4. Криволинейни интеграли

В тази глава ще разширим понятието едномерен определен интеграл по праволинеен сегмент в случая, когато областта на интегриране е сегмент от някаква равнинна или пространствена крива. Интеграли от този вид се наричат криволинейни.

§ 1. Понятие за криволинейни интеграли от първи и втори род

Нека разгледаме в равнината Oxy някаква ректифицируема крива L, която няма точки на самопресичане и повтарящи се участъци. Да предположим, че тази крива се определя от параметричните уравнения

$$\left\{\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{array}\right. \quad (a\leq t\leq b), \tag{4.1}$$

и в началото ще смятаме, че тя не е затворена и има за крайща точките A и B с координати $A(\varphi(a),\ \psi(a))$, $B(\varphi(b),\ \psi(b))$.

Нека върху кривата $L=AB$ са дефинирани три функции $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, всяка от които е непрекъсната (а следователно и равномерно непрекъсната) по тази крива (за функцията $f(x, y)$ например това означава, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че $|f(M_1)-f(M_2)|<\varepsilon$ за всички точки M_1, $M_2 \in L$, разстоянието между които е по-малко от δ).

Да разделим сегмента $[a, b]$ с помощта на точките $a=t_0<t_1<t_2< \ldots <t_n=b$ на n сегмента $[t_{k-1}, t_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. При това кривата L се разпада на n дъги M_0M_1, $M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, където точките $M_k(x_k, y_k)$, $k=0, 1, \ldots, n$, имат координати $x_k=\varphi(t_k)$, $y_k=\psi(t_k)$.

Избираме на всяка от дъгите $M_{k-1}M_k$ произволна точка $N_k(\xi_k, \eta_k)$, координатите на която съответствуват на някаква стойност τ_k на параметъра t, принадлежаща на сегмента $[t_{k-1}, t_k]$ и така-

ва, че $\xi_k=\varphi(\tau_k)$, $\eta_k=\psi(\tau_k)$. Дължината на дъгата $M_{k-1}M_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ означаваме с Δl_k. В § 1 на глава 10 от част I е доказана следната формула за Δl_k*:

$$\Delta l_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{4.2}$$

Числото $\Delta=\max\limits_{1\leq k\leq n} \Delta l_k$ ще наричаме **диаметър на деление** на кривата L.

Образуваме следните три интегрални суми:

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\,.\,\Delta l_k, \tag{4.3¹}$$

$$\sigma_2=\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\,.\,\Delta x_k, \tag{4.3²}$$

$$\sigma_3=\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\,.\,\Delta y_k, \tag{4.3³}$$

където $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$.

Определение 1. *Числото I ще наричаме граница на интегралната сума σ_s $(s=1, 2, 3)$, когато диаметърът на деление Δ клони към нула, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова $\delta>0$, че (независимо от избора на точките N_k от дъгите $M_{k-1}M_k$) $|\sigma_s-I|<\varepsilon$, когато $\Delta<\delta$.*

Определение 2. *Ако съществува границата на интегралната сума σ_1 при $\Delta\to 0$, то тази граница се нарича криволинеен интеграл от първи род от функцията $f(x, y)$ по кривата L и се означава с един от символите*

$$\int_L f(x, y)dl, \qquad \int_{AB} f(x, y)dl. \tag{4.4¹}$$

Определение 3. *Ако съществува границата на интегралната сума σ_2 [съответно σ_3] при $\Delta\to 0$, то тази граница се нарича криволинеен интеграл от втори род от функцията $P(x, y)$ [$Q(x, y)$] по кривата $L=AB$ и се означава със символа*

$$\int_{AB} P(x, y)dx \left[\text{съответно} \int_{AB} Q(x, y)\, dy \right]. \tag{4.4²}$$

Сумата

* При условие че кривата (4.1) е гладка (т. е. φ и ψ имат непрекъснати производни).

$$\int_{AB} P(x, y)dx + \int_{AB} Q(x, y)\,dy$$

е прието да се нарича **п ъ л е н к р и в о л и н е е н и н т е г р а л о т в т о р и р о д** *и се означава със символа*

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{4.4³}$$

От определението на криволинейните интеграли следва, че:

1) криволинейният интеграл от първи род не зависи от това, в каква посока (от A към B или от B към A) се обхожда кривата L, а за криволинейния интеграл от втори род изменението на посоката води до смяна на знака, т.е.

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy;$$

2) физически криволинейният интеграл от първи род (4.4¹) може да се представи като масата на кривата L с линейна плътност $f(x,y)$, а общият криволинеен интеграл от втори род (4.4³) — като работата по преместването на материална точка от A до B по кривата L под действието на сила с проекции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в точката (x, y).

З а б е л е ж к а. За пространствената крива $L=AB$ аналогично се определят криволинеен интеграл от първи род —

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl,$$

и три криволинейни интеграла от втори род —

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx, \quad \int_{AB} Q(x, y, z)dy, \quad \int_{AB} R(x, y, z)dz.$$

Сумата от трите последни интеграла е прието да се нарича **п ъ л е н к р и в о л и н е е н и н т е г р а л о т в т о р и р о д** и да се означава със символа

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

§ 2. Условия за съществуване на криволинейни интеграли

Определение. *Кривата L се нарича* **г л а д к а**, *ако функциите $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ от определящите я параметрични уравнения (4.1) имат в сегмента $[a, b]$ непрекъснати производни $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ (т.е. производните са непрекъснати в интервала $a<t<b$ и имат крайни гранични стойности в точката a отдясно и в точката b отляво).*

Ще напомним, че в глава 13 на първа част нарекохме **о с о б е н и т о ч к и** на кривата L точките, съответствуващи на такива стойности на параметъра t от $[a, b]$, за които $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2=0$, т.е. и двете производни се анулират. Точките от кривата L, за които $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2 \neq 0$, нарекохме **о б и к н о в е н и** точки.

Теорема 4.1. *Ако кривата $L=AB$ е гладка и няма особени точки и ако функциите $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекъснати върху тази крива, то криволинейните интеграли (4.4¹), (4.4²) съществуват и могат да се пресметнат по следните формули, които свеждат тези интеграли до обикновени определени интеграли:*

$$\int_{AB} f(x, y)dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt, \tag{4.5¹}$$

$$\int_{AB} P(x, y)dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt, \tag{4.5²}$$

$$\int_{AB} Q(x, y)\,dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t)) \cdot \psi'(t)\,dt. \tag{4.5³}$$

Д о к а з а т е л с т в о. Преди всичко ще отбележим, че определените интеграли в десните части на формулите (4.5¹), (4.5²), (4.5³) съществуват, тъй като при направените предположения подинтегралните функции във всеки от тези интеграли са непрекъснати в сегмента $a \leq t \leq b$.

Ще отбележим също така, че формулите (4.5²) и (4.5³) се доказват по един и същ начин, и затова ще изведем само равенствата (4.5¹) и (4.5²) и ще докажем съществуването на интегралите (4.4¹) и (4.4²).

Както в § 1, да разделим сегмента $[a, b]$ на n сегмента $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, и да съставим интегралните суми (4.3¹), (4.3²). Като вземем предвид (4.2) и равенството

$$\Delta x_k=\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi'(t)\,dt,$$

да представим интегралните суми (4.3¹), (4.3²) във вида

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{n}\left\{f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt\right\},$$

$$\sigma_2=\sum_{k=1}^{n}\left\{P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))\cdot\int_{t_{k-1}}^{t_k}\varphi'(t)dt\right\}.$$

Нека означим определените интеграли от десните части на формулите (4.5¹), (4.5²) съответно с I_1 и I_2 и да представим тези интеграли по сегмента $[a, b]$ във вида на сума от n интеграла по сегментите $[t_{k-1}, t_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$.

Да разгледаме и да оценим разликите

$$(4.6^1)\quad \sigma_1-I_1=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{f(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))-f(\varphi(t),\psi(t))\right\}\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

$$(4.6^2)\quad \sigma_2-I_2=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{P(\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k))-P(\varphi(t),\psi(t))\right\}\cdot\varphi'(t)\,dt.$$

При направените предположения функциите $f(\varphi(t),\psi(t))$ и $P(\varphi(t),\psi(t))$ като сложни функции на аргумента t са непрекъснати в сегмента $a\leq t\leq b$, а следователно и равномерно непрекъснати в този сегмент.

Ще отбележим, че когато диаметърът на деление Δ на кривата L клони към нула, тогава клони към нула и най-голямата от разликите $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$.

Наистина, тъй като функциите $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и не се анулират едновременно, то числото $m=$

$$=\min_{a\leq t\leq b}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}>0 \text{ и } \Delta l_k\geq m\int_{t_{k-1}}^{t_k}dt=m\,.\,\Delta t_k, \text{ т. е. } \Delta t_k\leq\frac{1}{m}\cdot\Delta l_k$$

(тук използувахме формулата (4.2) за дължината Δl_k).

По този начин за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че при $\Delta<\delta$ изразът във фигурни скоби от формулата (4.6¹) по модул да бъде по-малък от ε/l, където l е дължината на кривата L, а изразът във фигурни скоби от (4.6²) по модул да бъде по-малък от $\frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, където $M=\max\limits_{a\leq t\leq b}|\varphi'(t)|$.

След като предположим, че за диаметъра на деление е изпълнено $\Delta<\delta$, получаваме следните оценки за разликите (4.6¹) и (4.6²):

$$|\sigma_1-I_1|\leq\frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt=\frac{\varepsilon}{l}\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k=\varepsilon,$$

$$|\sigma_2-I_2|\leq\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}|\varphi'(t)|\,dt\leq\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\cdot M\,.\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=\varepsilon.$$

С това доказахме, че интегралните суми σ_1 и σ_2 имат граници при $\Delta\to 0$ съответно равни на I_1 и I_2. С това е доказано съществуването на криволинейните интеграли (4.4¹), (4.4²) и верността на формулите (4.5¹), (4.5²). Ще отбележим, че при извеждането на формулата (4.5²) никъде не използувахме условието за непрекъснатост на функцията $\psi'(t)$. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Кривата L ще наричаме *частично гладка*, ако тя е непрекъсната и се разпада на краен брой части, които нямат общи вътрешни точки и всяка от тях е гладка крива. За частично гладка крива L е естествено криволинейните интеграли по тази крива да се дефинират като сума от съответните криволинейни интеграли по всички гладки части, съставящи кривата L. При това равенствата (4.5¹), (4.5²), (4.5³) ще бъдат в сила и за частично гладка крива L. Тези равенства са верни и в случая, когато функциите $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са само частично непрекъснати по кривата L (т. е. когато кривата L се разпада на краен брой части, нямащи общи вътрешни точки, във всяка от които дадените функции са непрекъснати).

