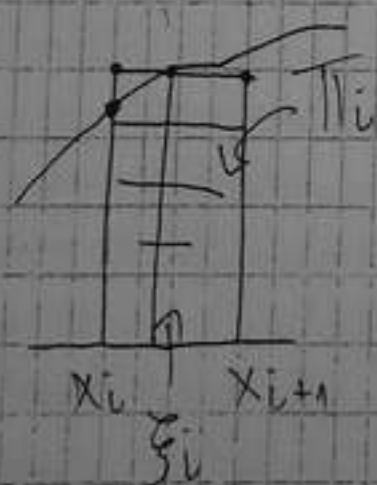


$$S(\Pi_i) = f(x_i)(x_{i+1} - x_i) \Big| \sum$$

1. Разбиваме Δ (делта) на интервали $[a, b]$
 като $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$

$$\text{diam } \Delta = \max \{x_{i+1} - x_i, i = 0, \dots, n-1\}$$

2. Риманова сума $R(f; \Delta, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$,



3) Риманов интеграл: $\int_a^b f(x) dx =$

$$= \lim_{\Delta \rightarrow 0} R(f, \Delta, \xi)$$

ξ_i - ксн

4. Нека g е монотонно растяща в $[a, b]$

Стилесова сума $S_g(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \rightarrow$

Забележка: $g(x) = x$ $S_x(f, \Delta, \xi) = R(f, \Delta, \xi)$

5. / Интеграл на Стилес

$$\int_a^b f dg(x) := \lim_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} S_g(f, \Delta, \xi)$$

def: !!!

По-подробно $I = \lim_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} S_g(f, \Delta, \xi)$ означава

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: За произволно разбиване Δ на $[a, b]$ с $\text{diam } \Delta < \delta$, и произволен избор $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ е изпълнено $|I - S_g(f, \Delta, \xi)| < \varepsilon$

Тв. (Критерий на Коши)

Функцията f е интегрируема по Стилес спрямо g , когато $\exists \uparrow$, тогава и само тогава и само тогава, когато $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$; за произволно разбиване $\Delta^{(1)}$ и $\Delta^{(2)}$ на $[a, b]$ с $\text{diam } \Delta^{(j)} < \delta$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$ произволно избрано $\xi_1 \in [x_1^{(1)}, x_{i_1}^{(1)}]$ и $\xi_k \in [x_k^{(2)}, x_{k+1}^{(2)}]$ е изпълнено

$$|S_g(f, \Delta^{(1)}, \xi) - S_g(f, \Delta^{(2)}, \xi)| < \varepsilon$$

Свойства: элементарни на интеграла на Стилес.

$$1) \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) + \int_a^b f_2(x) dg(x)$$

(чете се: ако имам 2-та интеграла отгласно, то съществува и интеграла отляво и е изпълнено неравенството).

$$\begin{aligned} \text{Докажем: } Sg(f_1 + f_2; \Delta, \xi) &= \sum_{i=0}^{n-1} (f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)) (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f_1(\xi_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i)) + \sum_{i=0}^{n-1} f_2(\xi_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i)) = \end{aligned}$$

$$= Sg(f_1, \Delta, \xi) + Sg(f_2, \Delta, \xi)$$

$$\text{т.е. } Sg(f_1 + f_2) = Sg(f_1, \Delta, \xi) + Sg(f_2, \Delta, \xi)$$

$$\downarrow \text{diam } \Delta \rightarrow 0 \quad \downarrow \text{diam } \Delta \rightarrow 0 \quad \downarrow \text{diam } \Delta \rightarrow 0$$

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x) dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) + \int_a^b f_2(x) dg(x)$$

Доказано!

$$2) \text{ ако } c \in \mathbb{R}, \text{ то } \int_a^b (cf(x)) dg(x) = c \int_a^b f(x) dg(x) \quad \text{док.}$$

$$3) \int_a^b f(x) d(c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)) = c_1 \int_a^b f(x) dg_1(x) + c_2 \int_a^b f(x) dg_2(x)$$

$$d(\Sigma_1 + \Sigma_2) = d\Sigma_2 + d\Sigma_1$$

4) Ако f и g лвата интеграла, то $\lim_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} \left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| dg(x)$
 (неравенство на Абел)

$$\begin{aligned} |S_g(f; \Delta, \xi)| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \right| \leq \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i))| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \end{aligned}$$

(1)

5) Ако $f_1(x) \leq f_2(x), \forall x \in [a, b]$ и f -2та интеграла
 $\int_a^b f_1(x) dg(x) \leq \int_a^b f_2(x) dg(x)$

D-во:

$$\begin{aligned} S_g(f_1; \Delta, \xi) &= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{f_1(\xi_i)}_{\leq f_2(\xi_i)} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} f_2(\xi_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \\ \text{i.e. } S_g(f_1; \Delta, \xi) &\leq S_g(f_2; \Delta, \xi) \xrightarrow{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \int_a^b f_1(x) dg(x) \leq \int_a^b f_2(x) dg(x)$$

4. Интегрируемость на непрекъснатата функция

Теорема 1. Ако f е непрекъснатата ^{в $[a, b]$} , а $g \uparrow$, то съществува $\int_a^b f(x) dg(x)$. (Ститес)

От (Лис-1) (помощна Теорема)

Тн* Ако f е непр. в $[a, b]$, то f е равномерно непрекъснатата в $[a, b]$.

Док: (за Ститес)

Деф. Ако разбиването $\Delta^{(i)}$ на инт. $[a, b]$, $i=1, 2$ има възли $\{x_j^{(i)}\}_{j=0}^{n_i}$, то $\Delta^{(1)} \cup \Delta^{(2)} = \Delta^{(3)}$ има възли $\{x_i^{(1)}\}_{i=0}^{n_1} \cup \{x_j^{(2)}\}_{j=0}^{n_2}$

Доказ: Нека $\varepsilon > 0$, от Тн(*) $\exists \delta > 0; \forall x, y \in [a, b]$
 $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
 $\frac{g(b) - g(a)}{n_1} < \delta$

Нека $\Delta^{(1)}$ и $\Delta^{(2)}$ са разбивания с diam $\frac{\epsilon}{3}$.

Нека $\Delta = \Delta^{(1)} \cup \Delta^{(2)}$. Да означим $\Delta^{(i)} = \{x_0^{(i)} = a < x_1^{(i)} < \dots < x_{n-1}^{(i)} = b\}$, а $\Delta = \{x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b\}$.

Нека са избрани $\xi_j^{(i)} \in [x_j^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}]$, $i=1,2$.

Дали $|Sg(f, \Delta^{(1)}, \xi^{(1)}) - Sg(f, \Delta^{(2)}, \xi^{(2)})| < \epsilon$?

Дефинираме $\eta_j^{(1)}$: ~~$\eta_j^{(1)} = \xi_j^{(1)}$~~ , $j=0, \dots, n-1$.

Ако $[x_j, x_{j+1}] \subset [x_k^{(1)}, x_{k+1}^{(1)}]$ ($\exists!$ таква $k!$), то $\eta_j^{(1)} = \xi_k^{(1)}$.

$$\text{Тогава } Sg(f, \Delta^{(1)}, \xi^{(1)}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i^{(1)}) (g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

(Проверете!)

Аналог. деф. $\eta_j^{(2)}$, $j=0, \dots, n-1$:

ако $[x_j, x_{j+1}] \subset [x_k^{(2)}, x_{k+1}^{(2)}]$, то $\eta_j^{(2)} = \xi_k^{(2)}$.

$$Sg(f, \Delta^{(2)}, \xi^{(2)}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\eta_i^{(2)}) (g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

$$\Rightarrow |Sg(f, \Delta^{(1)}, \xi^{(1)}) - Sg(f, \Delta^{(2)}, \xi^{(2)})| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |f(\eta_j^{(1)}) - f(\eta_j^{(2)})| (g(x_{j+1}) - g(x_j))$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon / (g(b) - g(a))$$

Но если $\eta_j^{(1)} \in [x_k^{(1)}, x_{k+1}^{(1)}]$ и $\eta_j^{(2)} \in [x_m^{(2)}, x_{m+1}^{(2)}]$, то
 $[x_k^{(1)}, x_{k+1}^{(1)}] \cap [x_m^{(2)}, x_{m+1}^{(2)}] = [x_i, x_{j+1}] \neq \emptyset$

$$\Rightarrow |\eta_i^{(1)} - \eta_j^{(2)}| \leq (x_{k+1}^{(1)} - x_k^{(1)}) + (x_{m+1}^{(2)} - x_m^{(2)}) \leq$$

$$\text{diam } \Delta^{(1)} + \text{diam } \Delta^{(2)} \leq 2\delta < \delta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(\eta_i^{(1)})}{g(\eta_i^{(1)})} - \frac{f(\eta_j^{(2)})}{g(\eta_j^{(2)})} \right| < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$$

$$\text{От } (***) \Rightarrow \left| S_g(f, \Delta^{(1)}, \xi^{(1)}) - S_g(f, \Delta^{(2)}, \xi^{(2)}) \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{g(b)g(a)} \sum_{j=0}^{n-1} (g(x_{j+1}) - g(x_j)) \Rightarrow \varepsilon,$$

~~Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_g(f, \Delta_n, \xi_n) = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} dx$~~

$$(g(x_1) - g(x_0) + g(x_2) - g(x_1) + g(x_3) - g(x_2) +$$

$$+ \dots + g(x_n) - g(x_{n-1})) = g(x_n) - g(x_0) =$$

$$= g(b) - g(a)$$

! $R(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$! most important 5 things !!

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} R(f, \Delta, \xi)$ - интеграл на Риман

$Sg(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$! Стивенс

$g(x) = x \Rightarrow$ Риман

$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\text{diam } \Delta \rightarrow 0} Sg(f, \Delta, \xi)$

Док: $\overline{I_n}$

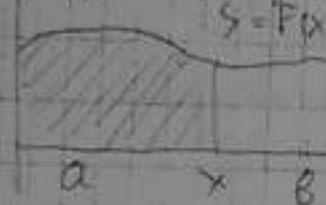
Ако не, то $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$
 но $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0$, но $a \leq x_n \leq b \Rightarrow \{x_{n_k}\}$ сходяща
 и $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = l$ Боу. Вауч. $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(l) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(l) \end{cases}$ непр.
 $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$ - противоречие.



5.5. Теорема на Нютон - Лайбниц

Теорема. Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$. Тогава $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

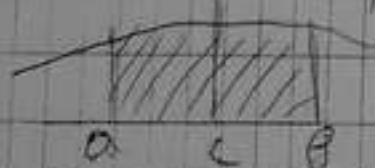
е първообразна на f , т.е. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$



Δ -во. Да фиксираме $x_0 \in (a, b)$. Трябва да докажем че $F'(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$

Акобиха към въпрос #3

Δ -во. Ако $c \in (a, b)$, то $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$



I. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = ?$

3а. $x > x_0$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt = F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Тоест
Следователно, $F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt$ (1)

Нека $\varepsilon > 0$. f е непрек. в $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0$

$$\forall x |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

В частност, за $x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow$ от (1)

$$\int_{x_0}^x (f(x_0) - \epsilon) dt \leq \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x (f(x_0) + \epsilon) dt$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)(f(x_0) - \epsilon) = \dots +$$

Lemma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } |f(x) - L| < \epsilon \text{ for } |x - x_0| < \delta$$

$$f(x_0) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow |f(x) - L| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0) - L| < |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - L| < \epsilon$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

where $f'(x_0)$ is the derivative (slope) of the function at x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$f(x_0) = f(x_0)$$

Следствие: Ако $f(x)$ е непрекъсната във $[a, b]$ и $F(x)$ е една от функциите, които имат производна $f(x)$, то $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$

Δ -теорема: Нека $f(x)$ е непрекъсната във $[a, b]$ и $F(x)$ е една от функциите, които имат производна $f(x)$.

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

Също е вярно, че ако $f(x)$ е непрекъсната във $[a, b]$ и $F(x)$ е една от функциите, които имат производна $f(x)$, то $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.

1) Нека $f(x)$ е непрекъсната във $[a, b]$ и $F(x)$ е една от функциите, които имат производна $f(x)$. Тогава $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.
 2) Нека $f(x)$ е непрекъсната във $[a, b]$ и $F(x)$ е една от функциите, които имат производна $f(x)$. Тогава $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$.

$$\int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

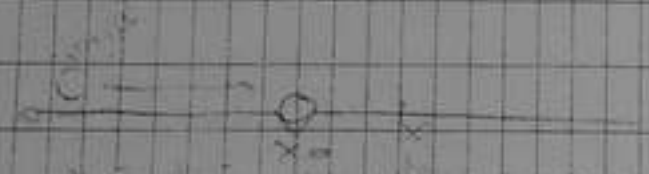
§. 6. Формули за представяне на интеграл на Стирлинс

Забележка: Може да се провери, че ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ или $f(x)$ има единствен прекъсване в $[a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx$ не съществува (логично).

