

Фихтенгольц - 3 (Бадев)
Гай, Лашко, Барчук, Калаша - МА 1, 2
МА за физику

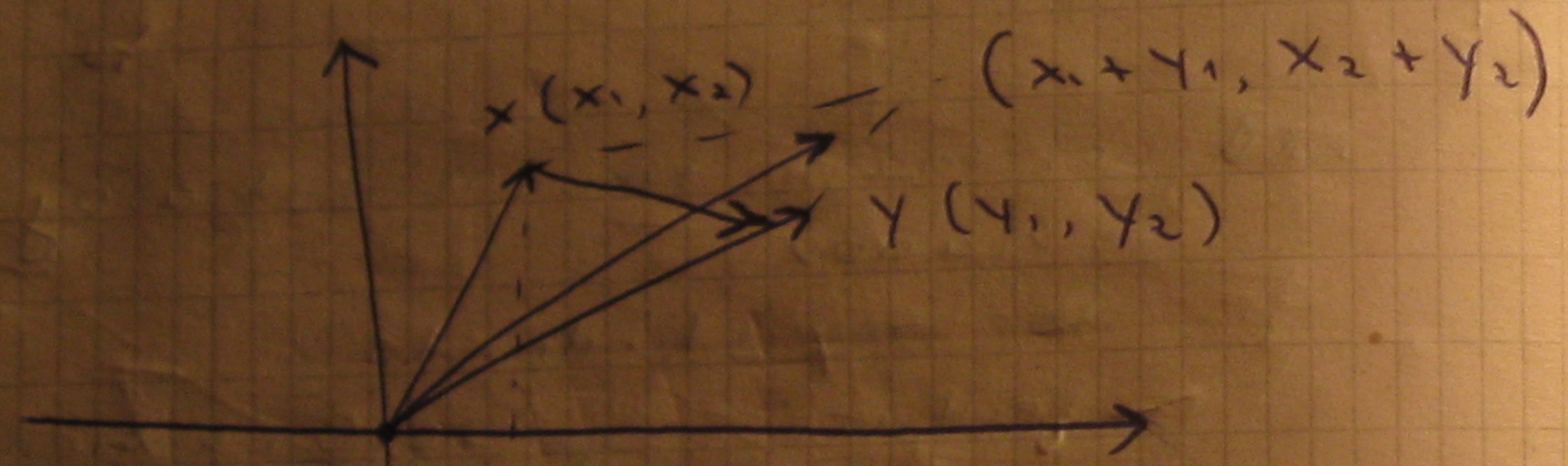
$$\mathbb{R}^n \quad \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \quad i=1, 2, \dots, n\}$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$



мн. п-во

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

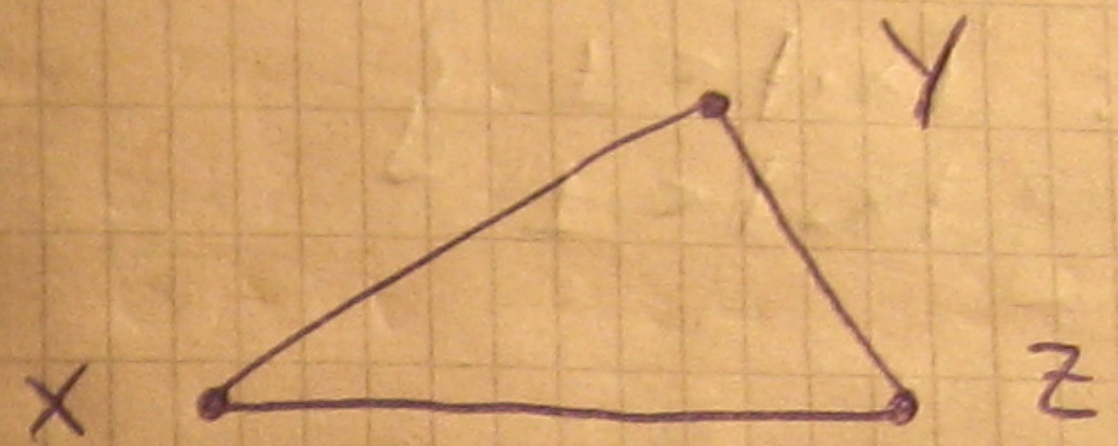
$$d(x, y) = \|x - y\|$$

$$0\text{-}0\text{-}ев \text{ в-р} = (0, \dots, 0)$$

Свойства:

Норма

- 1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \in \mathbb{R}$
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$



нер. Δ

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) - (y - z)\| \leq$$

$$\leq \|x - z\| + \|y - z\| = d(x, z) + d(y, z)$$

$$\|x\|_\infty = \max \{ |x_i| : i=1, 2, \dots, n \}$$

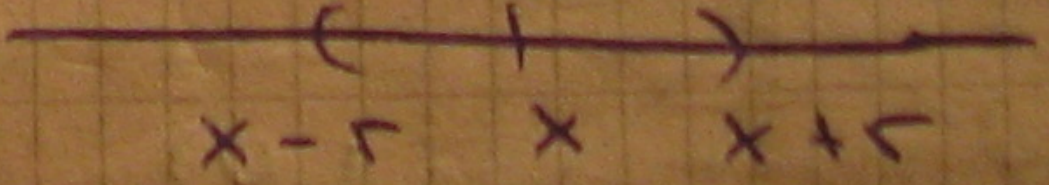
$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| : x \in [a, b] \}$$

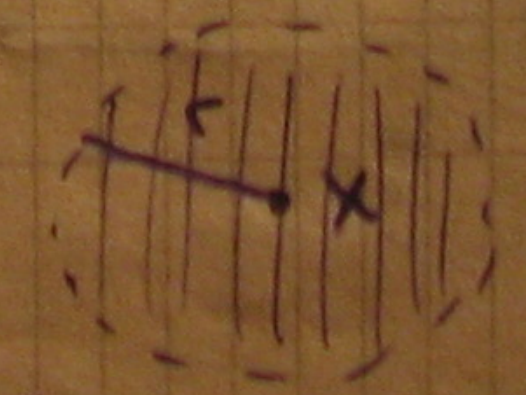
$$B_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r \}$$

$$\bar{B}_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r \}$$

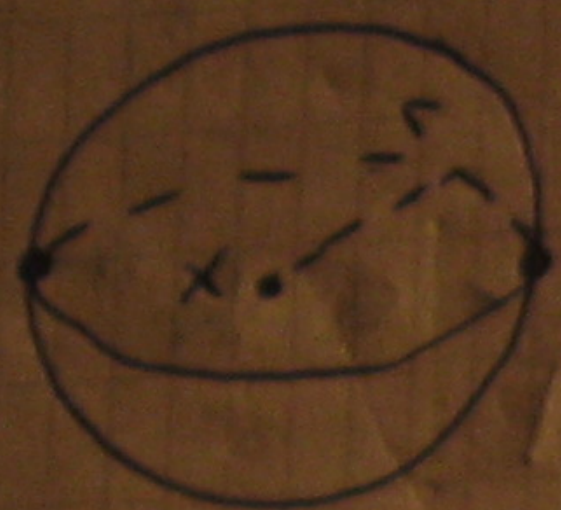
$n=1$



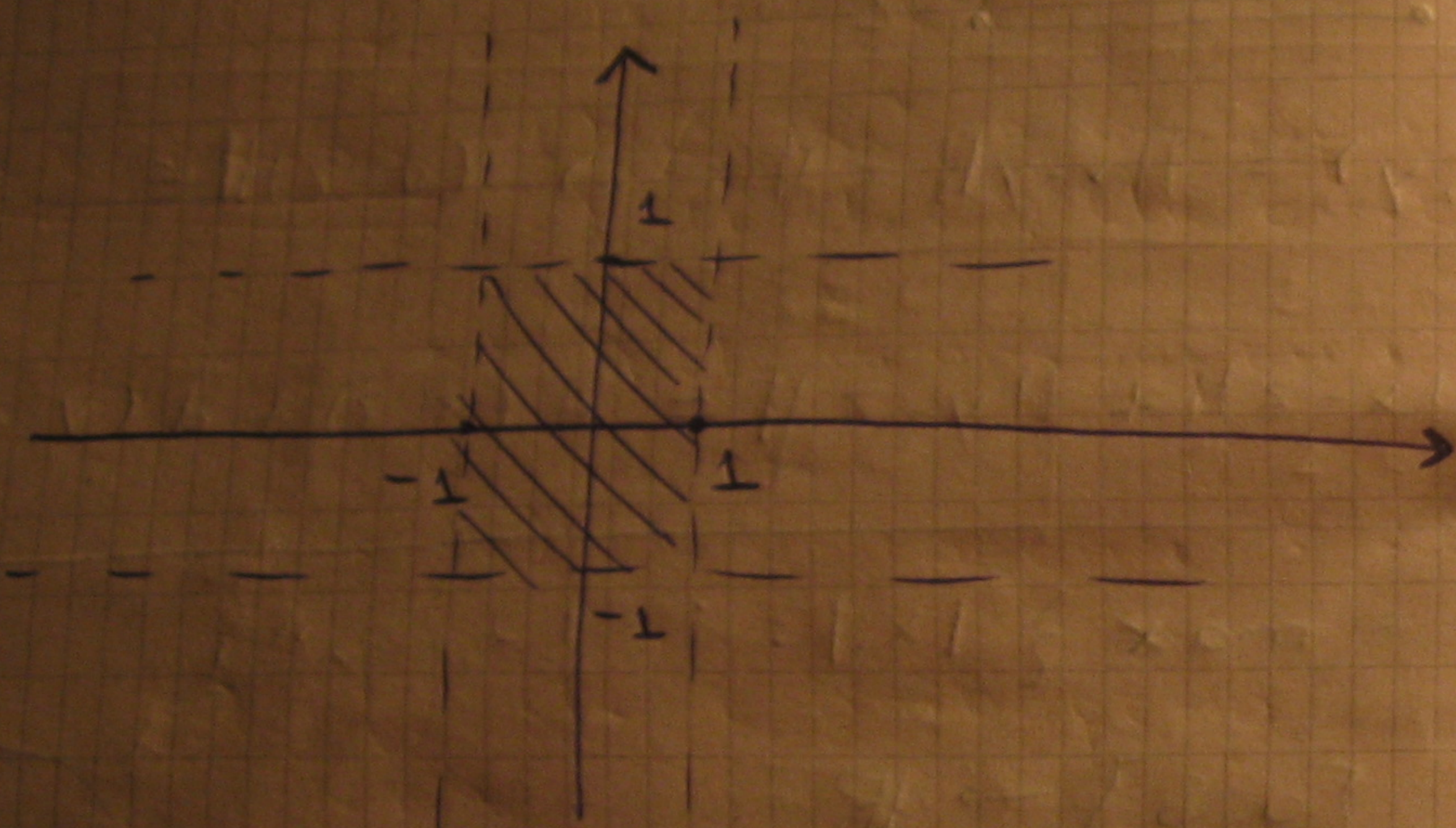
$n=2$



$$n=3$$



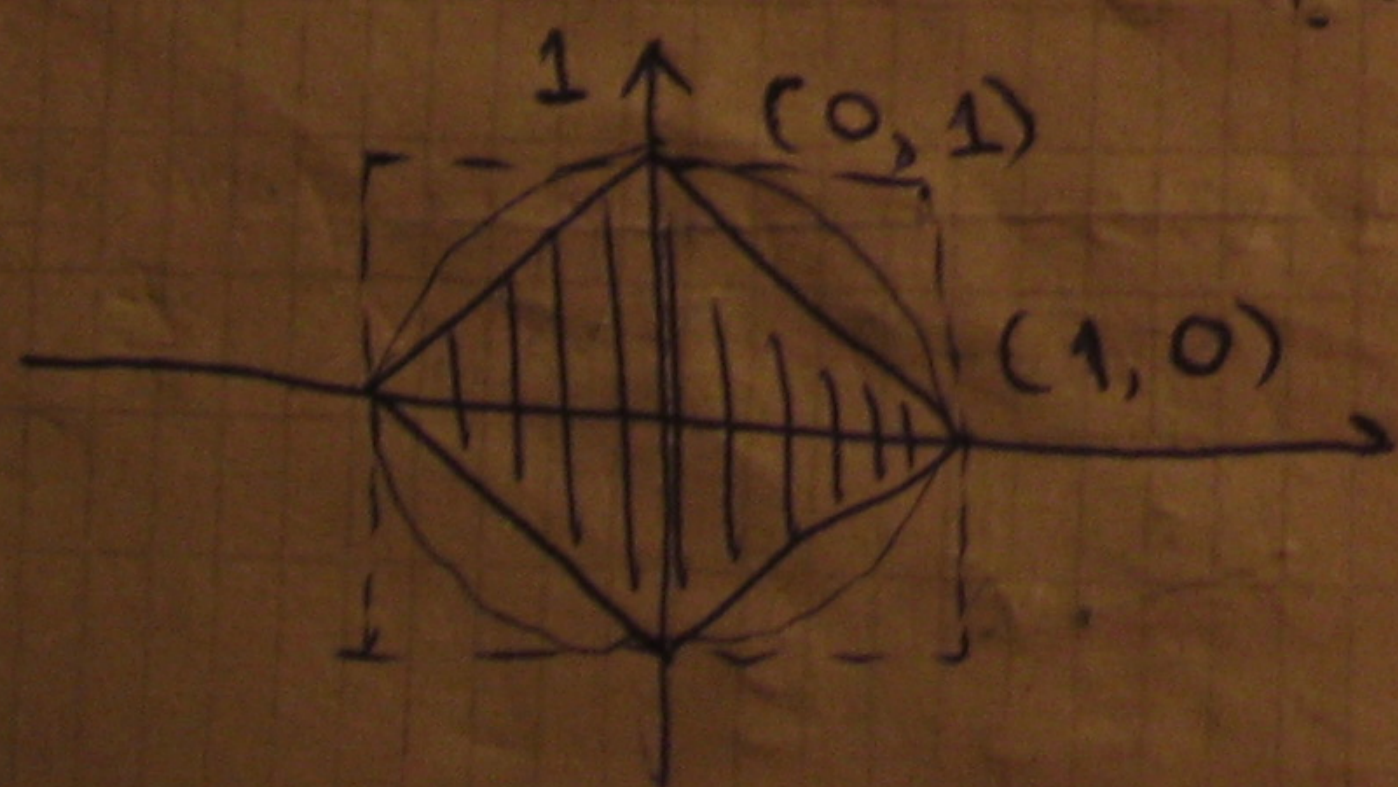
$$B_1(0) = \{ (x_1, x_2) : |x_1| < 1, |x_2| < 1 \}$$



$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$p \geq 1 \quad p\text{-норма}$$

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$$



изпълнява
аксиомите
за норма
чер. Минковски

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\cos \alpha(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Коши-Буняковски-Шварц

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q$$

$$p > 1 \\ q > 1$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Топология в $\mathbb{R}^n$

1) Отворено множество
 $U \subset \mathbb{R}^n$



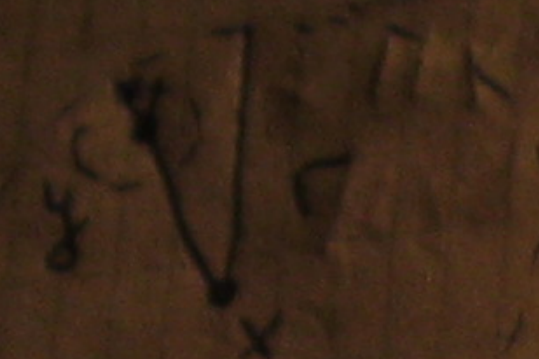
U е отворено, ако $\forall x \in U \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subset U$

1) Отворените кълба са от $\mathcal{B}$ множества

$$\varepsilon = r - \|x - y\|$$

Дом.

① нер. Δ съдържа се изцяло



$$2) \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) > 0\}$$

g непрек.

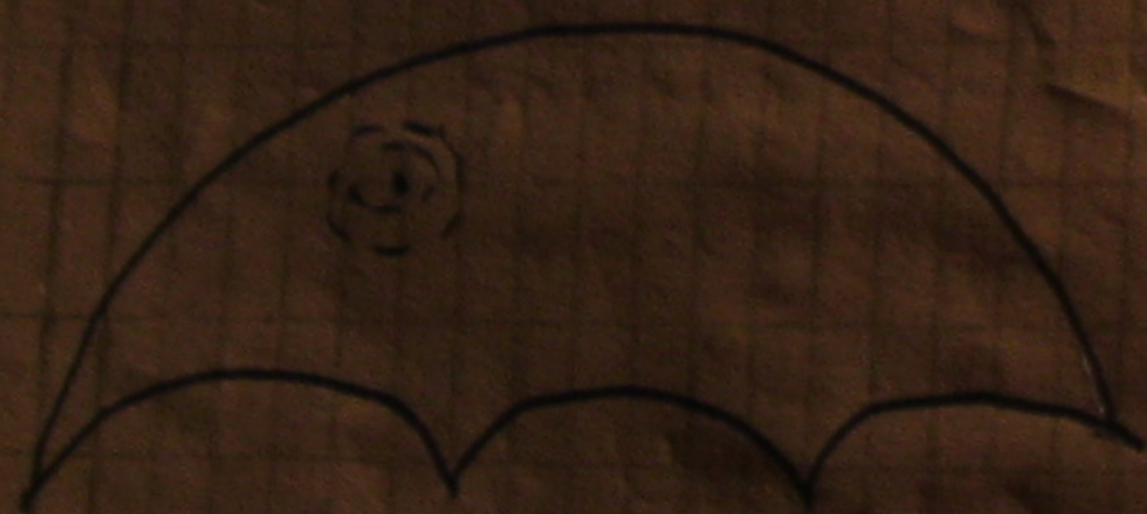
Свойства: 1) $\emptyset, \mathbb{R}^n$ са отворени
2) $U_1, U_2, \dots, U_k$ отворени

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^k U_i$ са отворени

3) U_α отворени $\forall \alpha \in A$

$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ е отворено

$$S \subset \mathbb{R}^n$$



$U \subset S$ се нарича релативно отворено в S , ако $\exists V$ отворено в $\mathbb{R}^n$, такова че $U = S \cap V$

$$T8. S \subset \mathbb{R}^n, U \subset S$$

U е релативно отворено в S

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon > 0 B_\varepsilon(x) \cap S \subset U$$

$$\Rightarrow U = S \cap V, V \text{ отворено в } \mathbb{R}^n$$

$$x \in U \subset V \text{ отворено} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subset V$$

$$B_\varepsilon(x) \cap S \subset V \cap S = U$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in U \exists \varepsilon_x > 0, B_{\varepsilon_x}(x) \cap S \subset U$$

$$\bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) = V \text{ отворено в } \mathbb{R}^n$$

$$\bigcup_{x \in U} V \cap S = \left(\bigcup_{x \in U} B_{\varepsilon_x}(x) \right) \cap S =$$

$$= \bigcup_{x \in U} (B_{\varepsilon_x}(x) \cap S) \subset U$$

$$x \in U$$

$$\Rightarrow x \in U \Rightarrow x \in B_{\varepsilon_x}(x) \Rightarrow x \in V \cap S$$

$$\Rightarrow U \subset V \cap S$$

2) Затворени множества в $\mathbb{R}^n$

$F \subset \mathbb{R}^n$ се нарича затворено, ако $\mathbb{R}^n \setminus F$ е отворено

сходящи редици

1) 3) Затворена обвивка най-малко
затв. 0

$$\bar{A} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\bar{A} = \bigcap F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \{x_m\}_{m=1, \infty} \right.$$

F затворено
 $F \supset A$

$x_m \rightarrow x$

2) 4) Контур $A \subset \mathbb{R}^n$
 $\partial A = \bar{A} \cap \mathbb{R}^n \setminus A$

средищата
A и извън A

5) Компактност
 $K \subset \mathbb{R}^n$

K-компакт

$\Leftrightarrow$

Кограничено и затворено

$\Leftrightarrow$

$$\forall \{x_n\}_{n=1, \infty} \subset K \exists x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0 \in K$$

$\Leftrightarrow$

$\forall$ отворено покритие има
крайно подпокритие

$$\forall \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

$$U_\alpha \supset K \quad \forall \alpha \in A$$

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \supset K$$

$$\exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \in A$$

$$\bigcup_{i=1}^k U_{\alpha_i} \supset K$$

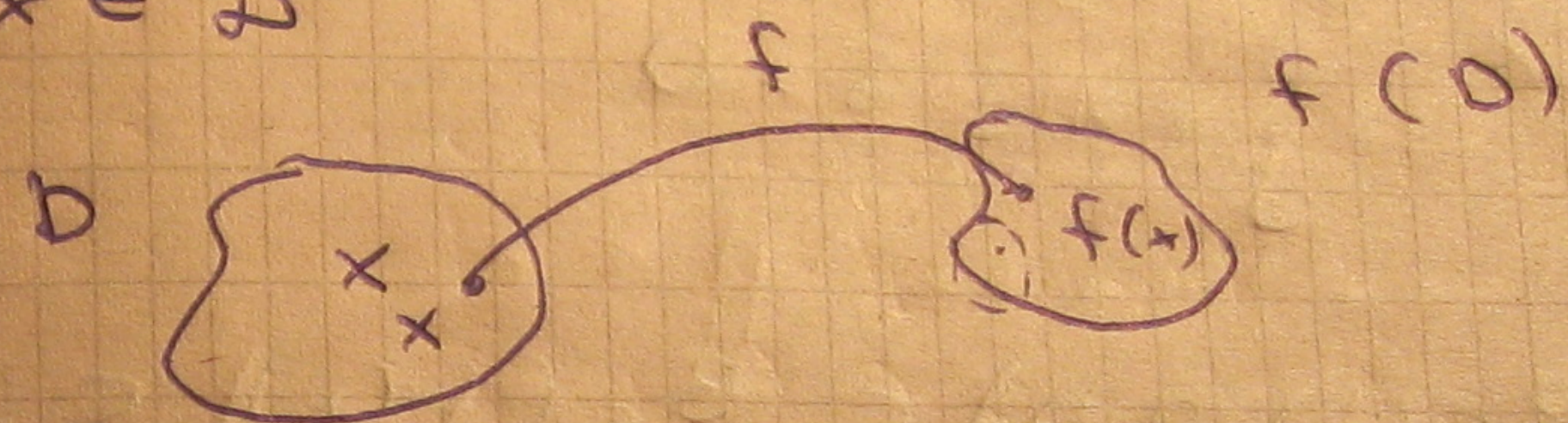
Непрекъснати
функции

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$D \subset \mathbb{R}^n$$

f непрекъсната в D

$$\forall x \in D$$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x' \in D$$

$$\|x' - x\| < \delta:$$

$$\|f(x') - f(x)\| < \varepsilon$$

$$\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad f(B_\delta(x) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(x)).$$

Тв. $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k, D \subset \mathbb{R}^n$
f непрекъсната в D $(\Leftrightarrow) \forall U$ отк.
в $\mathbb{R}^k$:

$f^{-1}(U)$ е

релативно отворено
в D

$$f: D \rightarrow Y$$

$$f^{-1}(A) = \{x \in D : f(x) \in A\}$$

$$\Rightarrow U \text{ отк.} \quad f^{-1}(U) \text{ рел.-отк. в } D \Leftrightarrow \forall x \in f^{-1}(U) \exists \delta > 0$$

$$\underline{B_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(u)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x \in f^{-1}(u) \\ f(x) \in u \\ u \text{ отворено} \end{array} \right\}$$

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B_\varepsilon(f(x)) \subset u$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ непр. в } x \\ \varepsilon > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \delta > 0$$

$$f(B_\delta(x) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subset u$$

$\forall \varepsilon$ е в първообраза на u

$$\Rightarrow B_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(u)$$

$$(\Leftarrow \begin{array}{l} x \in D \\ \varepsilon > 0 \end{array})$$

$$u = B_\varepsilon(f(x)) \text{ отворено}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(u) = f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \text{ е рел. отв. в } D$$

$$f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \text{ е рел. отв. в } D$$

$$x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0, \quad B_\delta(x) \cap D \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$$

$$f(B_\delta(x) \cap D) \subset B_\varepsilon(f(x))$$

Th Вайерштрас

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$D \subset \mathbb{R}^n$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ непрекъсната} \\ D \text{ компактен} \end{array} \right\} f(D) \text{ е компактен}$$

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f([a, b]) \text{ компактен в } \mathbb{R}$$

Iн. с покритие

IIн. с редици

$$\{y_m\}_{m=1}^\infty \subset f(D)$$

$$y_m \in f(D) \Rightarrow \exists x_m \in D, \quad f(x_m) = y_m$$

$$\left. \begin{array}{l} \{x_m\}_{m=1}^\infty \subset D \\ D \text{ компактен} \end{array} \right\} \exists \text{ сходяща редица } \rightarrow D$$

$$x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_0 \in D$$

$$\Rightarrow f(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x_0)$$

$$y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x_0) \in f(D)$$

Th Кантор

Def.

