ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
14 април 2009г.
Име:.. Фак.номер:.............

1. Нека A е произволно подмножество на $\mathbb{R}^n$. Дайте дефиниция на ∂A(контура на A). Докажете, че ∂A е затворено множество.

2. Дефинирайте риманов интеграл от ограничената функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$ (тук Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$) чрез суми на Дарбу. Докажете, че f е интегруема точно тогава, когато за всеки две положителни числа ε и η съществува подразделяне $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ на Δ такова, че

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu(\Delta_i) < \varepsilon$$

където $M_i = \sup\{f(x)\ :\ x \in \Delta_i\}$ и $m_i = \inf\{f(x)\ :\ x \in \Delta_i\}$.

3. Представете тройния интеграл

$$\int\int\int_K f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

като повторен по два начина: с двукратен външен интеграл и еднократен вътрешен и с еднократен външен интеграл и двукратен вътрешен. Тук f е непрекъсната функция, дефинирана върху тялото

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq z\}\ .$$

4. Нека $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, дефинирана в компактното множество $K \subset \mathbb{R}^2$. Докажете, че графиката на f е пренебрежимо множество в $\mathbb{R}^3$.

5. Дайте дефиниция на потенциал на векторно поле. Пресметнете потенциала на гравитационното поле

$$F(x) = -\frac{x}{\|x\|^3},\ \ x \neq (0,0,0).$$

6. Нека Ω е отворен правоъгълник в $\mathbb{R}^2$ и нека $F = (F_1, F_2)$ е гладко векторно поле, дефинирано в Ω, което удовлетворява необходимото условие за потенциалност. Напишете в явен вид формула за потенциал за F в Ω и докажете, че фунцията, дефинирана с така написаната формула, наистина е потенциал за даденото векторно поле.

7. Намерете координатите на центъра на масите на хомогенна материална полусфера с радиус R и център в началото на координатната система.

8. Формулирайте теоремата на Гаус-Остроградски. Докажете с нейна помощ закона на Архимед.