ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
26 август 2011г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Нека A е подмножество на n-мерното евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Дайте дефиниция на ∂A (контур на A). Докажете, че $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$, където A и B са произволни подмножества на $\mathbb{R}^n$.

2. Формулирайте теоремата на Лебег. Докажете с нейна помощ, че ако функциите $f, g : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$, където Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$, са интегруеми по Риман, то функцията произведение $f.g : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$ също е интегруема по Риман.

3. Формулирайте теоремата на Фубини. Докажете, че фигурите, които се представят като цилиндрично тяло, са измерими по Пеано-Жордан. Обосновете свеждането на троен интеграл върху цилиндрично тяло от непрекъсната функция към повторен (двоен външен интеграл и еднократен вътрешен). Намерете координатите на центъра на тежестта на хомогенното тяло

$$K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le z^2 \le 1\right\} .$$

4. Разгледайте функцията $f(x) = \langle x, a \rangle . \operatorname{arctg} \|x\|$, където $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и a е векторът $(5, 6, -1)$. Пресметнете $\mathbf{grad} f$. Каква е стойността на $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad} f)$ и защо?

5. Нека $\Delta = (a, b) \times (c, d)$ е отворен правоъгълник в $\mathbb{R}^2$ и нека $F = (F_1, F_2)$ е гладко векторно поле в Δ, което удовлетворява необходимото условие за потенциалност. Напишете явна формула за потенциал на F в Δ (като, разбира се, проверите, че функцията, зададена с така написаната формула, наистина е потенциал за F).

6. Пресметнете повърхнния интеграл от първи род $\int\int_S z \mathrm{d}s$, където S е параметрично зададената хеликоидна повърхнина

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix} , \ (u, v) \in [0, a] \times [0, 2\pi].$$

7. Пресметнете интеграла на Гаус

$$\int\int_S \left\langle \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^3}, \mathbf{n} \right\rangle$$

където S е частично гладка повърхнина, контур на областта $G \subset \mathbb{R}^3$, S е ориентирана с външната нормала $\mathbf{n}$ за G и $x_0 \in G$.