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^k, D \subset \mathbb{R}^n$$

f е равномерно непрекъснатата
 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' \in D$
 $\|x' - x''\| < \delta:$

$$\|f(x') - f(x'')\| < \epsilon$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$D \subset \mathbb{R}^n$$

$$K \subset D$$

компакт

f непрекъснатата $\forall$ точка на K

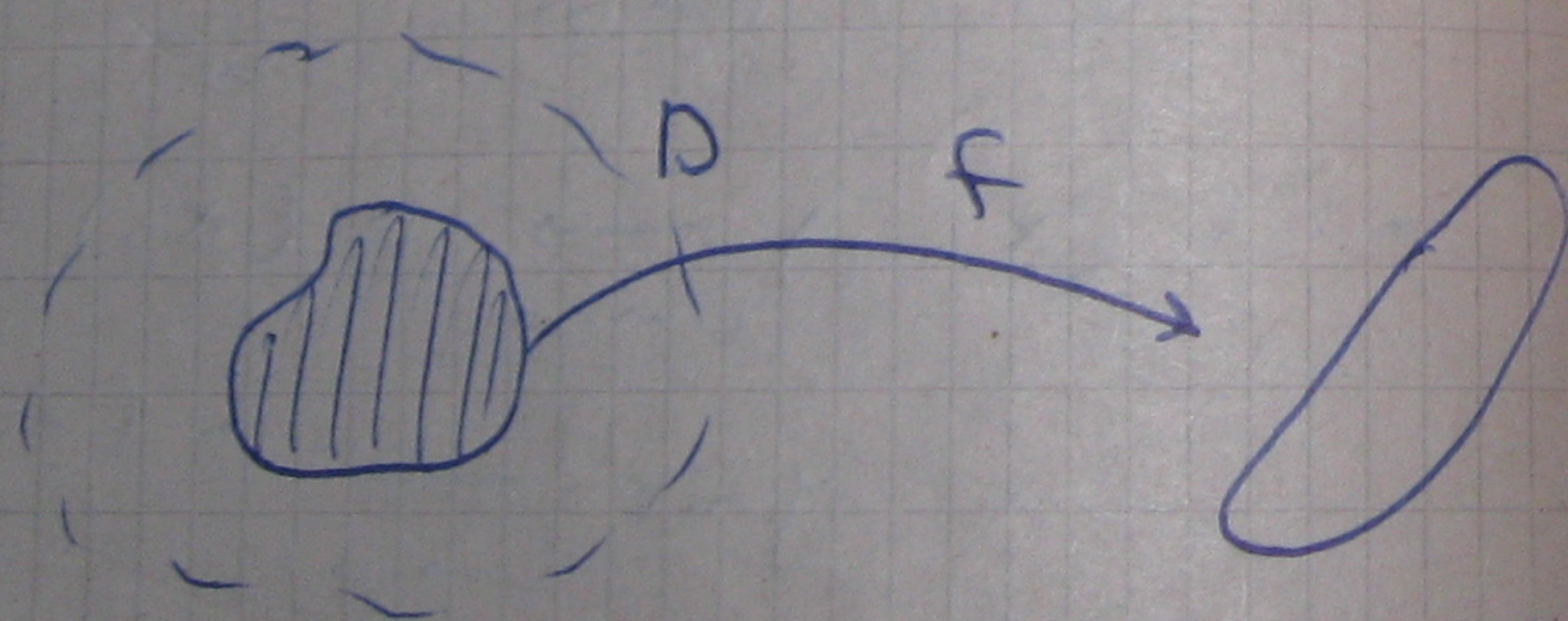
Тогава

за $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in K$
 $\forall x'' \in D$

$$\|x' - x''\| < \delta:$$

$$\|f(x') - f(x'')\| < \epsilon$$

D-во.



Доп. противното

$\exists \epsilon > 0$, за което за $\forall \delta > 0$

$$\forall x' \in K$$

$$x'' \in D$$

$$\|x' - x''\| < \delta:$$

$$\|f(x') - f(x'')\| > \epsilon$$

$$\delta = 1$$

$$\delta = \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$\delta = \frac{1}{n}$$

$$\rightarrow x'_n \in K$$

$$x''_n \in D$$

$$\|x'_n - x''_n\| < \frac{1}{n}$$

$$\|f(x'_n) - f(x''_n)\| > \epsilon$$

$$\{x'_n\} \subset K$$

$$\{x''_n\} \subset D$$

(K е компакт)

$$x'_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \in K$$

$$\|x''_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0\| \stackrel{\text{нер. } \Delta}{\leq} \|x''_n - x'_n\| + \|x'_n - x_0\|$$

$$< \frac{1}{n} + \|x'_n - x_0\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow x_m'' \xrightarrow{l \rightarrow \infty} x_0$$

2) ϕ

f — непрерыв.
по Хайне

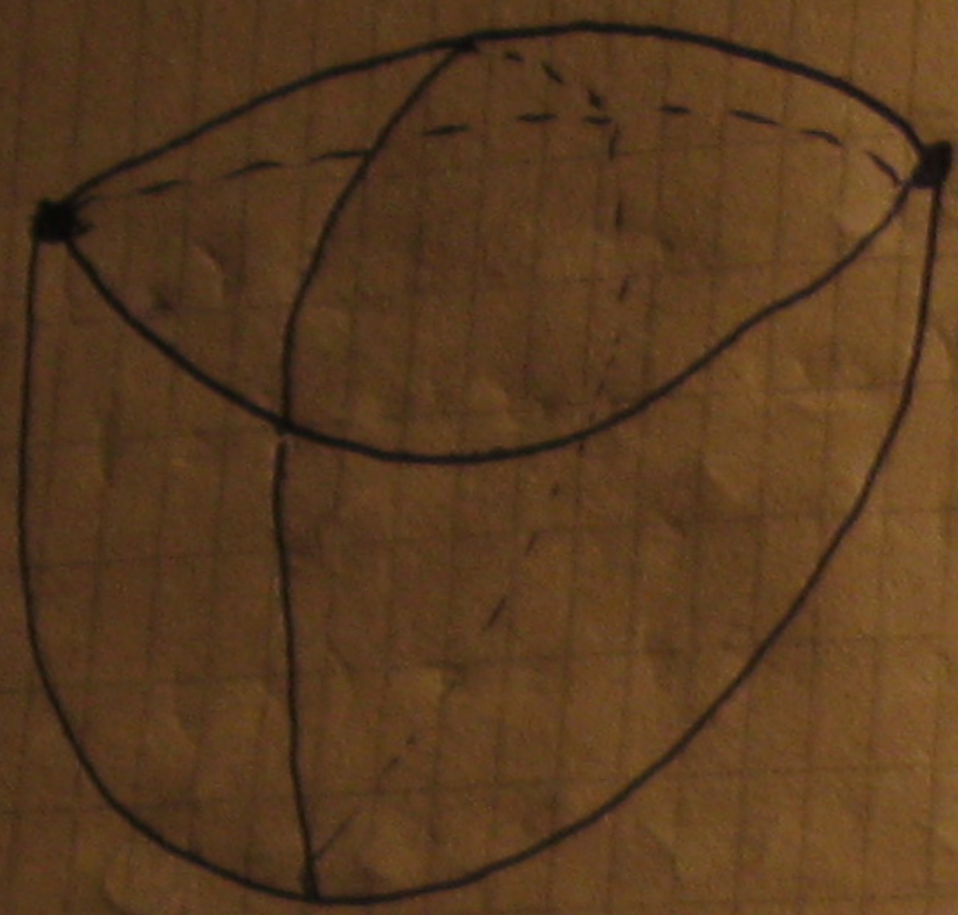
непр. в x_0

$$\Rightarrow f(x_m') \xrightarrow{l \rightarrow \infty} f(x_0)$$

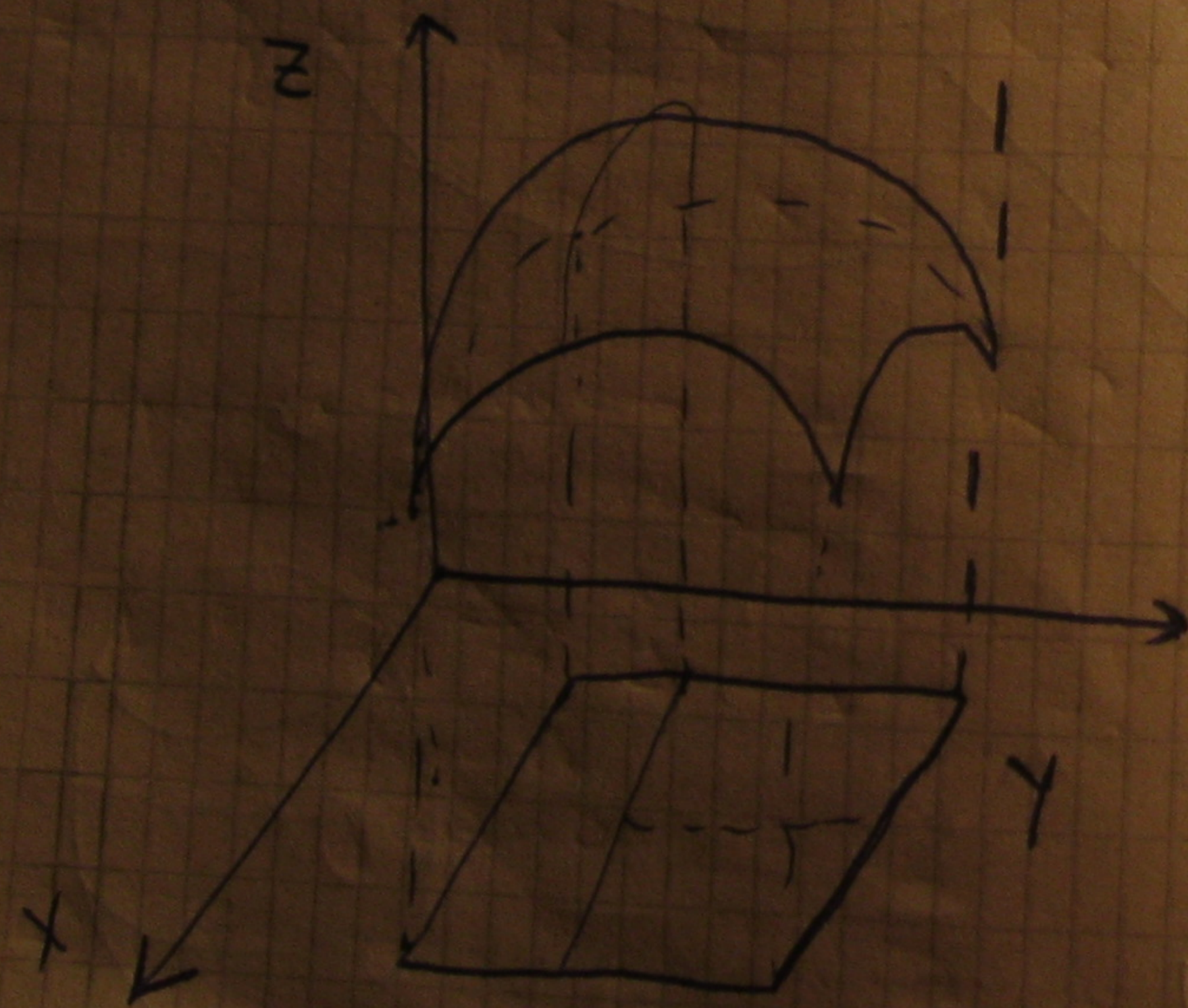
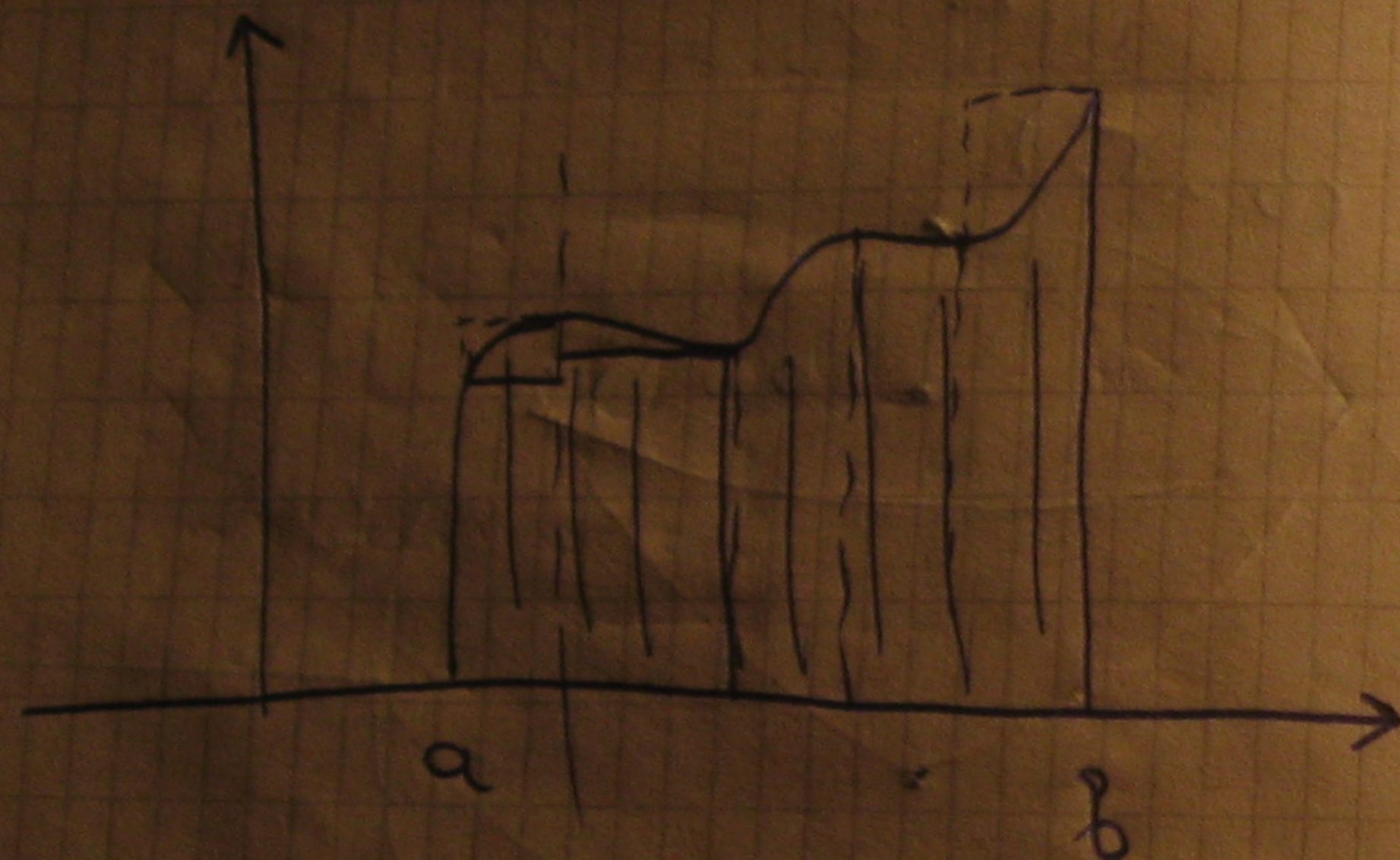
$$f(x_m'') \xrightarrow{l \rightarrow \infty} f(x_0)$$

$$f(x_m') - f(x_m'') \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \|f(x_m') - f(x_m'')\| \rightarrow 0 \quad x_0$$



Παράδειγμα

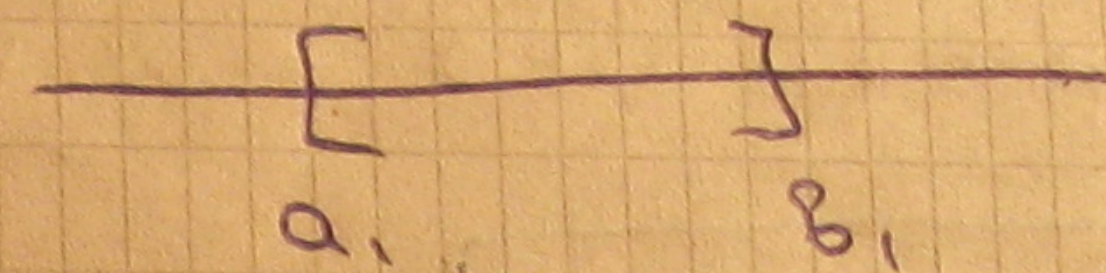


παράδειγμα
σε $\mathbb{R}^n$

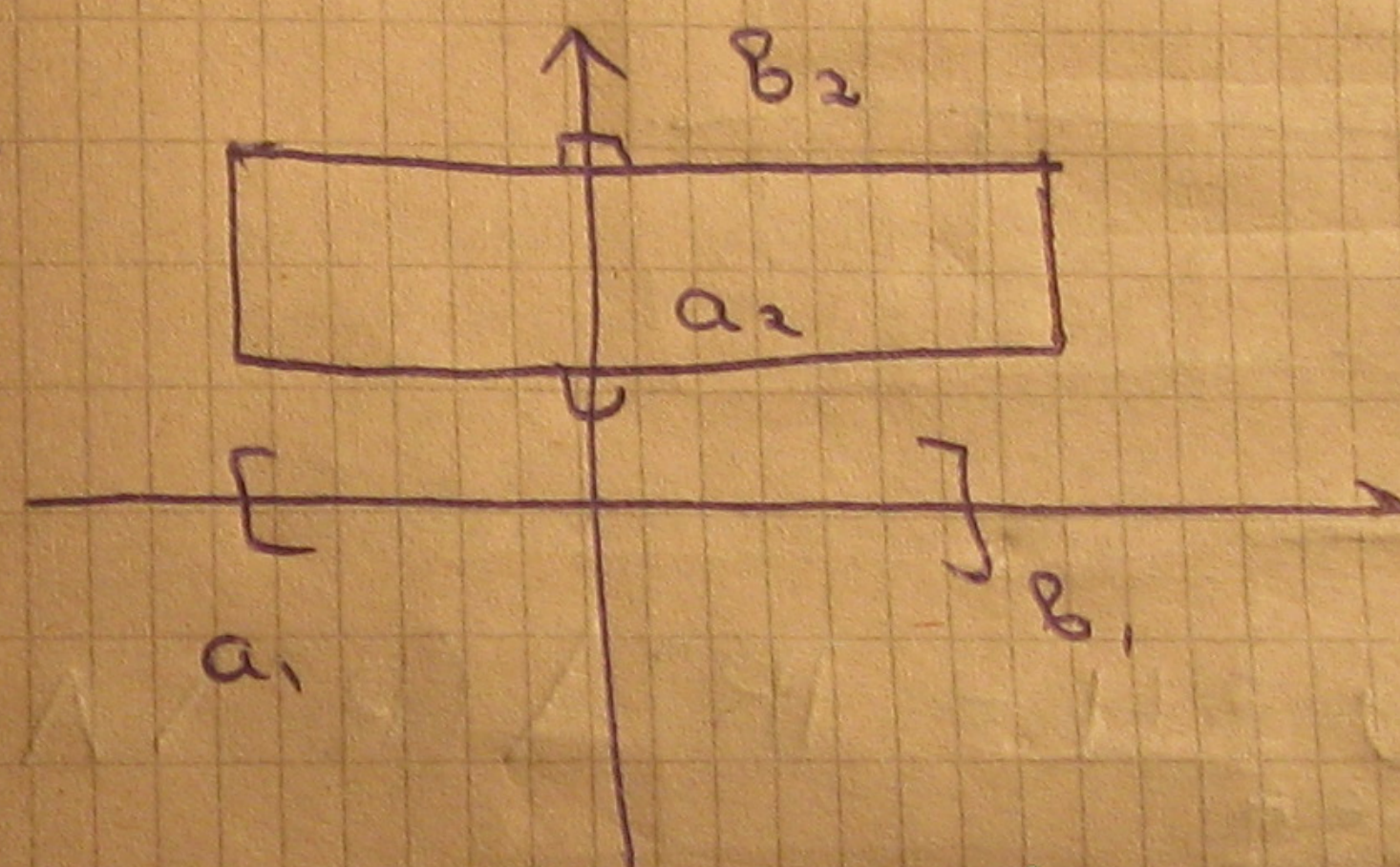
Παράδειγμα

$$\Delta = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, 2, \dots, n \right\}$$