Забележка 2. Аналогични резултати и формули са в сила и за криволинейни интеграли по пространствената крива

$$L=AB=\{(x, y, z): x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ x=\chi(t);\ a\leq t\leq b\}.$$

Така например формулите за пресмятане на тези интеграли са:

$$\int_{AB}f(x, y, z)dl=\int_a^b f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt,$$

$$\int_{AB}P(x, y, z)\,dx=\int_a^b P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} Q(x, y, z)\,dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \psi'(t)\,dt,$$

$$\int_{AB} R(x, y, z)\,dz = \int_a^b R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \cdot \chi'(t)\,dt.$$

Забележка 3. По-горе беше отбелязано, че криволинейният интеграл от втори род зависи от посоката на описване на кривата $L = AB$. Затова трябва да бъде направена специална уговорка за това, какво ще разбираме под символа

$$\int_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)dy \tag{4.7}$$

в случая, когато L е затворена крива (т. е. в случая, когато точката B съвпада с точката A).

От двете възможни посоки на описване на затворения контур L ще наричаме положителна тази посока, при движението по която областта, лежаща във вътрешността на контура, остава от лявата страна (т. е. движение, «обратно на часовниковата стрелка»).

Ще смятаме, че в интеграла (4.7) *по затворения контур L този контур винаги се описва в положителна посока.*

В случая, когато е необходимо да се подчертае, че контурът L е затворен, ще използуваме следното означение за интеграла (4.7):

$$\oint_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

Забележка 4. Криволинейните интеграли имат същите свойства, както обикновените определени интеграли (доказателствата са аналогични на изложените в § 4, глава 9 на част I). Ще отбележим, че при по-силни предположения тези свойства следват непосредствено от формулите (4.5^1), (4.5^2), (4.5^3).

Ще формулираме тези свойства за криволинейните интеграли от първи род.

1. Линейно свойство. Ако за функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ съществуват криволинейни интеграли по кривата AB и ако α и β са произволни константи, то за функцията $[\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]$ съществува криволинейният интеграл по кривата AB и при това

$$\int_{AB} [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)]\,dl = \alpha \int_{AB} f(x, y)dl + \beta \int_{AB} g(x, y)\,dl.$$

2. Адитивност. Ако дъгата AB се състои от две дъги AC и CB, нямащи общи вътрешни точки, и ако за функцията $f(x, y)$ съществува криволинеен интеграл по всяка от дъгите AC и CB,

то за тази функция съществува криволинеен интеграл по дъгата AB и при това

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = \int_{AC} f(x, y)\,dl = \int_{CB} f(x, y)\,dl.$$

3. Оценка на модула на интеграла. Ако съществува криволинеен интеграл по кривата AB от функцията $f(x, y)$, то съществува и криволинейният интеграл по кривата AB от функцията $|f(x, y)|$ и при това

$$\left|\int_{AB} f(x, y)\,dl\right| \leq \int_{AB} |f(x, y)|\,dl.$$

4. Формула за средните стойности. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната по кривата AB, то може да се намери точка M от тази крива такава, че

$$\int_{AB} f(x, y)\,dl = l f(M),$$

където l е дължината на кривата.

Забележка 5. Аналогично на изложената тук теория на криволинейния интеграл в равнината се изгражда и теорията на криволинейния интеграл в пространството E^n $(n>2)$.

Примери. 1°. Да се намери дължината на пространствената крива L, зададена с параметричните уравнения

$$x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t,\ z = e^{-t} \text{ при } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Задачата се свежда до пресмятането на криволинейния интеграл от първи род $\int_L 1\,dl$.

От формулата за изчисляване на криволинейния интеграл от първи род, дадена в забележка 2, получаваме

$$\int_L 1\,dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(e^{-t}\cos t)']^2 + [(e^{-t}\sin t)']^2 + [(e^{-t})']^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{-2t}(2\sin^2 t + 2\cos^2 t) + e^{-2t}}\,dt = \sqrt{3}\,(1 - e^{-2\pi}).$$

2°. Да се изчисли криволинейният интеграл от втори род

$$I = \int_{AB} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy,$$

където AB е част от елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\ x,\ y\geq 0,\ A(a,\ 0),\ B(0,\ b)$. Тази крива може да се зададе и с параметричните уравнения

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t \quad \text{при } 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}.$$

Така от формулите (4.5²), (4.5³) получаваме

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(a\cos t+b\sin t).(-a\sin t)+(a\cos t-b\sin t)\,b\cos t]\,dt=$$

$$=\left[\frac{ab}{2}\sin(2t)+\frac{a^2+b^2}{4}\cos(2t)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Ще отбележим, че изразът под знака на интеграла $(x+y)dx+(x-y)\,dy$ е пълният диференциал на функцията

$$u(x,\ y)=\frac{x^2-y^2}{2}+xy.$$

Както ще бъде доказано в глава 6, от този факт следва, че стойността на интеграла I не зависи от избора на частично гладкия път на интегриране, който свързва точките A и B (разгледаната част от елипса е само една от тези криви), и е равен на разликата

$$u(B)-u(A)=u(0,\ b)-u(a,\ 0)=-\frac{a^2+b^2}{2}.$$

5. Повърхнинни интеграли

В тази глава ще бъде разгледан въпросът за интегриране на функции, дефинирани върху повърхнини от тримерното евклидово пространство E^3. Обект на изследване са и понятията повърхнина и лице на повърхнина.

§ 1. Понятие за повърхнина и лице на повърхнина

1. Понятие за повърхнина

Определение 1. Изображение f на област G от равнината върху множество G^* от тримерното пространство се нарича хомеоморфно, ако това изображение осъществява взаимно еднозначно съответствие между точките на G и G^*, при което всяка сходяща редица от точки от G се изобразява в сходяща редица от точки в G^* и, обратно: всяка сходяща редица от точки от G^* е образ на сходяща редица от точки от G.

Тук под сходяща редица от точки на G (съответно G^*) разбираме такава сходяща редица, която принадлежи на G (съответно G^*) заедно с границата си. Множествата G и G^* се наричат хомеоморфни, ако между тях съществува хомеоморфизъм.

Определение 2. Изображение f на област G върху G^* се нарича локално хомеоморфно, ако за всяка точка от G съществува околност, която се изобразява хомеоморфно върху своя образ.

Определение 3. Областта G от равнината T се нарича елементарна, ако тази област е образ на някакъв отворен кръг D при хомеоморфно изображение на този кръг върху равнината T.

Определение 4. Свързаната област G от равнината T се нарича проста, ако всяка точка от G има околност, която е елементарна област.

Определение 5. Множество Φ от точки в пространството се нарича повърхнина, ако е образ на проста равнинна област

G при локално хомеоморфно изображение f на областта G в пространството E^3.

По-нататък под **околност на точката** M **от повърхнината** Φ ще разбираме подмножеството от точки на Φ, принадлежащи на околност на точката M в E^3.

Да разгледаме един пример. Нека G е проста област в равнината Oxy (например кръг), (x, y) са координатите на точката $M \in G$, $z=z(M)$ е непрекъсната функция в G, а G^* е графиката на тази функция. Очевидно изображението f на областта G върху G^*, зададено с равенствата

$$x=u, \quad y=v, \quad z=z(u, v),$$

е хомеоморфно изображение на тази област върху множеството G^*, а $\Phi=G^*$ е повърхнина.

Нека в равнината $(u; v)$ е дадена проста област G и за всички точки от тази област са дефинирани три функции

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v), \quad z=z(u, v) \tag{5.1}$$

или, което е същото, една векторна функция

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u, v), \tag{5.1*}$$

където $\mathbf{r}(u, v)$ е вектор с компоненти $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$.

Ще смятаме, че са изпълнени следните две условия А:

1) функциите (5.1) имат непрекъснати частни производни от първи ред в областта G;

2) навсякъде в областта G матрицата

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

има ранг, равен на две.

Ще докажем, че *ако са изпълнени тези две условия А, то множеството Φ от точки, определени от уравненията* (5.1), *е повърхнина*, т. е. то е образ на равнинна област G при локално хомеоморфно изображение от G в E^3.

Нека $N_0(u_0, v_0)$ е произволна точка от G. Ясно е, че малка околност на тази точка се изобразява в малка околност на точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, където $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$ (за това е достатъчно функциите (5.1) да са непрекъснати в G, което е изпълнено в нашия случай).

Очевидно, ако $N_n(u_n, v_n)$ е фундаментална редица от точки в малка околност на точката N_0, то редицата от образите на тези точки $M_n(x_n, y_n, z_n)$, където $x_n=x(N_n)$, $y_n=y(N_n)$, $z_n=z(N_n)$,

е също фундаментална във Φ: това следва непосредствено от непрекъснатостта на функциите (5.1); например разликата $|x_{n+p}-x_n| = |x(N_{n+p})-x(N_n)|$ може да бъде направена по-малка от произволно число $\varepsilon>0$ при $\rho(N_{n+p}, N)<\delta=\delta(\varepsilon)$.

Остава да се докаже, че при изображението, определено от уравненията (5.1), на всяка точка от множеството Φ от достатъчно малка околност на точката M_0 съответствува определена точка от малка околност на точката N_0 в областта G, при това на всяка сходяща редица от точки $\{M_n\}$ от тази околност на точката M_0 съответствува сходяща редица $\{N_n\}$ от точки на G.

Тъй като във всяка точка $N_0(u_0, v_0) \in G$ рангът на матрицата (5.2) е равен на две, то в тази точка е различен от нула поне един минор от втори ред на матрицата (5.2).

Нека този минор е

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \quad \text{в точката } N_0.$$

След като обединим това условие с първото условие от двете условия А, получаваме, че за системата

$$\begin{cases} x(u, v)-x=0 \\ y(u, v)-y=0 \end{cases} \tag{5.3}$$

в околност на точката M_0 са изпълнени всички условия на теоремата за обратната функция (вж. § 2, глава 14 на първа част). Затова системата (5.3) има в околност на точката M_0 единствено непрекъснато и диференцируемо решение

$$\begin{cases} u=u(x, y) \\ v=v(x, y) \end{cases}. \tag{5.4}$$

Това означава, че съществува хомеоморфно изображение на малка околност на точката $N_0 \in G$ върху малка околност на точката $P_0(x, y)$ от равнината Oxy. (В едната посока това изображение се задава с непрекъснатите функции (5.4), а в другата — с първите две равенства на (5.1), в които функциите $x=x(u, v)$ и $y=y(u, v)$ са също непрекъснати; непрекъснатостта и на едните, и на другите функции осигурява изобразяването на сходяща редица от околността на едната от точките N_0 или P_0 в сходяща редица в околност на другата от тези точки.)

Като заместим функциите (5.4) в третата функция на (5.1), получаваме непрекъсната в околност на точката функция

$$z=z(u(x, y), v(x, y))=\varphi(x, y). \tag{5.5}$$

Тази функция осъществява хомеоморфно изображение на малка околност на точката $P_0(x_0, y_0)$ от равнината Oxy върху малка околност на точката $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$. Може да се каже, че (5.5) представя Φ в малка околност на точката M_0 като графика на функция на x, y.

