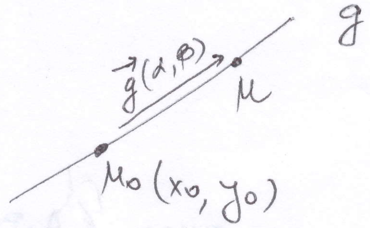
08.06.2013г. Стр 1

23. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли

Уравнения на права в равнината

Вимаме коорд. с-ма $K = O\vec{e_1}\vec{e_2}$ - произволна афинна, т.е. 2та вектора са независими

Нека имаме права g, това, което е достатъчно да я определи е т. $M_0(x_0, y_0)$ и един $\parallel$ (колинеарен в-р) $\vec{g}(\alpha, \beta)$



$$\exists!\ g \begin{cases} \ni M_0(x_0, y_0) \\ \parallel \vec{g}(\alpha, \beta) \end{cases}$$

Нека т. $M(x,y)$ е прозволна от правата g. (Да се напише уравн., значи трябва да използваме т. M_0 и $\vec{g}$)

$M \in g \Rightarrow \exists!\ s \in \mathbb{R} : \overrightarrow{M_0M} = s.\vec{g}$

т. O - нач. на коорд. с-ма.

$\overrightarrow{OM_0}(x_0, y_0)$ - радиус в-р.

$\overrightarrow{OM}\ (x, y)$

$\vec{g}\ (\alpha, \beta)$

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = s.\vec{g}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + s.\vec{g}$ - векторно параметрично уравнение на правата g

положението на т. M еднозначно зависи от параметъра s

$$g \begin{cases} x = x_0 + s.\alpha \ /.-\beta \\ y = y_0 + s.\beta \ /.\alpha \end{cases} s \in \mathbb{R}$$ - координатна параметрични уравнения на правата g

Умножаваме първото по $-\beta$, а второто по α, и ги събираме и получаваме:

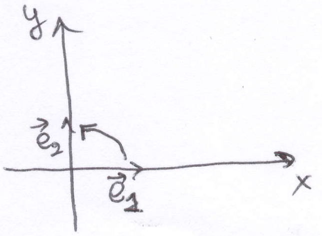
$g: -\beta.x + \alpha.y = -\beta x_0 + \alpha y_0$

$g: A.x + By + C = 0 \Rightarrow$ общо уравн. на правата g

$A = -\beta,\ B = \alpha \Rightarrow \vec{g}(B,-A)$ е колинеарен в-р на правата g

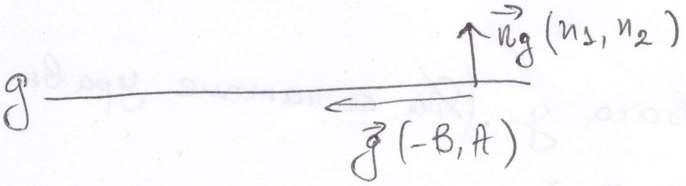
От тук нататък ще ни трябва ортонормирана коорд. с-ма

$K = Oxy = O\vec{e}_1\vec{e}_2 \qquad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ и $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$



Имаме правата $g: Ax + By + C = 0$, като изменду $(A,B) \neq (0,0)$

Искаме да знаем какви коорд. има в-р $\perp$ на g



$\vec{n}_g(n_1,n_2) \perp \vec{g}(-B,A) \Leftrightarrow \vec{n}_g \cdot \vec{g} = 0$

Щом $\left.\begin{array}{l}\vec{e}_1.\vec{e}_2 = 0 \\ \vec{e}_1^{\,2} = \vec{e}_2^{\,2} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow n_1.(-B) + n_2(A) = 0$

Избираме си $n_1 = A$ и $n_2 = B$

$\vec{n}_g(A,B) \perp g$ и се нарича нормален вектор

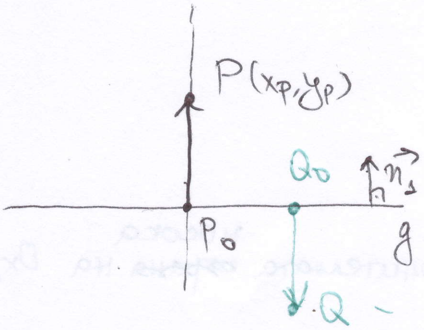
Нормално уравнение на права g в равнина

$\vec{n}_g(A,B) \Rightarrow$ дължината му: $|\vec{n}_g| = \sqrt{A^2+B^2} \neq 0$

$g: \dfrac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ – нормално е, защото лесно се получава 1 -> уравн. на правата g

$\vec{n}_1 = \frac{\vec{n}_g}{|\vec{n}_g|}$

$\vec{n}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ - $\boxed{\text{единичен}}$ нормален в-р на правата g



Взимаме т. $P(x_P, y_P)$. Търсим ориентирано разстояние от точка P до права g

Има единствена права, която да минава през т. $P(x_P, y_P)$ и е $\perp$ на g.