$n=1$

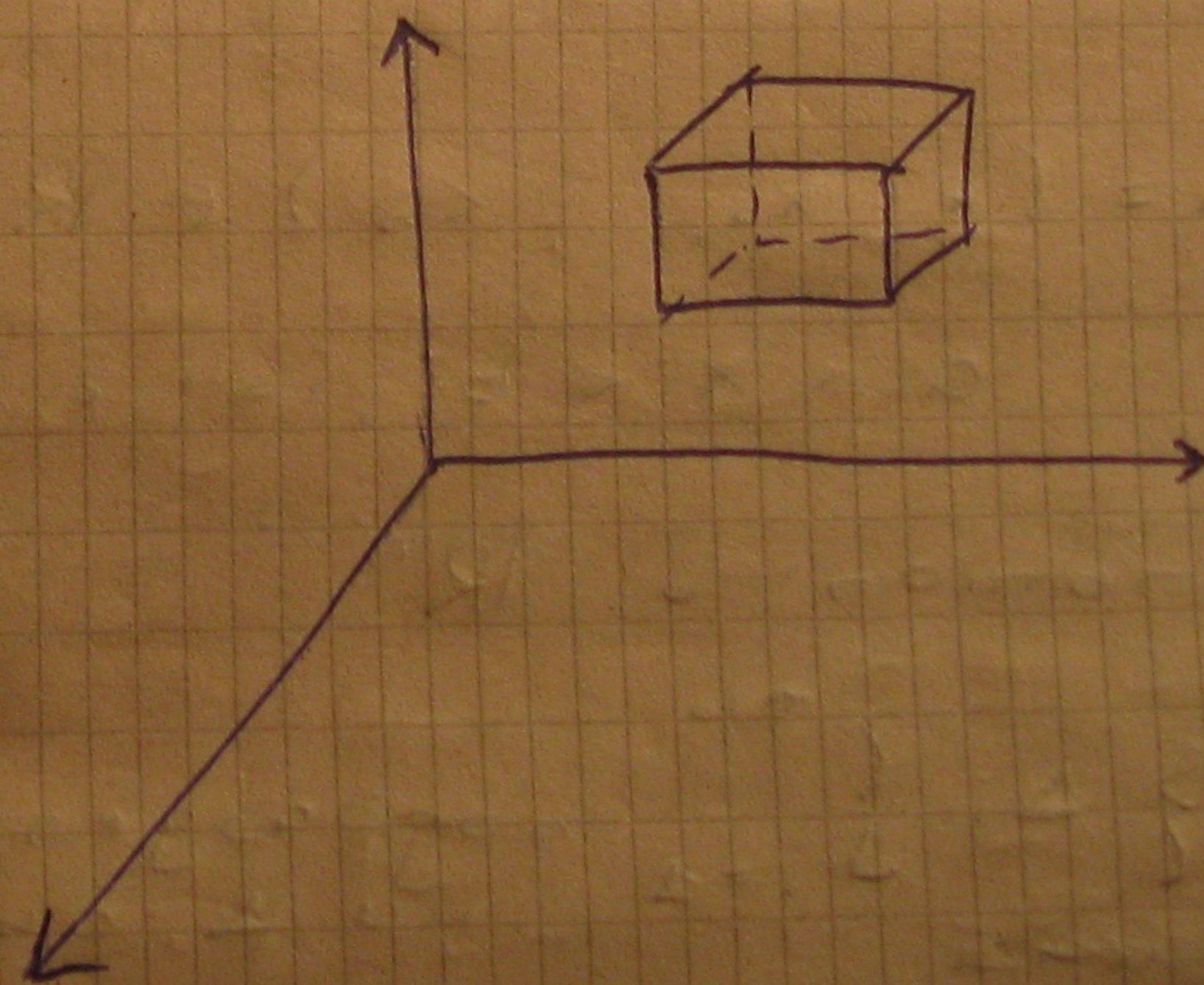


$n=2$



$n=2$

$n=3$



$n=3$

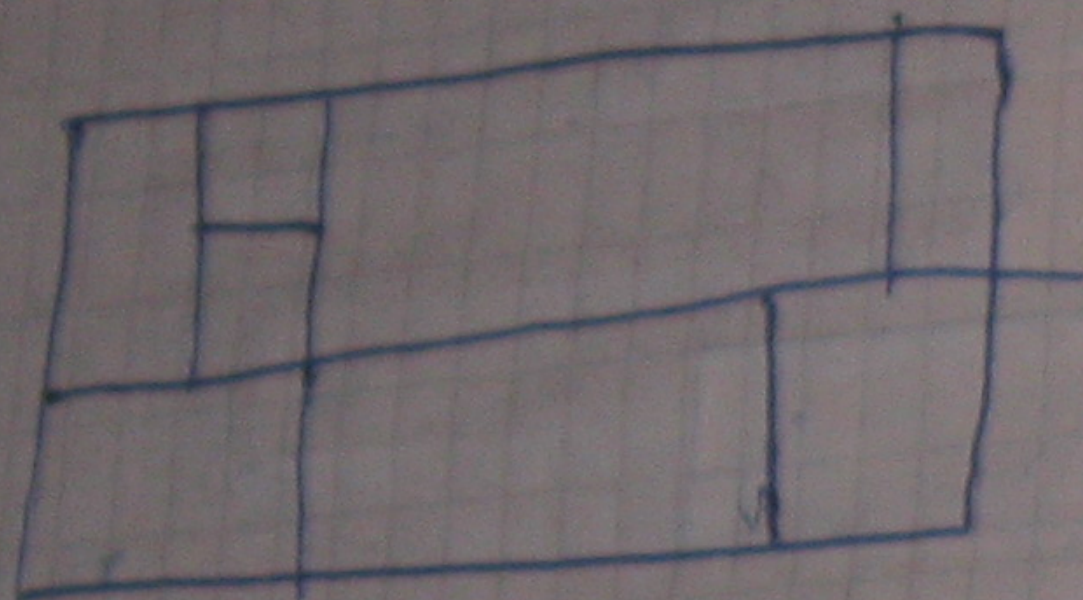
μ_n

n -μερής μήκος

$n=1$ μήκος
 $n=2$ επιφάνεια
 $n=3$ όγκος

$$\mu_n(\Delta) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad \text{όγκος}$$

$$\begin{aligned}\mu_1(\Delta) &= b_1 - a_1 \\ \mu_2(\Delta) &= (b_2 - a_2)(b_1 - a_1) \\ \mu_n(\Delta) &= (b_1 - a_1) \dots (b_n - a_n)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}A^\circ &\subset \mathbb{R}^n \\ A^\circ &= \bigcup_{\substack{U \in \mathcal{A} \\ U \subset A}} U \\ &\text{внутренность} \\ &\text{наиб. большого отв. } O \text{ в } A\end{aligned}$$

$$\Delta^\circ = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{aligned} &a_i < x_i < b_i, i=1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\}$$

Δ параллелограмм в $\mathbb{R}^n$

$$\Pi = \left\{ \Delta_i \right\}_{i=1}^{i_0} \text{ погрязделение на } \Delta, \text{ ако}$$

~~крайно~~
крайно

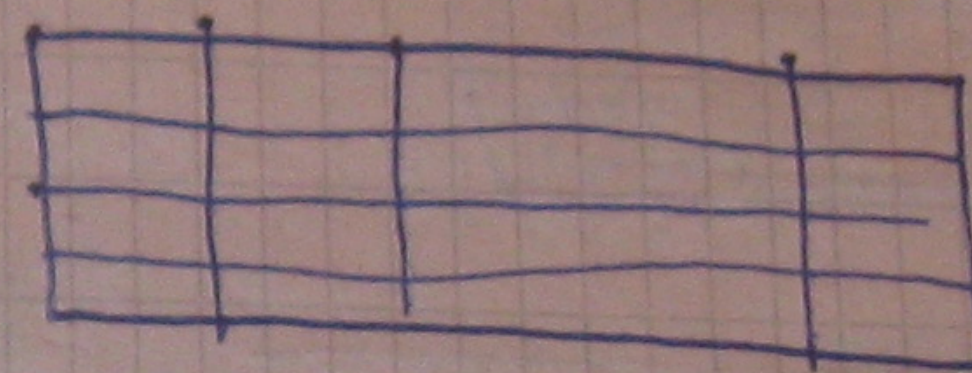
- ① Δ_i параллелограмм в $\mathbb{R}^n$ $i=1, 2, \dots, i_0$
- ② $\bigcup_{i=1}^{i_0} \Delta_i = \Delta$
- ③ $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

Т8. Δ параллелограмм в $\mathbb{R}^n$ и

$$\Pi = \left\{ \Delta_i \right\}_{i=1}^{i_0} \text{ погрязделение на } \Delta$$

$$\Rightarrow \mu_n(\Delta) = \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i)$$

Док. за $n=2$



правильно погрязделение

ср. правильно погрязделение

$$\Delta = [a, b] \times [c, d]$$

$$\begin{aligned}a &= x_0 < x_1 < \dots < x_m = b \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_k = d\end{aligned}$$

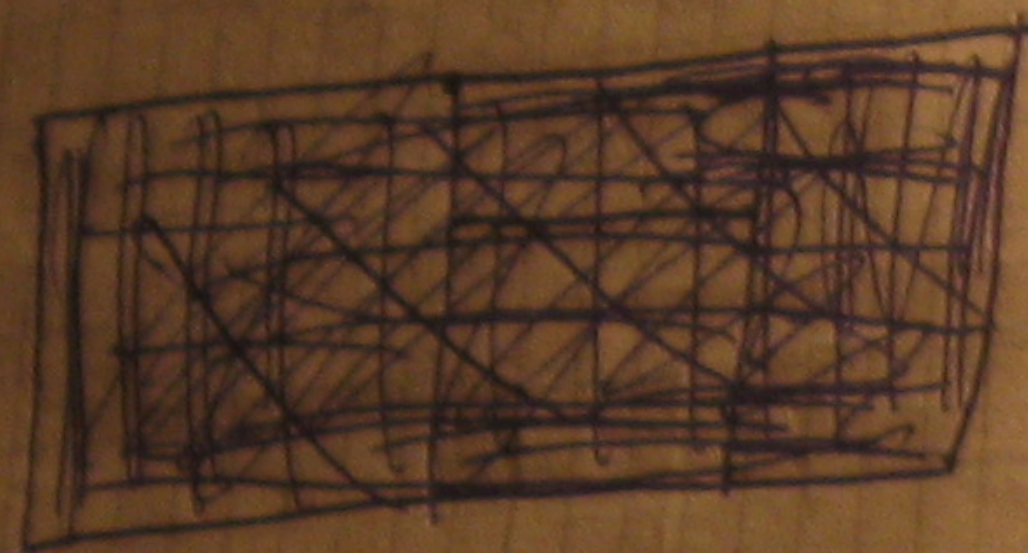
$$\Pi = \left\{ \Delta_{ij} \right\}_{i=1}^m \left\{ j=1 \right\}^k, \Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \mu_2(\Delta_{ij}) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) \sum_{j=1}^k (y_j - y_{j-1})\end{aligned}$$

$$= (d-a) \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= (d-a)(b-a) = \mu_2(\Delta)$$

Π со. не е правилно подразделение



представяване
в хор. и верт.
мичи

Препоръчват се
крайната сума

$$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

f

$\Delta \subset \mathbb{R}^n$, ограничена
паралелотоп

$$\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{j_0}, \text{ подразделение на } \Delta$$

$$m_i = \inf \{ f(x) : x \in \Delta_i \}$$

$$M_i = \sup \{ f(x) : x \in \Delta_i \}$$

~~мичи~~

$$S_f(\Pi) = \sum_{i=1}^n m_i \mu_n(\Delta_i)$$

мичи осн. + вис

$$S_f(\Pi) = \sum_{i=1}^n M_i \mu_n(\Delta_i)$$



$$\Pi^* \geq \Pi$$

(Π^* е по-дребно от Π), ако

Π^* се получава от Π чрез
подразделение на някои от
ел. на Π

Лема 1: Ако $\Pi^* \geq \Pi$, то

$$S_f(\Pi^*) \geq S_f(\Pi)$$

$$S_f(\Pi^*) \leq S_f(\Pi)$$

в.о.о.

$$\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{j_0}$$

$$\Pi^* = \{\Delta_i^j\}_{i=1}^{j_0} \cup \{\Delta_i\}_{i=j_0+1}^{j_1}$$

$\{\Delta_i^j\}_{j=1}^{j_1}$ е подр. на Δ_i

МОНАКИ



$$S_f(\pi^*) - S_f(\pi) =$$

$$m_i = \inf_{\Delta_i} f$$

$$m_1 = \inf_{\Delta_1} f$$

$$= \sum_{j=1}^{j_0} m_j^i \mu(\Delta_j^i) + \sum_{j=2}^{j_0} m_i \mu_m(\Delta_j)$$

$$- \sum_{i=1}^{j_0} m_i \mu_m(\Delta_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{j_0} m_j^i \mu(\Delta_j^i) - m_i \mu_m(\Delta_i)$$

$$m_1 \leq m_j^i \text{ за } \forall j$$

$$\forall j=1, 2, \dots$$

$$\left(\sum_{j=1}^{j_0} \mu_m(\Delta_j^i) - \mu_m(\Delta_i) \right) = 0$$

Лема 2 π_1, π_2 подр.

$$\Rightarrow S_f(\pi_1) \leq S_f(\pi_2)$$

правилно

$$\pi^* \geq \pi_1, \pi^* \geq \pi_2$$

Показа

$$S_f(\pi_2) \geq S_f(\pi^*) \geq$$

$$S_f(\pi^*) \geq S_f(\pi_1)$$

$$m_i \geq m_i \quad \forall i=1, \dots, j_0$$

$$\underline{I} = \sup$$

$$\underline{S}_f = \sup_{\Delta} \{ S_f(\pi) : \pi \text{ подр. на } \Delta \}$$

$$\bar{S}_f = \inf_{\Delta} \{ S_f(\pi) : \pi \text{ подр. на } \Delta \}$$

от

Лема 2

$$\underline{S}_f \leq \bar{S}_f$$

$$S_f(\pi_1) \leq S_f(\pi_2) \leq \bar{S}_f \leq \underline{S}_f$$

$$\Rightarrow S_f(\pi_1) \leq \bar{S}_f \quad \forall \pi_1$$

Def.

$$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

f -огр., $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, Δ пол.

f се нарича интегрируема по Риман,

ако

$$\underline{S}_f = \bar{S}_f \text{ и тогава}$$

общата му стойност се нарича
интеграл на f в Δ

$$\int_{\Delta} f$$

$n=2$

$$\int_{\Delta} \int f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$n=3$

$$\int_{\Delta} \int \int f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$$

Критерий за
интегруемост

I форма

интегруема

$$(\Leftrightarrow) \forall \varepsilon > 0 \exists \Pi, n_2$$

$$S_f(\Pi_1) - S_f(\Pi_2) < \varepsilon$$

$$(\Leftrightarrow) \forall \varepsilon > 0 \exists \Pi \text{ подгр.},$$

$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon$$

II форма

f-интегруема

$$(\Leftrightarrow) \forall \varepsilon > 0 \forall \eta > 0$$

$\exists \Pi$ подразбиване,
такова че

$$\sum \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon$$

$$M_i - m_i \geq \eta$$

$$M_i - m_i = \omega_f(\Delta_i) =$$

$$= \sup \{ |f(x) - f(y)| : x \in \Delta_i, y \in \Delta_i \}$$

$$\Rightarrow) \varepsilon > 0$$

$$\eta > 0$$

$$\varepsilon \cdot \eta > 0$$

I форма
f-инт.

$$\Rightarrow \exists \Pi \text{ подгр.},$$

$$S_f(\Pi) - s_f(\Pi) < \varepsilon \cdot \eta$$

$$\varepsilon \cdot \eta > \sum_{i=1}^{i_0} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i) \geq$$

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i) \geq$$

$$\geq \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \eta \cdot \mu_n(\Delta_i) = \eta \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i)$$

$$\Rightarrow) \forall \varepsilon > 0 \forall \eta > 0 \exists \Pi \text{ подгр.}$$

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon$$

$$S_f(\pi) = S_f(\pi) = \sum_{i=1}^{i_0} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i)$$

$$= \sum_{M_i - m_i < \eta} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i) + \sum_{M_i - m_i \geq \eta} (M_i - m_i) \mu_n(\Delta_i)$$

$$< \eta \mu_n(\Delta) + (M - m) \sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i)$$

for $\sup_{\Delta} f = M$
 $\inf_{\Delta} f = m$

$$< \eta \mu_n(\Delta) + (M - m) \varepsilon \leq \delta$$

$$\eta = \frac{\delta}{2 \mu_n(\Delta)}$$

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2(M - m)}$$

$$\pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0} \text{ погряз на } \Delta \text{ на } \mathbb{R}^n$$

$$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Delta_i \rightarrow \xi_i \in \Delta_i$$

$$i=1, 2, \dots, i_0$$

$$\sigma_f(\pi, \xi) = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i) \mu_n(\Delta_i)$$

$$\sigma_f(\pi, \xi) \leq S_f(\pi)$$

$$\forall S_f(\pi)$$

$$S_f(\pi) \leq \sigma_f(\pi, \xi) \leq S_f(\pi)$$

$$S_f(\pi) = \sup \{ \sigma_f(\pi, \xi) :$$

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{i_0}) : \xi_i \in \Delta_i \}$$

$$S_f(\pi) = \inf \{ \sigma_f(\pi, \xi) :$$

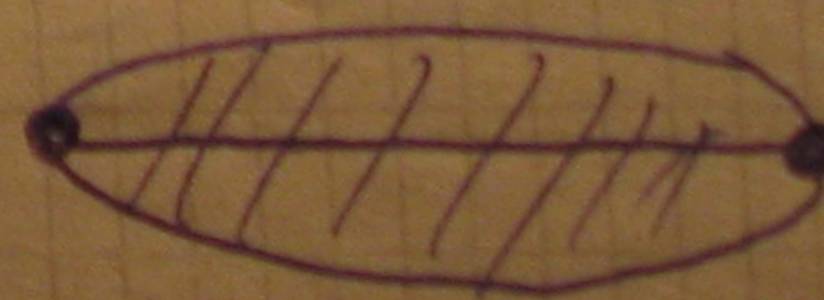
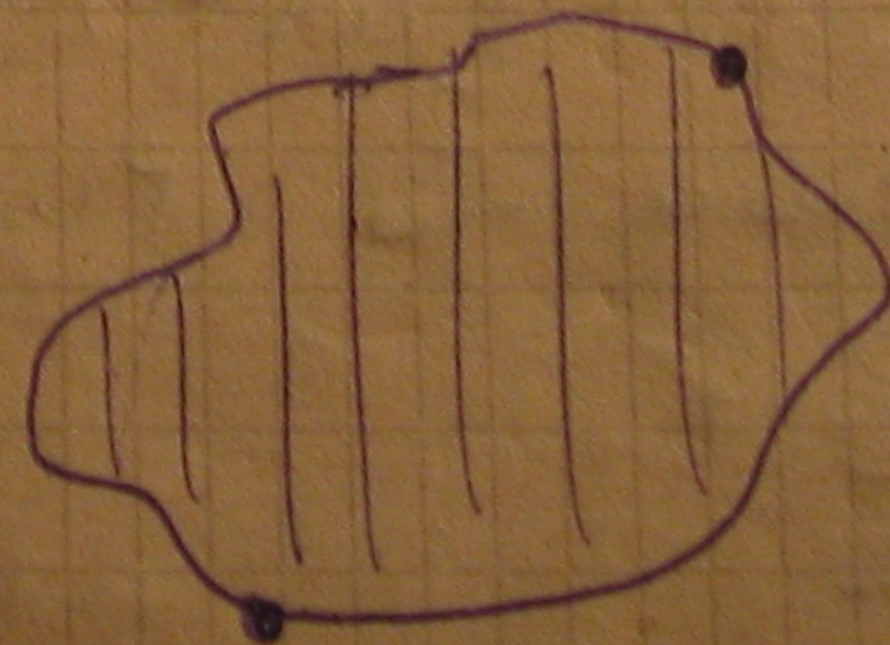
$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{i_0}) : \xi_i \in \Delta_i \}$$

Def.

Диаметър на погрязването :

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$$\text{diam } A = \sup \{ \|x - y\| : x \in A, y \in A \}$$



$$d(\pi) = \max \{ \text{diam } \Delta_i : i=1, \dots, i_0 \}$$

Def.

Казваме, че сумите на Риман за f имат граница I и пишем

$$\lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \sigma_f(\pi, \xi) = I, \text{ ако за } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$$

$\forall \pi$ подразбиране, $d(\pi) < \delta$

$\forall \xi$ предст. точки за π :

$$|\sigma_f(\pi, \xi) - I| < \varepsilon$$

Th 1: $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ огр. Δ пар. в $\mathbb{R}^n$

Ако f е интегрируема по Риман, ~~както~~ то $\lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \sigma_f(\pi, \xi)$ съществува и е равна на $\int_{\Delta} f$.