Тъй като суперпозиция на хомеоморфни изображения е също хомеоморфно изображение, то изображението на малка околност на точката $N_0 \in G$ върху малка околност на точката $M_0 \in \Phi$ е хомеоморфно.

От това множество от точки Φ, определено от уравненията (5.1), е повърхнина, ако са изпълнени двете условия А.

Забележка 1. Повърхнината Φ, определена от уравненията (5.1), е прието да се нарича гладка, когато е изпълнено първото от двете условия А, а когато е изпълнено второто от условията А — повърхнина без особени точки.

И така може да се каже, че повърхнината Φ, определена от уравненията (5.1) при изпълнени и двете условия А, е гладка и няма особени точки.

Забележка 2. Между другото установихме, че всяка гладка и без особени точки повърхнина в достатъчно малка околност на всяка от своите точки може еднозначно да се проектира на поне една от трите координатни равнини.

Да разгледаме повърхнината Φ, определена от уравненията (5.1), за които са изпълнени двете условия А.

След като запишем уравненията (5.1) във векторния вид (5.1*), да видим какъв е геометричният смисъл на векторната функция $\mathbf{r}(u, v)$. Ако фиксираме някоя стойност на $v = v_0 = \text{const}$ от областта G, то уравнението $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0)$ ще определя крива върху повърхнината Φ, наричана координатна линия, а векторът $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v_0)$ ще се допира до тази линия. Аналогично при $u = u_0 = \text{const}$ уравнението $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ ще определя друга координатна линия, а векторът $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v)$ ще се допира до нея. През точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, където $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$, ще минават и двете координатни линии.

Второто от условията А, т. е. условието за липса на особени точки, изисква рангът на матрицата (5.2) да бъде равен на две. Това означава, че векторите $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u_0, v_0)$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u_0, v_0)$, координатите на които съставят редовете на матрицата (5.2), са линейно независими, т. е. неколинеарни, и следователно определят равнина,

която е допирателна равнина на повърхнината Φ в точката M_0. Вектор, който е перпендикулярен към тази допирателна равнина, се нарича нормален вектор (или нормала) на повърхнината Φ в точката M_0. Такъв вектор може да се определи като векторно произведение на векторите $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Така векторът

$$\mathbf{n} = \frac{\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]}{\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|} \tag{5.6}$$

е единичен нормален вектор към повърхнината Φ. По силата на условията, наложени на функциите (5.1), този вектор е непрекъснат по u и v в някаква околност на произволна точка от повърхнината, т. е. *в околността на всяка точка от гладка повърхнина без особени точки съществува непрекъснато векторно поле от нормали.*

Изобщо върху цялата повърхнина такова непрекъснато векторно поле от нормали може и да не съществува.

Пример. Лист на Мьобиус. Ако залепим правоъгълника $ABB'A'$ така, че A да съвпада с B' и B да съвпада с A', то ще се получи повърхнина, която се нарича лист на Мьобиус*. След като направи една обиколка, нормалата сменя посоката си с противоположната (вж. фиг. 5.1).

Ще разглеждаме само такива повърхнини Φ, за които съществува непрекъснато векторно поле от нормали върху цялата повърхнина. Прието е такива повърхнини да се наричат двустранни.

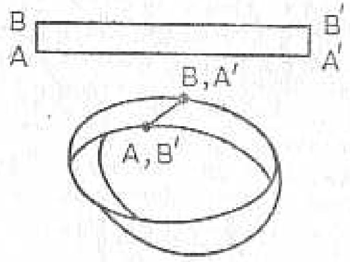
Повърхнината Φ се нарича пълна, ако всяка фундаментална редица от точки от тази повърхнина има за граница точка от тази повърхнина.

Повърхнината Φ се нарича ограничена, ако съществува тримерно кълбо, съдържащо всички точки от тази повърхнина.

Примери за пълни повърхнини са равнината, сферата, елипсоидът, простият хиперболоид. При това сферата и елипсоидът са ограничени повърхнини. Кръгът без границата си, както и всяко отворено свързано множество върху сферата (което не съвпада с цялата сфера) не са пълни повърхнини.

По-нататък ще разглеждаме повърхнина Φ, определена от уравненията (5.1), която притежава следните пет свойства: 1) гладка; 2) без особени точки; 3) двустранна; 4) пълна и 5) ограничена.

* А. Мьобиус — немски математик (1790—1868).



Фиг. 5. 1

2. Помощни леми

Лема 1. *Ако Φ е гладка повърхнина и M_0 е нейна неособена точка, то достатъчно малка околност на точката M_0 еднозначно се проектира върху допирателната равнина за която и да е точка от тази околност.*

Доказателство. Нека околността $\hat{\Phi}$ на точката M_0 е такава, че 1) нормалата във всяка точка от тази околност сключва с нормалата в точката M_0 ъгъл, по-малък от $\frac{\pi}{4}$; 2) околността $\hat{\Phi}$ еднозначно се проектира върху някакъв кръг в една от координатните равнини (например Oxy). Възможността за избора на такава околност $\hat{\Phi}$ следва от установеното в предната точка съществуване на околност на разглежданата точка със следните две свойства: 1) в тази околност съществува непрекъснато векторно поле от нормали; 2) тази околност еднозначно се проектира върху една от координатните равнини (очевидно има част от тази околност, която се проектира върху някакъв кръг в координатната равнина).

Ще отбележим, че кои да е две нормали от непрекъснатото векторно поле в точки от $\hat{\Phi}$ сключват ъгъл, по-малък от $\frac{\pi}{2}$.

Да допуснем, че разглежданата околност $\hat{\Phi}$ не се проектира еднозначно върху допирателната равнина в някоя точка $M \in \hat{\Phi}$. Тогава в тази околност ще има две точки P и Q такива, че хордата PQ ще е успоредна на нормалата на Φ в точката M. Да разгледаме линията, получена от пресичането на $\hat{\Phi}$ с равнината, успоредна на оста Oz и минаваща през хордата PQ (предполагаме, че $\hat{\Phi}$ еднозначно се проектира върху равнината Oxy). Върху тази линия според теоремата на Лагранж може да се намери точка N, допирателната в която е успоредна на хордата PQ, а от това е успоредна и на нормалата в точката M. Това означава, че нормалите в точките M и N сключват ъгъл $\frac{\pi}{2}$, което противоречи на избора на $\hat{\Phi}$. Полученото противоречие ни убеждава във верността на лемата. Лемата е доказана.

Ще казваме, че част от повърхнина има размери, по-малки от δ ($\delta>0$), ако тази част е във вътрешността на някакво кълбо с радиус $\delta/2$.

Лема 2. *За всяка гладка, ограничена, пълна и без особени точки повърхнина Φ може да се намери число $\delta>0$ такова, че за всяка част от Φ с размери, по-малки от δ, еднозначно се проектира а) на една от координатните равнини; б) на допирателната равнина в произволна точка от тази част.*

Доказателство. По-горе в забележка 2 и в лема 1 доказахме, че за всяка точка от повърхнината Φ може да се намери достатъчно малка околност $\hat{\Phi}$, която еднозначно се проектира а) на една от координатните равнини; б) на допирателната равнина в произволна точка от $\hat{\Phi}$.

Да допуснем, че твърдението на лемата не е вярно, т. е. не може да се намери числото $\delta>0$ от формулировката на лемата. Тогава за всяко $\delta_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ще се намери част $\hat{\Phi}_n$ с размери, по-малки от δ_n, и такава, че не се проектира еднозначно на никоя от координатните равнини или на допирателната равнина в някоя точка $M_n \in \hat{\Phi}_n$. Да изберем във всяка част $\hat{\Phi}_n$ точка $\hat{M}_n$ и да изберем от редицата $\{\hat{M}_n\}$ от точки от ограничената и пълна повърхнина Φ подредица $\{M_{k_n}\}$, която има за граница някоя точка $M_0 \in \Phi$.

От забележка 2 и лема 1 имаме, че може да се намери достатъчно малка околност $\hat{\Phi}$ на точката M_0, която еднозначно се проектира върху една от координатните равнини и върху допирателната равнина в произволна точка от $\hat{\Phi}$. Всички $\hat{\Phi}_{k_n}$, започвайки от някакъв номер k_n, ще бъдат вътре във $\hat{\Phi}$, а това противоречи на избора на частите $\hat{\Phi}_n$. Лемата е доказана.

Лема 3. *Нека Φ е гладка, без особени точки, двустранна, пълна, ограничена повърхнина, определена от уравненията* (5.1). *Тогава за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че за всяка част от повърхнината Φ с размери, по-малки от δ, ъгълът γ между нормалите в кои да е две точки от тази част удовлетворява условието*

$$\cos\gamma=1-\alpha, \tag{5.7}$$

където

$$0\leq\alpha<\varepsilon.$$

Доказателство. Повърхнината Φ е двустранна и затова векторното поле от нормали е непрекъснато, а следователно и равномерно непрекъснато върху цялата повърхнина Φ. Това означава, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че за произволни две точки M_1 и M_2, за които $\rho(M_1, M_2)<\delta$, е вярно неравенството

$$|\mathbf{n}(M_2)-\mathbf{n}(M_1)|<\sqrt{2\varepsilon} \tag{5.8}$$

($\mathbf{n}$ е единичният вектор на нормалата).

Тъй като

$$\cos\gamma=(\mathbf{n}(M_1),\ \mathbf{n}(M_2)),$$

а числото

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\mathbf{n}(M_2)-\mathbf{n}(M_1)\right)^2=\frac{1}{2}\left|\mathbf{n}(M_2)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\mathbf{n}(M_1)\right|^2-$$

$$-(\mathbf{n}(M_1),\ \mathbf{n}(M_2))=1-\cos\gamma,$$

то

$$\cos\gamma=1-\alpha$$

и за α поради (5.8) са в сила неравенствата $0\leq\alpha<\frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon})^2=\varepsilon$.

Лемата е доказана.

3. Лице на повърхнина. Нека Φ е повърхнина, определена от уравненията (5.1) и притежаваща отбелязаните по-горе пет свойства (гладка, без особени точки, ограничена, пълна, двустранна). С помощта на гладки криви да разбием Φ на краен брой гладки части Φ_i с размери, по-малки от δ, където δ е достатъчно малко (и се определя от условията на лема 2). Да означим с Δ максималния размер на частите Φ_i (диаметър на деление). Върху всяка част Φ_i да изберем произволна точка M_i и да проектираме Φ_i върху допирателната равнина в точката M_i. Нека σ_i е лицето на проекцията на Φ_i върху допирателната равнина. Да съставим сумата от лицата на проекциите на всички части

$$\sum_i \sigma_i. \tag{5.9}$$

Определение 1. *Числото σ се нарича граница на сумите* (5.9) *при $\Delta\to 0$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че за всички разбивания на Φ с гладки криви на краен брой части Φ_i, за които $\Delta<\delta$ независимо от избора на точките M_i върху частите Φ_i, е изпълнено неравенството*

$$\left|\sum_i \sigma_i-\sigma\right|<\varepsilon.$$

Определение 2. *Ако за повърхнината Φ съществува границата σ на сумите* (5.9) *при $\Delta\to 0$, то повърхнината Φ се нарича квадрируема, а числото σ се нарича лице на Φ.*

Забележка. Не може лицето на повърхнината да бъде получено, като се апроксимира повърхнината с вписани многостени при намаляване размерите на стените, като за лице се взема точната горна граница на лицата на вписаните многостени (както направихме при намиране на дължината на крива). Има класически пример на Шварц* (така нареченият «ботуш на Шварц»), показващ, че лицата на вписаните в цилиндрична повърхнина многостени нямат крайна точна горна граница.

