ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
11 февруари 2009г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Формулирайте и докажете теоремата на Вайерщрас за непрекъснато изображение $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$, където K е компактно подмножество на $\mathbb{R}^m$.

2. Докажете, че обединението на изброимо много множества, пренебрежими по Лебег, е множество, пренебрежимо по Лебег.

3. Формулирайте теоремата на Лебег. Докажете с нейна помощ, че ако функцията $f : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}$, където Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$, е интегруема по Риман, то функцията $|f|$ също е интегруема по Риман.

4. Формулирайте теоремата на Фубини. Докажете, че фигурите, които се представят като криволинеен трапец, са измерими по Пеано-Жордан. Обосновете свеждането на двоен интеграл върху криволинеен трапец от непрекъсната функция към повторен.

5. Разгледайте функцията $f(x) = e^{3\|x\|}\langle x, a\rangle$, където $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и a е векторът $(2, 1, 3)$. Пресметнете $\mathbf{grad} f$ и $\mathbf{div}\,(\mathbf{grad} f)$. Каква е стойността на $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad} f)$ и защо?

6. Нека Ω е област в $\mathbb{R}^2$ с частично гладка граница $\partial\Omega$ и нека $F = (F_1, F_2)$ е гладко векторно поле, дефинирано в околност на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Докажете формулата на Грийн за F и Ω, ако $\overline{\Omega}$ е криволинеен трапец и по двете променливи.

7. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$\oint_\Gamma \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right) \mathrm{d}y$$

където Γ е частично гладка проста (без самопресичане) затворена крива в равнината, не минаваща през началото на координатната система.

8. Пресметнете гравитационната сила, с която хомогенна материална полусфера с радиус R и център в началото на координатната система привлича материална точка с маса m_0, разположена в началото на координатната система.

9. Формулирайте теоремата на Стокс. Напишете дефиницията за повърхнинно едносвързана област. Докажете, че ако за едно гладко векторно поле в повърхнинно едносвързана област е изпълнено необходимото условие за потенциалност, то полето е потенциално.