$$\begin{pmatrix} 2i & -1 & -1 \\ 1 & 2i & 0 \\ 3 & 0 & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x^{(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 2i & -2i \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 + ic_3 \\ c_2 - ic_3 \end{pmatrix}$$

$$x_0^{(t)} = c_1 \cdot e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c_2 + i c_3)\, e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$+ (c_2 - i c_3)\, e^{(1-2i)t} \cdot \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$e^{t} \cdot (\cos 2t + i \sin 2t) = e^{(1+2i)t}$$

~~$x(t) =$~~

$$x(t) = c_1 \cdot e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\mathrm{Re}\left[(c_2 + i c_3)\, e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{базис в } M \\ \varphi^1(t), \dots \varphi^n(t)\end{array}\right) \text{ ФСР}$$

$$(\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n) = \Phi$$

фундаментална матрица

$$\dot{x} = Ax$$

$$e^{At} = \Phi$$

Всяко решение $\varphi(t) \in M$

$$\varphi = \sum c_j \varphi^j(t)$$

$$e^{At} c$$

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi(t) = \Phi(t) c$$

$W = \det \Phi$

Вронскиан

детерминанта на Вронски

$\varphi^1, \dots, \varphi^n$ - решения

$$W = |\varphi^1, \dots \varphi^n|$$

Търсим решение на НХ
във вида

$$x(t) = \varphi(t)c(t),$$ където

$c(t)$ е неизвестна в-р ф-я

$$\dot{x} = \cancel{\dot{\varphi} c} + \dot{\varphi}(t)c(t) + \varphi(t)\dot{c}(t)$$

$\dot{\varphi}$ удовлетворява

$$\dot{\varphi} = A(t)\varphi$$

$$\dot{\varphi}(t)c(t) + \varphi(t)\dot{c}(t) =$$

$$= A(t)\varphi(t)c(t) + f(t)$$

$$\underline{A(t)\varphi(t)c(t)} + \varphi(t)\dot{c} = \underline{A(t)\varphi(t)c} + f$$

$$\varphi(t)\dot{c} = f(t)$$

$$\dot{c}(t) = \varphi^{-1}(t)f(t)$$

1) Характ. у-е

Лема $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -a_n & & & -\lambda - a_1 \end{vmatrix}$$

$n = 1$

$\lambda + a_1 \lambda = 0$

$\lambda + a_1 = 0$

$n = 2$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_2 & -\lambda - a_1 \end{vmatrix} = -\lambda(-a_1 - \lambda) + a_2 =$$
$$= \lambda^2 + \lambda a_1 + a_2 = 0$$

ММИ $n = k$ $\Rightarrow$

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

$n \overset{?}{=} k + 1$

$S_k = (-1)^k (\lambda^k + \dots)$

$= \frac{1}{4} x\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x + i\left(-\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{1}{4}x\sin x\right)$

Нашето частно решение (това,

$$y'' + y = xe^{ix} = x\cos x + \underbrace{ix\sin x}$$

което ни трябва)

$$y_1(x) = \operatorname{Im}(\tilde{y}) = \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{1}{4}x\sin x$$

понеже истинската дясна страна

$$x\cdot\sin x = \operatorname{Im} xe^{ix}$$

Общо реално решение

$$y(x) = y_h + y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x^2}{4}\sin x + \frac{1}{4}x\sin x$$

зад. от листчето

$$y'' - 4y' + 5y = 2e^{2x}\cos x$$

Намерете общото реално решение:

1) $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

$D = 16 - 20 = -4$

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm i\sqrt{2}2}{2} \to 2+i, \; 2-i$$