Теорема 5.1. *Всяка гладка, ограничена, пълна, двустранна и без особени точки повърхнина Φ, определена с уравненията* (5.1), *е квадрируема и за лицето ѝ е в сила равенството*

$$\sigma=\iint\limits_G\left|\left[\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right]\right|du\,dv. \tag{5.10}$$

Забележка. Формулата (5.10) е инвариантна относно избора на координатните оси.

Доказателство на теоремата. При условията на теоремата подинтегралната функция в (5.10) е непрекъсната в G и интегралът (5.10) съществува.

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$ и в зависимост от него да изберем $\delta>0$ така, че да са изпълнени двете условия: 1) всяка част Φ_i от повърхнината Φ с размери, по-малки от δ, еднозначно се проектира върху допирателната равнина в произволна точка на Φ_i; 2) косинусът на ъгъла γ между две нормали от всяка част Φ_i с размери, по-малки от δ, може да се представи във вида $\cos\gamma=1-\alpha_i$ където $\alpha_i<\frac{\varepsilon}{\sigma}$ и $\alpha_i\leq 1$ (σ е стойността на интеграла (5.10)).

Поради лема 2 и лема 3 такъв избор на $\delta>0$ е възможен.

Да разбием с помощта на гладки криви повърхнината Φ на части Φ_i с размери, по-малки от δ, и след като изберем във всяка от тях по една произволна точка M_i, да проектираме Φ_i върху допирателната равнина в точката M_i. Да означим със σ_i лицето на проекцията и да съставим сумата (5.9).

За да пресметнем лицето σ_i на плоска област, ще използваме формулата за смяна на променливите при двойни интеграли.

* Г. А. Шварц — немски математик (1843—1921). [По-подробно за примера на Шварц вж. края на т. 1, § 2, глава 5 на книгата на В. А. Илин и Е. Г. Позняк «Основы математического анализа. Часть 2».

то, тъй като за всички вектори **a** и **b** е в сила равенството $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 . |\mathbf{b}|^2$, получаваме, че

$$\left|\left[\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right]\right| = ED - F^2, \tag{5.16}$$

и изразът за лицето на повърхнина (5.10) може да се запише и в следната форма:

$$\sigma = \iint_G \sqrt{ED - F^2}\, du\, dv. \tag{5.17}$$

Забележка 4. Лицето на повърхнина притежава свойството адитивност: ако повърхнината Φ е разделена от частично гладка крива на две части Φ_1 и Φ_2, които нямат общи вътрешни точки, то лицето на повърхнината Φ е равно на сумата от лицата на частите Φ_1 и Φ_2.

Това свойство следва от представянето на лицето на повърхнина с помощта на интеграл и от адитивността на интеграла.

§ 2. Повърхнинни интеграли

Нека Φ е гладка, двустранна, пълна, ограничена и без особени точки повърхнина, определена от уравненията (5.1) (или което е все същото, от (5.1*)) в областта G.

Нека върху Φ са дефинирани четири функции $f(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, всяка от които е непрекъсната (а следователно и равномерно непрекъсната) в множеството от точки на повърхнината Φ.

Да разделим повърхнината Φ с помощта на гладки или частично гладки криви на краен брой части Φ_i и да означим с Δ максималния размер на частите Φ_i (диаметър на деление на повърхнината). Да изберем от всяка част Φ_i по една произволна точка M_i.

Нека $\mathbf{n}(M_i)$ е единичната нормала в точката M_i, а $(\cos X_i, \cos Y_i, \cos Z_i)$ са координатите на тази единична нормала (или, както ги наричат, директорните косинуси). Да означим със σ_i лицето на частта Φ_i. Тогава, както е показано по-горе (вж. (5.17)),

$$\sigma_i = \iint_{G_i} \sqrt{ED - F^2}\, du\, dv,$$

където G_i е подобластта на G, образът на която е Φ_i.

Да съставим четирите суми

$$\Sigma_1 = \sum_i f(M_i)\sigma_i, \tag{5.18^1}$$

$$\Sigma_2 = \sum_i P(M_i) . \sigma_i . \cos X_i, \tag{5.18^2}$$

$$\Sigma_3 = \sum_i Q(M_i) . \sigma_i . \cos Y_i, \tag{5.18^3}$$

$$\Sigma_4 = \sum_i R(M_i) . \sigma_i . \cos Z_i. \tag{5.18^4}$$

Определение 1. *Числото I_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ се нарича граница на сумите Σ_k при $\Delta \to 0$,* ако за всяко $\varepsilon > 0$ *може да се намери $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такова, че при $\Delta < \delta$* (независимо от избора на точките $M_i \in \Phi_i$) *е изпълнено неравенството*

$$\left|\Sigma_k - I_k\right| < \varepsilon.$$

Определение 2. *Ако съществува граница при $\Delta \to 0$ на сумите Σ_1, то тази граница се нарича повърхнинен интеграл от първи род от функцията $f(x, y, z)$ по повърхнината Φ и се означава със символа*

$$I_1 = \iint_\Phi f(M)\, d\sigma. \tag{5.19^1}$$

Определение 2*. *Ако съществуват граници при $\Delta \to 0$ на сумите Σ_k, където $k = 2, 3$ или 4, то тези граници се наричат повърхнинни интеграли от втори род и се означават съответно със символите*

$$I_2 = \iint_\Phi P(M) \cos X\, d\sigma, \tag{5.19^2}$$

$$I_3 = \iint_\Phi Q(M) \cos Y\, d\sigma, \tag{5.19^3}$$

$$I_4 = \iint_\Phi R(M) \cos Z\, d\sigma. \tag{5.19^4}$$

Сумата на последните три интеграла се нарича пълен повърхнинен интеграл от втори род. Този интеграл може да бъде записан във вида

$$\iint_\Phi (\mathbf{A}, \mathbf{n})\, d\sigma, \tag{5.19^5}$$

Следствие. Ако повърхнината Φ е зададена с уравнението $z=z(x, y)$ (т. е. $x=u$, $y=v$, $z=z(u, v)$), където $z(x, y)$ е непрекъснато диференцируема в областта G от равнината Oxy функция, след като изберем тази страна от повърхнината Φ, за която векторът на нормалата на повърхнината сключва остър ъгъл с оста Oz, можем да запишем формулата (5.20[1]) във вида

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z)\cos z\, d\sigma=\iint_{G} R(x, y, z(x, y))\, dx\, dy.$$

Наистина достатъчно е да вземем предвид равенствата

$$d\sigma=\sqrt{ED-F^2}\, dx\, dy, \quad ED-F^2=1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

$$\cos z=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Това е причината за въвеждането на следното означение за повърхнинния интеграл от втори род:

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z)\cos Z\, d\sigma=\iint_{\Phi} R(x, y, z)\, dx\, dy. \tag{5.23}$$

Ще отбележим, че означението (5.23) се използува и в случая, когато Φ не е графика на функцията $z=z(x, y)$.

За пълния повърхнинен интеграл от втори род също се използува и следното означение:

$$\iint_{\Phi}(P\cos X+Q\cos Y+R\cos Z)\, d\sigma=$$

$$=\iint_{\Phi} P\, dy\, dz+Q\, dz\, dx+R\, dx\, dy.$$

Забележка. Понятието повърхнинен интеграл от първи и втори род естествено се разширява и в случая, когато повърхнината Φ е частично гладка. За такива повърхнини очевидно е вярна и доказаната в този параграф теорема за съществуване.

6. Теория на полето. Основни интегрални формули на анализа

В тази глава ще бъдат разгледани скаларните и векторните полета, а също така основните понятия и операции, свързани със скаларно и векторно поле. Особено важна за анализа формула е известната ни вече формула на Нютон—Лайбниц. В тази глава ще бъдат получени формулите на Грийн, Остроградски—Гаус и Стокс, които са обобщение на формулата на Нютон—Лайбниц в многомерния случай.

§ 1. Означения. Биортогонални базиси. Инварианти на линеен оператор

1. Означения. По-долу ще се налага често да записваме суми от известен брой събираеми. Да поясним означенията, които ще използуваме. Ще имаме работа със системи величини, белязани с няколко индекса, например a^i_k. Обикновено в такива случаи единият индекс се пише долу, а другият — горе. Ако индексите се менят независимо, те се означават с различни букви. Ако индексите са много, те се означават с една буква с подиндекс. Например $\omega_{i_1\ldots i_p}$ или $\xi^{i_1}_1\ldots\xi^{i_p}_p$. В някои случаи за означаване на сумиране ще се използува символиката: $\sum_{\sigma} A(\sigma)$, където сумирането се извършва по някое множество от величини σ. Ако индексите на сумиране $i_1, i_2, \ldots, i_p$ се менят така, че $i_1<i_2<\ldots<i_p$, то ще пишем

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} B_{i_1 i_2\ldots i_p}.$$

Накрая да сключим следното съглашение за сумиране. Нека ни е даден израз, представляващ произведение. Ако в този израз се срещат два еднакви буквени индекса, от които единият е горен, а другият — долен, то ще смятаме, че по тези индекси се извършва сумиране. При това индексите вземат последователно стойностите 1, 2, ..., а получените произведения се събират.

Например, ако $i, j=1, 2, \ldots, n$, то

$$a_i e^i = a_1 e^1 + a_2 e^2 + \cdots + a_n e^n,$$

$$a_{ij} e^i e^j = a_{1j} e^1 e^j + a_{2j} e^2 e^j + \cdots + a_{nj} e^n e^j =$$
$$= a_{11} e^1 e^1 + a_{12} e^1 e^2 + \cdots + a_{1n} e^1 e^n + a_{21} e^2 e^1 + a_{22} e^2 e^2 + \cdots +$$
$$+ a_{2n} e^2 e^n + \cdots + a_{n1} e^n e^1 + a_{n2} e^n e^2 + \cdots + a_{nn} e^n e^n.$$

При тези означения например разлагането на вектора **a** по базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ на пространството E^n се записва така:

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i,$$

където a^i са коефициентите в разлагането на този вектор. Последният запис означава, че

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i .$$

Със символа δ_i^j ще означаваме величината, приемаща само две стойности:

$$\delta_i^i = 1, \quad \delta_i^j = 0 \quad \text{при } i \neq j;$$

δ_i^j е така нареченият символ на Кронекер*.

