ИЗПИТ

по Математически анализ и диференциална геометрия
12 септември 2004г.
Име:.. Фак.номер:............

1. Напишете обема на пресечения конус, определен с $x^2 \geq y^2 + z^2$, $x \in [1, 2]$, с помощта на троен интеграл. Представете интеграла като повторен с външно интегриране по всяка от трите променливи. Запишете пресечения конус във вид на цилиндрично тяло. Пресметнете обема му.

2. Формулирайте теоремата на Лебег за интегруемите по Риман функции. Докажете с нейна помощ, че произведение на интегруеми по Риман функции е интегруема по Риман функция.

3. Нека $\alpha : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^3$, където Δ е интервал, е гладка векторна функция на скаларен аргумент. Нека $\dot{\alpha}(t)$ е перпендикулярно на $\alpha(t)$ за всяко $t \in \Delta$. Докажете, че $\alpha(t)$ е с постоянна дължина, т.е. $\| \alpha(t) \| \equiv const$.

4. Разгледайте полето на тежестта, създадено от материална точка, разположена в началото на координатната система:

$$F(x) = -\frac{x}{\|x\|^3}$$

където x е вектор в $\mathbb{R}^3$.
(а) В коя област е дефинирано това поле? Повърхнинно едносвързана ли е тази област?
(б) Потенциално ли е полето? Ако отговорът Ви е "да", намерете потенциала в явен вид.
(в) Как ще пресметнете криволинейния интеграл от втори род от полето F по гладката крива $\alpha([a, b])$ с крайща $\alpha(a) = A$ и $\alpha(b) = B$? Обосновете отговора си.

5. Разгледайте в $\mathbb{R}^3$ системата

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = x$$

Намерете максимално отворено подмножество на пространството $\mathbb{R}^3$, в което тази система определя гладка повърхнина.

6. Изведете формулата за площ на ротационна повърхнина. Намерете площта на тора

$$\varphi(u, v) = (b \cos u, (a + b \sin u) \cos v, (a + b \sin u) \sin v)\,,$$

където $a > b > 0$ са дадени константи, а параметрите се менят в областта

$$\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi,\ 0 < v < 2\pi\}$$

.