ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
2 февруари 2012г.
Име:.. Фак.номер:.............

1. Нека $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ е изображение с дефиниционна област $D \subset \mathbb{R}^n$. Дайте дефиниция на "множество, релативно отворено в D". Докажете, че f е непрекъсната в D точно тогава, когато първообразът $f^{-1}(U) := \{x \in D : \ f(x) \in U\}$ на всяко отворено подмножество U на $\mathbb{R}^m$ е релативно отворено в D.

2. Дефинирайте риманов интеграл от ограничена реалнозначна функция с дефиниционна област паралелотоп Δ в $\mathbb{R}^n$ чрез подхода на Дарбу. Формулирайте и докажете двете леми, необходими за това.

3. Нека $D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0, \ (x-1)^2 + y^2 \geq 1, \ (x-2)^2 + y^2 \leq 4\Big\}$ и $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, дефинирана в D. Представете интеграла $\displaystyle\int\!\!\int_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ като повторен веднъж с външно интегриране по x и веднъж с външно интегриране по y. Напишете в явен вид множеството ∂D.

4. Дайте дефиниция на "множество, пренебрежимо по Лебег". Докажете, че едно подмножество на $\mathbb{R}^n$ е пренебрежимо по Лебег точно тогава, когато за всяко положително число ε множеството може да се покрие с изброимо много отворени паралелотопи със сумарна мярка, по-малка от ε. Докажете, че всяко компактно пренебрежимо по Лебег множество е измеримо по Пеано-Жордан и мярката му (в $\mathbb{R}^n$) е нула.

5. Изразете криволинейния интеграл от първи род $\displaystyle\int_\Gamma f(x, y)\mathrm{d}s$ чрез обикновен риманов интеграл, ако кривата Γ е зададена в полярни координати чрез уравнението $\rho = \rho(\varphi)$, където ρ е полярният радиус, φ е полярният ъгъл и φ се мени в интервала $[\varphi_1, \varphi_2]$. Използвайте полученото, за да пресметнете интеграла $\displaystyle\int_\Gamma (x - y)\mathrm{d}s$, където $\Gamma = \{x^2 + y^2 = x\}$, параметризирайки кривата Γ по подходящ начин.

6. Дайте дефиниция на това какво значи едно поле да е потенциално. Докажете, че ако непрекъснатото векторно поле е потенциално, то криволинейният интеграл от втори род не зависи от пътя, а само от крайните точки. Намерете потенциал за полето

$$F(x, y) = \left(e^x(x + \ln y + 1)\ , \ \frac{e^x}{y}\right) \ .$$

В каква област е дефинирано полето F? Едносвързана ли е тази област?

7. Нека S е елементарна параметрично зададена гладка повърхнина в $\mathbb{R}^3$. Докажете, че в околност на всяка точка от повърхнината тя може да бъде зададена в явен вид (две от променливите играят роля на параметри, а третата е тяхна функция). Напишете формулата за лице на гладка (двумерна) параметрично зададена повърхнина в $\mathbb{R}^3$. Изведете от нея формулата за лице на явно зададена повърнина.

8. Формулирайте теоремата на Гаус-Остроградски. Докажете я за област, която е цилиндрично тяло по всяка от трите променливи.