Th 2: $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ пар. в $\mathbb{R}^n$

Ако $\exists$ същ. $\lim_{d(\pi) \rightarrow 0} \sigma_f(\pi, \xi) = I$, то f е огр.

f е интегрируема по Риман и $I = \int_{\Delta} f$

Д-во **Th 2:**

$$\varepsilon = 2 > 0$$

Същ. π подгр., такова

че $\forall \xi$ пр. т. точки за $\pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ $(\xi_i \in \Delta_i, i=1, 2, \dots, i_0)$ е в шп., че

$$|\sigma_f(\pi, \xi) - I| < 2$$

$$I - 2 < \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i) \mu_n(\Delta_i) < I + 2$$

$$\frac{I - 2 - \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi_i) \mu_n(\Delta_i)}{\mu_n(\Delta_1)} < f(\xi_1) < \frac{I + 2 - \sum_{i=2}^{i_0} f(\xi_i) \mu_n(\Delta_i)}{\mu_n(\Delta_1)}$$

Фикс. ξ_1, ξ_{i_0} $\forall \xi_i \in \Delta_1$ огр. $\forall \gamma \Delta_1$ и т.н. краен брой $\Rightarrow$ огр. навсякъде

$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ подразбиране

$\forall \xi$ предст. т. за π

$$I - \varepsilon < \sigma_f(\pi, \xi) < I + \varepsilon$$

$$I - \varepsilon \leq S_f(\pi) \leq S_f(\pi) \leq I + \varepsilon$$

$$S_f(\pi) - s_f(\pi) \leq 2\varepsilon$$

срочно

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leq \sum_{\Delta} f \leq I + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\left| \sum_{\Delta} f - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{за } \forall \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{\Delta} f = I$$

Д-во **Th 1**: $\varepsilon > 0$
 Ако докажем, че същ. $\delta > 0$
 такова, че за $\forall$ Π подр., $d(\Pi) < \delta$ е в
 сила

$$S_f(\Pi) < \sum_{\Delta} f + \varepsilon$$

$$S_f(\Pi) > \sum_{\Delta} f - \varepsilon$$

$$S_f(\Pi) \leq \sigma_f(\Pi, \xi) \leq S_f(\Pi) < \sum_{\Delta} f + \varepsilon$$

за произволни предст. ξ

$$\sum_{\Delta} f - \varepsilon \leq \left| \sigma_f(\Pi, \xi) - \sum_{\Delta} f \right| < \varepsilon$$

за $\forall \Pi$
 подр.

$$d(\Pi) < \delta$$

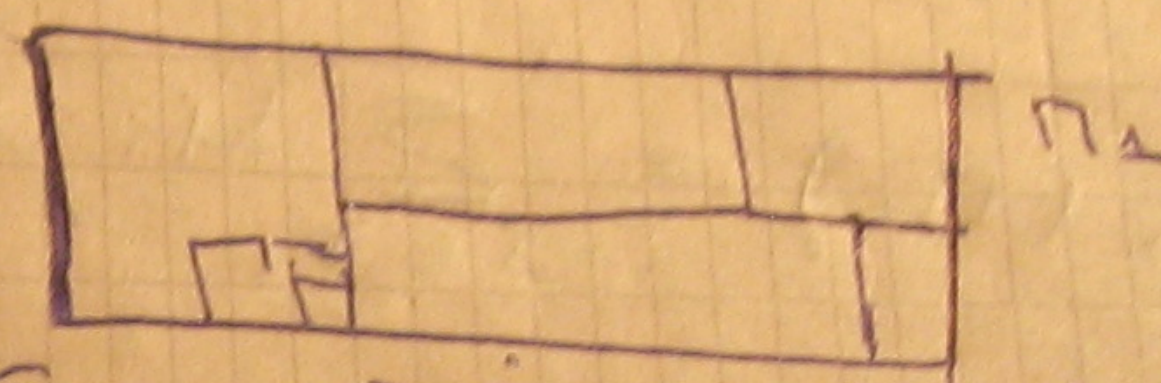
$\forall \xi$ предст. т.

$$\delta > 0$$

Π подр. с $d(\Pi) < \delta$

f -интегруема $\Rightarrow$ същ. Π_{Δ} подр. такова,
 че

$$S_f(\Pi_1) < \sum_{\Delta} f + \frac{\varepsilon}{2}$$



$$\Pi_1 = \left\{ \Delta_j \right\}_{j=1}^{j_0}$$

$$\Pi = \left\{ \Delta_i \right\}_{i=1}^{i_0}$$

$$\Pi_2 = \left\{ \Delta_i \cap \Delta_j \right\}_{i=1}^{i_0} \quad j=1, \dots, j_0$$

$$S_f(\Pi_2) \leq S_f(\Pi_1) < \sum_{\Delta} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$0 \leq S_f(\Pi) - S_f(\Pi_2)$$

$$M_i = \sup_{\Delta_i} f$$

$$M_i^j = \sup_{\Delta_i \cap \Delta_j} f$$

$$I_1 = \{i \in \{1, 2, \dots, j_0\} : \Delta_i \cap \square_j \neq \emptyset \text{ за някое } j \in \{1, \dots, j_0\}\}$$

$$I_2 = \{i \in \{1, 2, \dots, j_0\} : \Delta_i \subset \square_j \text{ за някое } j \in \{1, \dots, j_0\}\}$$

$$S_f(\pi) - S_f(\pi_1) = \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i)$$

$$- \sum_{i \in I_2} \sum_{j=1}^{j_0} M_i^j \mu_n(\Delta_i)$$

f-огр.
Нека M е такова, че

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \Delta$$

$$\left| \sum_{i \in I_1} M_i \mu_n(\Delta_i) \right| \leq M \sum_{i \in I_1} \mu_n(\Delta_i)$$

$$\leq M \cdot 2\delta \cdot P_{n-1}(\pi_1)$$

$$P_{n-1}(\pi_1) = \sum_{j=1}^{j_0} \mu_{n-1}(\square_j)$$

$$\sum_{i \in I_2} \sum_{j=1}^{j_0} M_i^j \mu_n(\Delta_i \cap \square_j) \leq M \sum_{i \in I_2} \sum_{j=1}^{j_0} \mu_n(\Delta_i \cap \square_j)$$

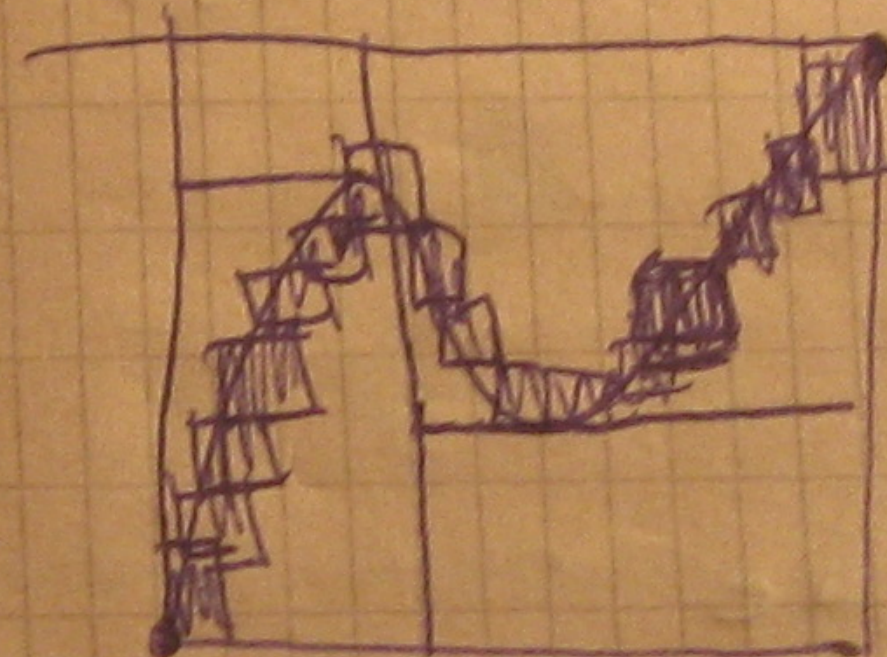
$$\leq M \cdot 2\delta \cdot P_{n-1}(\pi_1)$$

$$0 \leq S_f(\pi) - S_f(\pi_1) \leq 4M\delta P_{n-1}(\pi_1)$$

$$S_f(\pi) \leq S_f(\pi_1) + 4M\delta P_{n-1}(\pi_1)$$

$$\sum_{\Delta} f + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{8M P_{n-1}(\pi_1)} > 0$$



Пренебрежими
множества

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

A наричаме пренебрежимо по Лебег,

ако $\forall \varepsilon > 0 \exists \{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ изброимо

много паралелепипеди в $\mathbb{R}^n$,
такива, че покриват

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \supset A$$

X

$$\sum_{i=1}^n \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon$$

Изроден паралелотоп - димензионален
от една от страните е 0

- 1) Изродените паралелотопи са пренебрежими
- 2) Подмножеството на пренебрежими е пренебрежими

$\left. \begin{matrix} A \text{ пренебр.} \\ B \subset A \end{matrix} \right\} \Rightarrow B \text{ пренебр.}$

 сметана на Кох

16.10.2012

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 (x^2(1-x^2) + \frac{1-(x^2)^3}{3}) dx = \dots$$

Лекция

Σ Рънн $\cdot$ нуге
 Σ Дарбу

$\cdot$ обем

Паралелотоп



$$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Delta \subset \mathbb{R}^n$$

паралелотоп

Пренебрежими множества

Def.

$$A \subset \mathbb{R}^n$$

A се нарича пренебрежимо по Лебег, ако

$$\forall \epsilon > 0 \exists F \text{ избрание много паралелотопи}$$

$$\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ в } \mathbb{R}^n$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \supset A$$

$$\text{и } \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon$$

Пример: Изродените паралелотопи са пренебрежими

Свойства

1) A е пренебрежимо в SA

$\Rightarrow B$ е пренебрежимо

2) A_m пренебрежимо за $\forall m \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$ е пренебрежимо

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \quad \varepsilon > 0$$

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty} 2m, \quad 2m > 0$$

$$2m = \frac{\varepsilon}{2m} \quad \therefore$$

A_m е пренебр. по Лебег $\left\{ \begin{array}{l} 2m > 0 \\ \Rightarrow \end{array} \right. \left\{ \Delta_i^m \right\}_{i=1}^{\infty}$

паралелотопи в $\mathbb{R}^n$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i^m \supset A_m$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i^m) < 2m$$

$$\left\{ \Delta_{i(s)}^{m(s)} \right\}_{s=1}^{\infty}$$

$$\left\{ \Delta_i^m \right\}_{i=1}^{\infty} \quad m=1$$

изброило много паралелотопи в $\mathbb{R}^n$

$\Delta_1^1 \Delta_2^1$ подредени в редица
 Δ_2^1

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} \Delta_{i(s)}^{m(s)} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i^m \right) \supset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \quad \parallel \quad A$$

! да се види $\sum_{s=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_{i(s)}^{m(s)}) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i^m) \right)$

ред с > 0 членове

↓
 двоен ред
 $< 2m$

Разместване
закона
sup, inf

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, \infty$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i(s)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right)$$

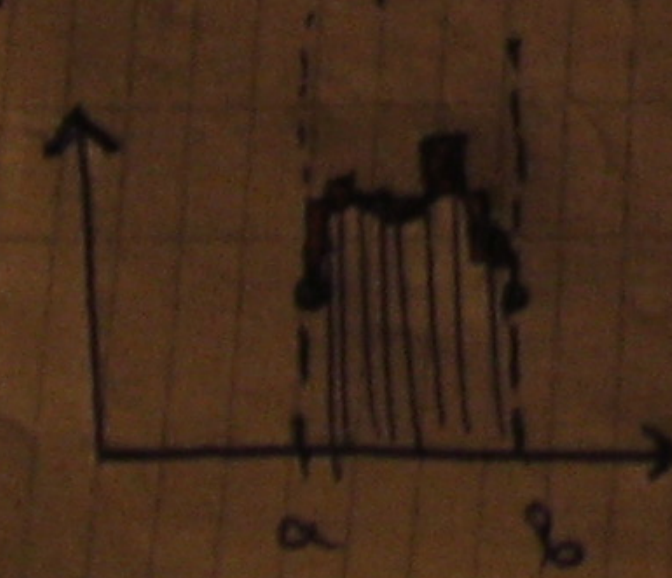
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \varepsilon$$

Примери
 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^n$
 $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$

3) $C \subset \mathbb{R}^n$
 C компактен
 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$
непрерывната

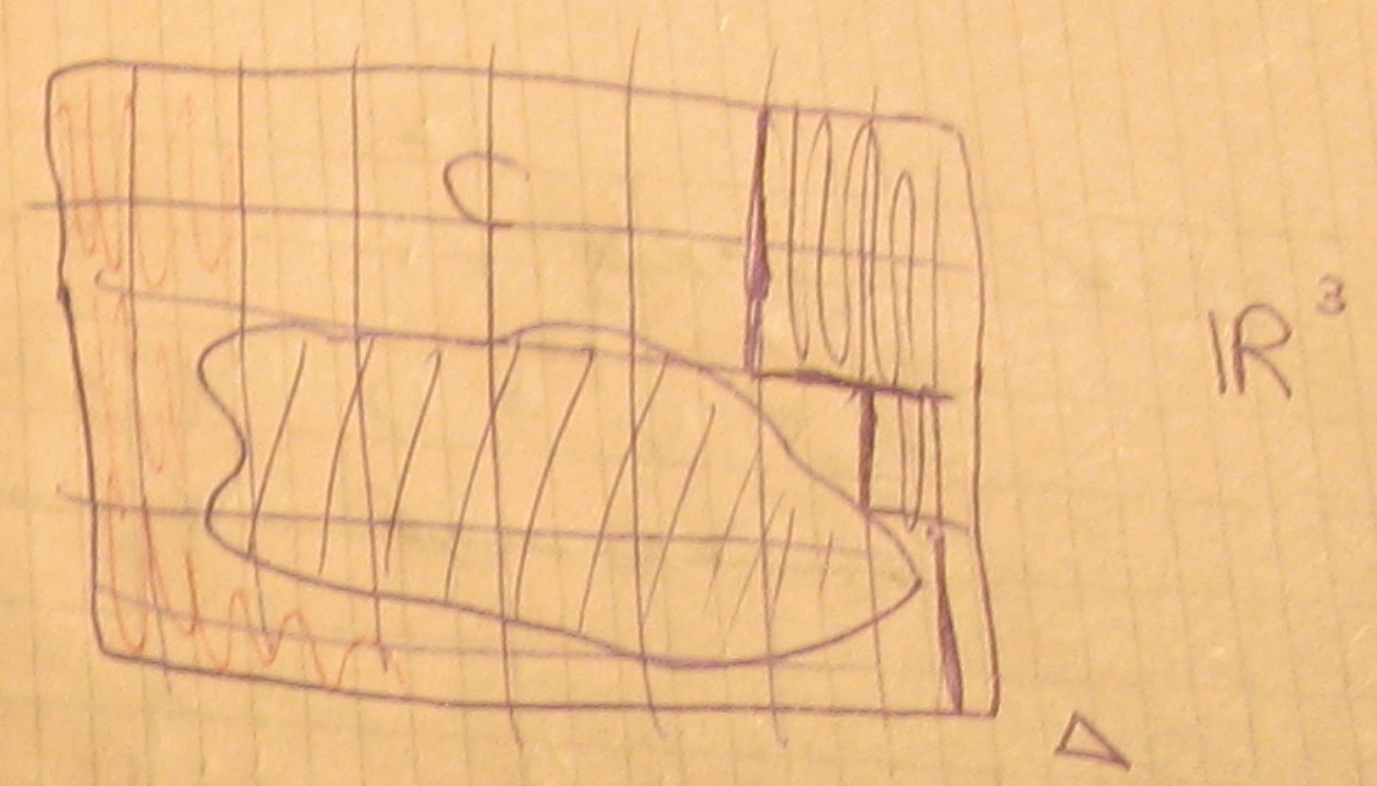
$$\Rightarrow G_f = \left\{ (x, f(x)) : \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^{n+1} \\ x \in C \end{array} \right\}$$

е пренесваемо в $\mathbb{R}^{n+1}$



(непр. ф-ции са
интегруеми)
Th Кантор
равномерно непрекъсн

$$\varepsilon > 0$$



C -ограничено
 Δ паралелепипед
 $\Delta \supset C$

$$\frac{\varepsilon}{4\mu_n(\Delta)} > 0$$

f непрекъсната в C комп. $\Rightarrow f$ равн.
непр. в C

$$\Rightarrow \exists \delta > 0$$

$$\forall x', x'' \in C \quad |x' - x''| < \delta$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

равномерна
непрекъснатост

тека

$$\Pi = \{ \Delta_i \}_{i=1}^{i_0} \text{ е подразделение на}$$

$$\Delta \quad d(\Pi) < \delta$$

Размер
на
точка

$$\Pi_\delta = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_1}$$

$$\Delta_i \cap C \neq \emptyset \quad \forall i=1, 2, \dots, i_1$$

$$\Delta_i \cap C = \emptyset \quad \forall i = i_0, i_0+1, \dots, i_1$$

$$i \in \{1, 2, \dots, i_1\} \text{ - сеге сеге}$$

$$x_i \in C \cap \Delta_i \neq \emptyset$$

$$\square = \Delta_i \times \left[f(x_i) - \frac{\varepsilon}{4\mu_n(\Delta)}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{4\mu_n(\Delta)} \right]$$

параметърът
с размер ε

дебелина

$$i=1, \dots, i_1$$

Прим
? сумарна мярка
покрива м. графиката

$$x \in C$$

$$\exists i \in \{1, \dots, i_1\}, \quad x \in C \cap \Delta_i$$

$$x_i \in C \cap \Delta_i$$

$$\|x - x_i\| < \text{diam}(\Delta_i) < \delta$$

$$f(x) - f(x_i) < \frac{\varepsilon}{4\mu_n(\Delta)}$$

$$f(x) \in \left[f(x_i) - \frac{\varepsilon}{4\mu_n(\Delta)}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{4\mu_n(\Delta)} \right]$$

$$\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, i_1\}$$

$$x \in \Delta_i$$

$$f(x) \in f(x_i) - \frac{\varepsilon}{4\mu_n(\Delta)}, f(x_i) + \frac{\varepsilon}{4\mu_n(\Delta)}$$

$$\Rightarrow (x, f(x)) \in \square_i$$

точка от графиката се покрива от мярка

$$\Rightarrow G_f \subset \bigcup_{i=1}^{i_1} \square_i$$

Сумарните обемни

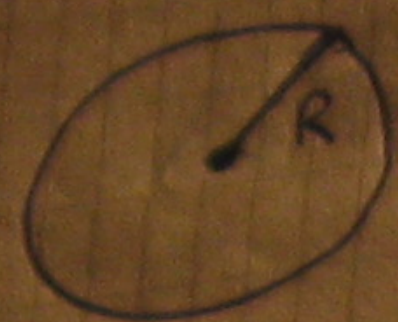
$$\sum_{i=1}^{i_1} \mu_{n+1}(\square_i) = \sum_{i=1}^{i_1} \mu_n(\Delta_i) \frac{\varepsilon}{2\mu_n(\Delta)} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\mu_n(\Delta)} \sum_{i=1}^{i_1} \mu_n(\Delta_i) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2\mu_n(\Delta)} \cdot \mu_n(\Delta) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$$:))$$

Пример:



$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{R^2 - x^2}$$

иначе 0

Размер

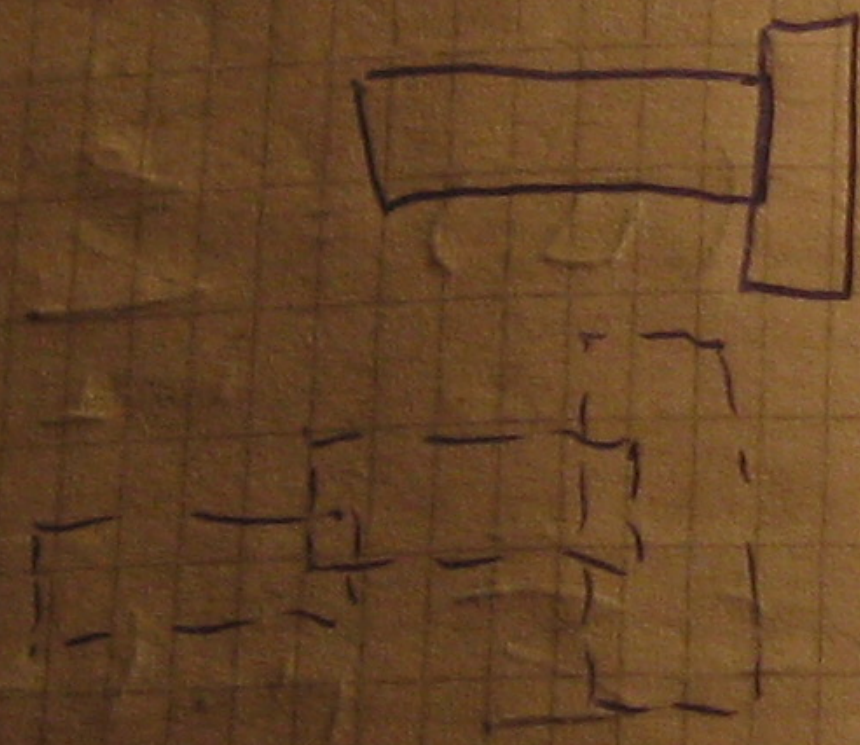
Ако има вътрешност, не е пренебрежимо

4) $A \subset \mathbb{R}^n$
 A е пренебрежимо $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists$ избр. мн. $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ парам. в $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ вътрешностите покриват A
 $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \supset A$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) < \epsilon$

Пример:

3) C



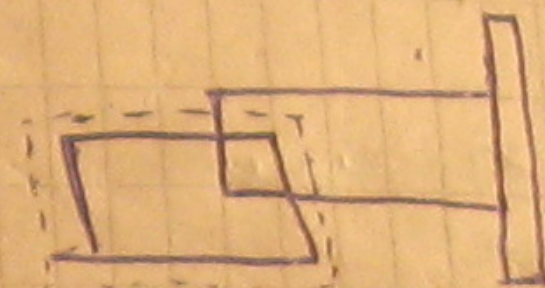
$\Rightarrow$ очевидно

$\Rightarrow \epsilon > 0$

A е пренебрежимо

$\Rightarrow \exists \{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \supset A$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) < \frac{\epsilon}{2}$$



увеличаване много малко? муго

$$\frac{\epsilon}{2} = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i, \Delta_i > 0$$

$\Rightarrow$ може

$\square_i \supset \Delta_i$
 пар

$$\mu_n(\square_i) < \mu_n(\Delta_i) + \Delta_i$$



увеличаване много с Δ_i

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \square_i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\square_i) < \sum_{i=1}^{\infty} (\mu_n(\Delta_i) + \Delta_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \Delta_i < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\Rightarrow$