Нека: $\overrightarrow{P_0P} \perp g$, $P_0 \in g$, Трябва ни: $|\overrightarrow{P_0P}| = ?$

Тръгваме от правата към точката

$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{n}_1 \Rightarrow \exists!\, \delta : \overrightarrow{P_0P} = \delta \vec{n}_1$ (противопосочно колинеарен)

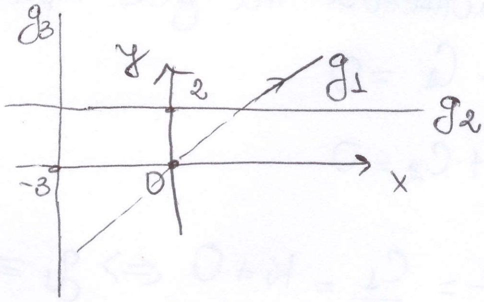
$$\Rightarrow \delta(P, g) = \frac{Ax_P + By_P + C}{\sqrt{A^2+B^2}} \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \uparrow\downarrow \vec{n}_1 \quad (\overrightarrow{Q_0Q} \uparrow\downarrow \vec{n}_1) \\ = 0 \Leftrightarrow P \in g \\ > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \uparrow\uparrow \vec{n}_1 \text{ (еднопосочно колинеарен)} \end{cases}$$

Ориентирано разст.

Видове уравнения на права:

Нека имаме ОКС: $K = Oxy$; права $g: Ax + By + C = 0$,

Примери:



1) $C = 0$

$g_1: Ax + By = 0 \Leftrightarrow g_1 \ni т.O$

2) $A = 0 \Leftrightarrow g_2 \parallel Ox$

$g_2: y - 2 = 0 \to y = 2$

3) $B = 0, A \neq 0 \Leftrightarrow g_3 \parallel Oy$

$g_3 = x + 3 = 0$

Взимаме права $g: Ax+By+C=0$ и $B\neq 0 \Rightarrow$ може да се изрази y чрез x

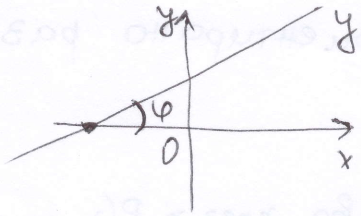
И тогава получаваме:

$$g: y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

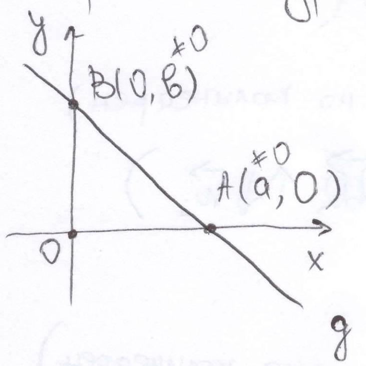
$g: y = k.x + n \rightarrow$ декартово произведение

$k = tg\varphi$, като φ е ъгълът, който g сключва с положителната ~~страна~~ посока на Ox, т.е.

$\varphi = \sphericalangle(g, Ox^{+})$



Отрезово уравнение на права



Те са за прав, който:

$$g \begin{cases} \neq 0 \\ \nparallel Ox \\ \nparallel Oy \end{cases}$$

$g: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \rightarrow$ Отрезово уравнение на права

Ъгъл между две прави:

1) Взаимни положения на две прави в равнината:

$g_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$g_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

1сл: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k \neq 0 \Leftrightarrow g_1 \equiv g_2$

2сл: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow g_1 \parallel g_2$

3сл: $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow g_1 \cap g_2 = $ т.P

Търсим колко общи точки имат правите g_1 и g_2?

$$\left|\begin{aligned} A_1 . x + B_1 \cdot y + C_1 = 0 \\ A_2 . x + B_2 \cdot y + C_2 = 0 \end{aligned}\right. \quad (*)$$

