ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
17 февруари 2011г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Нека Δ е правоъгълник в равнината и $f : \Delta \to \mathbb{R}$ е ограничена функция. Дефинирайте малка и голяма сума на Дарбу за функцията f. Дайте дефиниция на риманов интеграл от f върху Δ чрез подхода на Дарбу. Формулирайте критерия за интегруемост във втора форма.

2. Представете интеграла $\int\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (тук K е множеството $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ y \ge 0, \ x^2 + y^2 \ge 2x, \ y^2 \le 2x\}$, а $f : K \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция) като повторен веднъж с външно интегриране по x и веднъж с външно интегриране по y.

3. Дайте дефиниция на множество, пренебрежимо по Лебег. Докажете, че изброимо обединение на пренебрежими множества е пренебрежимо.

4. Формулирайте теоремата на Лебег (за интегруемост по Риман). Дайте дефиниция на индикаторна (характеристична) функция на подмножество A на $\mathbb{R}^n$. Намерете (с обосновка) множеството от точките на прекъсване на тази функция. Кое е множеството от точките на прекъсване на характеристичната функция на K, където K е множеството, дефинирано в задача 2?

5. Нека F е непрекъснато векторно поле, дефинирано в областта $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Докажете, че ако криволинейният интеграл от втори род върху частично гладка крива $\Gamma \subset \Omega$ с начало A и край B не зависи от Γ, а само от A и B, то полето F е потенциално.

6. Напишете формулата за свеждане на повърхнинен интеграл от първи род към двоен риманов интеграл. Нека φ_1 и φ_2 ($\varphi_1 < \varphi_2$) са дължините на два меридиана, а ψ_1 и ψ_2 ($\psi_1 < \psi_2$) са ширините на два паралела (в радиани) върху сфера с радиус R. Пресметнете площта на частта от сферата, заключена между тези два паралела и два меридиана.

7. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^2$ с частично гладка граница $\partial\Omega$ и нека $F = (F_1, F_2)$ е гладко векторно поле, дефинирано в околност на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Докажете формулата на Грийн за F и Ω, ако $\overline{\Omega}$ е криволинеен трапец и по двете променливи.

8. Нека S е явно зададената повърхнина $z = \sqrt{4x - x^2 - y^2}$, $(x,y) \in D := \{x^2 + y^2 \le 2x\}$. Напишете единично нормално векторно поле, което ориентира S и е съгласувано с естествената параметризация. Нека Γ е краят на S, ориентиран така, че S да остава от лявата страна (Γ е сечението на повърнините, определени с уравненията $z = \sqrt{4x - x^2 - y^2}$ и $x^2 + y^2 = 2x$). Приложете формулата на Стокс към криволинейния интеграл от втори род

$$\int_\Gamma (y^2 + z^2)\mathrm{d}x + (x^2 + z^2)\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\mathrm{d}z$$

и повърхнината S. Ще можете да пресметнете получения интеграл особено лесно, ако използвате подсказването, че $\displaystyle\int\int_D \frac{y}{\sqrt{4x - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$.