Забелешка: Ако g е монотонна

тогава $g(x_{n+1}) - g(x_n) \geq 0$ (или ≤ 0)
 и $\lim_{n \rightarrow \infty} (g(x_{n+1}) - g(x_n)) = 0$

тогава $\sum_{n=0}^{\infty} (g(x_{n+1}) - g(x_n)) = g(\beta) - g(\alpha)$



и $P(x) = P(x \in X)$
 $P\{x = x_0\} > 0$
 има пренасяване в x_0

Теорема Нека $g \in \mathcal{J}$, а f е непрекъснатата $\mathcal{B}[a, b]$,
 Нека точките на пренасяване на g са $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$

Да означим $x_0 = a, x_n = b$. Нека $g'(x)$ е непр. $\mathcal{B}(x_i; x_{i+1})$
 $i = 0, \dots, n$. Тогава $\int_a^b f(x) dg(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) g'(x) dx + \sum_{i=1}^n f(x_i) (g(x_i) - g(x_{i-1}))$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Множество $x_0, x_1, \dots, x_n$ на промежутке $[a, b]$ называется разбиением $[a, b]$ с шагом Δx .

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \quad (1)$$

Да рассмотрим $\int_a^b f(x) dx$; Пусть $\bar{I} = [0, 1, \dots, n]$ разбиение на $[a, b]$

$$\begin{aligned} Sg(f, \bar{I}) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (g(z_{i+1}) - g(z_i)) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (g(z_{i+1}) - g(z_i)) + f(\xi_n) (g(x_1) - g(z_n)) \end{aligned}$$

Да $i=0, \dots, n-2$ g — вып. ф. $[z_i, z_{i+1}]$ и
по формуле $g(z_{i+1}) - g(z_i) = g'(\eta_i)(z_{i+1} - z_i)$
 $\eta_i \in [z_i, z_{i+1}]$

тогда $Sg(f, \bar{I}, \eta)$ — сумма

$$\left[\sum_{i=0}^{n-2} f(\eta_i) g'(\eta_i) (z_{i+1} - z_i) + f(\eta_{n-1}) g'(\eta_{n-1}) (x_1 - z_{n-1}) \right] -$$

$(\eta_{n-1} \in [z_{n-1}, x_1])$

$$= f(\eta_{n-1}) g'(\eta_{n-1}) (x_1 - z_{n-1}) + f(\xi_n) (g(x_1) - g(z_n))$$

т.е. $Sg(f, \bar{I}, \eta) = R(fg', \bar{I}, \eta) - f(\eta_{n-1}) g'(\eta_{n-1}) (x_1 - z_{n-1}) +$
 $+ f(\xi_n) (g(x_1) - g(z_n)) \quad (2)$

26.03.14

Лекция 5

$f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, а g е монотонно
 растяща с краен брой точки на прекъсване $x_1 < x_2 < \dots < x_n$
 в (a, b) . g' е непрекъсната в (x_i, x_{i+1}) , $i = 1, \dots, n-1$
 и $\exists g'(x_i \pm)$ (т.е. прекъсването на g' в x_i е "просто")

Тогава показваме, че

$$(1) \int_a^b f(x) dg(x) = \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dg(x), \quad x_0 = a, \quad x_{n+1} = b$$

$$(2) \int_a^{x_1} f(x) dg(x) = \int_a^{x_1} f(x) g'(x) dx + f(x_1) (g(x_{1+}) - g(x_{1-}))$$

Аналогично ^{на (2)} за $c \in (x_1, x_2)$ имаме, че $\int_{x_1}^c f(x) dg(x) =$
 $= \int_{x_1}^c f(x) g'(x) dx + f(x_1) (g(x_{1+}) - g(x_1)) \quad (3)$

Като вземем (2) и (3) $\Rightarrow \int_a^c f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) g'(x) dx$
 $+ f(x_1) (\cancel{g(x_1)} - \cancel{g(x_{1-})}) + (g(x_{1+}) - \cancel{g(x_1)}) =$
 $= \int_a^c f(x) g'(x) dx + f(x_1) (g(x_{1+}) - g(x_{1-}))$

По индукция на броя n на $+$ на прекъсване на g :

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx + \sum_{i=1}^n f(x_i) (g(x_{i+}) - g(x_{i-}))$$

(4) Интегриране по части

Деф 1 Вариация на g в интервала $[a, b]$ е

$$\text{Var}(g; [a, b]) := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| ; \right.$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

Деф 2 g има ограничена вариация в $[a, b]$, ако

$$\text{Var}(g; [a, b]) < \infty$$

Лема: Ако g_1 и g_2 са с ограничена вариация, то
 $g_1 + g_2$ също

Пример: 1) $g \uparrow$ в $[a, b]$

$$\text{Тогава } \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{(g(x_{i+1}) - g(x_i))}_{\geq 0} = g(b) - g(a)$$

2) g е Липшицова, т.е. $\exists L > 0$:

$$\forall x, y \in [a, b] \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

Лем. Ако g' е непр. в $[a, b]$, то g е Липшицова в $[a, b]$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq L \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = L(b - a)$$

3) $g = g_1 - g_2, g_{1,2} \uparrow$

2

Теорема g има ограничена вариация в $[a, b] \Leftrightarrow \exists g_1, g_2$ монотонно растящи в $[a, b]$, т.е.
 $g = g_1 - g_2$.

Деф. Ако g има ограничена вариация в $[a, b]$ и $g = g_1 - g_2$, където $g_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ са $\uparrow$ в $[a, b]$, то по деф:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg_1(x) - \int_a^b f(x) dg_2(x).$$

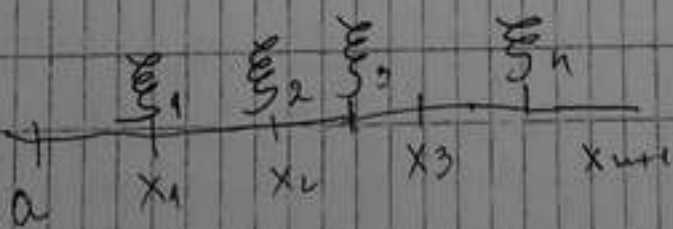
Дефиниция: $\int_b^a f(x) dg(x) := - \int_a^b f(x) dg(x)$
 това $a < b$.

Теорема. Ако f и g са непрекъснати и с ограничена вариация в $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x)$$

Напомняне: $f(x)g(x) \Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$

$$S_g(f; \Delta \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i)) = \text{next page}$$



$$\text{Heka } \bar{\Delta} = \{ \xi_{-1} = a < \xi_0 < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = b \}$$

$$\text{diam } \bar{\Delta} < 2 \text{diam } \Delta$$

$$\text{or } \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \dots$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g(x_i) =$$

$$= \text{---} \text{---} \text{---} - \sum_{j=0}^{n-2} f(\xi_{j+1}) g(x_{j+1}) - f(\xi_0) g(x_0)$$

$$= - \sum_{j=0}^{n-1} g(x_{j+1}) (f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)) - f(\xi_0) g(x_0) =$$

$$= - \sum_{j=-1}^n g(x_{j+1}) (f(\xi_{j+1}) - f(\xi_j)) + g(a) (f(\xi_0) - f(a))$$

$$+ g(b) (f(b) - f(\xi_n)) - f(\xi_0) g(a) = S_g(g; \Delta, x_j) +$$

$$+ g(b) f(b) - g(a) f(a) = \tau_e [S_g(f; \bar{\Delta}; \xi)]$$

$$= f(x) g(x) \Big|_a^b - S_f(g, \bar{\Delta}, x)$$

$$\downarrow$$

$$\text{diam } \Delta, \text{diam } \bar{\Delta} \rightarrow 0$$

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x)$$

8. Теорема за смяна на променливите.

Теорема.

Разглеждаме $\int_a^b f(x) dx$, където f е непр.

Ако $e(\alpha) = a$, $e(\beta) = b$ и $\forall t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow$

$e(t) \in I$, където I е интервал, в/з който f е непрекъсната; ако, освен това, e и e' са непрекъснати в $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(e(t)) e'(t) dt.$$

Д-во: (Честен случай: $e' > 0$) ~~монотонна~~ ~~строго~~ ~~монотонна~~
Тогаваше e е взаимно еднозначно $[\alpha, \beta] \xrightarrow{e} [a, b]$

$$R(f, \Delta, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i); \quad \forall i \exists! t_i \in [\alpha, \beta] : x_i = e(t_i)$$

По Теоремата за средните стойности $x_{i+1} - x_i =$
 $= e(t_{i+1}) - e(t_i) = e'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i), \eta_i \in [t_i, t_{i+1}]$

Нека $\xi_i = e(\eta_i) \in [x_i, x_{i+1}]$, $\tau, x \in \mathbb{R}$
 $\xrightarrow{e(t_i) \quad e'(t_{i+1})}$

Тогава $R(f; \Delta; \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(e(\eta_i)) e'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i) = R(f(e), e', \Delta', \eta)(1)$

При $\text{diam } \Delta' \rightarrow 0$
 Ако $x_{i+1} - x_i \leq e'(\eta_i)(t_{i+1} - t_i) \leq \max_{[a,b]} e' \cdot \text{diam } \Delta'$
 $\Rightarrow \text{diam } \Delta \rightarrow 0$

От (1) $\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(e(t)) e'(t) dt$

9. Теорема за средните стойности

Теорема: Нека $g \uparrow$, а f е непрекъсната. Тогава $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(\xi) (g(b) - g(a))$$

D-во:

$$\text{Нека } m = \min \{f(x); x \in [a, b]\}$$

$$M = \max \{f(x); x \in [a, b]\}$$

В частност $m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b m dg(x) \leq \int_a^b f(x) dg(x) \leq \int_a^b M dg(x), \text{ но}$$

$$\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a) \Rightarrow m(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b f(x) dg(x) \leq$$

$$M(g(b) - g(a)); (g(b) - g(a)) \left(\text{Заб. Ако } g(a) = g(b), \text{ т.е. } g \equiv \text{const, е ясно!} \right)$$

$$\textcircled{1} \text{ Нека } c = \frac{1}{g(b) - g(a)} \int_a^b f(x) dg(x). \text{ Укаже, че } m \leq c \leq M \Leftrightarrow$$

$$c \in [m, M]. \text{ От DVC-1 и } \textcircled{1} \exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = c.$$

$$\text{Т.е. } f(\xi) = \frac{1}{g(b) - g(a)} \int_a^b f(x) dg(x)$$

10. Равномерна сходимост на редици и редове. Критерий на Вайерштрас.

1. Точкова сходимост. Недостатъци.

Деф:

Нека I е интервал и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана в I .
 $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$, ако $\forall x \in I: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Пример: $I = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$, тогава $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f: \begin{cases} f(x) = 0, x \in [0, 1) \\ f(1) = 1 \end{cases}$

Т.е. границата на непрекъснати функции е прекъсната!

2. Равномерна сходимост. (NB!)

Деф. Казваме, че редицата от функции $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони
равномерно в интервала I към f и пишем
 $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ (в I), ако $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N$ и е
изпълнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in I$.

$$\begin{aligned} \text{Пр. } x^n < \frac{1}{2} & (\Leftrightarrow) n \cdot \ln x < -\ln 2 \\ x \in [0, 1] \Rightarrow \ln x < 0 & \\ n > -\frac{\ln 2}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \infty & \end{aligned}$$

3. Критерий на Коши: $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$

Редицата е равномерно сходяща в I , ако $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m, n > N$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b] \cap I$$

Редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в I ; ако $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists N: \forall k > m > N; \left| \sum_{n=m+1}^k u_n(x) \right| < \varepsilon, \forall x \in I.$$

4. Релове

Деф. Редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в I към $u(x)$, ако $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall m > N \Rightarrow |u(x) - \sum_{n=1}^m u_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in I$.

Заб. към критерия на Коши.

Редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно абсолютно сходящ в I , ако

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ е равномерно сходящ в I . (От крит. на Коши

абсол. равномерна сх. $\Rightarrow$ равн. сх.) и $\left(\left| \sum_{n=m+1}^k u_n(x) \right| \leq \right.$

$$\left. \leq \sum_{n=m+1}^k |u_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in X \right)$$

???

Теорема: (Критерий на Вайерштрас) / Ако $\forall x \in I, \forall n > N_1 \Rightarrow |u_n(x)| \leq b_n \in \mathbb{R}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е абсолютно равномерно сходящ в I .