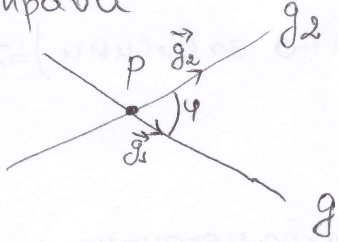
<u>1сл</u> Ако $(*)$ има безброй много решения $\Rightarrow g_1 \equiv g_2$

<u>2сл</u> Ако $(*)$ има единствено решение $\Rightarrow g_1 \cap g_2 = $ т. P

<u>3сл</u> Ако $(*)$ няма решение $\Rightarrow g_1 \parallel g_2$

2) ъгъл между две прави

$g_1 \cap g_2 = $ т. P



$\vec{g_1}(-B_1, A_1)$

$\vec{g_2}(-B_2, A_2)$

$\sphericalangle(g_1, g_2) = \sphericalangle(\vec{g_1}, \vec{g_2})$

$\cos\varphi = \dfrac{\vec{g_1} \cdot \vec{g_2}}{|\vec{g_1}| . |\vec{g_2}|}$ (ако е отрицателен описва острия ъгъл)

Уравнения на права и равнина в пространството

<u>I Права</u>

$$g \begin{cases} \ni M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \parallel \vec{g}(\alpha, \beta, \gamma) \end{cases}$$

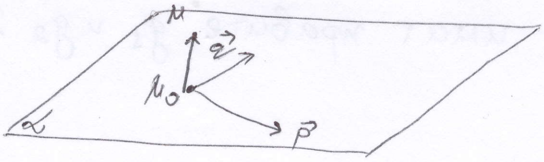
$\vec{OM} = \vec{OM_0} + s\vec{g}$ – векторно параметрично уравнение

$$g \begin{cases} x = x_0 + s . \alpha \\ y = y_0 + s . \beta \\ z = z_0 + s . \gamma \end{cases}, s \in \mathbb{R} \text{ – координатни параметрични уравнения}$$

Права като пресечница на две равнини

$$g : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2$$

II. Равнина



$\alpha \begin{cases} \ni M_0(x_0, y_0, z_0) \\ \parallel \vec{p}\,(p_1, p_2, p_3) \\ \parallel \vec{q}\,(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$ линейно независими, т.е. $r\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix} = 2$

$M(x, y, z)$ – произволна от α

$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M}, \vec{p}\,\vec{q}$ са компланарни (линейно зависими) $\Rightarrow$

$\exists!\, \lambda, \mu : \overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$ – векторно параметрично у-ние на равнината α

$\alpha: \begin{cases} x = x_0 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ z = z_0 + \lambda p_3 + \mu q_3 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$ координатни параметрични уравнения на равнината α

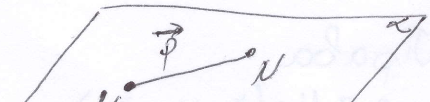
Общо уравнение на равнина

$\alpha: Ax + B.y + C.z + D = 0$

Условие за компланарност на вектор и равнина

$\vec{p}\,(p_1, p_2, p_3) \parallel \alpha \Leftrightarrow A.p_1 + B.p_2 + Cp_3 = 0$

$\vec{p} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$



$M(x_M, y_M, z_M) \ni \alpha$

$N(x_N, y_N, z_N) \ni \alpha$

$Ax_M + \quad = 0$

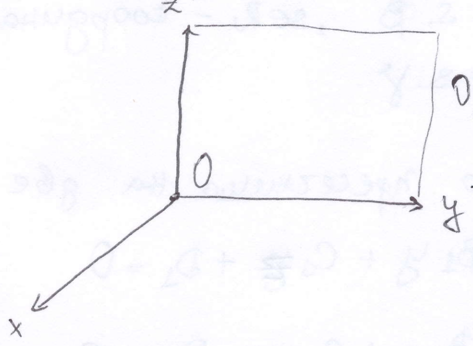
$Ax_N + \text{---} \quad = 0$

Видове равнини:

1) $D = 0 \Leftrightarrow \alpha \ni т.\, O(0,0,0)$

2) $A = 0 \quad \vec{p}\,(p_1, p_2, p_3) \parallel \alpha$

$\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{0.p_1} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{B.p_2} + \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{Cp_3} = 0$



