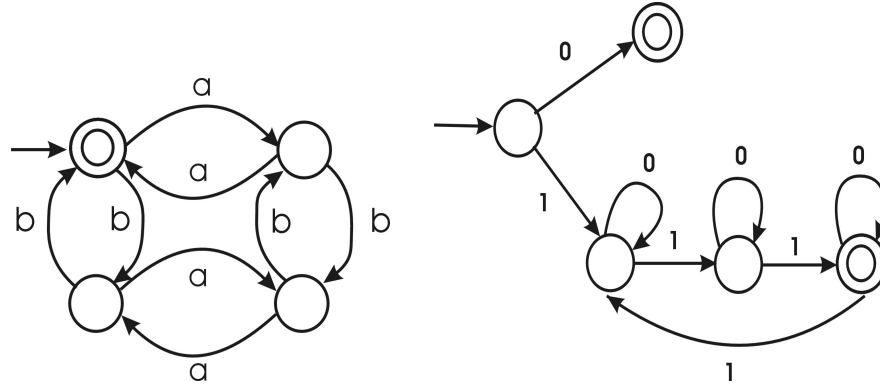




Задача 1. Да се докаже, че автоматът на Фиг. 1 разпознава езика $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ съдържа четен брой } a \text{ и } b\}$.

Задача 2. Да се докаже, че автоматът на Фиг. 2 разпознава езика на онези думи w от $\{0, 1\}^*$, такива че w е естествено число записано в десетичен запис и 3 дели w .

Задача 3. Да се построи минималният детерминиран автомат за езика L , където:

- $L = \{w \in \{0\}^* \mid w = 0^{3n}, \text{ за някое } n \in \mathbb{N}\}$;
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ е естествено число записано в десетичен запис и } w \equiv 3 \pmod{2}\}$;
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ съдържа точно веднъж } bb\}$;
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ съдържа точно веднъж } aba\}$;
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = u x u^R \text{ за някои } u, x \in \{a, b\}^*\}$, където думата u^R е думата u прочетена отзад напред.

За всеки от построените автомати, да се напише регулярен израз, представящ съответния език.

Задача 4. Нека L е регулярен език над Σ . Да се докаже, че:

- $L_p = \{x \in \Sigma^* \mid (\exists y \in \Sigma^*)(xy \in L)\}$ е регулярен;
- $L_s = \{y \in \Sigma^* \mid (\exists x \in \Sigma^*)(xy \in L)\}$ е регулярен.
- $L_{min} = \{x \in L \mid (\forall y \in \Sigma^*)(y \neq \epsilon \rightarrow xy \in L)\}$ е регулярен.

Задача 5. Нека L е регулярен език над Σ . Да се докаже, че:

- $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid (\exists x, y \in \Sigma^*)(xwy \in L)\}$ е регулярен;
- $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid (\exists x_0, x_1, \dots, x_k \in \Sigma^*)(\exists w_1, \dots, w_k \in \Sigma^*)(w = w_1 \dots w_k \& x_0 w_1 x_1 \dots w_k x_k \in L)\}$ е регулярен.

Задача 6. Да се докаже, че ако L е регулярен език, то съществува краен автомат M , такъв че $L(M) = L$ и освен това M има единствено начално и единствено заключително състояние, като при това в началното не влизат стрелки, а от заключителното не излизат стрелки.

Задача 7. Нека L е регулярен език над Σ . Да се докаже, че $L^R = \{w \in \Sigma^* \mid w^R \in L\}$ е регулярен.

Задача 8. Нека L е регулярен език над Σ . Да се докаже, че:

- а) $L = \{a_1 a_3 \dots a_{2n-1} \mid a_1 a_2 \dots a_{2n} \in L, a_i \in \Sigma\}$;
- б) $L = \{a_2 a_1 a_4 a_3 \dots a_{2n} a_{2n-1} \mid a_1 a_2 \dots a_{2n} \in L, a_i \in \Sigma\}$;
- в) $L = \{xy \mid x, y \in \Sigma^* \text{ и } yx \in L\}$.

Задача 9. Нека h е хомоморфизъм от Σ към Δ^* .

а) Нека L е регулярен език над Σ . Докажете, че $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$ е регулярен.

б) Нека L е регулярен език над Δ . Докажете, че $h^{-1}(L) = \{w \mid w \in \Sigma^* \text{ \& } h(w) \in L\}$ е регулярен.

Задача 10. Да се докаже, че езикът $L = \{a^n b^m \mid m, n \in \mathbf{N} \text{ \& } m = n\}$ не е регулярен.

Задача 11. Да се докаже, че езикът $L = \{a^n b^m \mid m, n \in \mathbf{N} \text{ \& } m > n\}$ не е регулярен.

Задача 12. Да се докаже, че езикът $L = \{0^i 1^j \mid i \text{ и } j \text{ са взаимно прости естествени числа}\}$ не е регулярен.

Задача 13. Да се докаже, че езикът $L = \{0^p \mid p \text{ е просто число}\}$ не е регулярен.

Задача 14. Нека Σ е крайно множество. Да се докаже, че съществува такава безкрайна редица $a_0, a_1, \dots, a_n \dots$ от елементи на Σ , че езикът $L = \{a_0 a_1 \dots a_k \mid k \in \mathbf{N}\}$ не е регулярен.

Задача 15. Да се докаже, че езикът $L = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$ е регулярен тогава и само тогава, когато $|\Sigma| = 1$.

Задача 16. Нека $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = u\bar{u} \text{ за някое } u \in \{a, b\}^*\}$, като $\bar{u}$ се получава от u , като заменим всяко a с b и всяко b с a . Да се докаже, че L не е регулярен.

Задача 17. Една дума w от азбуката $\{(,)\}$ наричаме балансирана, ако всяко начало на w има не по-малко леви от десни скоби и броят на левите скоби на w е равен на броя на десните. Докажете, че езикът от балансираните думи над $\{(,)\}$ не е регулярен.

Задача 18. Нека $\Sigma = \{0, 1, +, =\}$. Да се докаже, езикът $ADD = \{x = y + z \mid x, y, z \text{ двоични числа и } x \text{ е сума на } y \text{ и } z\}$ не е регулярен.

Задача 19. Нека Σ е крайна азбука и L е регулярен език в Σ . Да се докаже, че съществува такова $n \in \mathbf{N}$, че за всеки три думи в Σ x, y и z , такива, че $xuz \in L$ и $|y| = n$ съществуват думи u, v и w , за които $y = uvw$, $|v| \geq 1$ и за всяко $i \geq 0$ думата $xuv^i wz \in L$.

Задача 20. Да се докаже, че езикът $L = \{0^i 1^m 2^m \mid i \geq 1, m \geq 1\}$ не е регулярен.

Задача 21. Да се докаже, че ако L_1 и L_2 са езици в Σ — крайна азбука, то $|\sim_{L_1 \cup L_2}| \geq |\sim_{L_1}| \cdot |\sim_{L_2}|$.