Скаларното произведение на два вектора **a** и **b** в пространството E^n ще означаваме с $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

2. Биортогонални бази в пространството E^n. Нека $\mathbf{e}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, е базис** в n-мерното пространство E^n. Очевидно $\mathbf{e}_i$ са линейно независими вектори.

Определение 1. Базисът e^j (индексът е горен), $j=1, 2, \ldots, n$, се нарича биортогонален базис за базиса $\mathbf{e}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, ако са в сила съотношенията

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Вярно е следното твърдение.

Твърдение. За всеки базис $\mathbf{e}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, на пространств-

* Л. Кронекер — немски математик (1823—1891).

** Векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуват базис в E^n, ако всеки вектор **a** от E^n се представя по единствен начин във вида

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + a^n \mathbf{e}_n = a^i \mathbf{e}_i .$$

вото E_n съществува единствен биортогонален базис $\mathbf{e}^j$, $j=1, 2, \ldots, n$, т. е. такъв базис, че

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказателство. Да означим линейната обвивка (т. е. множеството от всички линейни комбинации) на векторите $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ с M_i. Избираме от ортогоналното допълнение на M_i* вектор $\mathbf{e}^i$, нормиран с условието

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i) = 1.$$

Очевидно ще имаме

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Векторите $\mathbf{e}^j$, $j=1, 2, \ldots, n$, също образуват базис на пространството E^n. Наистина, ако това не е така, то би съществувал вектор от пространството, който се разлага нееднозначно по системата $\mathbf{e}^j$, т. е. нулевият вектор би имал разлагане по базиса с коефициенти, които не са всичките равни на нула. Тогава някой вектор $\mathbf{e}^k$ от системата $\mathbf{e}^j$ ще принадлежи на линейната обвивка** M^k на векторите $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \ldots, \mathbf{e}^{k-1}, \mathbf{e}^{k+1}, \ldots, \mathbf{e}^n$. Но това не е възможно, тъй като в този случай $\mathbf{e}^k$ би бил ортогонален на вектора $\mathbf{e}^k$ (поради $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^p)=0$ при $k \neq p$). Но векторът $\mathbf{e}^k$ не може да бъде ортогонален на $\mathbf{e}_k$, понеже по построение $(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}^k)=1$.

По такъв начин за произволен базис $\mathbf{e}_i$ е построен биортогонален базис $\mathbf{e}^j$, всички вектори на който се определят по единствен начин. Наистина, ако наред с $\mathbf{e}^j$ би съществувал още един биортогонален базис $\tilde{\mathbf{e}}^j$, то бихме имали $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j - \tilde{\mathbf{e}}^j)=0$ за всички $i, j=1, 2, \ldots, n$. Оттук следва, че $\mathbf{e}^j = \tilde{\mathbf{e}}^j$. Действително, ако един вектор е ортогонален на всички вектори от даден базис, то той е ортогонален и на себе си, поради което той е нулевият вектор.

Твърдението е доказано.

Ще отбележим, че ако базисът $\mathbf{e}^i$ е ортонормиран, то биортогоналният му базис съвпада с него.

3. Смяна на базиси. Ковариантни и контравариантни координати на вектор. Често ще използваме преход от биортогонални базиси $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^i$ към нови биортогонални базиси $\mathbf{e}_{i'}$, $\mathbf{e}^{i'}$.

Да запишем разлаганията на базисните вектори, използвайки нашето съглашение за сумиране:

* Т. е. от подпространството $E^n \ominus M_i$ — подпространството от всички вектори, ортогонални на M_i.

** Т. е. векторът $\mathbf{e}^k$ би бил линейна комбинация на векторите $\mathbf{e}^p$ с $p \neq k$.

(6.1) $\quad \mathbf{e}_{i'} = b^{i}_{i'} \mathbf{e}_{i}, \quad \mathbf{e}_{i} = b^{i'}_{i} \mathbf{e}_{i'}, \quad i, i' = 1, 2, \ldots, n,$

(6.2) $\quad \mathbf{e}^{i'} = \widetilde{b}^{i'}_{i} \mathbf{e}^{i}, \quad \mathbf{e}^{i} = \widetilde{b}^{i}_{i'} \mathbf{e}^{i'}, \quad i, i' = 1, 2, \ldots, n.$

Тук $(b^{i}_{i'})$ е матрицата на прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия $\mathbf{e}_{i'}$, а $(b^{i'}_{i})$ — матрицата на обратния преход — от базиса $\mathbf{e}_{i'}$ към $\mathbf{e}_i$.

Аналогично матриците $(\widetilde{b}^{i'}_{i})$ и $(\widetilde{b}^{i}_{i'})$ са матриците на правия и обратния преход от базиса $\mathbf{e}^{i}$ към базиса $\mathbf{e}^{i'}$.

Формулите (6.1) са формули за прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия $\mathbf{e}_{i'}$ и формули за обратния преход.

Формули (6.2) са формули за прехода от стария базис $\mathbf{e}^{i}$ към новия $\mathbf{e}^{i'}$ и формули за обратния преход.

Трансформациите (6.1) са взаимнообратни, поради което и матриците $(b^{i}_{i'})$ и $(b^{i'}_{i})$ са обратни една на друга. Наистина да умножим първото от равенствата (6.1) скаларно с $\mathbf{e}^{i'}$, а второто [от равенствата (6.1) — с $\mathbf{e}^{j}$. Използувайки биортогоналността на базисите, ще получим

$$\delta^{i'}_{i'} = b^{i}_{i'} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{i'}), \quad \delta^{j}_{i} = b^{i'}_{i} (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^{j}).$$

Обаче, както това следва от същите формули (6.1),

(6.3) $\quad (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^{i'}) = b^{i'}_{i} \delta^{i'}_{i'} = b^{i'}_{i}, \quad (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^{j}) = b^{i}_{i'} \delta^{j}_{i} = b^{j}_{i'}.$

По такъв начин

$$\delta^{i'}_{i'} = b^{i}_{i'} \, b^{i'}_{i}, \quad \delta^{j}_{i} = b^{i'}_{i} \cdot b^{j}_{i'},$$

т. е. матриците $(b^{i}_{i'})$ и $(b^{i'}_{i})$ са взаимнообратни.

Аналогично следва, че и матриците $(\widetilde{b}^{i'}_{i})$ и $(\widetilde{b}^{i}_{i'})$ са взаимнообратни.

Вярно е следното твърдение за връзката между матриците $(b^{i}_{i'})$ и $(\widetilde{b}^{i}_{i'})$, $(b^{i'}_{i})$ и $(\widetilde{b}^{i'}_{i})$.

Твърдение. Матрицата $(b^{i}_{i'})$ съвпада с матрицата $(\widetilde{b}^{i}_{i'})$; матрицата $(b^{i'}_{i})$ съвпада с матрицата $(\widetilde{b}^{i'}_{i})$.

Доказателство. Очевидно поради взаимната обратност на матриците $(b^{i}_{i'})$ и $(b^{i'}_{i})$ и на матриците $(\widetilde{b}^{i}_{i'})$ и $(\widetilde{b}^{i'}_{i})$ е достатъчно да се докаже, че съвпадат $(b^{i}_{i'})$ и $(\widetilde{b}^{i}_{i'})$.

От (6.3) получаваме, че

(6.4) $\quad b^{i}_{i'} = (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^{i}).$

Аналогично с помощта на (6.2) ще получим, че

(6.4′) $\quad \widetilde{b}^{i}_{i'} = (\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}^{i}).$

Десните страни на равенствата (6.4) и (6.4′) са равни, поради което $b^{i}_{i'} = \widetilde{b}^{i}_{i'}$, което и трябваше да се докаже.

Следствие. За прехода от базисите $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}^{i}$ към базисите $\mathbf{e}_{i'}$, $\mathbf{e}^{i'}$ е достатъчно да се знае само матрицата $(b^{i}_{i'})$ на прехода от базиса $\mathbf{e}_i$ към базиса $\mathbf{e}_{i'}$. (Матрицата $(b^{i'}_{i})$ е обратна на $(b^{i}_{i'})$ и се пресмята от нея.)

По такъв начин стигаме до следните формули за смяна на базисите:

(6.5) $$\mathbf{e}_{i'} = b^{i}_{i'} \mathbf{e}_{i}, \quad \mathbf{e}_{i} = b^{i'}_{i} \mathbf{e}_{i'},$$
$$\mathbf{e}^{i'} = b^{i'}_{i} \mathbf{e}^{i}, \quad \mathbf{e}^{i} = b^{i}_{i'} \mathbf{e}^{i'}.$$

Да намерим сега формули за смяната на координатите на вектор при преход към нов базис. Отначало ще направим следните разсъждения.

Нека $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^{j}$ са биортогонални базиси, а $\mathbf{a}$ — произволен вектор. Тогава, разлагайки вектора $\mathbf{a}$, ще получим

(6.6) $\quad \mathbf{a} = a^{i} \mathbf{e}_{i}, \quad \mathbf{a} = a_{i} \mathbf{e}^{i}.$

Биортогоналният базис дава много удобен начин за пресмятане на коефициентите a^{i} и a_i в разлаганията (6.6). Наистина, умножавайки първото равенство скаларно с $\mathbf{e}^{j}$, а второто — с $\mathbf{e}_{j}$, получаваме

(6.7) $\quad a^{j} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}^{j}), \quad a_{j} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_{j}), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Следователно, като се вземат предвид равенствата (6.7), формулите (6.6) добиват вида

(6.8) $\quad \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}^{i}) \mathbf{e}_{i}, \quad \mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_{i}) \mathbf{e}^{i}.$

В частност, ако заместим вектора $\mathbf{a}$ в първото равенство (6.8) с вектора $\mathbf{e}^{j}$, а във второто равенство (6.8) с вектора $\mathbf{e}_{j}$, ще получим

(6.9) $$\mathbf{e}^{j} = (\mathbf{e}^{j}, \mathbf{e}^{i}) \, \mathbf{e}_{i} = g^{ji} \mathbf{e}_{i},$$
$$\mathbf{e}_{j} = (\mathbf{e}_{j}, \mathbf{e}_{i}) \, \mathbf{e}^{i} = g_{ji} \mathbf{e}^{i},$$

където $g^{ji} = (\mathbf{e}^{j}, \mathbf{e}^{i})$, $g_{ji} = (\mathbf{e}_{j}, \mathbf{e}_{i})$.

Ако умножим първото от съотношенията (6.9) скаларно с $\mathbf{e}_{k}$, а второто — с $\mathbf{e}^{k}$, ще получим

$$g^{ji} g_{ik} = \delta^{k}_{j}, \quad g_{ji} g^{ik} = \delta^{k}_{j}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. матриците (g^{ji}) и (g_{ji}) са взаимнообратни и поради симетричността на скаларното произведение — симетрични.