До-во: $\sum_{n=m+1}^k |u_n(x)| \leq \sum_{n=m+1}^k b_n < \varepsilon, \forall n > N$

Твърдение: Нека степенният ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ има радиус на сходимост R . Ако $r \in (0, R)$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ е абсолютно равномерно сходящ в $[-r, r]$.

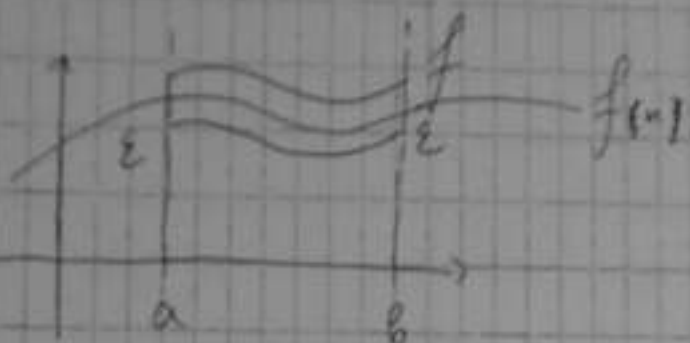
До-во: $\forall x \in [-r, r] \Rightarrow |x| \leq r \Rightarrow |a_n x^n| \leq |a_n| \cdot r^n \in \mathbb{R}$
 Но, т.к. $r < R \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty \Rightarrow$ О. К.

Дис-1

Критерий на Вайерштрас.

11. Непрерывността при равномерна сходност.

Теорема: Ако $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ са непрекъснати в I и редицата $f_n \xrightarrow{I} f$, то f е непрекъсната.



Доказателство:

Нека $\varepsilon > 0$. Нека $x_0 \in I$. По деф. на равномерна сходност
 $\exists N: \forall n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (*) За фиксирано $n, > N$
 $f_n(x)$ е непр. в $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ (**). Тогава, ако $\forall x \in I: |x - x_0| < \delta$, то

$$|f(x) - f(x_0)| = |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0))|$$

$$\begin{aligned} \text{По н-вото на } \Delta \Rightarrow & \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\substack{\wedge (*) \\ \varepsilon/3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{\wedge (**)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{\substack{\wedge (*) \\ \varepsilon/3}} \\ & \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
 По деф. на Коши f е непрекъсната.

Следствие: 1

Ако $f, g > 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = C > 0$, то

$\int_a^\infty f(x) dx$ и $\int_a^\infty g(x) dx$ са едновременно сходящи или разходящи.

Пример:

$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = ?$ или е сходящ $\Leftrightarrow p > 1$

По деф. $\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \int_1^N x^{-p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^N = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{(1-p)N^{p-1}}$

при $p=1$ $\int_1^N \frac{dx}{x} = \ln N \rightarrow \infty$ $N \rightarrow \infty$

$N \rightarrow \infty$
 $\downarrow$
 ∞ $0, p-1 > 0$
 $p-1 < 0$

Следствие 2: $g(x) = \frac{1}{x^p}$ с $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^p} = 0$

Ако $\lim_{x \rightarrow \infty} x^p f(x) = C > 0$, то $\int_a^\infty f(x) dx$ е сходящ $\Leftrightarrow p > 1$

Пример:

$\int_5^\infty \frac{5x+1}{x^3+x+1} dx$ или $f(x) = \frac{(5+\frac{1}{x})x}{x^3(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})} \Rightarrow x^2 f(x) \rightarrow 5$ $x \rightarrow \infty$ $\Rightarrow$ сходящ

Твърдение 2 (Гранична форма

(i) 1) Ако $\lim_{x \rightarrow \infty} \sup \frac{|f(x)|}{g(x)} < \infty$ и $\int_a^\infty g(x) dx$ е сходящ

, то $\int_a^\infty f(x) dx$ е абсолютно сходящ

(ii) 2) Ако $\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$ и $\int_a^\infty g(x) dx$ е разходящ, то

$\int_a^\infty f(x) dx$ е разходящ.

Доказ:

$\exists c > 0$

(i) $\exists M: \forall x > M \Rightarrow \frac{|f(x)|}{g(x)} < c \Leftrightarrow |f(x)| < c \cdot g(x)$

но $\int_M^\infty g(x) dx$ е сходящ

(ii) Аналогично $f(x) > c_1 g(x), \forall x > M_1$. Ако $\int_a^\infty f(x) dx$ е сходящ, то по Крит. за сравн. $\Rightarrow$

$\int_{M_1}^\infty g(x) dx$ е сходящ, $\Rightarrow$?!

12. Погледно интегриране и
диференциране при равномерно сходност.

Теорема 1. Ако $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ са непрекъснати в $[a, b]$, g е
функция с ограничена вариация (можем да образуваме интеграл
на Стилес), и $f_n \xrightarrow{I} f$ ^(непрекъснати) $\rightarrow f$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg(x)$$

До-во:

Б.О.О. g е $\uparrow$ и $g(b) - g(a) > 0$. Нека $\varepsilon > 0$
 $\exists N: \forall n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}, \forall x \in [a, b]$.

$$\text{Тогава } \forall n > N: \left| \int_a^b f_n(x) dg(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dg(x) \right|$$

$$\stackrel{g \uparrow}{\leq} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dg(x) \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} dg(x) = \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)} \underbrace{\int_a^b dg(x)}_{g(b) - g(a)} = \varepsilon.$$

$$\text{По лем. } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

Теорема 2.

Ако f_n' са непрекъснати в $[a, b]$ и $f_n' \rightarrow f'$, и
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$, то $\forall x \in (a, b) \rightarrow f'(x) = g(x)$
 $\uparrow$
 $\forall x \in (a, b)$

Накратко се пише така:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x)$$

D-во:

Нека да фиксираме $x \in (a, b)$, По теоремата на Нютон и Лайбниц (85) $\Rightarrow$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}, x$$

Но $f'_n \xrightarrow{[a, x]} g \xrightarrow{\text{Теорема 1}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f'_n(t) dt = \int_a^x g(t) dt$ По теорема

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ и} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a) \end{array} \right\}$$

Следователно: $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt \quad (1)$

Т.к. x беше произволно, то (1) е вярно $\forall x \in (a, b)$;

По теоремата на Н. и Л. $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in (a, b)$

2. За РЕДОВЕ

Теорема 1 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x)$ в $[a, b]$, като сходимостта е равномерна в $[a, b]$, и $u_n(x)$ са непр. в $[a, b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ то $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(x) dx = \int_a^x u(x) dx$

Теорема 2 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x)$, $\forall x \in [a, b]$ и $u'_n(x)$ са непрекъснати в $[a, b]$, и $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = v(x)$ и сходимостта е равномерна в $[a, b]$, то $\forall x \in (a, b) \Rightarrow u'(x) = v(x)$

Накратко: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$

Следствие: Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ има радиус на сх. R , то $u(x)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ е диференцируема в $(-R, R)$ и $u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$

З-во:

4.

$r \in (0, R)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^n$$

има радиус на сч. $R \Rightarrow$

$\Rightarrow$ е равномерно сходящо в $[-r, r]$ и т.н. :D

13. Интеграли, зависещи от параметър.
Непрекъснатост, интегриране и диференциране по параметъра.

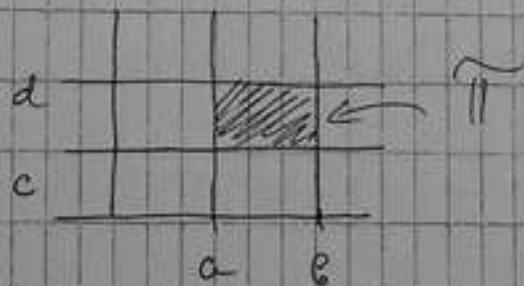
$$I(p) = \int_a^b f(x, p) dx$$

(Хайне)

Def. $f(x, y)$ е непр. в точката (x_0, y_0) , ако за произволни редици от $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, такива че $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0 \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = f(x_0, y_0)$

Лема: (III ти раздел от концепт)

Ако $f(x, y)$ е непрекъсната в Π , $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$



и $y_0 \in [c, d]$, и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [c, d]$ е т. че $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$, то
 за $g_i(x) := f(i)(x, y_0^i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$ е изпълнено, че
 $g_0 \xrightarrow{[a, b]} g_0$.

Пример: $I(p) = \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}$

?! $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^p e^{-x} dx$ - гамма функция

Теорема 1: (Непрерывность)

Ако $f(x, p)$ е непрекъснатата в $\prod \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq p \leq d \end{cases}$, то

$I(p) = \int_a^b f(x, p) dx$ е непрекъснатата $\forall p \in [c, d]$.

Доказ:

Нека $p_0 \in [c, d]$. Нека $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [c, d]$ е т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_0$.
~~По лемата~~ Нека $g_n(x) = f(x, p_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$
 Ясно е, че $I(p_n) = \int_a^b g_n(x) dx$, $n = 0, 1, \dots$ (1)

От Лемата $\Rightarrow g_n \xrightarrow{[a, b]} g_0$, такава от [вип. 12] $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx = \int_a^b g_0(x) dx, \text{ или от (1) } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I(p_n) =$$

$I(p_0)$. По Деф. Хайне I е непрекъснатата в p_0 .

Теорема 2

Нека $f(x, p)$ е непрекъснатата в $\prod \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq p \leq d \end{cases}$ Ако

$$I(p) = \int_a^b f(x, p) dx, \text{ то } \int_c^d I(p) dp = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, p) dp \right) dx$$

Заб. Т.е. $\int_c^d \left(\int_a^b f(x, p) dx \right) dp = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, p) dp \right) dx$

2-во: Нека $g(p) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$. По Теоремата на

Нютон и Лайбниц (85) $\Rightarrow$ $u'(x, p) = f(x, p)$. По Теорема 3 $\Rightarrow$
 $g'(p) = \int_a^b f(x, p) dx$. Тъй като $g(c) = 0$, то от Теор. на Н и Л. $\Rightarrow$

$\int_c^d g'(p) dp = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, p) dx \right) dp$. Но по деф. $g(d) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, p) dp \right) dx$

$\Rightarrow$ Теорема 2 е доказана.

Теорема 3. (Диференциране)

Деф: (частна производна)

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Ако $f(x, p)$ и $f'_p(x, p)$ са непр. в $\Pi: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq p \leq d \end{cases}$

и $I(p) = \int_a^b f(x, p) dx$, то $I'(p) = \int_a^b f'_p(x, p) dx$

Заб:

Т.е. имаме "формула на Лайбниц"

$$\left(\int_a^b f(x, p) dx \right)'_p = \int_a^b f'_p(x, p) dx$$

Лема 2: Ако $f(x, y)$ е непр. в $\Pi: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases}$

$y_0 \in [c, d]$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |y - y_0| < \delta \Rightarrow$
 $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b]$

Док: на (ТЗ)

Да разгледаме
$$\frac{I(r) - I(r_0)}{r - r_0} = \frac{1}{r - r_0} \int_a^b (f(x, r) - f(x, r_0)) dx$$

По Теоремата за средните стойности (Лагранж) $\forall x \in [a, b] \exists \xi_x$ м/у r и r_0 $f(x, r) - f(x, r_0) = f'_r(x, \xi_x)(r - r_0)$
Като заместим
$$\frac{I(r) - I(r_0)}{r - r_0} = \int_a^b f'_r(x, \xi_x) dx. \quad (2)$$

Нека $\varepsilon > 0$. Прилагаме Лема 2 за $f'_r(x, r)$ е непрекъснатата и r_0 ; $\exists \delta > 0$; $|r - r_0| < \delta \Rightarrow$
 $\Rightarrow |f'_r(x, r) - f'_r(x, r_0)| < \varepsilon$. В частност за ξ_x м/у r и r_0
 $\Rightarrow |\xi_x - r_0| < \delta \Rightarrow |f'_r(x, \xi_x) - f'_r(x, r_0)| < \varepsilon. \quad (3)$
От (2) $\Rightarrow$

$$\left| \frac{I(r) - I(r_0)}{r - r_0} - \int_a^b f'_r(x, r_0) dx \right| = \left| \int_a^b (f'_r(x, \xi_x) - f'_r(x, r_0)) dx \right|$$
$$\leq \int_a^b |f'_r(x, \xi_x) - f'_r(x, r_0)| dx \stackrel{(3)}{\leq} \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a)$$

$$\text{T.e. } \left| \int_a^b (f'_r(x, \xi_x) - f'_r(x, r_0)) dx \right| \leq \varepsilon(b-a),$$

$$\forall r: |r - r_0| < \delta.$$

$$\text{T.e. } \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{I(r) - I(r_0)}{r - r_0} = \int_a^b f'_r(x, r_0) dx$$



14. Несобствен интеграл

$$\int_I f(x) dx$$

Предположение:

- 1) I е ограничен интервал;
- 2) $f(x)$ е ограничена в I

1. Несобствен Риманов интеграл от I ред.

