<u>5. Модел хищник - жертва</u>

Моделът на хищник-жертва е един от най-старите. След Първата световна война в Йонийско море (между Италия и Хърватия) се намирали много мини. Там живеел математика Вито Волтера – математик, физик, специалист по диференциални уравнения. Той имал роднина ихтиолог (специалист по риби). Там са се наблюдавали основно 2 вида риби – големи и малки. И двата вида били хищни. Обаче, забелязвало се е, че един път доминират едните, друг път – другите. („Математическа теория на преживяването" – книга на Волтер). Това наблюдение го тласка към опити да опише билогическите взаимотношения чрез математатически модел, репрезентация. Нека разгледаме модела хищник-жертва, като зададем конкретни стойности – на хищника присвояваме вида лисица, а на жертвата – заек. Величините за техния брой – x и y – представляват функции на времето t.

$x(t)$ *- брой на жертвите (зайците) (става дума за непрекъснато време)*

$y(t)$ *- брой на хищниците (лисици)*

Да разгледаме производните:

$\frac{\partial x}{\partial t} = ax$ *– числеността на жертвата расте експоненциално, ако няма хищници (както в Австралия – преди време са заселили зайци на този континент, но там те са нямали естествен враг, което довело до изключително многобройни популации от зайци. Директно следствие е удар върху стопанството)*

$\frac{\partial y}{\partial t} = -py$*– числеността на хищника намалява експоненциално, ако няма жертви*

Волтера предположил, че актовете на жертва(т.е. моментите време, в които животно става жертва) са пропорционални на броя срещи между индивиди от вида-хищник и вида-жертва..

Затова: $\left|\begin{array}{l}\frac{\partial x}{\partial t} = ax - bxy \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -py + cxy\end{array}\right.$

Тук положителните коефициенти b и c представляват числа, с които се преценя реалния брой срещи, можещи да се осъществят между хищник и жертва. При първото уравнение – имаме намаляне числеността при наличие на срещи, поради наличието на жертви от страна на вида, чиято численост е x. При второто уравнение имаме увеличаване на числеността y, поради набавяне на храна – благоприятни условия за вида-хищник.

Има ли равновесие? Изравняваме уравненията на системата с 0:

$$\left|\begin{array}{l}\frac{\partial x}{\partial t} = ax - bxy = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -py + cxy = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}a - by = 0 \\ -p + cx = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}y = \frac{a}{b} \\ x = \frac{p}{c}\end{array}\right.$$

т.е. равновесната точка е $\left(\frac{p}{c}, \frac{a}{b}\right)$.

Твърдим следното за получените траектории:

- Могат да бъдат криви, които се извиват около равновесна точка;
- Могат да бъдат циклични криви, които се извиват около равновесна точка.

Две траектории никога не се пресичат (т.е. представляват спирали).

$$\left|\begin{array}{l}u = x - \frac{p}{c} \\ v = y - \frac{a}{b}\end{array}\right.$$

Имаме линейна връзка:

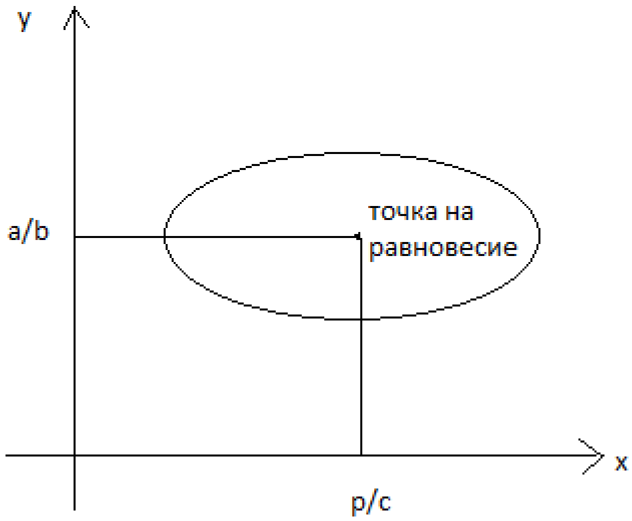
$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \left(u + \dfrac{p}{c}\right)\left(a - b\left(v + \dfrac{a}{b}\right) = -\dfrac{bp}{c}v - buv \right. \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial t} = \left(v + \dfrac{a}{b}\right)\left(-p + c\left(u + \dfrac{p}{c}\right) = \dfrac{ac}{b}u + cuv \right. \end{cases}$$

Th. (Теорема за качеството на решението). Типът решение на линейна система се определя от линейната й част, т.е. траекторията ще определим като махнем нелинейната част.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{bp}{c}v \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{ac}{b}u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{bp}{c}\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{bp}{c}\dfrac{ac}{b}u = -apu \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \dfrac{ac}{b}\dfrac{dv}{dt} = -apv \end{cases}$$ *-система на струната*

$u(t) = A\cos\left(\sqrt{ap}.t\right)$ *са решенията.*

$v(t) = B\sin\left(\sqrt{ap}.t\right)$



$\dfrac{u^2}{A^2} + \dfrac{v^2}{B^2} = 1$ *– елипса*

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y(p - cx)}{x(a - by)}$$

$$\frac{(a - by)\partial y}{y} = \frac{(-p + cx)\partial x}{x}$$

$$\frac{a}{y}\partial y - b\partial y = -\frac{p}{x}\partial x + c\partial x$$

$$a\ln y - by + p\ln x - cx = \ln k$$

И всъщност получаваме следната траектория:

$\dfrac{y^a}{e^{by}}\dfrac{x^c}{e^{pk}} = k$ *– тази крива изглежда като „картоф", а не като абсолютна елипса, както е показано на фигурата.*

$$\frac{\partial x}{x} = (a - bx)\partial t \Longrightarrow \int_0^T \frac{dx}{x} = \int_0^T (a - by)dt$$

$$|\ln x|_0^T = a\int_0^T dt - b\int_0^T ydt$$

$$\ln 0 - \ln T = aT - bTy_{cp}$$

$$y_{cp} = \frac{a}{b}$$