Сега ще получим формули за смяната на координатите на вектор при преход към нов базис. Ако $\mathbf{e}_i$ е старият базис, а $\mathbf{e}_{i'}$ — новият, $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}^{i'}$ — съответните биортогонални базиси и ако

$$\mathbf{a}=a_{i'}\,\mathbf{e}^{i'},$$

то, както знаем, от формулите (6.7) следва, че

$$a_{i'}=(\mathbf{a},\,\mathbf{e}_{i'}).$$

Замествайки в дясната част на това съотношение $\mathbf{e}_{i'}$ с израза за него от (6.5), ще получим

$$a_{i'}=(\mathbf{a},\,b^i_{i'}\,\mathbf{e}_i)=b^i_{i'}\,(\mathbf{a},\,\mathbf{e}_i)=b^i_{i'}\,a_i.$$

И така координатите $a_{i'}$ на вектора $\mathbf{a}$ в разлагането му по базиса $\mathbf{e}^{i'}$ (биортогонален към новия базис $\mathbf{e}_{i'}$) при прехода към този нов базис $\mathbf{e}^{i'}$ имат вида

(6.10) $$a_{i'}=b^i_{i'}\,a_i,$$

тук $(b^i_{i'})$ е матрицата на прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия базис $\mathbf{e}_{i'}$, a_i са координатите на вектора $\mathbf{a}$ в разлагането му по биортогоналния базис $\mathbf{e}^i$:

$$\mathbf{a}=a_i\,\mathbf{e}^i.$$

По такъв начин координатите a_i при прехода от стария базис $\mathbf{e}_i$ към новия $\mathbf{e}_{i'}$ се преобразуват с помощта на матрицата $(b^i_{i'})$ на прехода от стария базис към новия по формулата (6.10).

Ето защо казваме, че координатите a_i се преобразуват «съгласувано», и наричаме тези координати ковариантни (което означава съгласувано изменящи се) координати на вектора $\mathbf{a}$.

Ако сега съгласно формули (6.7) запишем, че

$$a^{i'}=(\mathbf{a},\,\mathbf{e}^{i'})$$

и заместим $\mathbf{e}^{i'}$ с израза му от (6.5), ще получим

(6.11) $$a^{i'}=(\mathbf{a},\,b^{i'}_i\,\mathbf{e}^i)=b^{i'}_i\,(\mathbf{a},\,\mathbf{e}^i)=b^{i'}_i\,a^i.$$

От формула (6.11) виждаме, че при прехода към новия базис координатите a^i в разлагането на вектора $\mathbf{a}$ по стария базис $\mathbf{e}_i\,(\mathbf{a}=a^i\,\mathbf{e}_i)$ се преобразуват с помощта на матрицата $(b^{i'}_i)$ на прехода от новия базис към стария.

Затова казваме, че координатите $\mathbf{a}^i$ се преобразуват «несъгласувано» и наричаме тези координати контравариантни (което означава противоположно изменящи се) координати на вектора $\mathbf{a}$.

4. Инварианти на линеен оператор. Дивергенция и ротор. Навсякъде по-нататък ще предполагаме, че се разглежда тримерното пространство E^3. Да разгледаме произволен линеен оператор A

в това пространство. Ще припомним, че операторът A се нарича линеен, ако за всеки два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и за всеки две реални числа λ и μ е в сила равенството

$$A\,(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda A\mathbf{a}+\mu A\mathbf{b}.$$

Нека $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$ са биортогонални базиси в E^3. По-долу ще имаме нужда от две равенства, които са в сила за произволен линеен оператор A:

1) $$(\mathbf{e}_i,\,A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}^i,\,A\mathbf{e}_i)^*,$$

2) $$\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i=\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i$$

(с $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ е означено векторното произведение на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

Да докажем тези съотношения. Съгласно формули (6.9) имаме $\mathbf{e}^i=g^{ik}\,\mathbf{e}_k$, $\mathbf{e}_i=g_{ip}\,\mathbf{e}^p$. Поради това $(\mathbf{e}_i,\,A\mathbf{e}^i)=(g_{ip}\,\mathbf{e}^p,\,Ag^{ik}\,\mathbf{e}_k)=$

$$=g_{ip}g^{ik}\,(\mathbf{e}^p,\,A\mathbf{e}_k)=\delta^k_p\,(\mathbf{e}^p,\,A\mathbf{e}_k)=(\mathbf{e}^k,\,A\mathbf{e}_k)=(\mathbf{e}^i,\,A\mathbf{e}_i).$$

Тук използувахме това, че матриците (g_{ip}) и (g^{ik}) са взаимно-обратни и симетрични.

Съотношение 1) е доказано. Ще преминем към доказателството на 2). Използувайки същите равенства за $\mathbf{e}^i$ и $\mathbf{e}_i$ и свойствата на матриците (g_{ip}) и (g^{ik}), имаме

$$\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i=g_{ip}\,\mathbf{e}^p\times Ag^{ik}\,\mathbf{e}_k=g_{ip}\cdot g^{ik}\mathbf{e}^p\times A\mathbf{e}_k=$$
$$=\delta^k_p\,\mathbf{e}^p\times A\mathbf{e}_k=\mathbf{e}^k\times A\mathbf{e}_k=\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i.$$

Един израз се нарича инвариант (инвариантен), ако не се изменя при смяна на базиса на пространството. Например инварианти са скаларното произведение на два вектора, стойността на скаларна функция в дадена точка от пространството.

Сега ще изучим някои инварианти, свързани с даден оператор A. Нека $\mathbf{e}_i$ е базис в пространството E^3, а $\mathbf{e}^i$ — биортогоналният му базис.

Твърдение. Величината $(\mathbf{e}_i,\,A\mathbf{e}^i)$ (или което е същото $(\mathbf{e}^i,\,A\mathbf{e}_i)$) е инвариант.

Доказателство. Трябва да се докаже, че при преминаване към друг базис $\mathbf{e}_{i'}$ (с биортогонален базис $\mathbf{e}^{i'}$) ще бъде изпълнено равенството

$$(\mathbf{e}_i,\,A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}_{i'},\,A\mathbf{e}^{i'}).$$

Да запишем, използувайки формули (6.5),

$$\mathbf{e}_i=b^{i'}_i\,\mathbf{e}_{i'},\quad \mathbf{e}^i=b^i_{p'}\mathbf{e}^{p'},$$

* Да напомним, че ако в множителите на даден израз се срещат повтарящи се индекси, единият от които е горен, а другият — долен, то по тези индекси се извършва сумиране.

където $(b_i^{i'})$ е матрицата на прехода от базиса $\mathbf{e}_{i'}$ към базиса $\mathbf{e}_i$, а $(b_{p'}^{i})$ е обратната ѝ.

Следователно можем да запишем

$$(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)=b_i^{i'}\cdot b_{p'}^{i}(\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{p'})=$$
$$=\delta_{p'}^{i'}(\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{p'})=(\mathbf{e}_{i'}, A\mathbf{e}^{i'}).$$

Доказателството на твърдението получаваме, като сравним първия и последния член в тази верига от равенства.

Определение 2. Инвариантът $(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)$ (или $(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)$) на линейния оператор A се нарича дивергенция на този оператор и се бележи с $\operatorname{div} A$.

Следователно

$$\operatorname{div} A=(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i).$$

З а б е л е ж к а 1. Всеки линеен оператор може да бъде зададен еднозначно относно даден базис с помощта на матрица, наречена матрица на линейния оператор. Затова очевидно е достатъчно да се зададе операторът в базисните вектори, т. е. да се зададат векторите $A\mathbf{e}_i$. Разлагайки тези вектори по базиса $\mathbf{e}_i$, получаваме

(6.12) $$A\mathbf{e}_i=a_i^k\mathbf{e}_k, \quad (\mathbf{e}^l, A\mathbf{e}_i)=a_i^k(\mathbf{e}^l, \mathbf{e}_k)=a_i^l.$$

Матрицата (a_i^k) е точно матрицата на линейния оператор A относно базиса $\mathbf{e}_i$.

Дивергенцията на оператора A може сега да се изрази чрез елементите на матрицата (a_i^k):

$$\operatorname{div} A=(\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}^i)=(\mathbf{e}^i, A\mathbf{e}_i)=a_1^1+a_2^2+a_3^3.$$

З а б е л е ж к а 2. В линейната алгебра сумата от диагоналните елементи $a_1^1+a_2^2+a_3^3$ се нарича следа на оператора A. Припомняме, че уравнението за собствените стойности на оператора A има вида

$$\det(\lambda E-A)=\lambda^3-(a_1^1+a_2^2+a_3^3)\lambda^2+\cdots=0.$$

От формулите на Виет получаваме

$$a_1^1+a_2^2+a_3^3=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,$$

където λ_1, λ_2, λ_3 са всички собствени стойности на оператора A. Тъй като собствените стойности на един оператор не зависят от избора на координатната система, получаваме ново доказателство за инвариантността на дивергенцията.

Ще въведем и един векторен инвариант.

Твърдение. Величината $\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i$ (или което е същото $\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i$) е инвариант.

Д о к а з а т е л с т в о. Нека $\mathbf{e}_{i'}$ е новият базис ($\mathbf{e}^{i'}$ — биортогоналният базис на $\mathbf{e}_{i'}$). Да запишем съгласно формули (6.5)

$$\mathbf{e}_i=b_i^{i'}\mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}^i=b_{p'}^{i}\mathbf{e}^{p'}.$$

Да заместим тези величини в израза $\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i$. Получаваме

$$\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i=b_i^{i'}, \; b_{p'}^{i}\mathbf{e}_{i'}\times A\mathbf{e}^{p'}=\delta_{p'}^{i'}\mathbf{e}_{i'}\times A\mathbf{e}^{p'}=$$
$$=\mathbf{e}_{i'}\times A\mathbf{e}^{i'}.$$

Следователно инвариантността на величината $\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i$ е доказана.

Ще дадем следното определение.

Определение 3. Инвариантът $\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i$ (или $\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i$) на линейния оператор A се нарича ротор на този оператор и се означава с $\operatorname{rot} A$.

Така

$$\operatorname{rot} A=\mathbf{e}_i\times A\mathbf{e}^i=\mathbf{e}^i\times A\mathbf{e}_i=\mathbf{e}_1\times A\mathbf{e}^1+\mathbf{e}_2\times A\mathbf{e}^2+$$
$$+\mathbf{e}_3\times A\mathbf{e}^3=\mathbf{e}^1\times A\mathbf{e}_1+\mathbf{e}^2\times A\mathbf{e}_2+\mathbf{e}^3\times A\mathbf{e}_3.$$

5. Изрази за дивергенцията и ротора на линеен оператор относно ортонормиран базис. Нека в пространството E^3 е избран ортонормиран базис $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. В този случай, както вече отбелязахме, биортогоналният базис на избрания съвпада с него (вж. т. 2).