Лем. 1. Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a, \infty)$

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx$$

Критерий на Коши за интеграл от I ред!

Заб. Ако $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, то $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$

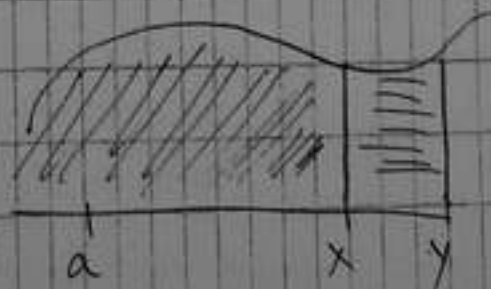
Лем.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall x, y > N \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

При $x < y$: $g(y) - g(x) = \int_a^y f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^y f(t) dt$.

$\int_a^\infty f(x) dx$ е сходящ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N$:

$$\forall y > x > N \Rightarrow \left| \int_x^y f(t) dt \right| < \varepsilon$$



Деф 2: $\int_a^\infty f(x) dx$ е абсолютно сходящ, ако е сходящ

$$\int_a^\infty |f(x)| dx.$$

Твърдение: Ако $\int_a^\infty f(x) dx$ е абсолютно сходящ, то той е сходящ.

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt < \varepsilon \quad \forall y > x > N$$

Твърдение: (Критерий за сравнение)

Ако $f(x)$ е непрекъснат в интервала $[a, \infty)$ и

$|f(x)| \leq g(x)$, $\forall x > N$, и $\int_N^\infty g(x) dx$ е сходящ

То $\int_a^\infty f(x) dx$ е абсолютно сходящ

$$\text{Д-во: } \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq \int_x^y g(t) dt < \varepsilon \text{ за } \forall \varepsilon > 0$$

$\exists N: \forall y > x > N =$

и крит. на Коши

Лекция Несобственный интеграл от Π вид:

16.04.14

Нека f е непрекъсната в $(a, b]$ и неограничена в $(a, b]$.

Деф. $\int_a^b f(x) dx$ е сходящ, ако $\exists \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$.
ако е сходящ, $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x) dx$.

Критерий на Коши:

$\int_a^b f(x) dx$ е сходящ $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall c < d; a < c < d < a + \delta$
 $\Rightarrow \left| \int_c^d f(x) dx \right| < \epsilon$

Деф: $\int_a^b f(x) dx$ е абсол. сходящ, ако е сходящ $\int_a^b |f(x)| dx$.
абсолютно сходящ $\Rightarrow$ сходящ!

Критерий за сравнение:

Ако $|f(x)| \leq g(x)$ в ок. a и $\int_a^b g(x) dx$ е сходящ,
то $\int_a^b f(x) dx$ е абсолютно сходящ.

Критерий за сравнение (в гранична форма)

$f, g > 0$ в ок. a и $\lim_{x \rightarrow a} \sup_b \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$

Ако $\int_a^b g(x) dx$ е сходящ, то $\int_a^b f(x) dx$ е сходящ.

Ако $\liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$ и $\int_a^b g(x) dx$ е разходящ, то $\int_a^b f(x) dx$ е разходящ.

Следствие:

Ако $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c \in (0, \infty)$, то $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ са едновременно сходящи или разходящи.

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \int_{\varepsilon}^c \frac{dt}{t^p} = \frac{t^{1-p}}{1-p} \Big|_{\varepsilon}^c, \quad p \neq 1$$

$$= \frac{c^{1-p}}{1-p} + \frac{\varepsilon^{1-p}}{p-1} \xrightarrow[\varepsilon > 0]{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{c^{1-p}}{1-p}, & p < 1 \\ \infty, & p > 1 \end{cases}$$

$$p = 1 \quad \int_{\varepsilon}^c \frac{dt}{t} = \ln c = \ln \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\varepsilon > 0} \infty$$

Следствие 2:

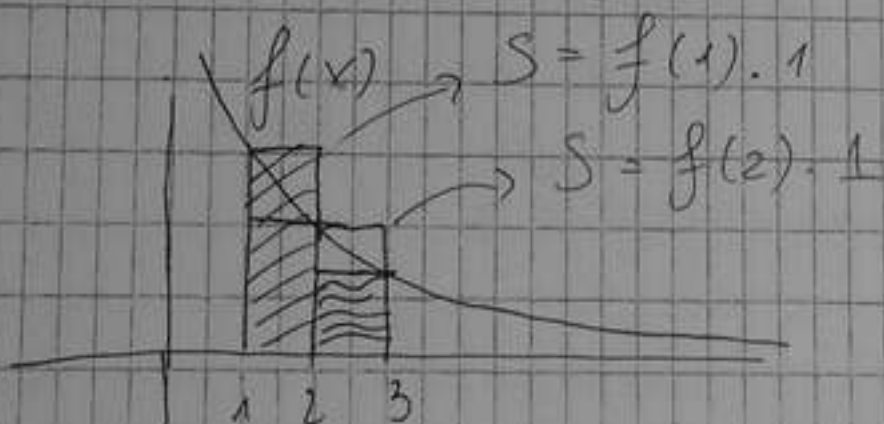
Ако $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} (x-a)^p f(x) = c \in (0, \infty)$, то $\int_a^b f(x) dx$ е сходящ $\Leftrightarrow p < 1$.

15. Интегрален критерий на Коши Константа на Ойлер.

- Поддържа връзката между сходимост на ред и константност на интеграла.

Теорема: (И.К.К.) Нека $f \in \mathbb{R}^+$ и $\downarrow$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Това интеграла $\int f(x) dx$ и редът $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ са едновременно сходящи или разходящи.



Доказ: $\forall x \in [n, n+1] \Rightarrow f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) \quad \Big| \int_n^{n+1} dx$

$$\int_n^{n+1} f(n) dx \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq f(n+1) \quad \Big| \sum_{n=1}^N \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^N f(n) \geq \int_1^{N+1} f(x) dx \geq \sum_{n=1}^N f(n+1) \quad (*)$$

Нека $P_N = \sum_{n=1}^N f(n)$. Т.к. $f(n) > 0, \forall n$, редът $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е
 сходен $\Leftrightarrow$ редицата $\{P_N\}_{N=1}^{\infty}$ е ограничена.
 Т.к. $f > 0$, $g(N) = \int_1^N f(x) dx$ е $\nearrow \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} g(N)$ съществува.

$g(N)$ е отр. т.е. $\int_1^{\infty} f(x) dx$ е сходен $\Leftrightarrow g(N)$ е ограничена функция. От (*), ако $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходен, то $\sum_{n=1}^N f(n) \geq P_N \geq g(N)$, $\forall N$. Т.е. g е ограничена $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ е сходен.

Аналогично ако $\int_1^{\infty} f(x) dx$ е сходен, ---

Пример 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ е сходен $\Leftrightarrow p > 1$

За $p > 0$: $f(x) = \frac{1}{x^p} \searrow 0$ + и.к.к.

Пример 2:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

полагаме $f(x) = \frac{1}{x \ln x} \searrow 0$, за $x > 1$

$$\int_2^N \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^N \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln(\ln x) \Big|_2^N = \ln(\ln N) - \ln(\ln 2)$$

$\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow$ интегралът е разходящ

Аналогично: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ е сходен $\Leftrightarrow p > 1$.

16. Гама функция. Дефиниция
и основно свойство.

Деф:

За $t > 0$:

$$\Gamma(t) := \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

Твърдение: Гамата интеграл е сходящ за $t > 0$.

Д-во: Нека $t > 0$

$$J = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = \underbrace{\int_0^1 x^{t-1} e^{-x} dx}_A + \underbrace{\int_1^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx}_B$$

J е сходящ $\Leftrightarrow A$ и B са сходящи.

За B : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{t+2}}{e^x} = 0$ (Лопитал) $\Rightarrow \frac{x^{t+2}}{e^x} < 1 \quad x > N$

$\Leftrightarrow \frac{x^{t+1}}{e^x} < \frac{1}{x^3}, \quad x > N$, но $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ е сходящ $\Rightarrow B$ е сходящ (Крит. сходящ.)

За A : т.е. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$, то $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1-t} f(x) = 1$, По $CnII$

от § 14 $\int_0^1 f(x) dx$ е сходящ, т.к. $1-t < 1$



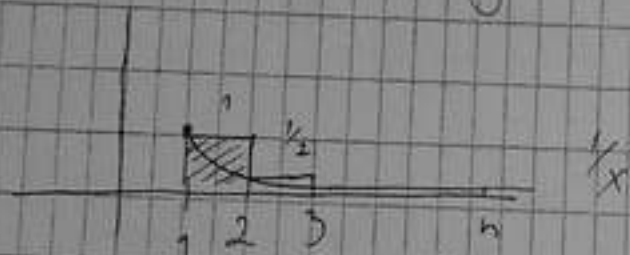
Опр: Константа на Ойлер се нарича

3.

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)}_{H_n}$$

Твърдение: Горната граница съществува !!

Д-во: Нека $f(x) = \frac{1}{x}$



$$\text{Нека } a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \int_1^n \frac{dx}{x}$$

Както в 1-вото на У.К.К.

$$a_n > 0 \quad \text{и} \quad a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} > 0 \quad \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow 0 < a_{n+1} - a_n < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \left| \sum_{n=1}^N \right.$$

$$\Rightarrow a_{N+1} - a_1 < 1 - \frac{1}{N+1}$$

Т.е. $a_{n+1} < 1 + a_1, \forall N$ и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е $\nearrow$ и ограничена $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

17. Условия за непрекъснатост, интегриране ~~на~~ и диференциране по знака на интеграла за несобствен интеграл, зависещ от параметър. Диференцируемост на Гама-функцията.

Означения: J ^{отворен} - интервал (краен или безкраен)

$$I(p) = \int_J f(x, p) dx$$

$\forall p \in [c, d]$ $I(p)$ съществува и не като несобствен
 $f(x, p)$ е непрекъсната в (x, p) в $\Pi : \begin{cases} x \in J \\ p \in [c, d] \end{cases}$

Условие (*): $\exists g(x) \forall x \in J, g(x) \geq 0$, т. че
 $\forall p \in [c, d] \Rightarrow |f(x, p)| \leq g(x)$, и

$\int_J g(x) dx$ е сходящ.

Лема 1. Ако $f(x, p)$ е непрекъсната в Π и е изпълнено Условие (*), то $\forall \varepsilon > 0 \exists J$ интервал $[a, b] \subset J$ такъв че

$$\int_{J \setminus [a, b]} g(x) dx < \varepsilon$$

Д-во: Нека $J = (a, b)$ и $c \in (a, b)$. По условие
 $\int_J g(x) dx = \int_a^c g(x) dx + \int_c^b g(x) dx$ като и двата
 въпреки са сходящи

По критерий на Коши $\exists \delta > 0: \forall [u, v] \subset (x, x+\delta)$
 $\Rightarrow \int_u^v g(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогава $\int_x^{x+\delta} g(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

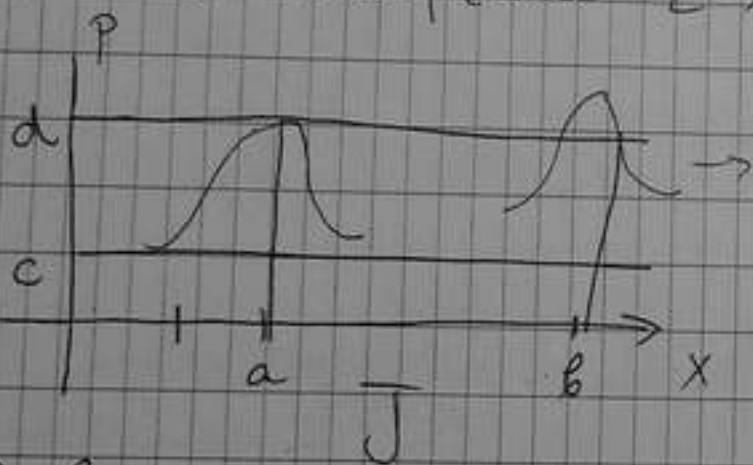
Положиме $a := x + \delta$. Аналогично $\exists b$:

$$\int_b^a g(x) dx \leq \frac{\varepsilon}{3}. \text{ Но } \int_a^b g(x) dx = \int_a^a g(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$



Теорема 1. Ако $f(x, p)$ е непр. в Π и е изпълнено (*) условие, то $I(p)$ е непрекъснатата в интервала $[c, d]$.



