ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
12 февруари 2013г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Дефинирайте риманов интеграл от ограничената функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$ (тук Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$) чрез суми на Дарбу. Формулирайте двете леми. Докажете, че f е интегруема точно тогава, когато за всеки две положителни числа ε и η съществува подразделяне $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ на Δ такова, че

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu(\Delta_i) < \varepsilon$$

където $M_i = \sup\{f(x) \ : \ x \in \Delta_i\}$ и $m_i = \inf\{f(x) \ : \ x \in \Delta_i\}$.

2. Разгледайте фигурата

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ \ y \leq x\}$$

Представете $\int\int_K f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ като повторен (тук f е непрекъсната функция, дефинирана в K). Не сменяйте променливите!

3. Дайте дефиниция на множество, пренебрежимо по Лебег. Докажете, че изброимо обединение на множества, пренебрежими по Лебег, е множество, пренебрежимо по Лебег.

4. Използвайте принципа на Кавалиери, за да пресметнете обема на четirимерното кълбо

$$B_r^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq r^2\}$$

с радиус r. (Използвайте наготово, че обемът на тримерното кълбо с радиус r е $\frac{4}{3}\pi r^3$.)

5. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$\oint_\Gamma \frac{y-2}{(x-3)^2 + (y-2)^2}\mathrm{d}x - \frac{x-3}{(x-3)^2 + (y-2)^2}\mathrm{d}y \ ,$$

където Γ е произволна проста затворена частично гладка крива, не съдържаща точката $(3, 2)$. **Упътване:** Отговорът зависи от взаимното разположение на точката и кривата!

6. Изведете формулата за потенциал на гладко векторно поле, удовлетворяващо необходимото условие за потенциалност, в област, която е отворен паралелепипед в $\mathbb{R}^3$.

7. Разгледайте хомогенна материална нишка, разположена по половин арка на циклоидата:

$$\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \ \ 0 \leq t \leq \pi.$$

Намерете центъра на масите на тази нишка.

8. Нека F е гладко векторно поле в $\mathbb{R}^3$. Да означим с S_ε сферата с център x и радиус ε, ориентирана с външната (към кълбото) нормала. Докажете, че

$$divF(x) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{\int\int_{S_\varepsilon} < F, n > ds}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3}$$