Съгласно формули (6.12) получаваме

(6.13)
$$a_1^1=(\mathbf{i}, A\mathbf{i}),\; a_2^1=(\mathbf{i}, A\mathbf{j}),\; a_3^1=(\mathbf{i}, A\mathbf{k}),$$
$$a_1^2=(\mathbf{j}, A\mathbf{i}),\; a_2^2=(\mathbf{j}, A\mathbf{j}),\; a_3^2=(\mathbf{j}, A\mathbf{k}),$$
$$a_1^3=(\mathbf{k}, A\mathbf{i}),\; a_2^3=(\mathbf{k}, A\mathbf{j}),\; a_3^3=(\mathbf{k}, A\mathbf{k}).$$

Поради това

(6.14) $$\operatorname{div} A=a_1^1+a_2^2+a_3^3=(\mathbf{i}, A\mathbf{i})+(\mathbf{j}, A\mathbf{j})+(\mathbf{k}, A\mathbf{k}).$$

Да намерим израз за $\operatorname{rot} A$. Имаме

$$\operatorname{rot} A=\mathbf{i}\times A\mathbf{i}+\mathbf{j}\times A\mathbf{j}+\mathbf{k}\times A\mathbf{k}.$$

Остава да пресметнем чрез елементите на матрицата на оператора векторните произведения в събираемите отдясно. По формула (6.12) ще запишем

$$A\mathbf{i}=a_1^1\mathbf{i}+a_1^2\mathbf{j}+a_1^3\mathbf{k}.$$

Ето защо

$$\mathbf{i}\times A\mathbf{i}=a_1^1\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_1^2\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_1^3\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-a_1^3\mathbf{j}+a_1^2\mathbf{k}.$$

Аналогично

$$\mathbf{j}\times A\mathbf{j}=a_2^3\mathbf{i}-a_2^1\mathbf{k},\quad \mathbf{k}\times A\mathbf{k}=-a_3^2\mathbf{i}+a_3^1\mathbf{j}.$$

Поради това

$$\operatorname{rot} A=(a_2^3-a_3^2)\mathbf{i}+(a_3^1-a_1^3)\mathbf{j}+(a_1^2-a_2^1)\mathbf{k}. \tag{6.15}$$

§ 2. Скаларни и векторни полета. Диференциални оператори на векторния анализ

1. Скаларни и векторни полета. В теорията на полето се разглеждат функции, които на всяка точка M от фиксирана област D съпоставят един специален обект $a(M)$, наречен тензор. В този случай казваме, че в областта D е зададено тензорно поле. Ще изучаваме само два най-прости случая на тензорно поле, а именно — скаларно и векторно поле.

Ще казваме, че в областта D е зададено скаларно поле, ако на всяка точка M от тази област по някакъв закон е съпоставено определено число $u(M)$, т. е. понятията скаларно поле и скаларна функция, дефинирана в областта D, съвпадат.

Аналогично казваме, че в областта D е зададено векторно поле, ако на всяка точка от M от тази област е съпоставен по някакъв закон вектор $\mathbf{a}(M)$, т. е. понятията векторно поле и векторна функция, дефинирана в бластта D, съвпадат.

Нека например $\mathbf{E}(M)$ е векторът напрежение на електричното поле, породено от единичен отрицателен товар, разположен в началото на координатната система на тримерното пространство E^3. Тогава в точката $M(x, y, z)$ векторът $\mathbf{E}(M)$ има, както е известно, дължина $1/\rho^2$, където $\rho=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, и е насочен от точката към началото на координатната система. Ето защо формулата, задаваща векторното поле $\mathbf{E}(M)$, е

$$\mathbf{E}(M)=\left(-\frac{x}{\rho^3},-\frac{y}{\rho^3},-\frac{z}{\rho^3}\right).$$

Други примери на векторни полета са полето на температурите във вътрешността на нагрято тяло, полето на скоростите на стационарен флуиден поток и др.

Ще приведем още примери на скаларни и векторни полета, които играят важна роля в анализа и физиката. За целта ще трябва да изучим понятието диференцируемост на скаларно и векторно поле.

Понеже скаларното поле представлява числова функция, зададена в област D, понятието диференцируемост на скаларното поле (на тази числова функция) ни е вече известно (вж. определение т. 2, § 4, глава 12, част I).

Ще припомним това определение, заменяйки думата «функция» с думите «скаларно поле». Нека в областта D на E^3 е зададено скаларното поле $u=f(x, y, z)$.

Определение 1. Скаларното поле $u=f(x, y, z)=f(M)$ се нарича диференцируемо в дадена точка $M(x, y, z)$ на областта D, ако пълното нарастване $\Delta u(M)$ в тази точка може да се представи във вида

$$\Delta u(M)=A_1\Delta x+A_2\Delta y+A_3\Delta z+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y+\alpha_3\Delta z,$$

където A_1, A_2, A_3 са числа, независещи от Δx, Δy, Δz, а α_1, α_2, α_3 са безкрайно малки функции при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\Delta z\to 0$, равни на нула при $\Delta x=0$, $\Delta y=0$, $\Delta z=0$.

Условието за диференцируемост на скаларното поле $u=f(x, y, z)$, както е показано на същото място в част I, може да се запише във вида

$$\Delta u(M)=A_1\Delta x+A_2\Delta y+A_3\Delta z+o(\rho),$$

където $\rho=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2}$, като това представяне е единствено.

Тази формула може да се запише в по-компактна форма:

$$\Delta u(M)=(A, \mathbf{h})+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.16}$$

където $(A, \mathbf{h})$ е скаларното произведение на векторите

$$A=(A_1, A_2, A_3),\quad \mathbf{h}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z),\quad \|\mathbf{h}\|=\rho.$$

Следователно горното определение може да се запише и така:

Определение 1′. Скаларното поле $u(M)$ е диференцируемо в точката M, ако в тази точка за пълното нарастване е вярно съотношението

$$\Delta u(M)=(A, \mathbf{h})+o(\|\mathbf{h}\|).$$

Скаларното поле $u(M)$ е диференцируемо в областта D, ако то е диференцируемо във всяка точка на тази област.

Ще припомним, че (вж. т. 8, § 4, глава 12, част I) условието за диференцируемост (6.16) може да се запише във вида

$$\Delta u(M)=(\operatorname{grad} u, \mathbf{h})+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.17}$$

където векторът $\operatorname{grad} u(M)=\left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right)$.

Формула (6.17) ни дава още един пример на векторно поле, а именно градиента на диференцируемо в областта D скаларно поле $u(M)$. Определението на градиента не зависи от избора на координатната система и поради това представлява инвариант.

Съгласно разглежданията в т. 8, § 4, глава 12, част I в случая на диференцируемо поле $u(M)$ може да се въведе производна на $u(M)$ по посока на вектор **e**:

$$\frac{\partial u}{\partial e}=(\mathbf{e}, \operatorname{grad} u). \tag{6.18}$$

Производната по посока очевидно задава някакво ново скаларно поле в областта D.

Понятието градиент дължи появата си на бял свят на изтъкнатия физик Джеймс Клерк Максуел* и произлиза от латинската дума gradior, означаваща «раста». Както знаем от част I, главното свойство на градиента е, че той определя посоката на найбързото спускане. Максуел възнамерявал отначало да нарече този вектор slope — «наклон». Уилям Роуен Хамилтън** създал за този вектор специално означение ∇ — обърнатата гръцка буква Δ (делта). И така, ако **i**, **j**, **k** е фиксиран ортонормиран базис, то

$$\operatorname{grad} u=\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\,\mathbf{k},$$

$$\nabla=\mathbf{i}\,\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\,\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Отначало и наименованието на знака ∇ било «атлед» — прочетена отзад напред думата делта. По-късно английските учени (О. Хевисайд, Р. Смит) започнали по-често да употребяват думата «набла», която и влязла трайно в литературата. Знакът ∇ бил наречен набла поради сходството му с рамката на древноасирийския музикален инструмент набла. Набла е много удобно означение във физиката — много формули силно се опростяват при неговото използуване. Самият Максуел посветил на означението набла специална ода в осем части.

Да преминем към изучаването на диференцируемото векторно поле. Понятието диференцируемост на векторно поле се определя в пълна аналогия с понятието диференцируемост на скаларно поле и това понятие беше дадено още в допълнението 2 към глава 12, част I.

Нека в областта D на пространството E^3 е зададено векторното поле $\mathbf{a}(M)$ (векторната функция $\mathbf{a}(M)$ на точките M, принадлежащи на D). Ще поясним, че $\mathbf{a}(M)$ на всяка точка $M(x, y, z)$ съпоставя вектор $\mathbf{a}(M)$.

Формулираме следното определение.

Определение 2. Векторното поле $\mathbf{a}(M)$ се нарича диференцируемо в точката M на областта D, ако пълното нарастване $\Delta\mathbf{a}(M)$ се представя във вида

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.19}$$

където A е линеен оператор в E^3:

$$\mathbf{h}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z),\ \|\mathbf{h}\|=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2},$$

а $o(\|\mathbf{h}\|)$ — вектор, дължината на който клони към нула при $\|\mathbf{h}\|\to 0$.

Ако векторното поле е диференцируемо, то представянето (6.19) е единствено.

Наистина (вж. и допълнение 2 към глава 12, част I), ако съществуват две представяния от вида (6.19), т.е.

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o_1(\|\mathbf{h}\|),\ \Delta\mathbf{a}(M)=B\mathbf{h}+o_2(\|\mathbf{h}\|),$$

то

$$(A-B)\mathbf{h}=o(\|\mathbf{h}\|),$$

където $o(\|\mathbf{h}\|)=o_1(\|\mathbf{h}\|)-o_2(\|\mathbf{h}\|)$.

Разделяйки на $\|h\|$ двете части на полученото равенство, получаваме

$$(A-B)\mathbf{e}=\frac{o(\|\mathbf{h}\|)}{\|\mathbf{h}\|},$$

където $\mathbf{e}=\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ е вектор с дължина единица. Отдясно стои безкрайно малък вектор (неговата дължина клони към нула при $\|\mathbf{h}\|\to 0$), и следователно за произволен единичен вектор **e** величината в лявата страна е равна на нула:

$$(A-B)\mathbf{e}=0.$$

Но щом два линейни оператора A и B съвпадат върху единичната сфера, то те са равни очевидно за произволен вектор, т.е. те съвпадат навсякъде. Следователно $A=B$.

Също както в случая на скаларно поле, векторното поле е диференцируемо в областта D, ако то е диференцируемо във всяка точка на областта D.

Както и при скаларното поле, възниква въпросът за дефиниране на производна по посока за векторно поле $\mathbf{a}(M)$.

Нека M е точка от областта D, **e** — единичен вектор с координати $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, определящ някаква посока.

