ИЗПИТ

по Математически анализ, специалност "Приложна математика"
4 септември 2007г.
Име:... Фак.номер:.............

1. Формулирайте и докажете теоремата на Вайерщрас за непрекъсната функция на n променливи.

2. Дефинирайте риманов интеграл от ограничената функция $f : \Delta \to \mathbb{R}$ (тук Δ е паралелотоп в $\mathbb{R}^n$) чрез суми на Дарбу. Докажете, че f е интегруема точно тогава, когато за всеки две положителни числа ε и η съществува подразделяне $\Pi = \{\Delta_i\}_{i=1}^{i_0}$ на Δ такова, че

$$\sum_{M_i - m_i \geq \eta} \mu(\Delta_i) < \varepsilon$$

където $M_i = \sup\{f(x) \ : \ x \in \Delta_i\}$ и $m_i = \inf\{f(x) \ : \ x \in \Delta_i\}$.

3. Дайте дефиниция на множество, пренебрежимо по Лебег. Може ли едно непразно отворено множество да е пренебрежимо по Лебег? Обосновете отговора си.

4. Разгледайте полето

$$F(x, y) = \left(-\frac{y}{(x-1)^2 + y^2} \ , \ \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \right)$$

(а) Изпълнено ли е необходимото условие за потенциалност на F?
(б) Коя е областта от равнината, в която F е дефинирано?
(в) Пресметнете $\int_\Gamma F \mathrm{d}\mathbf{r}$ за произволна частично гладка затворена крива Γ, съдържаща се в дефиниционната област на F. (Упътване: Има два случая.)

5. Намерете координатите на центъра на тежестта на хомогенна материална нишка, разположена по полуокръжност с радиус R с център в началото на координатната система и в горната полуравнина.

6. Нека S е компактна гладка параметрично зададена повърхнина в $\mathbb{R}^3$ ($S = \varphi(K)$, $\varphi \in C^1(K, \mathbb{R}^3)$, K измерим компакт в $\mathbb{R}^2$) и $f : S \to \mathbb{R}$ е непрекъсната функция. Как се свежда повърхнинният интеграл $\int\int_S f \mathrm{d}s$ към риманов? Пресметнете

$$\int\int_S \frac{\mathrm{d}s}{(10-y)^2} \ , \quad S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + 2y + 3z = 6, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0 \right\}$$

7. Напишете формулата на Гаус-Остроградски. Изведете с нейна помощ закона на Архимед.