Задачи за Екстра Кредит на 4 и 5 гр., 1к, сп. Компютърни Науки

7 май 2010 г.

Задача 1 Нека $\Sigma = \{a, b\}$ и нека $L = \{\alpha \in \Sigma^* \mid$ **не съществува** $\omega \in \Sigma^*,$ за която $\alpha = \omega\omega\}$. Вярно ли е, че L е контекстно свободен? Обосновете се!

Задача 2 Нека L е контекстно свободен език. Да се докаже, че съществува константа $n \in \mathbb{N}$ със следното свойство.

За всяка дума $\alpha \in L$, за която $|\alpha| > n$ съществува разбиване на $\alpha = uvxyz$, за което:

1. $|vxy| \leq n$,
2. $|v| \geq 1$ **и** $|y| \geq 1$,
3. $\forall i \in \mathbb{N}$ е в сила, че $uv^ixy^iz \in L$.

Забележка 1 *Заради условие 2, това е усилен вариант на познатата ви "лема за покачването".*

Задача 3

1. Нека $L_1 = \{\alpha \in \{0,1\}^*\{/\}\{0,1\}^* \mid \overline{\alpha} = p/q,\ \text{НОД}(p,q) = 1\}$. Да се докаже, че L_1 не е контекстно свободен.
2. $L_2 = \{\alpha \in \{0,1\}^*\{/\}\{0,1\}^* \mid \overline{\alpha} = p/q,\ \text{НОД}(p,q) \neq 1\}$. Да се докаже, че L_2 не е контекстно свободен.

Пример: $101/10 \in L_1$, защото $\overline{101}_{(2)} = 5$ и $\overline{10}_{(2)} = 2$ и НОД$(5, 2) = 1$. От друга страна $101/1010 \in L_2$, защото $\overline{1010}_{(2)} = 10$ и НОД$(5, 10) = 5 \neq 1$.

Задача 4 Нека $\Gamma =< \mathcal{N}, \Sigma, S, \mathcal{R} >$ е контекстно свободна граматика, а $A =< Q, \Sigma, s, \delta, F >$ е краен, детерминиран автомат. Да се построи контекстно свободна граматика Γ_A със свойството:

$$L(\Gamma_A) = L(\Gamma) \cap L(A).$$

Задача 5 Нека p и q са взаимнопрости естествени числа. Да се построи контекстносвободна граматика $\Gamma(p, q)$, която задава езика:

$$L_{p,q} = \{\alpha \in \{a, b\}^* \,|\, pA(\alpha) = qB(\alpha)\},$$

където $A(\alpha$ означава броя букви **a** в α, а $B(\alpha)$ – броя букви **b** в α.

Забележка: По време на упражнения сме разглеждали частния случай $p = q = 1$. В предложеното обобщение p и q са параметри на задачата.