ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
7 септември 2008г.
Име:.. Фак.номер:.............

1. Напишете дефиницията за равномерна непрекъснатост за функция на n променливи. Докажете теоремата на Кантор (непрекъсната функция върху компакт е равномерно непрекъсната) или (по-добре) нейното обобщение, което използвахме.

2. Интегруема ли е функцията

$$f(x,y) = \begin{cases} |e^x - 5|, & \text{ako } x^4 + y^4 \leq 7,\ x \leq 0 \\ -1, & \text{ako } x^4 + y^4 \leq 7,\ x > 0 \\ 0, & \text{ako } x^4 + y^4 > 7 \end{cases}$$

Обосновете отговора си.

3. Формулирайте и докажете теоремата за средните стойности в интегралното смятане (в $\mathbb{R}^n$).

4. Нека $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция на един аргумент и $Grf \subset \mathbb{R}^2$ е нейната графика. Докажете, че Grf е пренебрежимо множество в равнината (т.е. има лице и то е нула).

5. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$\oint_\Gamma \frac{y-2}{(x-3)^2+(y-2)^2}\mathrm{d}x - \frac{x-3}{(x-3)^2+(y-2)^2}\mathrm{d}y\ ,$$

където Γ е произволна проста затворена частично гладка крива, не съдържаща точката $(3,2)$. **Упътване:** Отговорът зависи от взаимното разположение на точката и кривата!

6. Изведете формулата за потенциал на непрекъснато векторно поле, удовлетворяващо необходимото условие за потенциалност, в област, която е отворен паралелепипед в $\mathbb{R}^3$.

7. Да се намери масата на материална сфера, ако повърхностната ѝ плътност във всяка точка е равна на разстоянието от тази точка до вертикалния диаметър.

8. Да разгледаме гладкото векторно поле

$$F(x) = xe^{\|x\|},$$

където $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Пресметнете $\mathbf{div}F(x)$ и $\mathbf{rot}F(x)$.