3.Дискретни уравнения на изолирана популация

В полулационната теория диференциалните уравнения не са особено подходящи, т.к. в диференциалните уравнения стойността зависи от точно определения елемент, докато в теорията зависи и от предишната стойност. Този механизъм работи добре, ако всяко поколение работи само (като при насекомите). Но в повечето случаи не е така – поколението и числеността зависят и от предишното поколение. Има диференциални уравнения със закъсняващи параметри , но този апарат е много сложен. Затова използваме дискретни уравнения. Има цикличност в поколението – този факт е основен в получените дискретни урвнения.

Дискретно уравнение от k-ти ред :$N_{t+1} = F(N_t, N_{t-1}, \dots, N_{t-k})$.

Числеността в момент (t+1) е функция на тези в предишните моменти.

Дискретно уравнение от вида: (*) $N_{t+1} = F(N_t)$ – най-простото (уравнение от първи ред).

Нека разгледаме следното диференциално уравнение: $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$.

$(\frac{dN}{dt} = N(\alpha - \gamma N), r = \alpha - \textit{коефициент на раждаемост}, \gamma = \frac{r}{K}, K - \textit{капацитет на пространството})$

Когато $\frac{N}{K} = 1$ → имаме хипотетично равновесие.

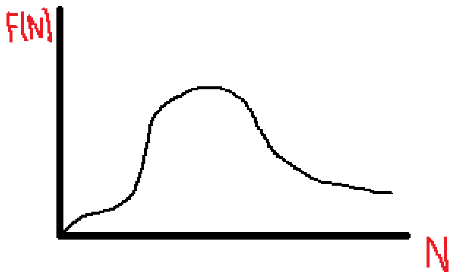
$N_{t-1} - N_t = rN_t(1 - \frac{Nt}{K})$ – дискретен аналог на уравнението.

При голямо N → става отрицателно → неудобно за анализ. Затова е възприето следното:

$N_{t+1} = rN_t e^{(1-\frac{N_t}{k})}$ – което има същите свойства, като предходното.

Имаме следните свойства за функцията F от (*):

1. $F(N) \geq 0$ – дефинирано при $N>0$
2. $F(0) = 0$ – от аксиомата на Вернадски – не може да се получи живо от неживо
3. $F'(N) > 0$, когато $N \to 0$ (расте при малки стойности на N)
4. $F'(N) \to 0$, когато $N \to \infty$ (намалява при големи стойности на N)



Отдясно е показана графика на F(N). Решение на дискретното уравнение: поредица от числа $\{N_1, N_2, \dots\}$, което удовлетворява рекурентната зависимост (*).

Нека $\{N^*, N^*, \dots\}$ – решение , при което популацията има равновесие.

Има равновесие , ако уравнението $N = F(N)$ има решение N^*.

Устойчивост – едно решение $\{N_1, N_2, \dots\}$ е устойчиво, ако $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, така че при $|N_1 - N'_1| < \delta$ → $|N_i - N'_i| < \varepsilon$, $\forall i$

(N_1 – първото решение, N'_i – друго решение)

Т.е. ако е близко при първото , близко е и по-нататък. Кога едно равновесие е устойчиво?

Нека $\{N^*\}$ – равновесно решение.

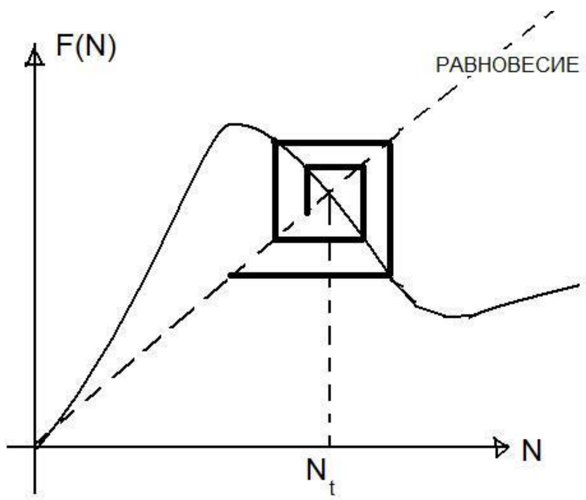
Тогава $N_t = N^* + x_t$ – Решение близко до равновесното решение N^*.

$x_{t+1} = (\frac{dF}{dN})_{N^*} . x_t + O(x_t^2)$, където $O(x_t^2)$ - остатък от по-висока степен, който игнорираме.

Така получаваме геометрична прогресия с частно производната. Следователно:

При $|(\frac{dF}{dN})_{N^*}| < 1$ – устойчиво равновесие, $|(\frac{dF}{dN})_{N^*}| > 1$ – неустойчиво равновесие.

Получава се следната графика – показана отдясно – потъмнената част се образува от решенията – това е т. нар. Цикъл на паяжината. Този цикъл се доближава все повече до равновесната точка. В случая, равновесната точка е пресечната точка на ъглополовящата на първи квадрант и графиката на функцията F(N).



Цикли (клас решения) – цикъл е решение , при което

$N_{t+T} = N_t$, $N_{t+j} \neq N_t$, $j = 1 \dots T-1$

(Т-цикъл – цикъл с дължина Т).

Да разгледаме следния пример с решение $\{N_1, N_2\}$.

Разглеждаме системата: $\left| \begin{array}{l} N_2 = F(N_1) \\ N_1 = F(N_2) \end{array} \right.$

Тази система е еквивалентна на системата: $\begin{vmatrix} N_2 = F(F(N_2)) \\ N_1 = F(F(N_1)) \end{vmatrix}$. Оттук получаваме, че (1) $N_1 = F^2(N_1)$ – т.е. N1 е равновесно решение в това уравнение, където функцията F е приложена 2 пъти. Също така:
(2) $N_2 = F^2(N_2)$ – N2 е равонвесното решение в това уравнение, където функцията F е приложена 2 пъти.
За (1) имаме, че $\left(\frac{d(F(F(N))}{dN}\right)_{N_1} = \left(\frac{dF}{dN}\right)_{N_1} \left(\frac{dF}{dN}\right)_{F(N_1)=N_2}$. Аналогично, за (2) имаме, че: $\left(\frac{d(F(F(N))}{dN}\right)_{N_2} = \left(\frac{dF}{dN}\right)_{N_2} \left(\frac{dF}{dN}\right)_{F(N_2)=N_1}$. Но тези 2 израза са равни помежду си, откъдето имаме, че в 2-цикъл или и двете решения са устойчиви, или и двете са неустойчиви. Това твърдение важи за 3-,4-,... цикли.
Теорема. Ако едно дискретно уравнение има решение от 3-цикъл , то има за решение цикли с произволни дължини и безброй много хаотични решения, т.е. има разнообразни решения.
Хаотични решения ще наричаме тези, които не могат да бъдат хванати от компютър.

$N_{t+1} = N_t \exp(r(1 - \frac{Nt}{K}))$ – дали логистичното уравнение има 3-цикъл?
Допускаме , че има 3-цикъл : ak , bk , ck → заместваме ги в уравнението
bk = ak . exp(r(1 – a))
ck = bk . exp(r(1 – b))
ak = ck . exp(r(1 – c))

След логаритмуване:
$\ln b = \ln a + (1 - a)r$
$\ln c = \ln b + (1 - b)r$ } събираме ги
$\ln a = \ln c + (1 - c)r$

0 = r(3 – a – b – c) → a + b + c = 3 → получаваме r = 3,102….
Би било много красиво , ако r = π.