5) $\Delta \in \mathbb{R}^n$
 неизрожден паралелотоп
 $\Rightarrow \Delta$ не е пренебрежлив

Доп. : Δ е пренебрежлив
 $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists \{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ паралелотопи

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \supset \Delta \text{ и } \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon$$

компакт

отв. покритие
 Можем да изберем крайно
 подпокрытие.

$$\Delta \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} \Delta_i \Rightarrow \mu_n(\Delta) \leq \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon$$

Δ неизрожден

$$\exists \varepsilon > \mu_n(\Delta) > 0$$

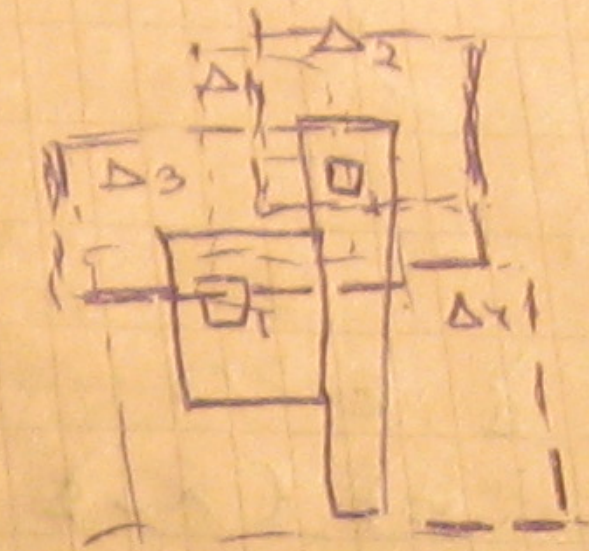
3) Лема : $\square_j$ $j=1, \dots, j_0$
 неперекрывающиеся
 паралелотопи в $\mathbb{R}^n$

$$\square_{j_1} \cap \square_{j_2} = \emptyset \quad \forall j_1 \neq j_2$$

$$\bigcup_{j=1}^{j_0} \square_j \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} \Delta_i$$

Δ_i $i=1, \dots, i_0$ са пар.
 в $\mathbb{R}^n$

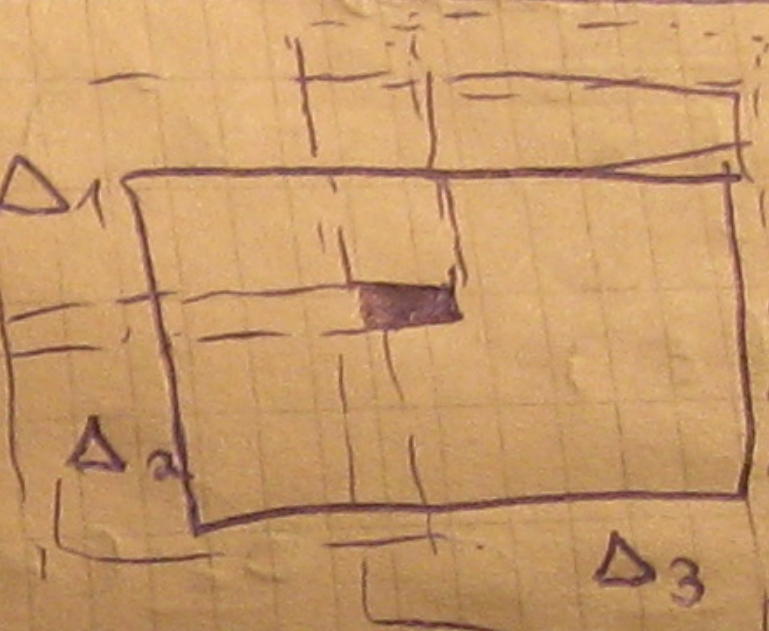
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{j_0} \mu_n(\square_j) \leq \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i)$$



сечение на
 пар. етор

подразделение, изхвърляне
 част и
 $S_{\text{целна}} = \sum S_{\text{партия}}$

представяне
 и
 димензии Δ_1



покриване
 изхвърляне
 срещу се?
 пъти-
 едно го
 затова
 др.
 изхвърляне

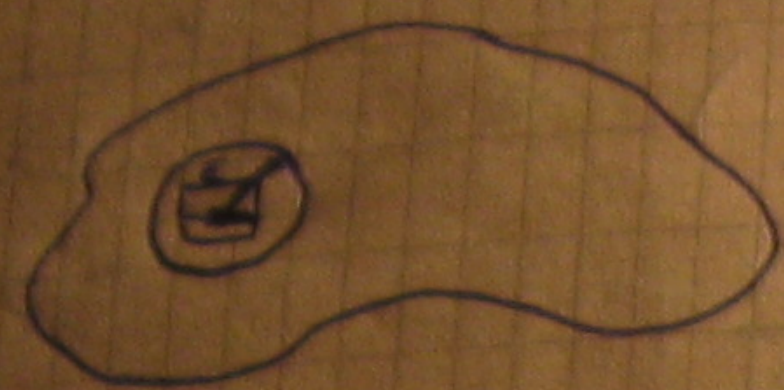
част от тях - подразделение

$$\Sigma = S_{\text{целна}}$$

целна става $<$ след
 изхвърляне

Следствие : Непразно отворено
 множество не е
 пренебрежливо

отв. $U \neq \emptyset \Rightarrow U$ не е
 пренебрежливо



като сч. т.
и $\varepsilon > 0$

$$x_0 \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ } \forall \varepsilon (x_0) \subset U$$

$$\Delta = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \in [x_i^0 - \delta, x_i^0 + \delta] \}$$



$$x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$$

$$? \delta(\varepsilon)$$

$$\Delta \subset \forall \varepsilon (x_0) \subset U$$

неизр.
пар. $\Rightarrow \bar{x}$

$$x \in \Delta$$

$$\|x - x_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \delta^2}$$

$$= \sqrt{n\delta^2} = \delta\sqrt{n} < \varepsilon$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Тк на Лебег (критерий за интегр.)

$$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

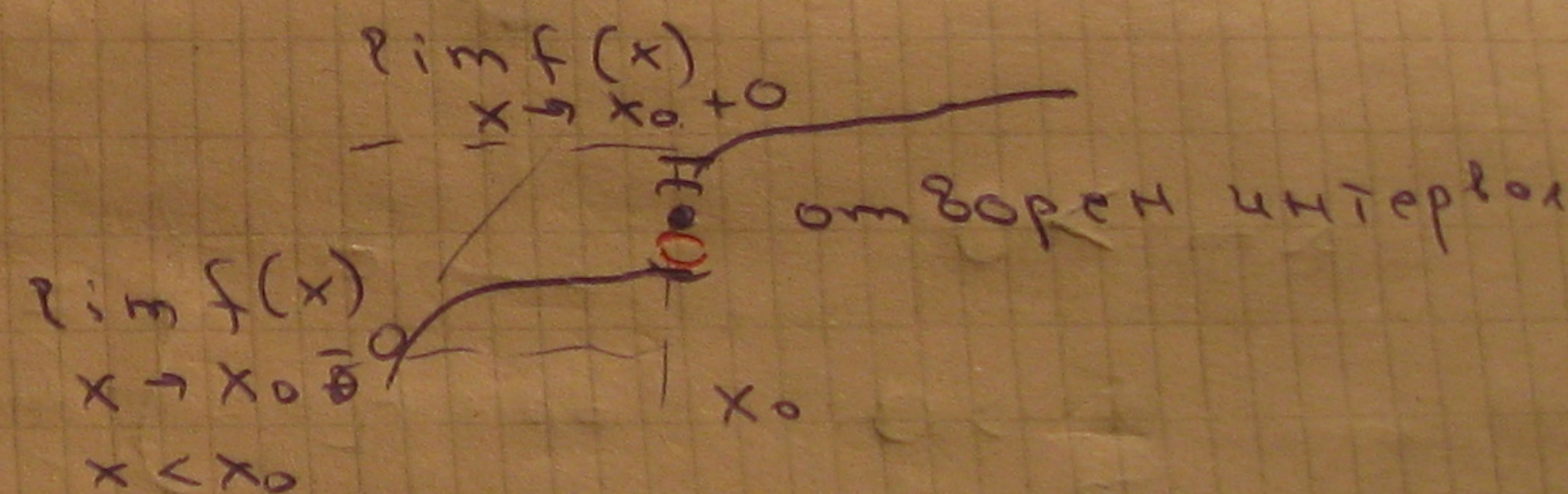
f-ограничена

Δ паралелотоп в $\mathbb{R}^n$

Твърдим, че f е интегруема по Риман, тогава и само тогава, когато множеството от точките на прекъсване на f е пренебрежимо по Лебег

$$R_f = \{ x \in \Delta : f \text{ е непрекъсната в } x \}$$

f монотонно растяща



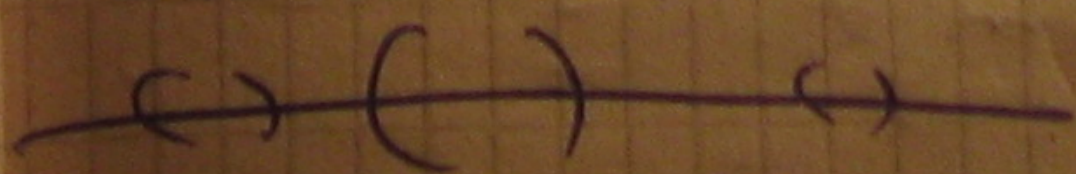
$\forall$ точка на прекъсване $\hookrightarrow$ отк. интервал и те не се сечат

изброимо много такива

$$\{ \Delta_k \}_{k \in \mathbb{N}} \text{ интервали}$$

$$\Delta_k \text{ отк. инт. в } \mathbb{R}$$

$$\Delta_k \cap \Delta_l = \emptyset$$



мон. изброшма ин. топки на прекъсване

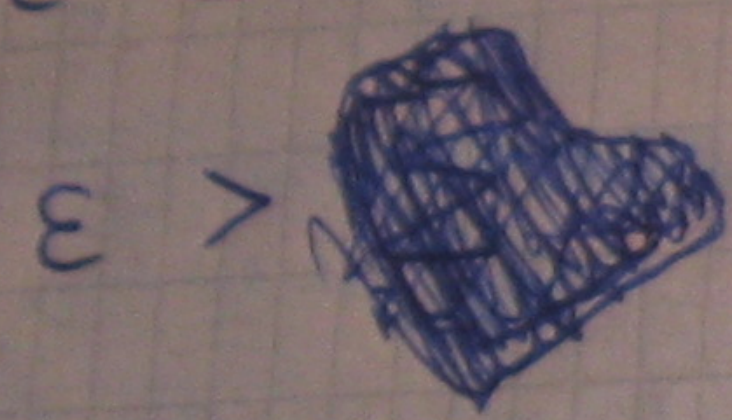
f инт. $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0$
 $\exists \Pi$ подразделение

форма
II критерий
интегруемост

$$\sum_{m_i - m_i \geq \eta} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon$$

на $f \Rightarrow R_f$ е пренебрежимо
 f интегруема на

$$\varepsilon > 0$$



$$\sum_{m=1}^{\infty} \Delta_m, \quad \Delta_m > 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_m > 0 \\ \frac{1}{m} > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{за } \varepsilon \\ \text{за } \eta \end{array} \Rightarrow \text{II ф-ма}$$

$\exists \Pi_m$ подразделение на Δ , т.е.

$$\sum_{m_i - m_i \geq \frac{1}{m}} \mu_n(\Delta_i) < \Delta_m$$

Π_m^1 - елементите на Π_m , в които
 осцилацията на f е по-голяма
 или равна на $\frac{1}{m}$. (които угадват в ε)



R_m - множителството от стени
 на ел. на Π_m
 ($2\Delta_i, \dots$)

крайна 0 от изградени паралелотопи

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \Pi_m^1 \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} R_m - \text{изброшма фамилия от паралелотопи в } \mathbb{R}^n$$

"

$$1) \sum_{\Delta \in \Pi} \mu_n(\Delta) = \sum_{\Delta \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \Pi_m^1} \mu_n(\Delta) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\Delta \in \Pi_m^1} \mu_n(\Delta) \right) < 0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_m < \varepsilon$$

?

$$2) R_f \subset \bigcup_{\Delta \in \Pi} \Delta$$

$$x \notin \bigcup_{\Delta \in \Pi} \Delta$$

както и

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$
 $x \in \Delta_i^m$
 $\Delta_i^m \in \Pi_m$
 не може да е
 в стеча
 $m = \text{fix}$

Розм.

и осцилацията

$$M_i^m - m_i^m < \frac{1}{m}$$

$$y \in \Delta_i^m$$

$$|f(x) - f(y)| \leq M_i^m - m_i^m < \frac{1}{m}$$

$\Rightarrow$

При

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists U_m \subseteq \Delta_i^m \text{ отв. мн. } \forall x \in U_m$$

$$\forall y \in U_m:$$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{m}$$

$\Rightarrow$ непрекъснатост в т. x
 обратно
 R_f е пренебр. $\Rightarrow f$ е интегр.

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon > 0 \\ \eta > 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{произволни} \\ \text{фикс.} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon > 0 \\ R_f \text{ пренебрежимо} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \exists \left\{ \Delta_i \right\}_{i=1}^{\infty}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \supset R_f$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \text{ отворено}$$

$$\Delta \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \right) = S \text{ компакт}$$

$$\text{отворено}$$

Th Кантор лекция

$$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S \subset \Delta$$

компакт

$$\left. \begin{matrix} f \text{ не пр. в } S \\ S \cap R_f = \emptyset \end{matrix} \right\}$$

$$\eta > 0$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \quad \forall x' \in S \quad \forall x'' \in \Delta$$

$$\|x'' - x'\| < \delta:$$

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\eta}{4}$$

$$\text{Подразбиране на } \Delta \text{ с } d(\Pi) < \delta$$

Яко $\square_j \in \Pi$ и $\square_j \cap C \neq \emptyset$, то
оцилауица на f в $\square_j$
 $M_j - m_j < \eta$

$x_j \in \square_j \cap C$
 $x \in \square_j$, $y \in \square_j$ произволни

$$x, x_j \in \square_j \Rightarrow \|x - x_j\| < \delta$$

$$x_j \in C$$

$$|f(x) - f(x_j)| < \frac{\eta}{4}$$

за y

$$y, x_j \in \square_j$$

$$|f(y) - f(x_j)| < \frac{\eta}{4}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(y)| < \frac{\eta}{2}$$

Оцилауица на f в $\square_j$
 $M_j - m_j \leq \frac{\eta}{2} < \eta$

~~контракт~~

$$\sum_{M_j - m_j \geq \eta} \mu_n(\square_j)$$

$$\sum_{\square_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i} \mu_n(\square_j)$$

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$$

$$\Rightarrow \sum_{M_j - m_j \geq \eta} \mu_n(\square_j) \leq \sum_{\square_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i} \mu_n(\square_j)$$

$$K = \bigcup_{i=1}^{\infty} \square_j$$

компакт
непритокури
всичко

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$$

$$\bigcup_{j=1}^{j'} \square_j$$

краен брой

$$\Rightarrow \sum_{M_j - m_j \geq \eta} M_n(\Delta_j) \leq \sum_{\Delta_j \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i} M_n(\Delta_j) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M_n(\Delta_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} M_n(\Delta_i) < \varepsilon \quad (1)$$

Следствие 2: $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$
интегруемы

$$\Delta \subset \mathbb{R}^n$$

пар.

$$\Rightarrow f+g, f-g, f \cdot g, \frac{f}{g} \text{ (ако)}$$

$$|g(x)| \geq \varepsilon_0 > 0 \quad \forall x \in \Delta$$

равномерно
далеко от 0

са интегруемы по
Ришан

$$\frac{f}{g}: \Delta \rightarrow \mathbb{R} \text{ е ограничена,}$$

защото

$$|f(x)| \leq M$$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \frac{M}{\varepsilon_0}$$

и н. от т. на непрекъснатост

$$R_{f/g} \subset R_f \cup R_g$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{R}^n \setminus R_{f/g} \supset (\mathbb{R}^n \setminus R_f) \cap (\mathbb{R}^n \setminus R_g)$$

$$\frac{f}{g} \text{ не пр. в } x \iff f \text{ не пр. в } x \text{ или } g \text{ не пр. в } x$$

Тх Лебег

Следствие 3: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
непр.

$$f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

интегруемы $\Delta \subset \mathbb{R}^n$
пар.

$$\Rightarrow F(f, g) \text{ е инт. в } \Delta$$

$$\{(f(x), g(x)): x \in \Delta\} \text{ - ограничено подмн. на } \mathbb{R}^2$$

$$F \text{ непр.} \Rightarrow F(f, g) \text{ е пр.}$$

$$R_{F(f, g)} \subset R_f \cup R_g$$

$$\mathbb{R}^n \setminus R_{F(f, g)} \supset (\mathbb{R}^n \setminus R_f) \cap (\mathbb{R}^n \setminus R_g)$$

Свойства на интегралите:

1) Линейност
 $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$
 интегр. в $\mathbb{R}^n$
 Δ пар. в $\mathbb{R}^n$
 $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f+g, \lambda f$
 са интегр.

$$\int_{\Delta} (f+g) = \lambda \int_{\Delta} f$$

границен преход в
 сумите на Риман

$$\sigma_{f+g}(\Pi, \xi) = \sum_{i=1}^{i_0} (f+g)(\xi_i) \mu_n(\Delta_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i) \mu_n(\Delta_i) + \sum_{i=1}^{i_0} g(\xi_i) \mu_n(\Delta_i)$$

$$= \sigma_f(\Pi, \xi) + \sigma_g(\Pi, \xi)$$

$$\int_{\Delta} g$$

$$d(\Pi_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

редуца от подразбиване
 ξ^m

$$\int f$$

$$L \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\Delta} (f+g)$$

$$\Rightarrow R \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \int_{\Delta} f + \int_{\Delta} g$$

2) Адитивност

$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, Δ пар. в $\mathbb{R}^n$
 орг.



$$\Pi = \{ \Delta_i \}_{i=1}^{i_0}$$

подр. на Δ

f интегр. в Δ ($\Leftarrow$)

f интегр. в $\Delta_i \forall i=1,2,\dots,i_0$

$$\int_{\Delta} f = \sum_{i=1}^{i_0} \int_{\Delta_i} f$$

адитивност

$$R_f \subset \bigcup_{i=1}^{i_0} R_{f/\Delta_i} \cup \bigcup_{i=1}^{i_0} \partial \Delta_i$$

пренебр.

изродеи парел
 пренебр.
 $\rightarrow$ пренебр.

суми на Риман

Π_m подр. на Δ ξ^m произволни
 Г.

$$d(\Pi_m) \rightarrow 0$$

$$\Pi_m \geq \Pi \text{ (по-дребни)}$$

$$\sigma_f(\Pi_m, \xi^m) = \sum_{i=1}^m \sigma_f(\Pi_m \cap \Delta_i, \xi^m \cap \Delta_i)$$



границен преход

$m \rightarrow \infty$

$$\int_{\Delta} f$$

$\Rightarrow$

3) Позитивност

$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ инт.
 Δ пар в $\mathbb{R}^n$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Delta$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta} f \geq 0$$

най-малката сума
на Δ е ≥ 0

Следствие 1: f, g - инт. егр.
и $f \geq g$

$$\Rightarrow \int_{\Delta} f \geq \int_{\Delta} g$$

линейност + позитивност

$$\int_{\Delta} f - \int_{\Delta} g = \int_{\Delta} (f - g)$$

Следствие 2: f е инт. егр. $|f|$ е инт. егр.
 $\Rightarrow |f|$ е инт. и

$$\left| \int_{\Delta} f \right| \leq \int_{\Delta} |f| \quad \text{от предишното}$$

$$f \leq |f|$$

$$-f \leq |f|$$

$$\int_{\Delta} f \leq \int_{\Delta} |f|$$

$$-\int_{\Delta} f \leq \int_{\Delta} |f|$$

$$R_{|f|} \subset R_f$$

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$$

или осцилации...