Доказателство:

Нека $p_0 \in [c, d]$ и $\exists \varepsilon > 0$. От Лема 1 $\exists [a, b] \subset \mathbb{R}$, такъв че $\int_a^b g(x) dx < \varepsilon$ --- (1)
 $\int \setminus [a, b]$

2.

Нека $I_1(p) := \int_a^b f(x, p) dx$. От въпрос 13 $\Rightarrow$
 $I_1(p)$ е непрекъснатата в $[c, d]$.

$$\text{Но } |I(p) - I_1(p)| = \left| \int_a^b f(x, p) dx \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x, p)| dx \leq \int_a^b |f(x, p)| dx \leq \int_a^b g(x) dx < \varepsilon$$

от 1. лема.

$$\text{Т.е. } |I(p) - I_1(p)| < \varepsilon, \forall p \in [c, d] \quad (2)$$

Т.к. $I_1(p)$ е непр. в p_0 $\exists \delta > 0$:

$$\begin{aligned} |p - p_0| < \delta &\Rightarrow |I_1(p) - I_1(p_0)| < \varepsilon. \text{ Следователно} \\ |I(p) - I(p_0)| &= |(I(p) - I_1(p)) + (I_1(p) - I_1(p_0)) + (I_1(p_0) - I(p_0))| \\ &\leq |I(p) - I_1(p)| + |I_1(p) - I_1(p_0)| + |I_1(p_0) - I(p_0)| \\ &\leq \varepsilon \text{ от (2)} + \varepsilon \text{ т.к. } |p - p_0| < \delta + \varepsilon \text{ от (2)} \\ &< 3\varepsilon, \forall p : |p - p_0| < \delta. \end{aligned}$$

Т.е. $I(p)$ е непрекъснатата в p_0 . 

Теорема 2:

Ако $f(x, p)$ е непрекъсната в Π и е изпълнено условие (*) , то за $I(p) = \int_a^b f(x, p) dx$ е вярно, че

$$\int_c^d I(p) dp = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, p) dp \right) dx$$

Забел: С други думи $\int_c^d \left(\int_a^b \dots \right) = \int_a^b \left(\int_c^d \dots \right)$

До-во: Нека $\varepsilon > 0$. По Лема 1 $\exists [a, b] \subset J$:

$\int_a^b g(x) dx < \varepsilon$. Както в доказателството на Теа.

Лема 1 | за $I_1(p) := \int_a^b f(x, p) dx$ е изпълнен ⁽²⁾

От въпрос 13: $\int_c^d I_1(p) dp = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, p) dp \right) dx$ (3)

$$\text{То } \left| \int_c^d I(p) dp - \int_c^d I_1(p) dp \right| =$$

$$= \left| \int_c^d (I(p) - I_1(p)) dp \right| \leq \int_c^d \underbrace{|I(p) - I_1(p)|}_{< \varepsilon} dp \leq$$

$$\leq \int_c^d \varepsilon dp = \varepsilon(d-c) \dots (4)$$

Аналогично $A := \left| \int_a^b \left(\int_c^d f(x,p) dp \right) dx - \int_c^d \left(\int_a^b f(x,p) dx \right) dp \right|$

$$= \left| \int_{J \setminus [a,b]} \left(\int_c^d f(x,p) dp \right) dx \right| \leq \int_{J \setminus [a,b]} \left(\int_c^d |f(x,p)| dp \right) dx$$

Но $\forall x \in J \setminus [a,b]$ и $\forall p \in [c,d] \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x,p)| \leq g(x) \quad (\text{от условие (x)})$$

т.е. $A \leq \int_{J \setminus [a,b]} \left(\int_c^d g(x) dp \right) dx$

$$g(x) \int_c^d dp = g(x)(d-c)$$

Уни $A \leq (d-c) \int_{J \setminus [a,b]} g(x) dx \leq (d-c) \varepsilon \quad (5)$

От (3), (4) и (5) $\Rightarrow$

$$\left| \int_c^d I(p) dp - \int_c^d \left(\int_a^b f(x,p) dx \right) dp \right| < 2\varepsilon(c-d)$$

Т.като $\varepsilon > 0$ е произволно, теоремата е доказана.

Теорема 3.

Ако $f(x, p)$ и $f'_p(x, p)$ са непрекъснати в Π и е изпълнено условие $(*)$ и $(**)$ $\{ \int_a^b g_1(x) dx \leq g_2(x) \}$, т.е. $\forall p \in [c, d] \Rightarrow |f'_p(x, p)| \leq g_1(x)$ и $\int_a^b g_1(x) dx$ е сходен. То $I(p)$ е диференцируема в (c, d) като $I'(p) = \int_a^b f'_p(x, p) dx$

Заб. С пр. лъчи $\left(\int_a^b f(x, p) dx \right)' = \int_a^b f'_p(x, p) dx$

Д-во: Нека $v(p) := \int_a^b f'_p(x, p) dx$. От Тх 1 $v(p)$ е непрекъсната.

Нека $u(p) = \int_c^p v(t) dt$. От теоремата на Н. Л. (6.5) $\Rightarrow u'(p) = v(p)$, $\forall p \in (c, d)$ (6)

От теорема 2 $u(p) = \int_a^b \left(\int_c^p f'_t(x, t) dt \right) dx =$ н.л.

$$= \int_a^b (f(x, p) - f(x, c)) dx = I(p) - I(c).$$

т.е. $I(p) = u(p) + I(c)$. От (6) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow I'(p) = v(p) \stackrel{\text{по деф.}}{=} \int_a^b f'_p(x, p) dx$$



Теорема: $\Gamma(t+1) = t \Gamma(t), \forall t > 0.$

Доказ:

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) &= \int_0^{\infty} x^t e^{-x} dx = - \int_0^{\infty} x^t de^{-x} = -x^t e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \\ &+ \int_0^{\infty} e^{-x} d_x x^t = \int_0^{\infty} e^{-x} (t x^{t-1}) dx = t \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx = \\ &= t \Gamma(t) \end{aligned}$$

Следствие: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad (*)$$

Доказ: по индукции!

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} =$$

$= 1$. Т.е. $(*)$ верно при $n=1$. Ако $(*)$

е верно при n , то $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n(n-1)! = n!$

т.е. $(*)$ е верно при $n+1$.

14.05.14

Лекция ДУС !!

1

18. Логаритмична изпъкналост на
тама функциятаДеф:

отворен

е строго мон. в I Нека I е интервал, f е логаритмично
изпъкнала в I , ако $\ln f$ е изпъкнала в I .

Напомняне

Ако $f > 0$ f е изпъкнала
ска $f'' \geq 0$ Лема: Ако $f > 0$ в I и f'' е непрекъсната в I ,
то f е логаритмично изпъкнала в $I \Leftrightarrow$
$$f''(x)f(x) \geq (f'(x))^2 \quad \forall x \in I$$
До-во: $g(x) = \ln f(x)$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} \geq 0 \Rightarrow f''(x)f(x) \geq (f'(x))^2$$

Пример: $f(x) = e^{u(x)}$ f и g : логаритмично изпъкнали $\Rightarrow f, g$ същоТвърдение: Нека I е интервал и $\ell(t) \geq 0 \forall t \in I$,
 $\ell \in C^1$ е непр. в I и за $f(x) = \int_I t^x \ell(t) dt$ е
изпълнено, че $f'(x) = \int_I (\ln t) t^x \ell(t) dt, \forall x \in I$

$$f''(x) = \int_I (\ln t)^2 t^x \ell(t) dt, \forall x \in I$$

Тогава $f(x)$ е лог. изпъкнала в $(0, \infty)$

Д-во:

Трябва да проверим, че
$$\int_I | \ln t | t^x e(t) dt \leq \left(\int_I t^x e(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_I (\ln t)^2 t^x e(t) dt \right)^{1/2}$$

Напомняне: (н-во Коши) !

$$\int_I u v \leq \left(\int_I u^2 \right)^{1/2} \left(\int_I v^2 \right)^{1/2}$$

Да изберем $u(t) = \sqrt{t^x e(t)}$ и $v(t) = |\ln t| \sqrt{t^x e(t)}$
От тер. на Коши получаваме (*).

$$\text{От (*)} \Rightarrow \int_I (\ln t) t^x e(t) dt \leq \left(\int_I t^x e(t) dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_I (\ln t)^2 t^x e(t) dt \right)^{1/2}$$

$$\leq \int_I | \ln t | t^x e(t) dt \cdot (f'(x))^2 \leq$$

$$\leq f(x) \cdot f''(x) \quad \diamond$$

Следствие:

$\Gamma(x)$ е логаритмично извивнала в интервала $(0, \infty)$.

Д-во: По дефиниция

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0 = \int_0^{\infty} t^x \left(\frac{e^{-t}}{t} \right) dt$$

Нека $e(t) = \frac{e^{-t}}{t} > 0$

От вѣст. 17 $\Rightarrow$ условието в Тб 1 за Γ' и Γ'' са изпълнен
 От Тб 1 $\Rightarrow \Gamma(x)$ е логаритмично изпъкнала 

!!!
 19. Характеризация на Гама функцията.
 Матрикативна формула на Гаус.

Теорема:

Ако $f(x)$ изпълнява $\forall x > 0$

(1) $f(x+1) = x f(x)$

(2) f е лог. изпъкнала в $(0; \infty)$

(3) $f(1) = 1$,

то $f(x) = \Gamma(x)$, $\forall x > 0$

характеризация

Д-во: От (1) е ясно, че $f(x)$ се определя от стойностите си в $[0, 1]$

от (1)
 $f(x) = (x-1) f(x-1) = (x-1)(x-2) f(x-2) = \dots = (x-1)(x-2) \dots (x-k) f(x-k)$,
 където $x-k \in (0, 1]$, т.е. $k = [x] + 1$

от (3): от (1)
 $f(2) = f(1+1) = 1 \cdot f(1) = 1$

$f(3) = f(2+1) = 2 \cdot f(2) = 2$

По индукция: $f\left(\frac{n}{x}\right) = \frac{(n-1)!}{x} (= \Gamma\left(\frac{n}{x}\right))$

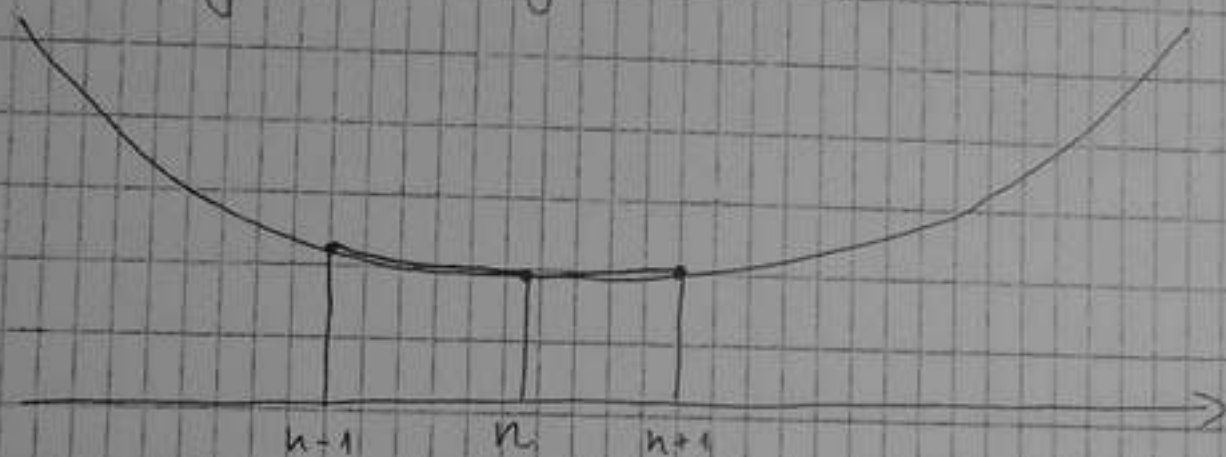
От (1) и (3):

$$f(n) = f(n-1)! \quad (a) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

За $x \in (0, 1]$ и $n \in \mathbb{N}$

$$f(x+n) = (x+n-1)(x+n-2) \dots x f(x) \quad (b)$$

Нека $g(x) := \ln f(x)$: изпъкнала



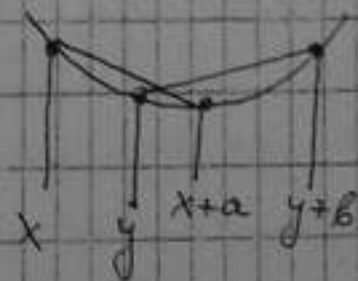
Лема: Нека g е изпъкнала и $x < y \Rightarrow g(x+1) - g(x) \leq g(y+1) - g(y)$

Док: $\frac{g(x+1) - g(x)}{(x+1) - x} \leq \frac{g(y+1) - g(y)}{(y+1) - y}$

Док!. Довършете!