$Oyz: x = 0$

$A = 0 \Leftrightarrow \alpha \parallel Ox$, ако $\begin{vmatrix} A = 0 \\ D = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \alpha \ni Ox$

3) $B=0 \Leftrightarrow \alpha \parallel Oy$

4) $C=0 \Leftrightarrow \alpha \parallel Oz$

5) $\left| \begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha : z+D=0 \Rightarrow \alpha \parallel Oxy$

6) $\left| \begin{array}{l} A=0 \\ C=0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha \parallel Oxz$

7) $\left| \begin{array}{l} B=0 \\ C=0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha \parallel Oyz$

Взаимно положения на две равнини

$\alpha_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$\alpha_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

$\alpha_1 \cap \alpha_2 = ?$

$$\left| \begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array} \right.$$

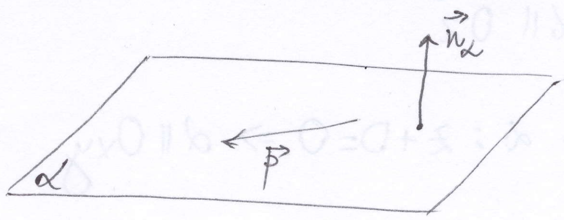
<u>1сл:</u> $\left| \begin{array}{l} r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1 \\ r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha_1 \equiv \alpha_2$, т.е. с-мата има безброй много решения

<u>2сл.</u> $\left| \begin{array}{l} r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1 \\ r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix} = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha_1 \parallel \alpha_2$, т.е. с-мата няма реш.

<u>3сл.</u> $r\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \exists!$ права $g = \alpha_1 \cap \alpha_2$

Нормално уравнение на равнина:

ОКС : $K = Oxyz = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$



$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0$

$\vec{n}_\alpha = ?$: $\vec{n}_\alpha \perp \vec{p}(p_1, p_2, p_3) \parallel \alpha$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p} \parallel \alpha \Leftrightarrow Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0 \\ \vec{n}_\alpha(\lambda, \mu, \eta) \xRightarrow[\vec{n}_\alpha \cdot \vec{p} = 0]{\text{ОКС}} \lambda p_1 + \mu p_2 + \eta p_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}_\alpha(A, B, C)$$

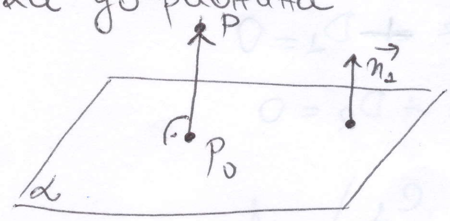
$\alpha: \dfrac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$ – нормално уравнение на равнина

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{n}_\alpha}{|\vec{n}_\alpha|} \left\{\begin{array}{l} \perp \alpha \\ |\vec{n}_1| = 1 \end{array}\right.$$

Ориентирано разстояние от точка до равнина

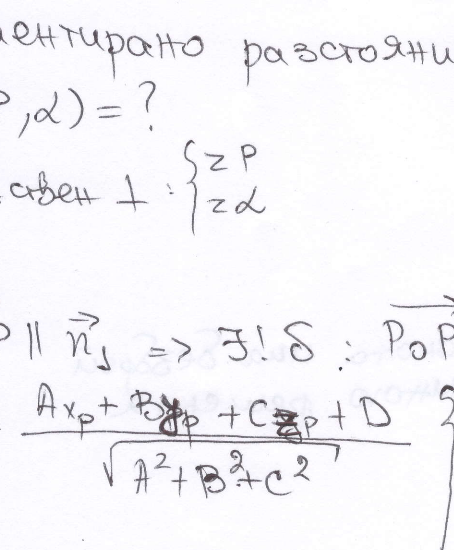
$\delta(P, \alpha) = ?$

единствен $\perp$: $\left\{\begin{array}{l} \ni P \\ \perp \alpha \end{array}\right.$



$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{n}_1 \Rightarrow \exists!\, \delta : \overrightarrow{P_0P} = \delta \vec{n}_1$

$$\delta = \frac{Ax_P + By_P + Cz_P + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left\{\begin{array}{l} > 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \uparrow\uparrow \vec{n}_1 \\ = 0 \\ < 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \uparrow\downarrow \vec{n}_1 \end{array}\right.$$



$$\cos\measuredangle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) = \frac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}$$

(ако е положителен – описваме тъпия двуст. ъгъл)

(ако е отрицателен – острия двустенен ъгъл)