Дом.: Сметилка на Кох

Разм. + Асоц. закон за редове

$$a_i^j \geq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j(i) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right)$$

Περιοδος

$$S_1' = \sum_{s=1}^{\infty} a_{i(s)} = S$$

$$S_1' = \sum_{i(s)} a_{i(s)}$$

$$S - \varepsilon = S' < \sum_{i=1}^{\infty} x_i = S$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i > S - \frac{\varepsilon}{2}$$

παρυσιανα
συγγρα

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$$

$$i = 1, 2, \dots, \infty$$

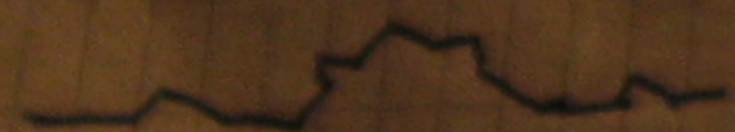
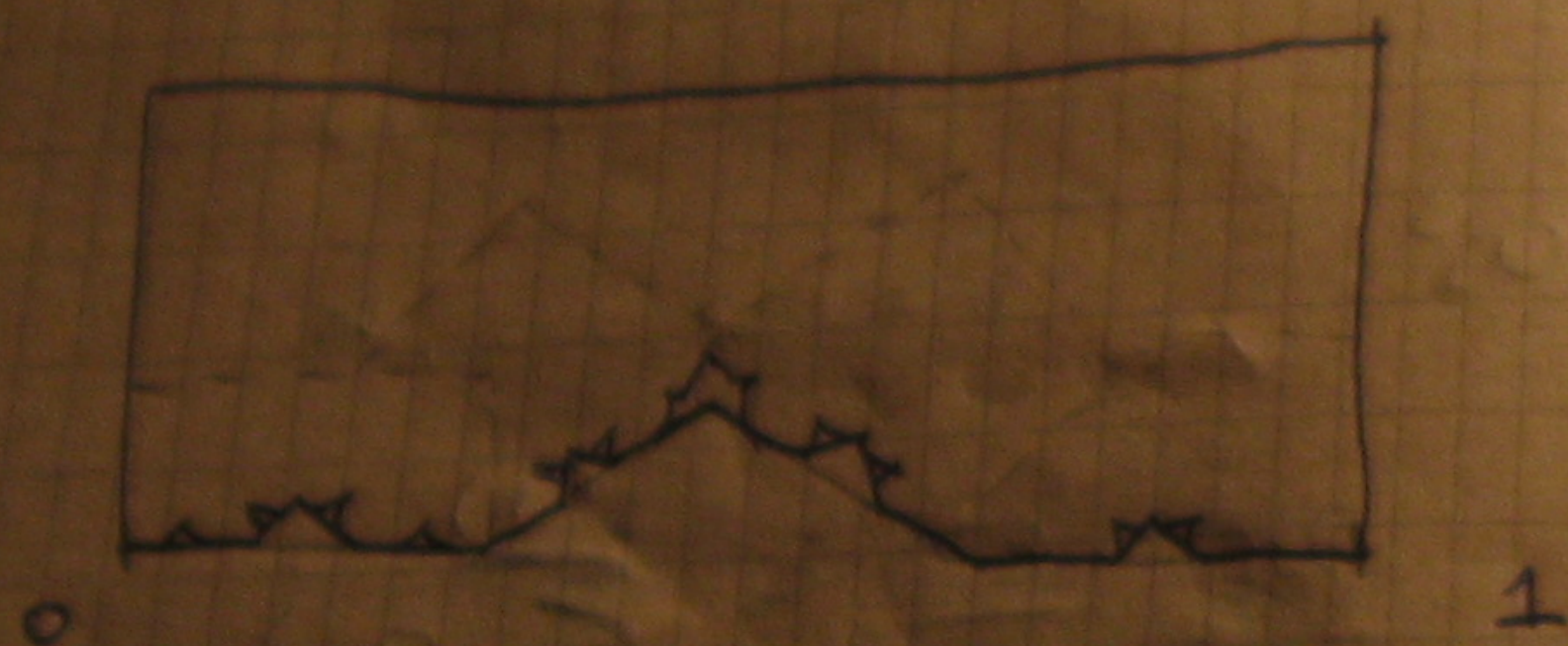
$$x_i - \frac{\varepsilon}{2\infty} < \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$$

$$i = 1, 2, \dots, \infty$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \leq \sum_{s=1}^{\infty} a_{i(s)}$$

περιοδος
κρυσταλλοδρ. ενεργη

$A \subset \mathbb{R}^n$
 A - пренебр по Лебег ако
 $\forall \epsilon > 0 \exists \{ \Delta_i \}_{i=1}^{\infty}$
 $\text{пар } \Delta_i \in \mathbb{R}^n, \cup \Delta_i \supset A$
 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) < \epsilon$



правоуг. сгр II коорд
 осн

$\epsilon > 0$
 иза $4\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
 $4^2\left(\frac{1}{3^4}\right) = \frac{4^2}{9^2}$

Чети повете
 страната се
 намалява 3 пъти

$\left(\frac{4}{9}\right)^n$ 4^n правоугълника
 $\rightarrow 0$

Th Лебег (минимална нгн)

$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$

$\Delta \subset \mathbb{R}^n$ ограничена

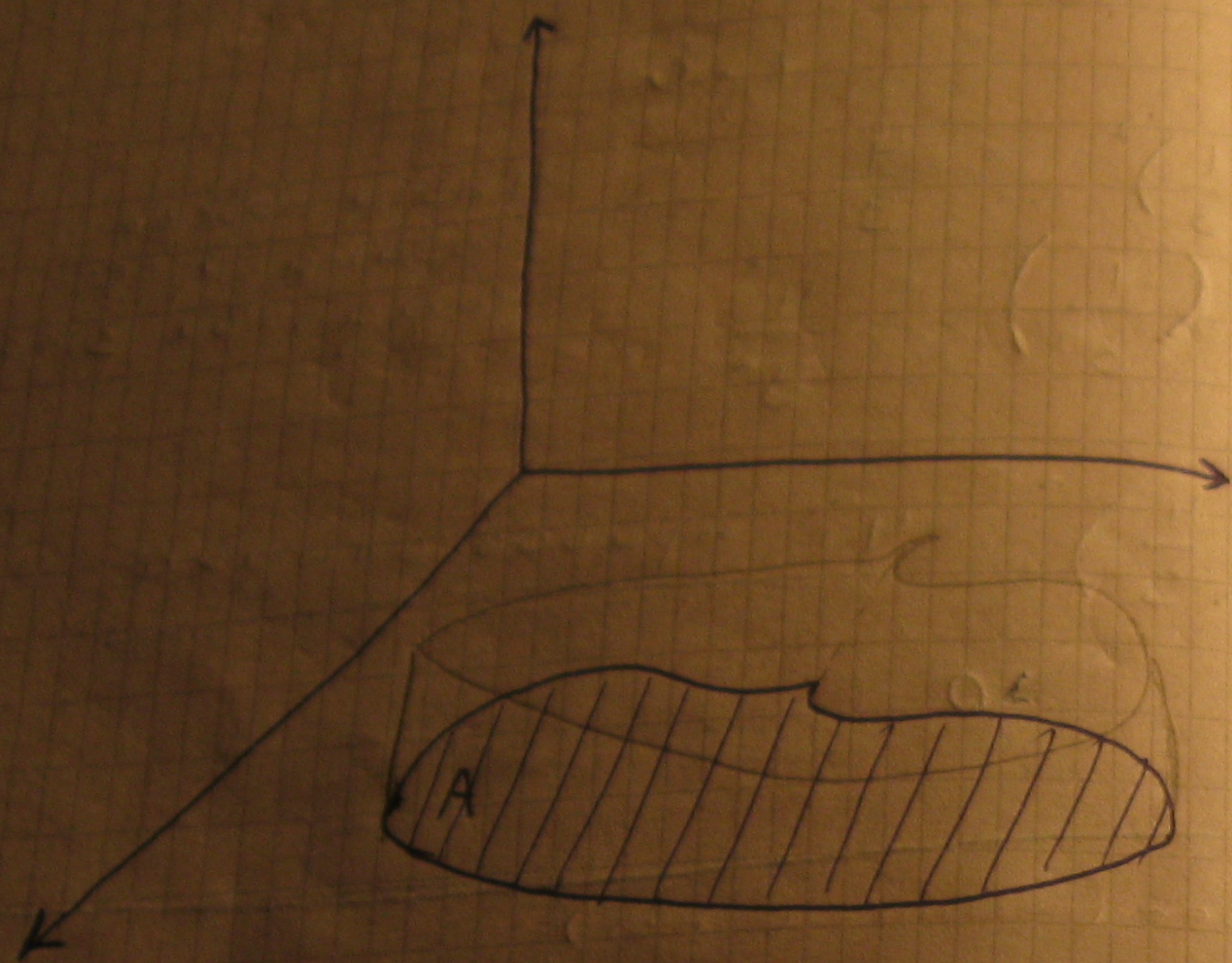
Позава

$R_f = \{ \tau \text{ на прек.} \}$

е пренебрежително по
 Лебег

$\Leftrightarrow f$ е интегрируема по
 Ршан

П.н. за въвеждане на краген



$$A \subset \mathbb{R}^n$$

$$\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

характеристична
ф-я на
множество

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \in A \\ 0, & \text{ако } x \notin A \end{cases}$$

($A \subset \mathbb{R}^n$)

прав кръгов цилиндър
обем

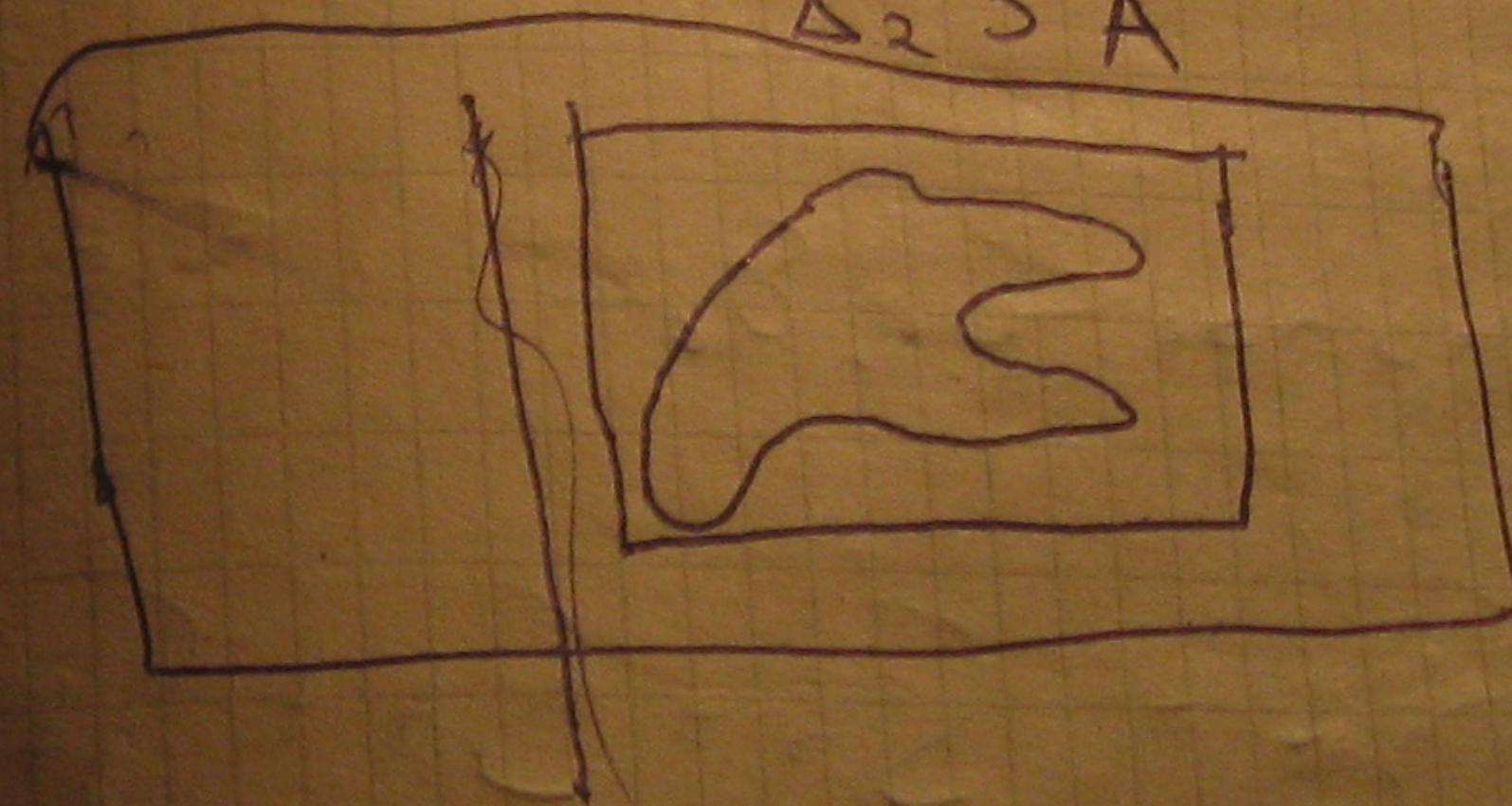
Def. $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено
 $A \subset \Delta$ пар.

Назвваме, че A е измеримо
(по Пеано-Жордан), ако
мерка $\rightarrow$ Рيمانов

$\chi(A)$ е интегр. по Рيمان
(в Δ) и тогава

$$\mu_n(A) = \int_{\Delta} \chi_A$$

Коректност: $\Delta_1 \supset A$
 $\Delta_2 \supset A$



$$A = \Delta_1 \cap \Delta_2 \supset A$$

пар.



$\{\Delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ подгр. на Δ_2

δ_2

χ_A | δ_2

точките на трек
в χ стената, изброено
 $\Rightarrow$ интеграл
в малки ширини
Дарбу 0

$$\Rightarrow \int_{\delta_2} \chi_A \text{ обич. и е } 0$$

Аналог. δ_1, δ_3

$$\int_{\Delta_2} f = \int_{\Delta} f + \int_{\delta_1} f + \int_{\delta_2} f + \int_{\delta_3} f$$

$$\int_{\Delta} f$$

$\Rightarrow$ от Δ_2 можем да минем към δ

$$\int_{\Delta_1} f = \int_{\Delta} f = \int_{\Delta_2} f \quad :))$$

$\Rightarrow$ не зависи от избора на паралелограм

$A \subset \mathbb{R}^n$, A ограничено
 A -измеримо (по Пеано-Жордан)
 $\Downarrow$ деф.

χ_A е интегрална (по Риман)

$\Downarrow$ Лебег $\delta \Delta \supset A$
пар

(*)

$R\chi_A$ е пренебрежимо (по Лебег)

Твърдение: $R\chi_A \equiv \partial A$
контура на A

$$\mathbb{R}^n = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$$

χ_A
 $x \in \overset{\circ}{A} \Rightarrow \chi_A \equiv 1$ в околност на $x \Rightarrow \chi_A$ е непрекъснато
 $x \in \mathbb{R}^n \setminus A \Rightarrow \chi_A \equiv 0$ в ок. на x
 $\Rightarrow \chi_A$ е непр. в x

точки на
прекъсване
контур

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \{ \Delta_i \}_{i=1}^{\infty}$ map. to $\mathbb{R}^n$

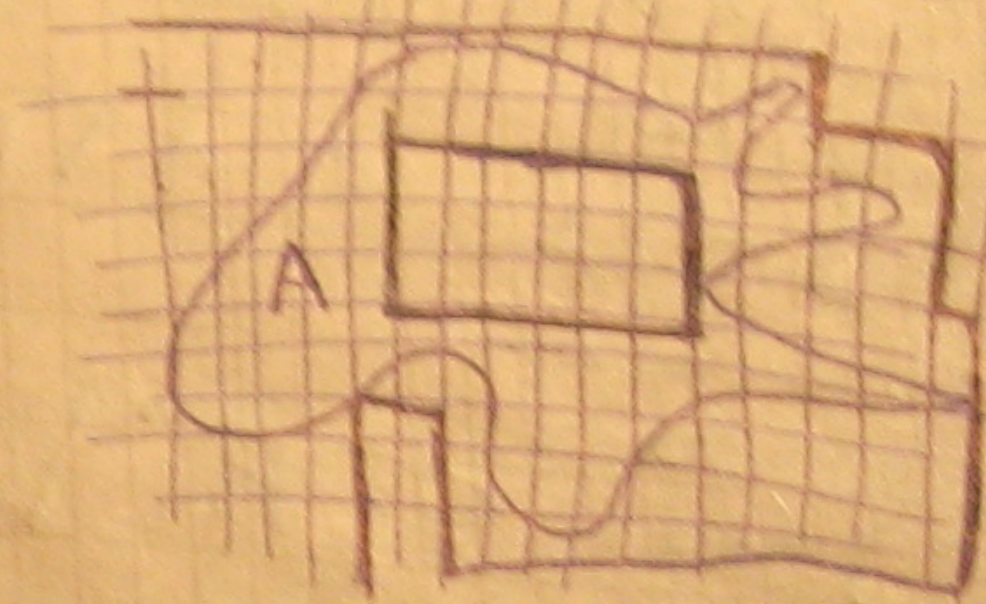
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \subset A \quad \text{u}$$

$$\exists \sum_{i=1}^8 \mu_i(\Delta_i) < \varepsilon$$

=> може да се избере крайно покритие

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(\Delta_i) < \varepsilon$$

($\mathcal{A}$ се нарича пренебрежително по Пеано
или измеримо съвкупност O .)



външна и вътр. цирка
горна и долна оуенка

$$\sum \Delta \rho \delta y$$

?? Контакт, който не е измерен ??

? пример

२२

Объяснение: Ако A и B са измерими (по Пеано-Жордан), то $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ са измерими (по Пеано-Жордан).

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subset \mathcal{P}A \cup \mathcal{P}B$$

$$2(A \cap B) \subset 2A \cap 2B$$

$$2(A \setminus B) \subset 2A \cup 2B$$



$$x \in \partial(A \setminus B)$$

$$\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset A \setminus B, \quad x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_0$$

$$\begin{aligned} \{y_m\}_{m=1}^{\infty} &\subset \mathbb{R}^n \setminus (A \setminus B) = \\ &= \mathbb{R}^n \setminus (A \cap (\mathbb{R}^n \setminus B)) = \\ &= (\mathbb{R}^n \setminus A) \cup B \end{aligned}$$

$$y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_0$$

~~Тезис, доказано~~

$$\underbrace{\{m: y_m \notin A\}}_{\text{без кр.}} \cup \underbrace{\{m: y_m \in B\}}_{\text{без кр.}} = \mathbb{N} \quad (*)$$

$$y_m \notin A, \quad y_m \rightarrow x_0$$

$$x_m \in A, \quad x_m \rightarrow x_0$$

$$\Rightarrow x_0 \in \partial A$$

(*)

$$\begin{aligned} y_m &\in B, \quad y_m \rightarrow x_0 \\ x_m &\notin B, \quad x_m \rightarrow x_0 \\ \Rightarrow x_0 &\in \partial B \end{aligned}$$

Следствие 1) A, B измеримы
 $A \cap B = \emptyset$

$$\mu_n(A) + \mu_n(B) = \mu_n(A \cup B)$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$$

Следствие 2: A, B измеримы

$$\mu_n(A \cup B) = \mu_n(A) + \mu_n(B) - \mu_n(A \cap B)$$

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$$

Примеры:

1)



$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$$

$$\partial K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

$$\cup \{(x, y, 0): x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

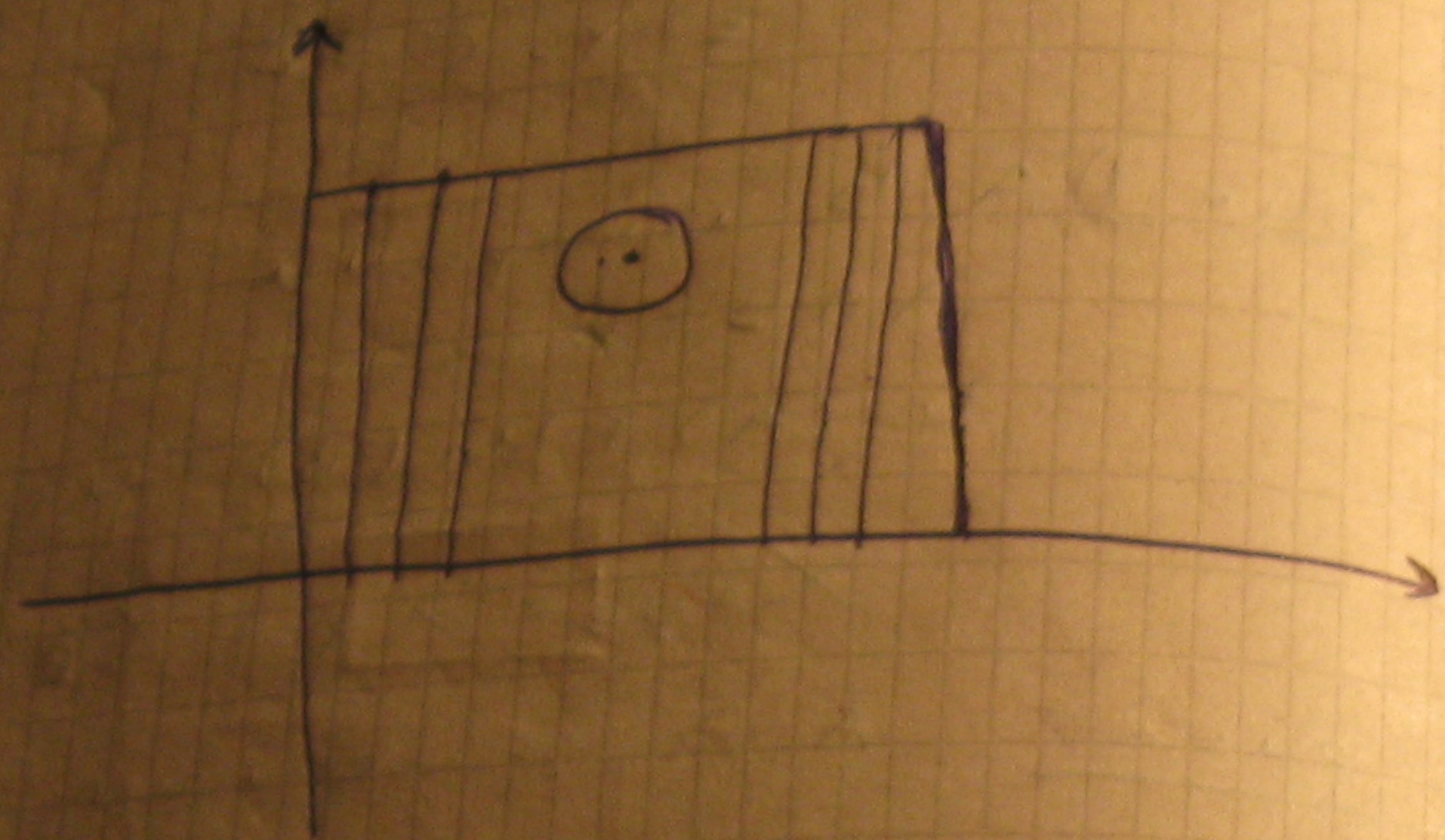
конфигурация е пренебрежимо

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

графика-пренебр.