Лема 2. Нека g е изпъкнала $x < y$, $a, b > 0$: $x+a < y+b$

Тогава $\frac{g(x+a) - g(x)}{a} \leq \frac{g(y+b) - g(y)}{b}$



2-ва: (дом.) с четирьъгълник !!!

Нека $x \in (0, 1]$. От Лема 2 $\Rightarrow \frac{g(n) - g(n-1)}{n - (n-1)} \leq \frac{g(x+n) - g(n)}{(x+n) - n}$
 $\leq \frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n}$

Д.е. Но $g(n) = \ln f(n) = \ln(n-1)!$ (от (a))

Получаваме $\ln(n-1)! - \ln(n-2)! \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln(n-1)!}{x} \leq$

$\ln n! - \ln(n-1)!$

От $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \Rightarrow \ln(n-1)! - \ln(n-2)! = \ln \frac{(n-1)!}{(n-2)!} = \ln(n-1)$

Аналогично $\ln n! - \ln(n-1)! = \ln n$

Т.е. $\ln(n-1) \leq \frac{\ln f(x+n) - \ln(n-1)!}{x} \leq \ln n$

$\Downarrow$

$x \cdot \ln(n-1) + \ln(n-1)! \leq \ln f(x+n) \leq x \cdot \ln n + \ln(n-1)! \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(n-1)^x \cdot (n-1)! \leq \ln f(x+n) \leq \ln n^x \cdot (n-1)!$

Тъй като $\ln \uparrow$, последното е еквивалентно на

$(n-1)^x (n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x (n-1)!$

от (2) и (a):

$(n-1)^x (n-1)! \leq f(x+n) \leq n^x (n-1)! \quad \text{--- (c)}$

$$\text{От (b) и (c)} \Rightarrow \frac{(n-1)^x (n-1)!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \leq f(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

(*) е изпълнено $\forall n \geq 2$. В частност можем да заменим n с $(n+1)$:

$$\frac{n^x \cdot n!}{x(x+1) \dots (x+n)} \leq f(x)$$

За (***) пишем $\frac{n^x \cdot (n-1)!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} = \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1) \dots (x+n)} \cdot \frac{(x+n)}{n}$

Ако положим $\Gamma_n(x) := \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$, получаваме

$$\Gamma_n(x) \leq f(x) \leq \Gamma_n(x) \cdot \frac{x+n}{n} \quad (***)$$

От (***) $0 \leq f(x) - \Gamma_n(x) \leq \Gamma_n(x) \cdot \frac{x+n}{n} - \Gamma_n(x) = \Gamma_n(x) \left(\frac{x+n}{n} - 1 \right) =$

$$= \Gamma_n(x) \cdot \frac{x}{n} \leq f(x) \cdot \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Gamma_n(x) := \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

$$\forall x \in (0, 1] \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x) \quad (d)$$

4.
Но $\Gamma_n(x)$ не зависи от f ! Т.е. всяка функция, изпълняваща (1), (2) и (3) (в частност функцията) в интервала $(0, 1]$ е $= \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x)$

Следователно $f(x) = \Gamma(x), \forall x \in (0, 1]$

От (6) по индукция $\Rightarrow f(x) = \Gamma(x), \forall x > 0$

Твърдение: (Мультипликативна ф-ма на Гаус) $\forall x > 0$

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x)$$

$$\Gamma_n(x+1) = \frac{n^{x+1} \cdot n!}{(x+1)(x+2) \dots (x+n+1)} = \Gamma_n(x) \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{x+n+1} \right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1}$$

$$n^{x+1} = n \cdot n^x$$

Ако $x \in (0, 1]$, то от (d) $\Rightarrow \Gamma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x)$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x+1) = x \Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

Т.е. $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x), \forall x \in (1, 2]$ и т.н. по индукция

Твърдение: $\forall x > 0 \Rightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(x)$

20. Формула на Вайерштрас

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{n+1}(x) &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = e^{x \ln n} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n})} \\
 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Gamma(x) &= e^{x(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n})} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{C}{(1+\frac{x}{1})(1+\frac{x}{2})\dots(1+\frac{x}{n})} \\
 \text{при } n \rightarrow \infty \quad \Gamma(x) &= e^{-cx} \cdot \frac{1}{x} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}} = e^{x(\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n})} \cdot \frac{1}{x} \prod_{i=1}^n \frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}}
 \end{aligned}$$

От въпрос 15 знаем, че

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n}) = -C \quad (\text{константа на Ойлер})$$

Твърдение (Ф. В)

$$\Gamma(x) = e^{-cx} \cdot \frac{1}{x} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}}$$

Заб. Лесно се проверява, че $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{z}{i}}}{1+\frac{z}{i}}$ е сходящо

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$. Т.е. формулата на Вайерштрас

21. бета функция. Връзка с Гамма функцията
Интеграл на Пуассон.

Деф:

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Твърдение 1. $B(x, y)$ е сходящ $\forall x, y > 0$

До-во: $\int_0^1 \dots = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1$ при $t \rightarrow 0$ $(1-t)^{y-1} \rightarrow 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2} t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \text{ е сходящ } \Leftrightarrow \text{е сходящ и}$$

$$\int_0^{1/2} t^{x-1} dt \Leftrightarrow x-1 > -1 \Leftrightarrow x > 0 \quad \blacklozenge$$

смяна $t = 1-s \Rightarrow B(x, y) = B(y, x)$

Твърдение 2. $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$

До-во: Вижте next lecture! :D

Да положим (за фиксирано $y > 0$)

$$f(x) := B(x, y) \Gamma(x+y)$$

Тогава. $f(x+1) = B(x+1, y) \cdot \Gamma(x+y+1) =$

$$= \left(\frac{x}{x+y} B(x, y) \right) \left((x+y) \Gamma(x+y) \right) = x (B(x, y) \Gamma(x+y)) =$$

$$= x \cdot f(x).$$

За фиксиран y : $B(x, y) = \int_0^1 \underbrace{t^x (1-t)^{y-1}}_{e(t) > 0} dt$

Условието за производните се проверяват аналогично на Гама-функцията. И от лемата (въпрос 18) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow x \rightarrow B(x, y)$ е логаритмично изпъкнала в $(0, \infty)$
 т.е. $f(x)$ е лог. изпъкнала в $(0, \infty)$ като произведение от такива.

Проверяваме, че $B(1, y) = \int_0^1 (1-t)^{y-1} dt = \left. \frac{(1-t)^y}{-y} \right|_0^1 = \frac{1}{y}$

Следователно $f(1) = \frac{1}{y} \cdot \Gamma(1+y) = \frac{1}{y} \cdot y \cdot \Gamma(y) = \Gamma(y)$

Значи $x \rightarrow f(x) / \Gamma(y)$, удовл. (3), както и (1) и (2) от 19 въпрос

По теоремата от въпрос 19.

$$\frac{f(x)}{\Gamma(y)} = \Gamma(x), \forall x > 0$$

Като заместим $\frac{B(x, y) \Gamma(x+y)}{\Gamma(y)} = \Gamma(x), \forall x > 0$

$$\forall x, y > 0 \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Да заместим $x = y = \frac{1}{2} : B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{(\Gamma(\frac{1}{2}))^2}{\Gamma(1)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Gamma(\frac{1}{2})^2$$

$$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t} \cdot \sqrt{1-t}} dt = \left[\text{кои. } t = \sin^2 \varphi, \varphi \Big|_0^{\pi/2} \right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{-1} \cdot (\cos \varphi)^{-1} d(\sin^2 \varphi) = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi$$

Напоминание!

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$



$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \Rightarrow \Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Твърдение. $\Gamma(x)$ е диференцируема функция

Доказ. $\Gamma'(x) = ? \int_0^{\infty} (\ln t) \cdot t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$

За да е вярно горното рав., трябва да проверим (*) За $(\ln t) t^{x-1} e^{-t}$. Нека $A(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Нека $0 < c < d$. Ще покажем, че $A(x)$ е диференцируема $\forall x \in (c, d)$. Нека $f(x, t) = t^{x-1} e^{-t}$

$$\forall x \in [c, d], \quad \forall t \in [0, 1] \Rightarrow |f'_x(x, t)| = |(\ln t) t^{x-1} e^{-t}| = |\ln t| t^{x-1} e^{-t} \leq \underbrace{|\ln t| t^{c-1} e^{-t}}_{g(t)}$$

$x \geq c$
 $t \leq 1$

$$\forall c_1 \in (0, c) \text{ е изпълнено } \Rightarrow |\ln t| t^{c-1} \leq t^{c_1-1}, \quad \forall t \in (0, \delta), \text{ т.к. } \lim_{t \rightarrow 0} |\ln t| t^{c-c_1} = 0 \Rightarrow$$

$$|\ln t| t^{c-c_1} < 1, \quad t \in (0, \delta), \text{ то } \int_0^1 t^{c_1-1} dt \text{ е сходящ}$$

$\Rightarrow \int_0^1 g(t) dt$ е сходящ.

по критерий за сравнение

По Th 3

$$A'(x) = \int_0^1 (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt$$

Аналогично: За $B(x) = \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$

Док, че $B'(x) = \int_1^{\infty} (\ln t) t^{x-1} e^{-t} dt$

Тв. 2

$$T^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} (\ln t)^n t^{x-1} e^{-t} dt$$

Дво: Аналогично.

Тверждение:

6.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Док:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot d\sqrt{t} \quad \text{Пол. } \sqrt{t} = x =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (- \text{интеграл на Пуассон})$$

Тверждение: (Пуассон): $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

16.05.14

Лекция ДУС II

1

 $x, y \geq 0$

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x, y > 0$$

$$B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

$$B(x+1, y) = \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt = \int_0^1 (1-t)^{x+y-1} \left(\frac{t}{1-t}\right)^x dt$$

$$= -\frac{1}{x+y} \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x d_t (1-t)^{x+y} =$$

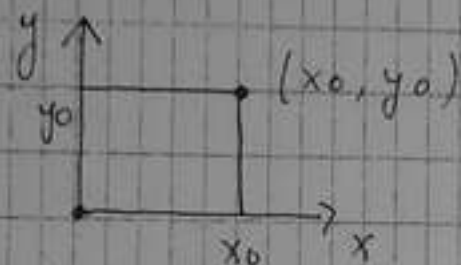
$$= -\frac{1}{x+y} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\text{наращивает в смысле } F} dt$$

$$= -\frac{1}{x+y} \cdot \left[t^x (1-t)^y \right]_0^1 + \frac{1}{x+y} \int_0^1 (1-t)^{x+y} d_t \left(\frac{t}{1-t}\right)^x$$

$$= \frac{1}{x+y} \int_0^1 (1-t)^{x+y} \cdot x \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} \cdot \frac{1}{(1-t)^2} dt =$$

$$= \frac{x}{x+y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{x}{x+y} B(x, y)$$

23. Разстояние и сходимост в Евклидово пространство



— Декартова координатна система.

Евклидово пространство: $\mathbb{R}^n = \{ (x^1, x^2, \dots, x^n); x^i \in \mathbb{R} \}$

В $\mathbb{R}^2$:

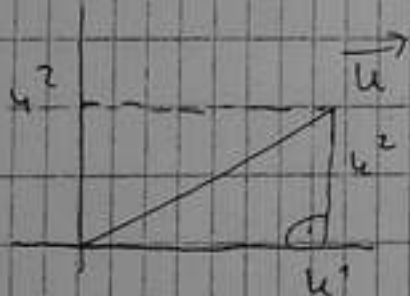
$$x = (x^1, x^2)$$

$$y = (y^1, y^2)$$

$$y - x = (y^1 - x^1, y^2 - x^2)$$

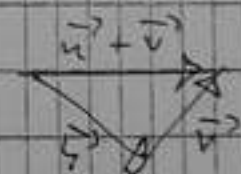


— Дължина на вектор $\vec{u} = (u^1, u^2)$ е (Тх. Пифагор)
 $= \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2}$



Означаваме с $|\vec{u}|$ дължината на $\vec{u}$.
 Имаме неравенство на Δ

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$$



$$\sqrt{(u^1 + v^1)^2 + (u^2 + v^2)^2} \leq \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} + \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2}$$

Скалярно произведение в $\mathbb{R}^n$: За $u = (u^1, \dots, u^n)$
 $v = (v^1, \dots, v^n)$

$$\langle u, v \rangle = u^1 v^1 + u^2 v^2 + \dots + u^n v^n = \sum_{i=1}^n u^i v^i$$

При това $|\vec{u}| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Косинус: $|\langle u, v \rangle| \leq |u| \cdot |v|$

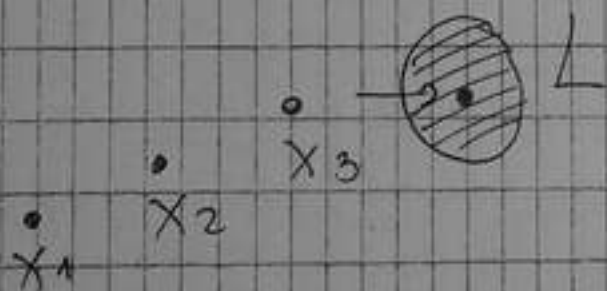
$\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow u \perp v$

$d(x, y) = |y - x|$

↑
"distance"

Деф. (Сходимость на рекуца)

Рекуцата $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ е сходима към точката $L \in \mathbb{R}^n$, пишем $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L$, ако $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, L) = 0$



Озн. кълбо $B(x; r) = \{y : d(x, y) \leq r\}$
Очевидно, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N:$

$\forall k > N \Rightarrow x_k \in B(L; \varepsilon)$

Извън $B(L; \varepsilon)$ има само краен брой точки от рекуцата.

