ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
10 февруари 2008г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Запишете двойния интеграл

$$\int\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ , \qquad K = \{(x,y) \in R^2 :\ x^2 + y^2 \geq 1,\ -1 \leq x \leq 1,\ x + y \leq \sqrt{2}\}$$

като повторен по два различни начина (с външно интегриране по x и с външно интегриране по y).

2. (а) Дайте дефиниция на множество, пренебрежимо по Лебег.
(б) Докажете, че едно компактно множество е пренебрежимо по Лебег точно тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ то може да се покрие с краен брой папалелотопи със сумарна мярка, по-малка от ε.
(в) Дайте дефиниция на множество, измеримо по Пеано-Жордан.
(г) Формулирайте необходимо и достатъчно условие за измеримост по Пеано-Жордан. Докажете го.
(д) Разгледайте множеството

$$A = \{(x,y) \in R :\ x \in Q,\ y \in Q,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Това множество пренебрежимо ли е по Лебег? Дали е измеримо по Пеано-Жорадан? Обосновете се.

3. Дайте дефиниция на това какво значи едно поле да е потенциално. Докажете, че криволинейният интеграл от втори род не зависи от пътя, а само от крайните точки, точно тогава, когато непрекъснатото векторно поле е потенциално. Намерете потенциал за полето

$$F(x,y) = \left(2xe^{x^2}(3y+5), 3e^{x^2} + 1\right)$$

4. Дайте дефиниция на ориентация върху дадена повърхнина. Напишете явно единичната нормала към коничната повърхнина $S = \{(x,y,z) \in R^3 :\ z^2 = 2(x^2+y^2),\ 0 < z < 5\}$, която сочи извън тялото $K = \{(x,y,z) \in R^3 :\ 2(x^2+y^2) \leq z^2, 0 \leq z \leq 5\}$

5. Изведете формулата за площ на повърхнината на ротационно тяло. Пресметнете лицето на тора

$$\varphi(\theta_1, \theta_2) = ((5 + 2\cos\theta_1)\cos\theta_2, (5 + 2\cos\theta_1)\sin\theta_2, 2\sin\theta_1)$$

където параметрите θ_1 и θ_2 се менят в интервала $[0, 2\pi]$.

6. Пресметнете интеграла на Гаус

$$\int\int_S \left\langle \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|^3}, \mathbf{n} \right\rangle$$

където S е частично гладка повърхнина, контур на областта G и $x_0 \in G$.