Π -изроден паралелограм

$$\textcircled{2} A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} x \in [0, 1] \subset \mathbb{Q} \\ y \in [0, 1] \end{matrix} \}$$



избр. U на изродени парал.
 $\forall$ точка е от контура

$\partial A = [0, 1] \times [0, 1]$
 неизмеримо по П-Ж
 плътно

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $A \subset \mathbb{R}^n$, A измеримо
 (по Пеано-Жордан)

$$\int_A f$$

$$f^*: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

стандартно продължение на f

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ако } x \in A \\ 0, & \text{ако } x \notin A \end{cases}$$

Def. K , че f е интегрируема $\forall y \in A$,
 ако f^* е интегр. в $\Delta \supset A$,
 и тогава

$$\int_K f = \int_{\Delta} f^* \quad \text{интеграл } \forall y \text{ от антиг. прод.}$$

A е ограничено

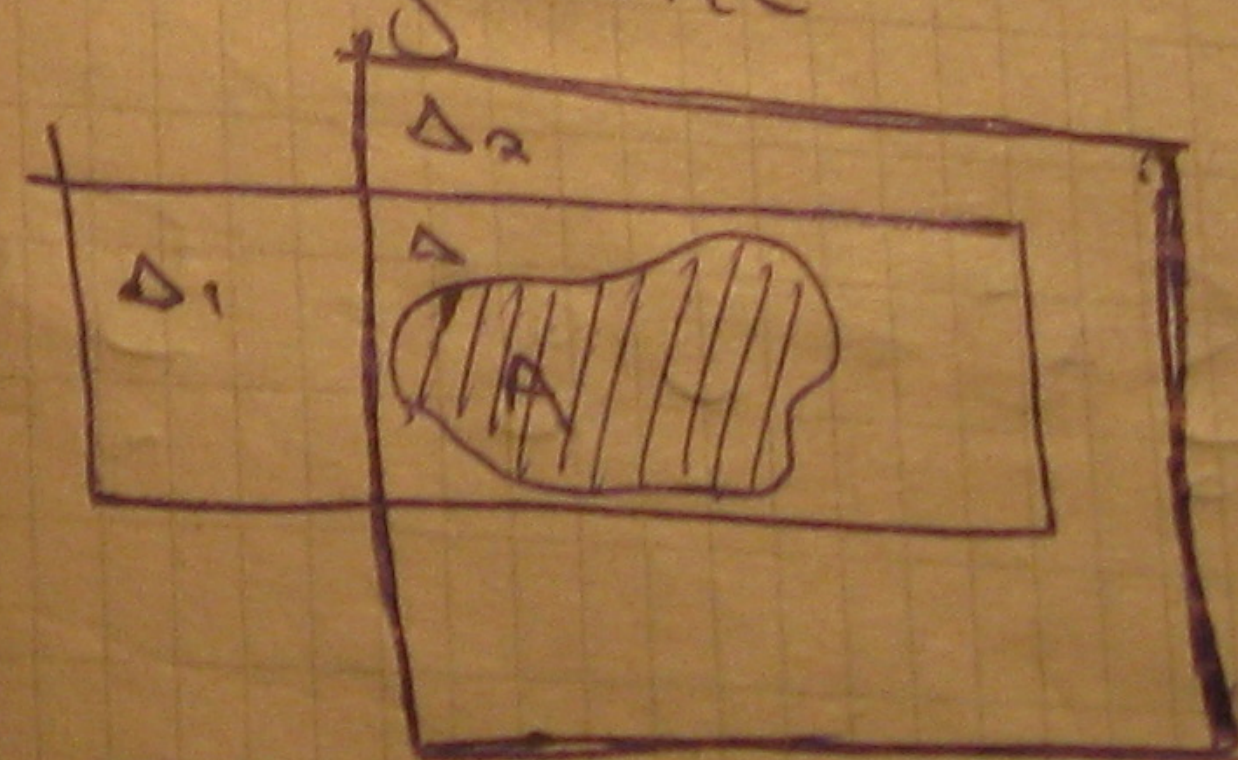
Коректност -

$$\Delta_1 \supset A$$

$$\Delta_2 \supset A$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta_1} f = \int_{\Delta_2} f \quad \text{и в смисъл}$$

на съществуване



извън A $f^* = 0$

$$R_f^* \setminus \partial A \subset R_f \subset R_f^* \cup \partial A$$

∂A е пренебрежителен

A е измеримо

f е интегр. в $\mathcal{H}$ $\Leftrightarrow Rf$ е пренебр.

Св-ва: 1) Линейност
 A измеримо, f и g са интегр. в $\mathcal{H}$ A
 $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f+g, \lambda f$ са интегр. в $\mathcal{H}$ A

$$\text{и } \int_A f+g = \int_A f + \int_A g$$

$$\Rightarrow (f+g)^* = f^* + g^*$$

$$\int_A f+g = \int_A (f^* + g^*)^* = \int_A f^* + g^*$$

$$= \int_A f^* + \int_A g^* = \int_A f + \int_A g$$

2) Адитивност

A, B - измерими

$A \cap B = \emptyset$ или сегменти с мярка 0

$f: A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$

f интегр. в $A \cup B \Leftrightarrow f$ интегр. в A
 и интегр. в B

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f^* = \int_A f^* \cdot \chi_{A \cup B} =$$

$$= \int_A f^* (\chi_A + \chi_B) = \int_A f^* \chi_A + \int_B f^* \chi_B =$$

$$= \int_A f + \int_B f$$

3) Позитивност

A измеримо
 f интегр. в $\mathcal{H}$ A
 $f \geq 0$

$$\Rightarrow \int_A f \geq 0$$

$$f \geq 0 \Rightarrow f^* \geq 0 \quad :))$$

Сл. 1 f, g - интегр. в $\mathcal{H}$ A и B .

$$f \geq g \Rightarrow \int_A f \geq \int_A g$$

Сл. 2 f интегр. в/у A изм.
 $\Rightarrow |f|$ интегр. и

$$\int_A |f| \leq \int_A |f|$$

4) T_k за средните стойности

A измеримо
 f, g интегр. в/у A
 $g \geq 0$
 $m \leq f \leq M$

$$\Rightarrow m \int_A g = \int_A (fg) \leq M \int_A g$$

$$m g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M g(x)$$

3) Сл. 1 $g \geq 1$

$$m \cdot \mu_n(A) \leq \int_A f \leq M \cdot \mu_n(A)$$

Сл. 2 f непрекъснат



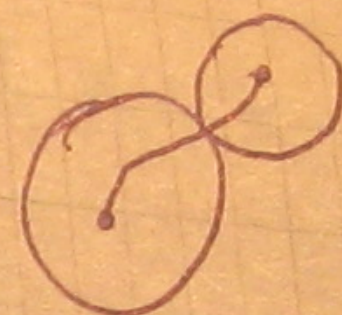
Def. $A \subset \mathbb{R}^n$
 Казваме, че A е (линейно) свързано,
 ако за $\forall$ 2 точки от A $\exists$ непр-
 линия в A с краища тези точки

$$\forall x \in A \forall y \in A \exists \varphi: [0, 1] \rightarrow A$$

непрекъснато

$$\varphi(0) = x$$

$$\varphi(1) = y$$



Упражнение:

DOM

$U \subset \mathbb{R}^n$, U отворено
 Док, че следните са
 еквивалентни

ТФАЕ:

(a) U е (линейно) свързано

(b) Ако $U = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ и

U_1, U_2 - отворени, ~~тогава~~

$\Rightarrow U_1 = \emptyset$ или $U_2 = \emptyset$

(в) $\forall x \in U \forall y \in U \exists \varphi$ нагупена
 линия с начало x и край y , която не
 излиза от U

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow U$$

непрек.

$$\varphi(0) = x \quad \varphi(1) = y$$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$$

$\varphi|_{[t_{i-1}, t_i]}$ е
 афинна

$$z = \lambda z_{i-1} + (1-\lambda) z_i$$

$$\varphi(t) = \lambda \varphi(z_{i-1}) + (1-\lambda) \varphi(z_i)$$

(графиката е отсечка)

Сл. 2 f непрекъсната
 A свързан компакт (минимално)
 измерим
 $\Rightarrow \int_A f = f(\xi) \cdot \mu_n(A)$
 за някое ξ

свързаност за Болюано

$$M = \max_A f$$

$$m = \min_A f$$

(A комп.
 f непрер.
 Вайерштрасс)

$$m \mu_n(A) \leq \int_A f \leq M \cdot \mu_n(A)$$

$$\text{ако } \mu_n(A) = 0 \Rightarrow \int_A f = 0$$

$$\text{ако } \mu_n(A) > 0$$

$$m \leq \frac{\int_A f}{\mu_n(A)} \leq M$$

$$c = m \text{ или } c = M \Rightarrow c = f(\xi) \text{ от Вайерштрасс}$$

$$m < c < M$$

$$x \in A, f(x) < c$$

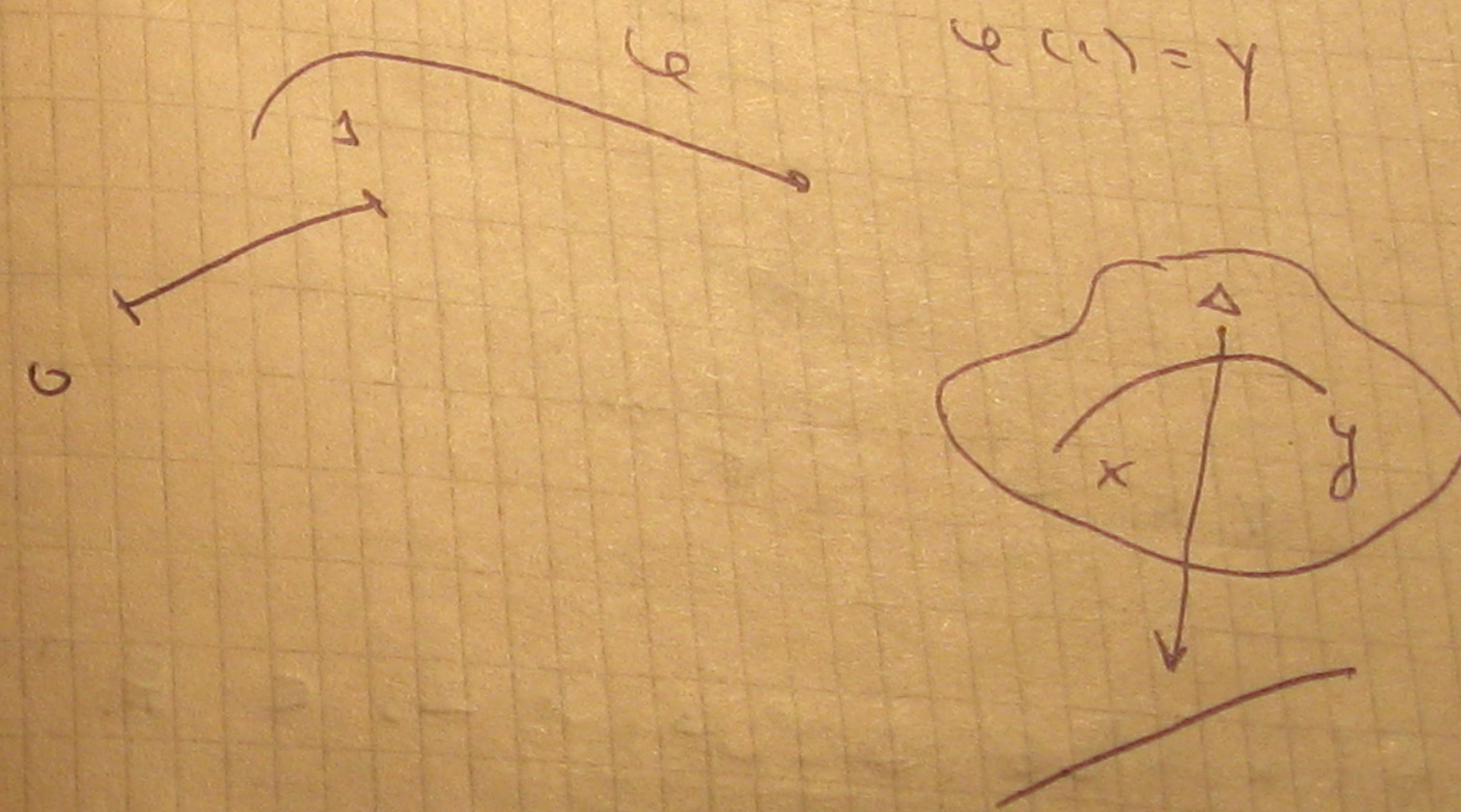
$$y \in A, f(y) > c$$

$$A \text{ свързано} \Rightarrow \exists \varphi: [0,1] \rightarrow A$$

непрекъснато

$$\varphi(0) = x$$

$$\varphi(1) = y$$



$$f \circ \varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\varphi(0)) = f(x)$$

$$f(\varphi(1)) = f(y)$$

$$f \circ \varphi(0) \leq c \leq f \circ \varphi(1) \quad \text{Болюано}$$

$$\Rightarrow \exists t \in [0,1] \quad f(\varphi(t)) = c$$

$$\Rightarrow z = \varphi(t) \in A$$

Th на Фубини



$$f(x, y) \quad \begin{matrix} x \in \Delta_1 \subset \mathbb{R}^n \\ \text{нар} \\ y \in \Delta_2 \subset \mathbb{R}^m \\ \text{нар} \end{matrix}$$

$$f(x, y) \in \Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

f е интегрируема в Δ

$$\begin{matrix} \downarrow \text{фиксирана} \\ f(x, \cdot) : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R} \end{matrix}$$

$$\varphi(x) = \int_{\Delta_2} f(x, y) dy \quad (\text{sup})$$

$$\varphi(x) = \int_{\Delta_2} f(x, y) dy$$

~~и~~

$$\varphi : \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ и } \psi \text{ са интегрируеми в } \Delta_1 \text{ и}$$

$$\int_{\Delta_1} \varphi(x) dx = \int_{\Delta_1} \psi(x) dx =$$

$$= \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$$

Следствие:

$$f : \Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}$$

е непрекъснатата, то

$f(x, \cdot)$ е интегрир. за $\forall x$

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_{\Delta_1} \left(\int_{\Delta_2} f(x, y) dy \right) dx$$

$$\int_{\Delta_2} \left(\int_{\Delta_1} f(x, y) dx \right) dy$$

Ако не е непрер.

$$\int_{\Delta_2} f(x, y) dy \text{ може да } \neq$$

радиус

$$\frac{z_0 R}{H}$$

рпч

$$x dy) dz =$$

$$dz =$$

$$= \iint_D \left(H - (x^2 + y^2) \frac{H^2}{R^2} \right) dx dy \dots$$

Полярна смяна

30.10.2013г.

Лекция

$U \subset \mathbb{R}^n$ отворено

(a) U е мн. свързано

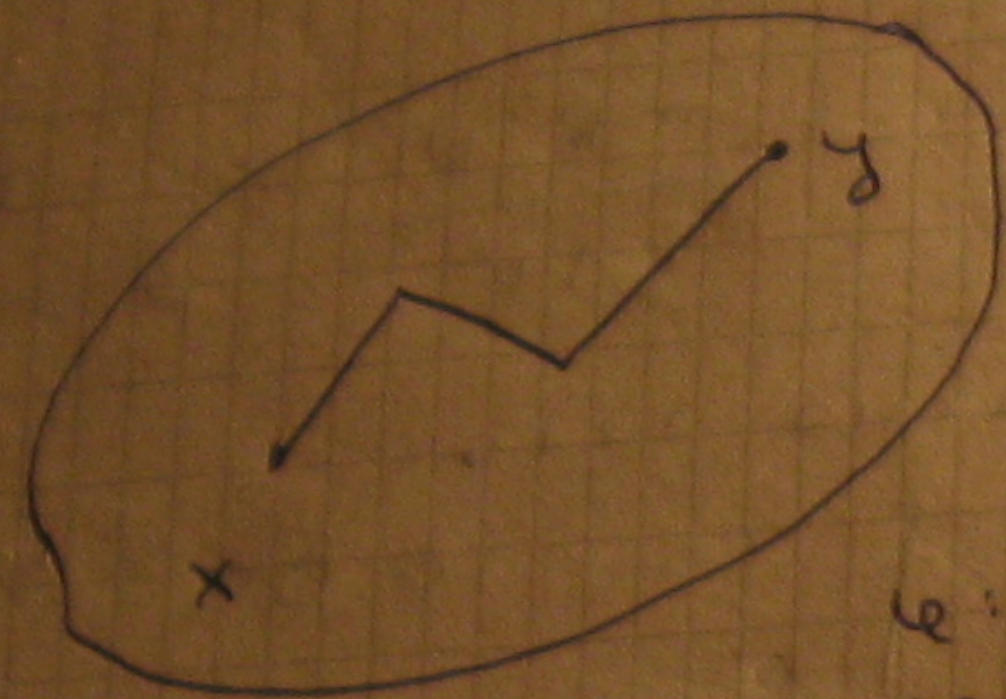
(б) $U = U_1 \cup U_2$

U_1 и U_2 - отг.

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset \Rightarrow$$

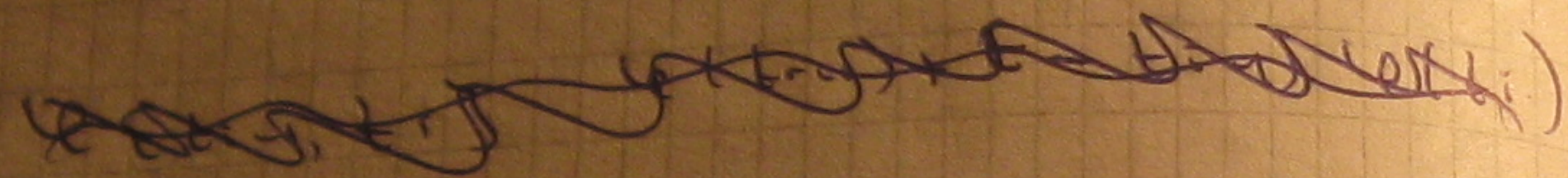
$$U_1 = \emptyset \text{ или } U_2 = \emptyset$$

(в) $\forall x, y \in U \exists$ крива в U
скажем x и y



$\varphi: \{0,1\} \rightarrow U$
непр.

$$0 = t_0 = t_1 \dots < t_n = 1$$



a) $\Rightarrow \delta$

и не мин. связано

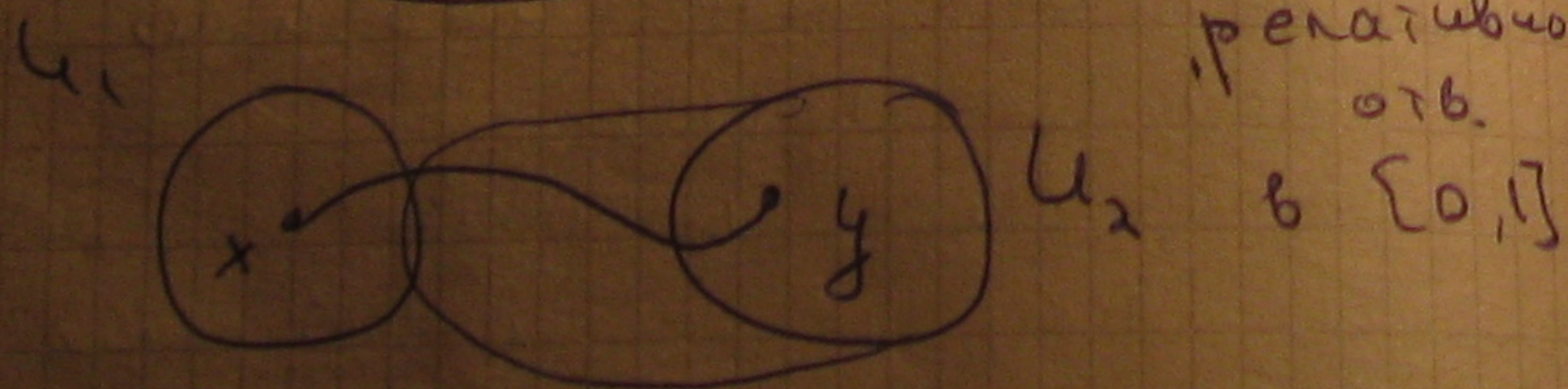
$$f: \{0,1\} \rightarrow U \quad \forall x \forall y$$

$$\begin{cases} x \in U_1 & \text{не са} \\ y \in U_2 & \text{празни} \end{cases}$$

$$f(0) = x; f(1) = y$$

$$I = \{0,1\} = f^{-1}(U) = f^{-1}(U_1 \cup U_2)$$

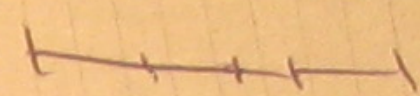
$$= f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$$



релативно
отв.