Твърдение: Нека $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $L \in \mathbb{R}^n$ като $x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)$, $L = (l^1, l^2, \dots, l^n)$

Тогава $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^1 = l^1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^2 = l^2 \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^n = l^n \end{cases}$ при $k \rightarrow \infty$

$(n=2)$
 Д-во: $(\Rightarrow)$ Знаем, че $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, L) = 0$

т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_k^1 - l^1)^2 + (x_k^2 - l^2)^2} = 0$. Но

$$\sqrt{(x_k^1 - l^1)^2 + (x_k^2 - l^2)^2} \geq |x_k^1 - l^1| \geq 0$$

$\downarrow \quad k \rightarrow \infty$
0

$\Delta 2^\circ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k^1 - l^1| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^1 = l^1$

Аналогично $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^2 = l^2$

$(n=2)$

$(\Leftarrow)$ Нека $\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^1 = l^1 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^2 = l^2 \end{cases}$ Тогава $\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^1 - l^1) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^2 - l^2) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^1 - l^1)^2 = 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^2 - l^2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (x_k^1 - l^1)^2 + (x_k^2 - l^2)^2 = 0$

$= 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{(x_k^1 - l^1)^2 + (x_k^2 - l^2)^2} = 0$

$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_k, L) = 0$



~~Дефиниция~~

Деф: $f: \mathbb{R}^n$ е непрекъсната в т. $x_0 \in Df$, ако:

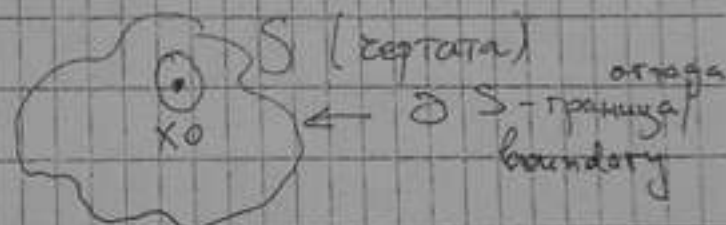
(Коши) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: |x - x_0| < \delta \Rightarrow$
 $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(Хайне) Ако $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$.

Деф: Ако $S \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset Df$, то f е непрекъсната в/у S , ако
 $\forall x_0 \in S \Rightarrow f$ е непрекъсната в x_0 .

Деф. 1. $U \subset \mathbb{R}^n$ е отворено, ако $\forall x_0 \in U$

$\exists \varepsilon > 0: B(x_0; \varepsilon) \subset U$



Деф. 2. $F \subset \mathbb{R}^n$ е затворено, ако за произволна
сходяща редица $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F$ е изпълнено

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in F$ (оградата на F изцяло се съдържа в F)
($\partial F \subset F$)

Деф. 3. $S \subset \mathbb{R}^n$ е ограничено, ако $\exists M: S \subset B(0; M)$

Лема: Ако $S \subset \mathbb{R}^n$, което е ограничено и затворено,
и $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$, то $\exists$ сходяща подредица $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$:
 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} \in S$.

24. Теорема на Боляно-Вайерштрас 3

Теорема на Вайерштрас за непрекъснати функции

Теорема (Б.В.) Ако редицата $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена, то от нея може да се избере сходяща подредица.

Деф. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена, ако $\exists M > 0$:
 $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow x_k \in B(0; M)$

$\Updownarrow$
 редицата $\{|x_k|\}_{k=1}^{\infty}$ е ограничена

$\Updownarrow$
 $\forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \{x_{ki}\}_{k=1}^{\infty}$ е ограничена

Д-во: ($n=2$) Редицата $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ е ограничена $\Rightarrow$
 (Б.В) $\exists \{x_{ki}\}_{i=1}^{\infty} : \lim_{i \rightarrow \infty} x_{ki}^1 = l^1$
 или I

Редицата $\{x_{ki}^2\}_{i=1}^{\infty}$ е ограничена $\xRightarrow{\text{Б.В}} \exists$ подредица
 $\{x_{kij}\}_{j=1}^{\infty} : \lim_{j \rightarrow \infty} x_{kij}^2 = l^2$

Тогава $\begin{cases} \lim_{j \rightarrow \infty} x_{kij}^1 = l^1 \\ \lim_{j \rightarrow \infty} x_{kij}^2 = l^2 \end{cases} \xRightarrow{\text{выр. 2.3}} \lim_{j \rightarrow \infty} x_{kij} = \begin{pmatrix} l^1 \\ l^2 \end{pmatrix}$

Док: C е ограничено $\Rightarrow$ редицата $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ е ограничена
 $\Rightarrow \exists$ сходяща $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$. C затворено $\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} \in C$ 

Теорема 1.

Ако f е непрекъснатата в/у ограниченото и затворено множество $C \subset \mathbb{R}^n$, то f е ограничена в/у C . (т.е. $\sup \{ |f(x)| : x \in C \} < \infty$)

Док. Допускаме противното, т.е. $\sup \{ |f(x)| : x \in C \} = \infty \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \exists x_k \in C : |f(x_k)| > k$

От лемата $\exists \{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty} : \lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = \bar{x} \in C$, но f е непрекъснатата в $\bar{x}$, следователно (по Хайне) $\lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{k_i}) = f(\bar{x})$

Следователно $\{f(x_{k_i})\}_{i=1}^{\infty}$ е ограничена. Но според избора на x_{k_i} $|f(x_{k_i})| > k_i$ и при $\lim_{i \rightarrow \infty} k_i = \infty \Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} |f(x_{k_i})| = \infty \Rightarrow$ противоречие 

Теорема 2. Ако f е непрекъснатата в/у ограниченото и затворено множество $C \subset \mathbb{R}^n$, то $\exists \hat{x} \in C : f(\hat{x}) \geq f(x), \forall x \in C$. (с други думи $f(\hat{x}) = \max \{ f(x) : x \in C \}$)

Д-во: От теорема 1 знаем, че $S := \sup \{ f(x) : x \in C \} < \infty$
 Да попуснем, че $\forall x \in C \Rightarrow f(x) < S \Leftrightarrow S - f(x) > 0$
 тогава $g(x) := \frac{1}{S - f(x)}$ е непрекъснатата в/у C . непр $\neq 0$

$$f(x_k) > S - \frac{1}{k}$$

то по геф. за $\sup \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists x_k \in C : S - \frac{1}{k} < f(x_k) < \frac{1}{k} \Leftarrow$

$\Leftrightarrow f(x_k) > k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ не е ограничена $\text{b/s } C$.

Противоречие с Th 1! $\diamond \Rightarrow \exists \hat{x} \in C : f(\hat{x}) = S$.



28.05.14

Лекция

1.

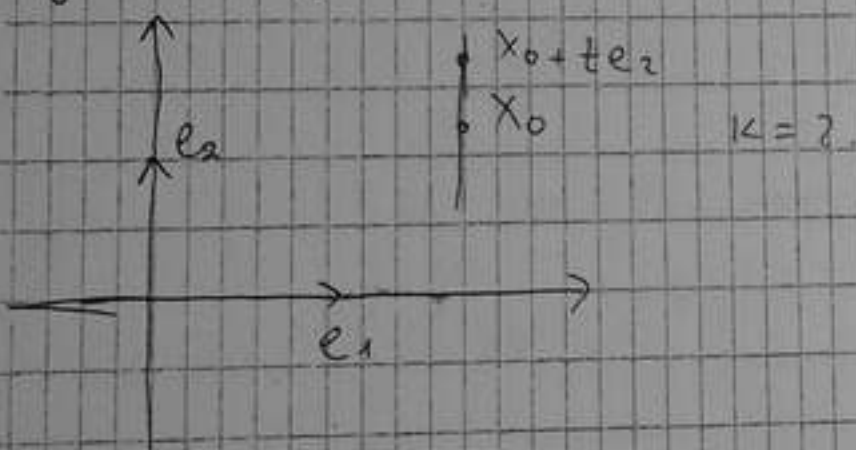
25. Частично производные и дифференцируемость.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$$

$$\text{Нека } e_i = (\underbrace{0, 0, \dots}_{i\text{-то}}, 1, 0, \dots, 0)$$

$$k \in \{1, \dots, n\} \text{ фиксирано}$$

$$g(t) := f(x_0 + t e_k)$$



$$\text{По деф. } \left. \begin{aligned} f'_{x^k}(x_0) &= g'(0), \text{ т.е. } f'_{x^k}(x_0) = \\ &= \lim_{x^k \rightarrow x_0^k} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{k-1}, x^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0)}{x^k - x_0^k} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{По деф. } f'_{x^k}(x_0) = g'(0), \text{ т.е. } f'_{x^k}(x_0) =$$

$$= \lim_{x^k \rightarrow x_0^k} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{k-1}, x^k, x_0^{k+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0)}{x^k - x_0^k}$$

Def: (Дифференцируемость)!

f е дифференцируема в $x_0 \in Df \subset \mathbb{R}^n$,
ако $\exists a \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle a, h \rangle + \alpha(h) \cdot |h|, \quad \text{където}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \alpha(h) = 0, \quad \text{с други думи} \quad \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - \langle a, h \rangle}{|h|} = 0$$

$$\langle a, h \rangle = 0$$

Твърдение:

Ако f е дифференцируема в x_0 , то

$$a = (f'_{x^1}(x_0), f'_{x^2}(x_0), \dots, f'_{x^n}(x_0))$$

Доказателство: Заменяване в (1) $h = te_1 = (t, 0, \dots, 0)$

$$f(x_0 + te_1) = f(x_0) + ta^1 + \alpha(t) \cdot t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_0 + te_1) - f(x_0)}{t} = a^1 + \alpha(t)$$

$$\downarrow \quad \downarrow t \rightarrow 0$$
$$f'_{x^1}(x_0) = a^1$$

1.

Лекция

24.06.14

27. Формула на Тейлор

$n=1$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f^{(n+1)}$ в окрестности на $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}, \quad \xi \text{ е м/у } x_0 \text{ и } x_0 + h$$

$$g(t) = f(x + th)$$

$$g(1) = g(0) + g'(0)1 + \frac{g''(0)}{2}1^2$$

$$\boxed{226} \quad g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + th) \cdot h_i$$

$$x_0 + th = \begin{pmatrix} x_0^1 + th^1 \\ x_0^2 + th^2 \\ \vdots \\ x_0^n + th^n \end{pmatrix}$$

Теорема Нека $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ има непре-
къснати частни производни до ред $(k+1)$ вкл. в
окрестност на x_0 .

Тогава за достатъчно малки $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(x_0 + h) = \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \langle d^{(i)} f, h \rangle + \frac{1}{(k+1)!} \langle d^{(k+1)} f, \xi \rangle$$

където $\xi \in (0,1)$

Означим: $\langle d^{(k)} f(x_0), h \rangle = \sum_{j_1 + \dots + j_k = k} \frac{f^{(j_1, \dots, j_k)}(x_0)}{j_1! \dots j_k!} (h^1)^{j_1} \dots (h^n)^{j_n}$

При этом $\langle d^{(0)} f(x_0), h \rangle = f(x_0)$ ($0! = 1$)

Докажем. Пусть $g(t) = f(x_0 + th)$ от ДУС-1:

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g^{(i)}(0)}{i!} t^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (th)^i$$

$$g'(t) = ? ; g'(t) = \left(f(x_0^1 + th^1, x_0^2 + th^2, \dots, x_0^n + th^n) \right)'$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} (x_0 + th) (x_0^1 + th^1)' + \frac{\partial f}{\partial x_2} (x_0 + th) (x_0^2 + th^2)' + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} (x_0 + th) (x_0^n + th^n)' = \sum_{i=1}^n f'_{x_i} (x_0 + th) h^i$$

$$= \sum_{j_1 + \dots + j_n = 1} f^{(j_1, \dots, j_n)}(x_0) (h^1)^{j_1} \dots (h^n)^{j_n}$$

$$g'(t) = (g(t))' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}(x_0 + th) h^i \right)' = \sum_{i=0}^{\infty} \left(f^{(i)}(x_0 + th) \right)'$$

$$h^1 = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j_1 + \dots + j_n = i} f^{(j_1, \dots, j_n)}(x_0 + th) h^1 \right)' = \sum_{j_1 + \dots + j_n = 1} f^{(j_1, \dots, j_n)}(x_0) (h^1)^{j_1} \dots (h^n)^{j_n}$$

$$(x_0 + th) (h^1)^{j_1} \dots (h^n)^{j_n}$$

и т.д. по аналогии.

2.

28. Класификация на критични точки

II Случай $k=2$ във "векторни" размерности

Обозначения: $\nabla f = (f'x^1, f'x^2, \dots, f'x^n)$ наричаме "градиент"

$$H(f) := \begin{pmatrix} f''_{x^1x^1} & f''_{x^1x^2} & \dots & f''_{x^1x^n} \\ f''_{x^2x^1} & f''_{x^2x^2} & \dots & f''_{x^2x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x^nx^1} & f''_{x^nx^2} & \dots & f''_{x^nx^n} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{наричаме} \\ \text{хесциан} \end{array}$$

$$|H(f)| = \det \quad \text{---} \quad || \text{---}$$

Следствие

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} \langle \overbrace{H(f)(x_0)}^{\text{матр.}} \cdot h, h \rangle + \alpha(h) \cdot |h|^3$$

където $\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$

Дефиниция $x_0 \in Df$ е критична точка за f , ако не съществува $\nabla f(x_0)$ или $\nabla f(x_0) = \vec{0}$,

От § 24, Следствие $\Rightarrow$ Ако x_0 е критична то

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle H(f)(x_0)h, h \rangle + \alpha(h) \cdot |h|^3, \quad \alpha(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0$$

Зема 2 Критичната точка на x_0 се нарича
регулярна, ако $|H| f(x_0) \neq 0$

и/или A е $n \times n$ и е симетрична: $A^t = A$

$\leadsto$ квадратична форма $h \rightarrow \langle Ah, h \rangle$

Def A е положително определена, ако $\exists$
 $c > 0 : \forall h \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle Ah, h \rangle \geq c|h|^2$

A е отрицателно определена, ако $\exists c > 0 :$
 $\forall h \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle Ah, h \rangle \leq -c|h|^2$

A е седловидна (знакопроменлива), ако $\det$
 $A \neq 0$ $\exists h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n : \langle Ah_1, h_1 \rangle < 0 < \langle Ah_2, h_2 \rangle$

$A^t = A$, $\det A \neq 0$ $\exists$ орт. Q и $B = Q A Q^t$
(има ортогонален базис, в който оператор се
записва чрез B)

и $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ са

собств. на A $A v_i = \lambda_i v_i$

$\det A = \det B = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \neq 0$

3.

В новия базис $h \rightarrow \langle Ah, h \rangle$ се записва
като $u \rightarrow \langle Bu, u \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i (u^i)^2$

Очевидно, че $A(u, v)$ е положително ако $\lambda_i > 0$,
отрицателно ако $\lambda_i < 0, \forall i$ и седловидна, ако

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_n$$

ТН / Критерии на съвместност) Нека $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$,
 $a_{ij} = a_{ji}$ и $\Delta_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$ и $\Delta_n \neq 0$

Тогави: а) Ако $\Delta_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, n$, то A е положително

б) Ако $(-1)^k \Delta_k \geq 0, \forall k$, то A е отрицателно

в) Ако нито а), нито б), то A е знакопроменлив

Твърдение:

Ако x_0 е регулярна критична точка на f , то

а) Ако $H(f)(x_0)$ е положително, то x_0 е минимум на f

б) Ако $H(f)(x_0)$ е отрицателно, то x_0 е максимум на f

в) Ако $H(f)(x_0)$ е знакопроменлив, то x_0 не е нито минимум, нито максимум

2-60 а) Тогда $A = H(f)(x_0) =$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle + \alpha(h) \cdot |h|^2, \quad \alpha(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0$$

$$\exists c > 0: \langle Ah, h \rangle \geq c |h|^2, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Тогда } \varepsilon > 0: \forall h: |h| < \varepsilon \Rightarrow |\alpha(h)| < \frac{c}{2}$$

$$\text{Тогда } f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{c}{2} |h|^2 + \alpha(h) |h|^2 =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{c}{2} + \alpha(h) \right)}_{\geq c/4} |h|^2 \geq c/4 |h|^2$$

$$\text{Т.е. } \forall h: |h| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0 + h) > f(x_0), \text{ т.е. } x_0 \text{ —}$$

локал. минимум

$$б) A = H(f)(x_0)$$

$$\exists h_1, h_2: \langle Ah_1, h_1 \rangle < 0 < \langle Ah_2, h_2 \rangle$$

$$\text{Тогда } g_i(t) = f(x_0 + th_i) - f(x_0) = \frac{1}{2} \langle A th_i, th_i \rangle +$$

$$+ \alpha(th_i) t^2 |h_i|^2 = t^2 \left(\frac{1}{2} \langle Ah_i, h_i \rangle + \beta_i(t) \right), \quad \alpha(th_i) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

т.е.

↑

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Нека $|H| f'(x_0, y_0) \neq 0$

Увече : ако $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то (x_0, y_0) е min
ако $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, то (x_0, y_0) е max

Дел II

1. Аналог (6)
 (1) $f(x+1) = x f(x)$
 (2) $f(x)$ е непрекъснато
 (3) $f(1) = 1$
 То $f(x) = \Gamma(x)$, $\forall x > 0$

Формула на Стирлинг

Вопрос: Може ли да се намери $\mu(x) \rightarrow 0$, и че
 $\Gamma(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)}$ (4)
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1$

Може ли да се намери нещо повече за μ ?

Нека $f(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)}$ (4)

1. $\mu(x) = ?$: f измества (1) и (2)?

$$f(x+1) = (x+1)^{x+\frac{1}{2}} e^{-x-1} e^{\mu(x+1)}$$

$$\left(x + \frac{1}{2} \right) \frac{f(x+1)}{f(x)} = \underbrace{x \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x+\frac{1}{2}} e^{-1} e^{\mu(x+1)-\mu(x)}}_{A(x)}$$

т.е. $\frac{f(x+1)}{f(x)} = x \Leftrightarrow A(x) = 1, \forall x > 0$

то $A(x) = e^{(x+\frac{1}{2}) \ln(1+\frac{1}{x}) - 1 + \mu(x+1) - \mu(x)}$

Нека $g(x) = (x+\frac{1}{2}) \ln(1+\frac{1}{x}) - 1$ (5), т.е.

$A(x) = e^{g(x) - (\mu(x) - \mu(x+1))}$ и $A(x) \equiv 1 \Leftrightarrow \mu(x) - \mu(x+1) = g(x)$,
 $\forall x > 0$. Аналог: $\mu(x+1) - \mu(x+2) = g(x+1)$

$$\begin{aligned} \mu(x+1) - \mu(x+2) &= g(x+1) \\ \mu(x+2) - \mu(x+3) &= g(x+2) \\ \vdots \\ \mu(x+n) - \mu(x+n+1) &= g(x+n) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} + \\ \hline \end{array} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mu(x+1) - \mu(x+n+1) = \sum_{i=1}^n g(x+i)$ или $\mu(x) - \mu(x+n) = \sum_{i=0}^{n-1} g(x+i)$

Ако $\mu(x) \rightarrow 0$, то $\mu(x+n) \rightarrow 0$ и $\mu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g(x+i)$

Ако $\sum_{i=0}^{\infty} g(x+i)$ е сходящ, то за $\mu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g(x+i)$, очевидно
 е изн. $\mu(x) - \mu(x+1) = g(x) \Rightarrow A(x) = 1$.

Лема 1. $\forall x > 0$ $\sum_{i=0}^{\infty} g(x+i)$ е сходящ.

Ф-на на Бернари:

Дока: $\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{L(x)}{x^3}$, $L(x) \rightarrow 0$

$(x+\frac{1}{2}) \ln(1+\frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{\beta(x)}{x^2}$, $\beta(x) \rightarrow 0$

$\beta(x) \rightarrow 0$
 $x \rightarrow \infty$ -1

$$g(x) = \frac{1}{12x^2} + \frac{\beta(x)}{x^2} \rightarrow \beta(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Функция $x > 0$

$$g(x+n) = \frac{1}{12(x+n)^2} + \frac{\beta(x+n)}{(x+n)^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x+n)^2 g(x+n) = \frac{1}{12} > 0, \text{ т.к.}$$

По крив. за криву $\sum_{n=0}^{\infty} g(x+n)$ е сходя (т.к. $\sum \frac{1}{n^2}$) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 g(x+n)$

Зеп. $\forall x > 0$

$$\mu(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g(x+i) \dots \text{е б)}. \text{Тогда } f(x) = x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} \mu(x)$$

угодн. сн.

Лемма. $f(x)$ е монотонно убывающая

Д-во: $x^{x-\frac{1}{2}} = e^{(x-\frac{1}{2})\ln x}$. Пусть $f(x) = (x-\frac{1}{2})\ln x$

$$f'(x) = (x-\frac{1}{2})\frac{1}{x} + \ln x = 1 - \frac{1}{2x} + \ln x$$

$$f''(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow x^{x-\frac{1}{2}} \text{ е мон. убывающая}$$

e^{-x} : строго.

Или проверим, что $g(x)$ е убывающая: $g'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + (x+\frac{1}{2})$

$$g'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) + (x+\frac{1}{2})\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - (1+\frac{1}{x}) = \ln(1+\frac{1}{x}) - (x+\frac{1}{2})\frac{1}{x(x+1)}$$

$$g''(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2}) - \frac{1}{x(x+1)} + (x+\frac{1}{2})\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2}{x(x+1)} + \frac{(2x+1)^2}{2x^2(x+1)^2} > 0$$

$$\frac{(2x+1)^2}{x(x+1)} > 4$$

$$4x^2 + 4x + 1 > 4x^2 + 4x : \text{ да!}$$

(т.е. f - ст. $x \rightarrow g(x+n)$ е уб. $\forall n$)

$\Rightarrow \mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n)$ е убывающая $\Rightarrow e^{f(x)}$ е мон. уб.

$\Rightarrow f$ е мон. убывающая как произведение на убыва.

т.е. $x \rightarrow \frac{f(x)}{f(1)}$ монотонна: (1), (2) и (3) т.е. 1-й от вып. 19.

$\Rightarrow \frac{f(x)}{f(1)} = \sigma(x)$. Это мон. $a := \frac{1}{f(1)} > 0$, монотонно

Тверждение 1. $T(x)_p = a \cdot x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\mu(x)}$ (7)

$$n! = n(n-1)! = n \mu(n) = a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\mu(n)}$$

Gregorine 1. $n! = a \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\mu(n)}$ (8)

II. По формуле ограничить μ .

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} = \frac{1}{2} (\ln(1+y) - \ln(1-y)) = \frac{1}{2} \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \dots \right)$$

$$= \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \dots \right) = y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \dots, |y| < 1$$

$$y = \frac{1}{2x+1}, x > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2x+1}}{1 - \frac{1}{2x+1}} = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \frac{1}{5(2x+1)^5} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{2x+2}{2x} = \dots$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^3 (x + \frac{1}{2})^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 (x + \frac{1}{2})^5} + \dots$$

$$(x + \frac{1}{2}) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3 (x + \frac{1}{2})^2} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 (x + \frac{1}{2})^4} + \dots$$

$$g(x) = \frac{1}{3(2x+1)^2} + \frac{1}{5(2x+1)^4} + \dots$$

$$0 < g(x) < \frac{1}{3(2x+1)^2} \left[\left(\frac{1}{2x+1} \right)^2 + \left(\frac{1}{2x+1} \right)^4 + \dots \right]$$

$$= \frac{1}{3(2x+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2x+1)^2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2x \cdot (2x+2)} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\Rightarrow 0 < \mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(x+n) < \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{1}{12x}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \dots$$

Вывод: $0 < \mu(x) < \frac{1}{12x}$

Примечание. Известно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \mu(x) = 0$, $\theta \in (0, 1) \dots (3)$
 $\{ \theta = \theta(x) \}$

III. а.з.?

Примечание! Теорема: $a \sim \sqrt{2n}$
 $a \sim \sqrt{2n} \dots (10)$