в $\{0,1\}$

и не измеримо по

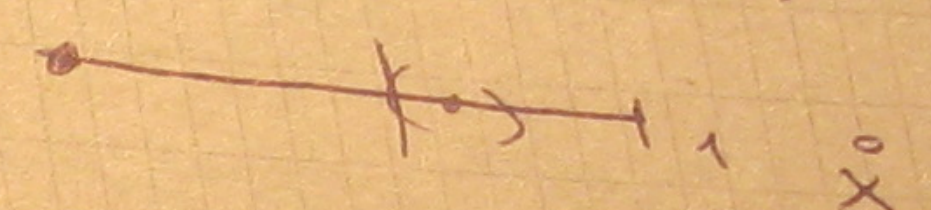


$$\sup f^{-1}(U_1) \begin{cases} f^{-1}(U_1) \\ f^{-1}(U_2) \end{cases}$$

$$1 \neq \sup f^{-1}(U_1) \subset f^{-1}(U_1)$$

$$f^{-1}(U_1) \ni x_1 > \sup f^{-1}(U_1) \quad x_0$$

ако $\in f^{-1}(U_2)$



и-во Боуано

$$(5) \Rightarrow (6)$$

и-отворено

$a \in U$

$$H = \{a' \in U \mid (a \text{ свърз. с } a')\}$$

$a \in H$

$$K = U \setminus H$$

$$\bigwedge \text{сл. } x' \in H \in U \quad \bigwedge \text{сл. } x' \in K$$

$$\forall \epsilon (x) \subseteq U$$

$$\epsilon > 0$$



$$x' \in B_\varepsilon(x) \\ \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq H \\ \Rightarrow H \text{ - отворено}$$

Или $x' \in K$



$$x' \in B_\varepsilon(x) \subseteq U$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq K$$

K -отвор.

$$U = H \cup K \\ U \subseteq H$$

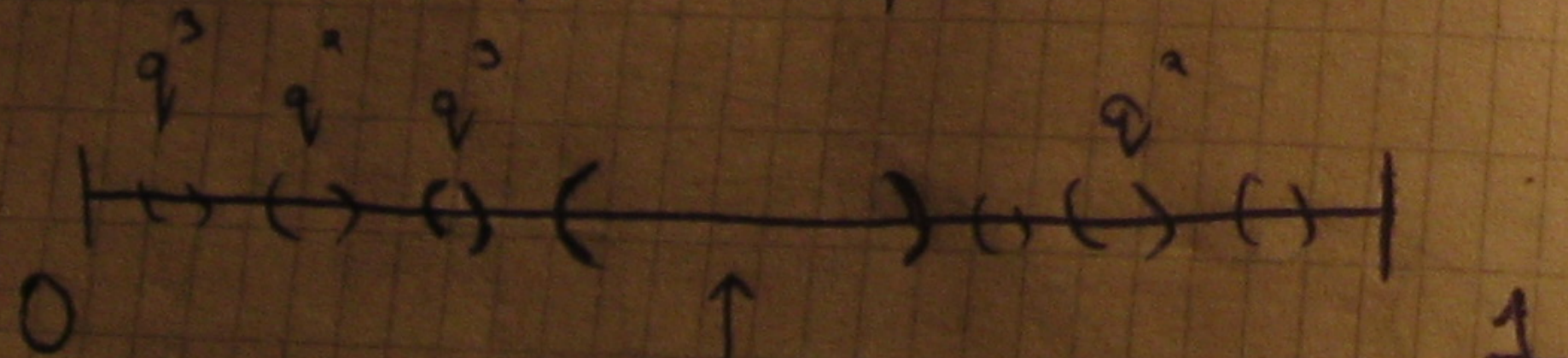
Пример контакт ~~на~~
? неизмерими контакти

Пример за неизмерим контакт

K контакт

$$K = \emptyset \text{ (т.е. } K = 2K)$$

и K не е пренебрежлив



$$q < \frac{1}{3}$$

дължина $q, q^2, q^3, \dots$

марка $1-q$

$$1 - q - 2q^2 \\ 1 - q - 2q^2 - 2^2 q^3$$

$$1 - q(1 + 2q + 4q^2 + \dots) = \\ = 1 - q \cdot \frac{1}{1 - 2q} =$$

$$= \frac{1 - 2q - q}{1 - 2q} = \frac{1 - 3q}{1 - 2q} > 0$$

$$q < \frac{1}{3}$$

външната
марка е > 0
 $\Rightarrow$ не е измеримо

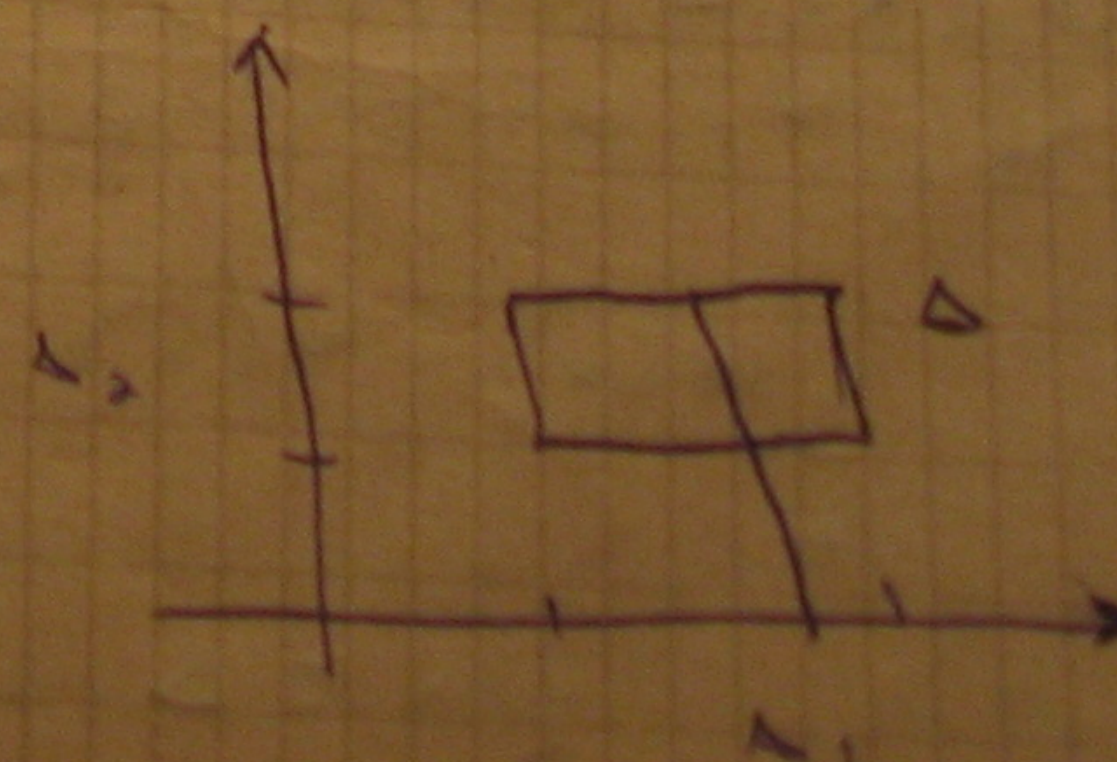
Th на Фубини

$$f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

$$\text{пар } \Delta_1 \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\text{пар } \Delta_2 \subseteq \mathbb{R}^m$$



менусе
 f -интегруема $f(x, \cdot) : \Delta_2 \rightarrow \mathbb{R}$
 от f фикс.

$$\varphi(x) = \int_{\Delta_2} f(x, y) dy$$

$$\psi(x) = \int_{\Delta_2} f(x, y) dy$$

Тогава φ и ψ са интегруеми
 в Δ_1 и

$$\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy = \int_{\Delta_1} \varphi(x) dx = \int_{\Delta_1} \psi(x) dx$$

Следователно: $\iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$
 f е интегр.
 $= \int_{\Delta_1} \left(\int_{\Delta_2} f(x, y) dy \right) dx$

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \forall x \in \Delta_1$$

φ, ψ -интегруеми в Δ_1

$$\int_{\Delta_1} \varphi(x) - \psi(x) dx = 0$$

$$\Rightarrow \{x \in \Delta_1 : \varphi(x) \neq \psi(x)\}$$

е пренебрежимо

инт.
 $\lambda(x) = \psi(x) - \varphi(x)$
 $\int_{\Delta_1} \lambda(x) dx = 0$

Доп. противното

$$B = \{x \mid \lambda(x) > 0\}$$

не е пренебр.

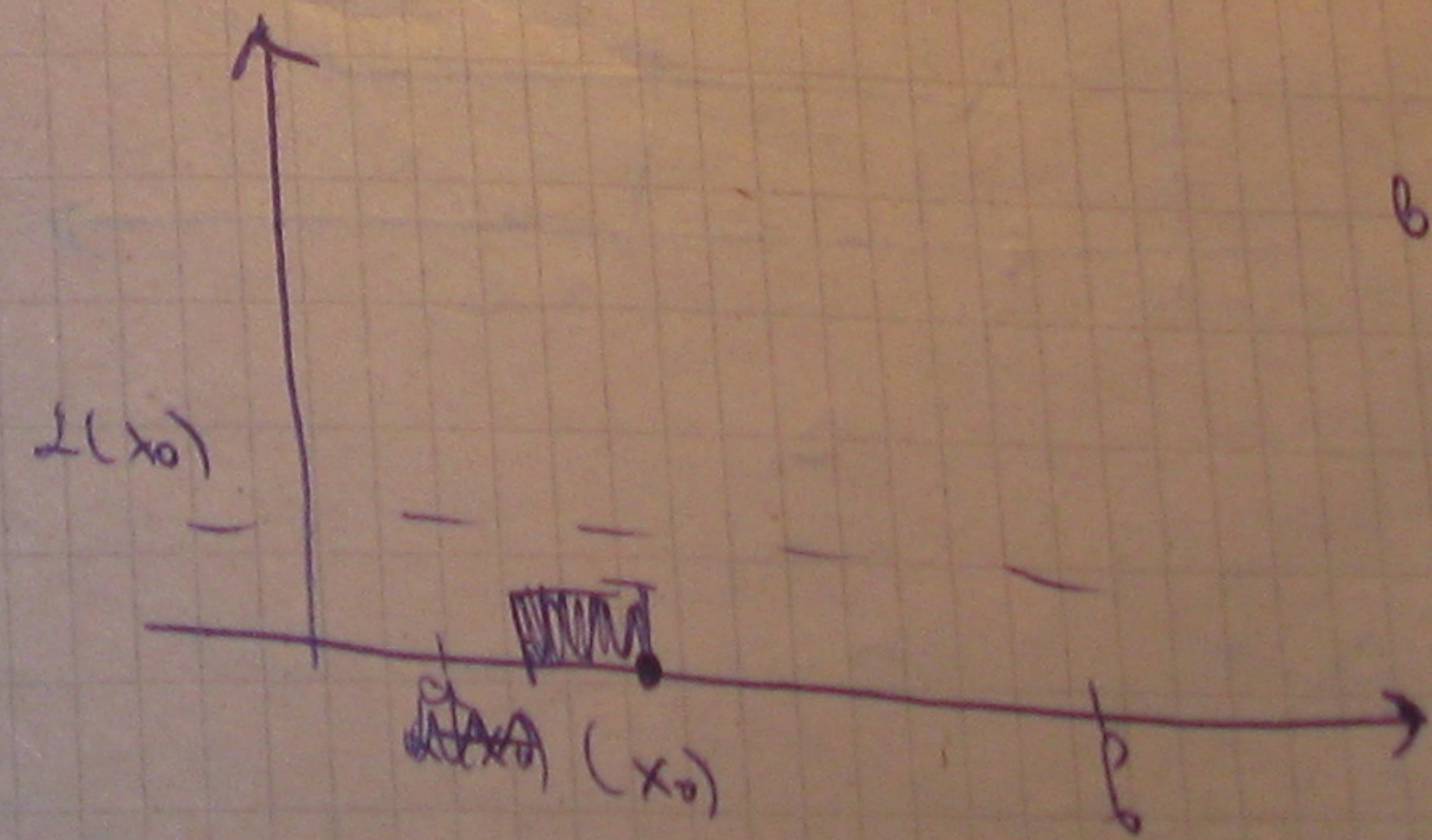
$$C \subset B \quad \lambda(x) > \delta > 0$$

Воп.
 ? $B_n = \{x \in \Delta_1 : \lambda(x) > \frac{1}{n}\}$
 измеримо по П-Ж
 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$

$\exists B_{n_0}$ не е пренебрежимо

$$B = \{x \mid \lambda(x) > 0\} \text{ и } \lambda \text{ непр. в } x$$

$x_0 \in \Delta_1$
 λ непр. в x_0
 $\lambda(x_0) > 0$



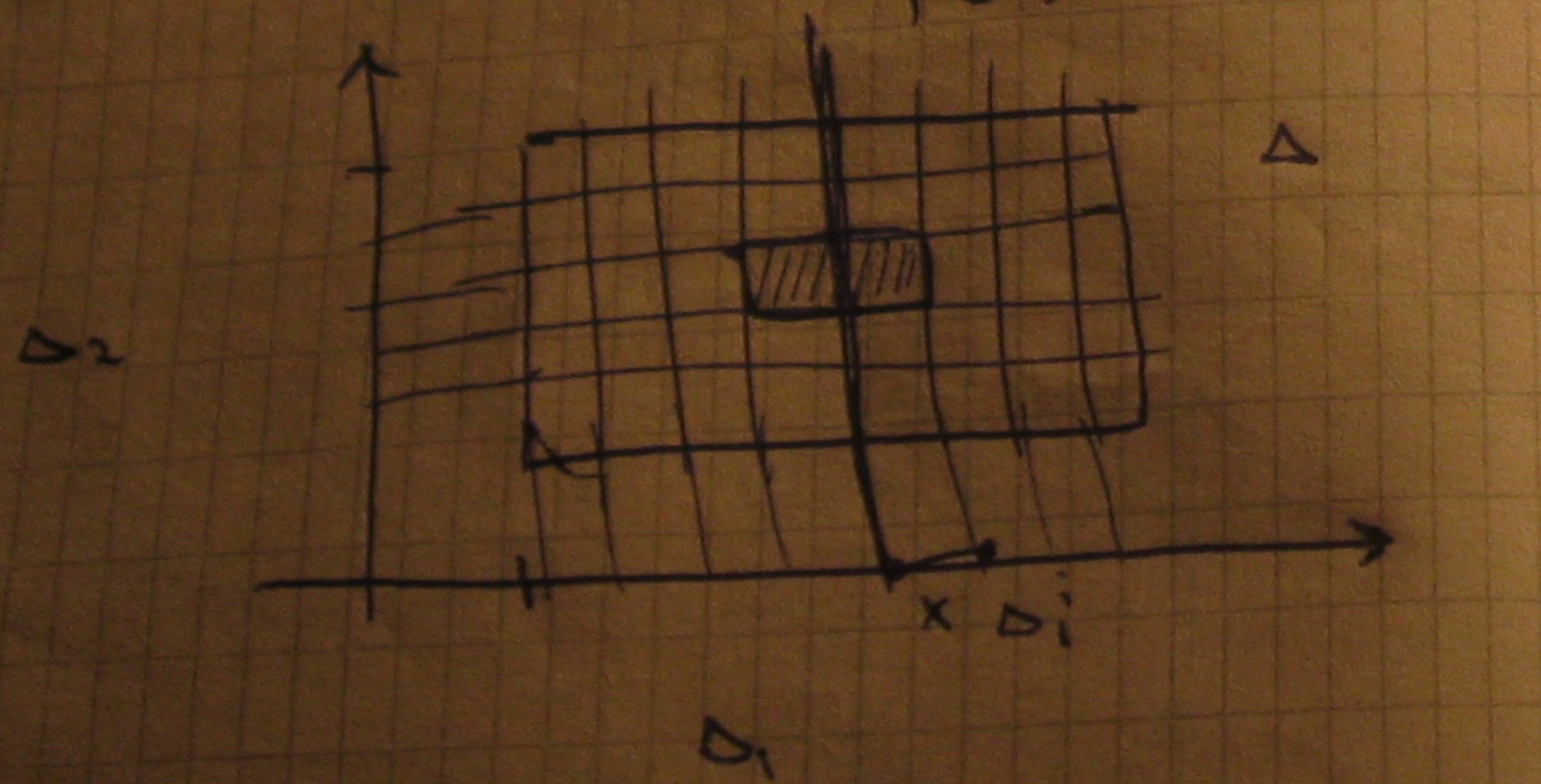
в цяла ок-т
 > 0

Δ — неізроген пар. центр x_0
 $\forall x \in \Delta_1 \cap \Delta_2$
 $\varphi(x) > \frac{\varphi(x_0)}{2}$ от непрекъснатостта

$\Delta_0 = \Delta_1 \cap \Delta_2$ е неізроген паралелограм

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta_1} \varphi(x) dx &\geq \int_{\Delta_0} \frac{\varphi(x_0)}{2} \cdot \chi_{\Delta_0} dx = \\
 &= \frac{\varphi(x_0)}{2} \cdot \mu(\Delta_0) > 0
 \end{aligned}$$

Д-во:



$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \{\Delta_i^1\}_{i=1}^{i_0} \text{ покр. за } \Delta_1 \\
 \Pi_2 &= \{\Delta_j^2\}_{j=1}^{j_0} \text{ покр. за } \Delta_2
 \end{aligned}$$

$$\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2 = \{\Delta_i^1 \times \Delta_j^2\}_{i=1, j=1}^{i_0, j_0}$$

$$m_{ij} = \inf \{ \varphi(x, y) : (x, y) \in \Delta_i^1 \times \Delta_j^2 \}$$

$$S_\varphi(\Pi) = \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{j_0} m_{ij} \mu_{n+m}(\Delta_i^1 \times \Delta_j^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0} \sum_{j=1}^{j_0} m_{ij} \mu_n(\Delta_i^1) \mu_m(\Delta_j^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0} \mu_n(\Delta_i^1) \underbrace{\sum_{j=1}^{j_0} m_{ij} \mu_m(\Delta_j^2)}_{m_j(x)}$$

$$m_{ij} \leq m_j(x) = \inf \{ \varphi(x, y) : y \in \Delta_j^2 \}$$

$$\sum_{j=1}^{j_0} m_{ij} \mu_m(\Delta_j^2) \leq \sum_{j=1}^{j_0} m_j(x) \mu_m(\Delta_j^2)$$

майка

уमानа допду

$$S_\varphi(x, \cdot)(\Pi_2) \leq \underline{\varphi(x)}$$

$$\forall x \in \Delta_1$$

$$\tilde{m}_i = \inf \{ \varphi(x) \mid x \in \Delta_i \}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{i_0} m_{ij} \mu_m(\Delta_j^i) \leq \tilde{m}_i$$

Роз

$$\Rightarrow S_\varphi(n) \leq \sum_{i=0}^{i_0} \mu_n(\Delta_i) \tilde{m}_i = S_\varphi(n_1)$$

$$S_\varphi(n) \leq S_\varphi(n_1)$$

$$S_\varphi(n) \geq S_\varphi(n_1)$$

$$S_\varphi(n) = S_\varphi(n_1) = S_\varphi(n_1) =$$

$$S_\varphi(n_1) \leq S_\varphi(n) \quad (*)$$

$$\varepsilon > 0$$

φ интегрируема

$$\Rightarrow \exists \Pi \text{ подгр. н.о. } \delta$$

$$S_\varphi(n) - s_\varphi(n) < \varepsilon$$

$$\text{Б.О.О. } \Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$$

$$\Rightarrow S_\varphi(n_1) - s_\varphi(n_1) \leq S_\varphi(n) - s_\varphi(n) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ непрерыв.}$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta_1} \varphi \leq S_\varphi(n)$$

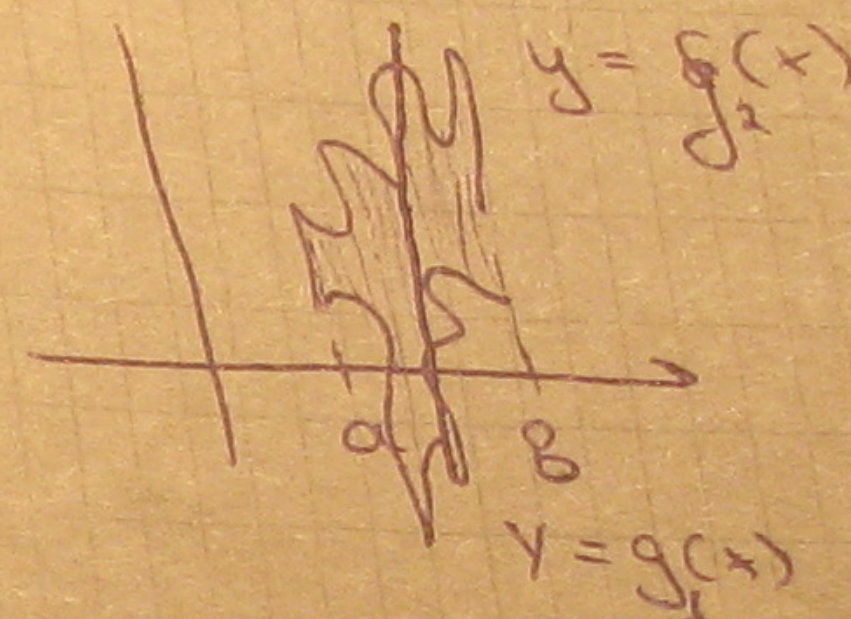
$$\Rightarrow \int_{\Delta_1} \varphi(x) dx = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$$

за φ Аналогично

$$S_\varphi(n_1) \leq S_\varphi(n_1) < \dots$$

1) Улт. в/у криволинейен трапез

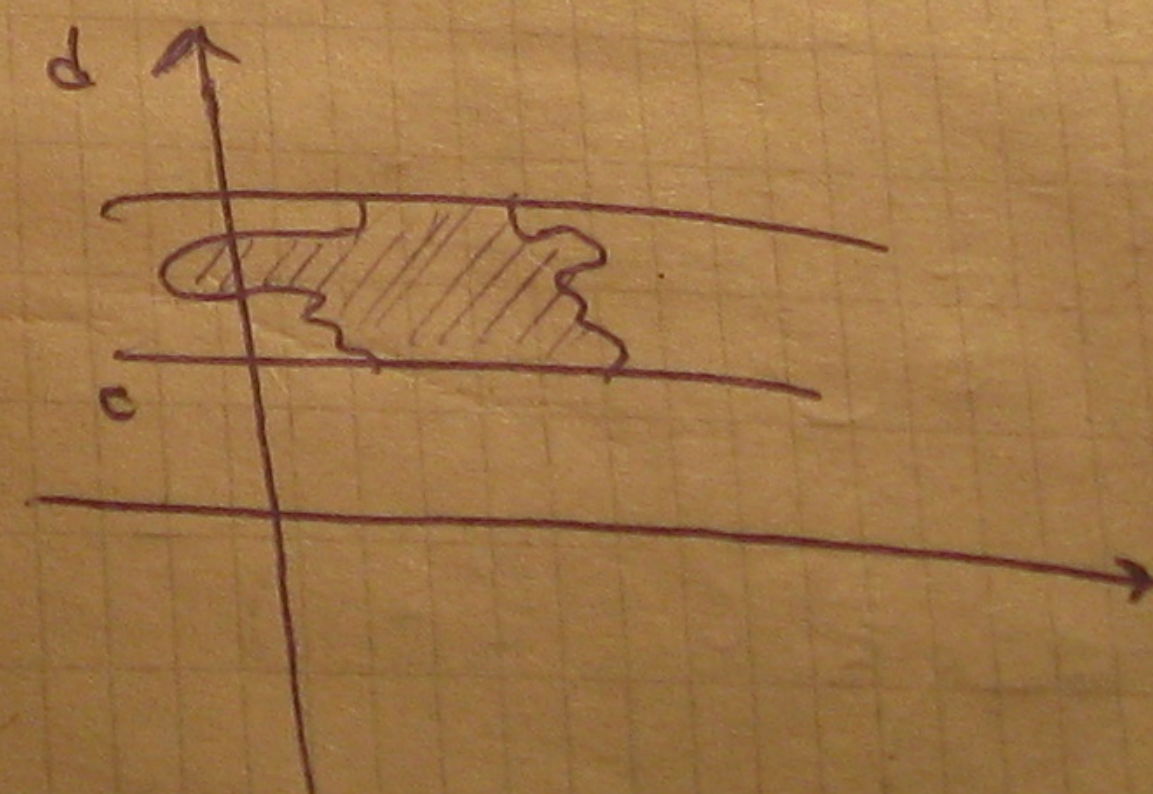
$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$



$$g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

непр.

$$g_1(x) \leq g_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$



$$\{ x, y \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \}$$

$$h_1, h_2$$

непр.

$$[c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h_1(y) \leq h_2(y)$$

$$\forall y \in [c, d]$$