Нека M' е произволна точка от D, различна от M и такава, че векторът $\overline{MM'}$ е колинеарен с вектора **e**. Да означим разстоянието между M и M' с ρ.

* Д. К. Максуел — шотландски физик, създател на математическата теория на електромагнитното поле (1831—1879).

** У. Р. Хамилтън — ирландски математик и механик (1805—1865).

Определение 3. Производна по посоката $\mathbf{e}$ на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в точката M се нарича границата на отношението

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}(M)}{\rho}=\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}$$

(когато тази граница съществува).

Тук $\Delta\mathbf{a}(M)=\mathbf{a}(M')-\mathbf{a}(M)$.

Ще докажем следното твърдение.

Твърдение. Нека $\mathbf{a}(M)$ е диференцируемо векторно поле, а A — линейният оператор, определен от съотношението за диференцируемост (т. е. от съотношението $\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|)$). Тогава производната $\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}$ на полето в точка M по произволна посока $\mathbf{e}$ съществува и се определя с равенството

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{e}}=A\mathbf{e}. \tag{6.20}$$

Интересно е да сравним тази формула с формула (6.18). Във формула (6.18) вдясно стои също резултатът от прилагането на оператора $A=(A_1, A_2, A_3)$ към вектора $\mathbf{e}$. Резултатът от това прилагане е точно скаларното произведение на градиента на полето и вектора $\mathbf{e}$.

Доказателство. Нека $\mathbf{e}$ е фиксиран вектор. Избираме точката M' така, че $\mathbf{h}=\rho\mathbf{e}$. Тогава съгласно (6.19) получаваме

$$\Delta\mathbf{a}(M)=\rho A\mathbf{e}+o(\|\mathbf{h}\|).$$

Понеже $\|\mathbf{h}\|=\rho$, то

$$\frac{\Delta\mathbf{a}(M)}{\rho}=A\mathbf{e}+\frac{o(\rho)}{\rho}.$$

Извършвайки граничен преход при $\rho\to 0$ в това съотношение, получаваме формула (6.20), т. е. това, което трябваше да докажем.

Да се върнем отново към разглеждане на формула (6.19):

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|).$$

Тук A е линеен оператор, приложен към вектора $\mathbf{h}$ от E^3. Както знаем, относно фиксиран базис всеки линеен оператор се определя от своята матрица. Да намерим матрицата на линейния оператор A относно ортонормирания базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, с който е свързана правоъгълната декартова координатна система $Oxyz$. Нека векторът $\mathbf{a}(M)$ има относно този базис координати P, Q, R. Съгласно формули (6.20)

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{i}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}=A\mathbf{i},\quad \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{j}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}=A\mathbf{j},\quad \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{k}}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}=A\mathbf{k}. \tag{6.21}$$

Елементите на матрицата $\mathring{A}$ на оператора A пресмятаме по формули (6.13):

$$\mathring{A}=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z}\\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z}\end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

2. Дивергенция, ротор и производна по посока на векторно поле. Нека $\mathbf{a}(M)$ е векторно поле, диференцируемо в областта D. Тогава съгласно (6.19)

$$\Delta\mathbf{a}(M)=A\mathbf{h}+o(\|\mathbf{h}\|), \tag{6.19}$$

където A е линеен оператор, зависещ от точката M, векторът $\mathbf{h}$ е нарастването на аргумента на $\mathbf{a}(M)$, а $o(\|\mathbf{h}\|)$ — вектор, клонящ към нула при $\|\mathbf{h}\|\to 0$.

Определение 4. Дивергенция на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в точката M се нарича дивергенцията на линейния оператор A от условието за диференцируемост (6.19):

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\operatorname{div}A.$$

Определение 5. Ротор на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в точката M наричаме ротора на линейния оператор A от условието за диференцируемост (6.19):

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)=\operatorname{rot}A.$$

Ще отбележим, че $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ са дефинирани във всяка точка M от областта D. Тези величини са инвариантни по определение, т. е. не зависят от избора на базиса. Ето защо $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ представлява скаларно поле, а $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ — векторно поле.

Да изберем ортонормиран базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и да означим с $Oxyz$ свързаната с него ортогонална декартова координатна система. Нека координатите на полето $\mathbf{a}(M)$ относно базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ са P, Q, R.

Матрицата на оператора A относно този базис е вече намерена (вж. формула (6.22)). Понеже $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=\operatorname{div}A$, по формула (6.14) веднага получаваме

$$\operatorname{div}\mathbf{a}(M)=(\mathbf{i}, A\mathbf{i})+(\mathbf{j}, A\mathbf{j})+(\mathbf{k}, A\mathbf{k})=$$

$$=a_1^1+a_2^2+a_3^3=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=(\nabla, \mathbf{a}(M)), \tag{6.23}$$

където

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},\quad \mathbf{a}(M)=\mathbf{a}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}.$$

По-нататък поради $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)=\operatorname{rot}A$ чрез формули (6.16) и (6.22) получаваме

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial R}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

(6.24)

$$=\nabla\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

Последната детерминанта представлява удобен за запомняне символичен запис на ротора.

Да пресметнем производната на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ по посоката $\mathbf{e}$. Ще се възползуваме от формула (6.20):

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}}=A\mathbf{e}.$$

Понеже единичният вектор $\mathbf{e}$ има координати $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$, то

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}}=A\mathbf{e}=A(\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\cos\beta+\mathbf{k}\cos\gamma)=$$

$$=\cos\alpha A\mathbf{i}+\cos\beta A\mathbf{j}+\cos\gamma A\mathbf{k}.$$

По-нататък по формули (6.21)

$$A\mathbf{i}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x},\quad A\mathbf{j}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y},\quad A\mathbf{k}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z},$$

поради което

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}}=\cos\alpha\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}.$$

Като вземем предвид, че $\mathbf{a}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$, можем да напишем и следния израз за производната по посока

$$\frac{\partial\mathbf{a}(M)}{\partial\mathbf{e}}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial Q}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{j}+$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial R}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial R}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathbf{k}.$$

3. Някои други формули на векторния анализ. Да предположим, че в областта D са зададени скаларното поле $u(M)$ и векторното поле $\mathbf{a}(M)$, като всички частни производни от втори ред на функциите $u(M)$ и $a(M)$ са непрекъснати в областта D. Тогава векторното поле $\operatorname{grad}u$ е диференцируемо, а $\operatorname{div}\mathbf{a}(M)$ е диференцируемо скаларно поле; $\operatorname{rot}\mathbf{a}(M)$ е диференцируемо векторно поле. Следователно диференциалните оператори grad, div, rot могат да се приложат още веднъж и имат смисъл следните операции:

$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad}u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$,
$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

Нека $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ е фиксиран ортонормиран базис, а $Oxyz$ е свързаната с него правоъгълна декартова координатна система.

Твърдение. В сила са следните съотношения:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\nabla\times\nabla u=0,$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u=(\nabla,\nabla u)=\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}=\nabla(\nabla,\mathbf{a})=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{i}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right)\mathbf{k}.$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\nabla(\nabla\times\mathbf{a})=0,$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}-\Delta\mathbf{a},$$

където

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Доказателство. Всичките формули се доказват по обща схема: последователно се прилагат към скаларното или векторното поле съответните диференциални оператори. Да докажем например първото равенство. Векторът $\operatorname{grad}u=\nabla u$ има координати $\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$, поради което за $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\nabla\times\operatorname{grad}u$ получаваме по формули (6.24) израза

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=\nabla\times\operatorname{grad}u=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{i}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 y}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{k}=0.$$

Да докажем второто съотношение (вж. формула (6.23)):

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}u=(\nabla,\nabla u)=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u.$$

Символът Δ (делта) има специално име — оператор на Лаплас*. По такъв начин символно можем да запишем $\Delta=\nabla^2$.

Ще докажем и третото съотношение, предоставяйки доказателството на останалите две равенства на читателя. Да запишем

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}=\nabla(\nabla,\mathbf{a})=\nabla\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)=\nabla\mathbf{b},$$

където

$$\mathbf{b}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

По-нататък

$$\nabla\mathbf{b}=\frac{\partial b}{\partial x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial b}{\partial y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial b}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

и замествайки $\mathbf{b}$ с неговия израз, получаваме дясната страна на третото съотношение. Твърдението е доказано.

Забележка. Както вече нееднократно отбелязахме, величините $\operatorname{grad}u$, $\operatorname{div}u$, $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ са инварианти. Тогава са инварианти и величините $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u$, $\operatorname{div}\operatorname{grad}u$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$. Следователно относно всяка ортогонална координатна система имаме например

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}u=0,\quad \operatorname{div}\operatorname{grad}u=\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}=0.$$

4. Заключителни забележки. Да обсъдим физическия смисъл на разгледаните понятия дивергенция и ротор. Дивергенцията на векторна функция $\operatorname{div}\mathbf{a}=(\nabla,\mathbf{a})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ се определя от скоростта на изменение на всички компоненти на вектора в «собственото» им направление. Ако векторното поле описва флуиден поток, то положителност на дивергенцията ($\operatorname{div}\mathbf{a}>0$) в дадена точка означава, че от тази точка изтича повече течност, отколкото се влива в нея. Казваме, че такава точка представлява извор. Ако $\operatorname{div}\mathbf{a}<0$, то наблюдаваме обратния баланс и точката представлява бездна, т. е. в нея се влива повече, отколкото изтича. Ако $\operatorname{div}\mathbf{a}=0$, то съществува баланс — влива се толкова течност, колкото и изтича.

Величината ротор на векторно поле

* П. С. Лаплас — изтъкнат френски астроном, математик и физик (1749—1827).

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}=\nabla\times\mathbf{a}=\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

се нарича още вихър. Това название е свързано с това, че той като че «смесва» производните и компонентите. Той като че «следи» как се изменят компонентите на векторното поле $\mathbf{a}(M)$ в «чуждите» направления. По такъв начин ротор представлява мярка на «въртенето» на векторното поле. Впрочем, ако $\mathbf{v}$ е линейна скорост, то векторът ω на ъгловата скорост на въртене е $\omega=\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{v}$. Този вектор е насочен по оста на въртене. Оттук е дошло и названието ротор.

В заключение ще приведем системата от уравнения на Максуел за електромагнитното поле във вакуум.

1. $\operatorname{div}E=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. 2. $\operatorname{div}B=0$.

3. $\operatorname{rot}E=-\frac{\partial B}{\partial t}$. 4. $\operatorname{rot}B=\frac{j}{\varepsilon_0 c^2}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial E}{\partial t}$.

Тук $\rho(M,t)$ е плътността на електрическия товар (количеството на товара в единица обем), $\mathbf{j}(M,t)$ е векторът плътност на електричния ток (скоростта на протичане на товара през единично сечение), $E(M,t)$ и $B(M,t)$ са съответно векторите напрежение на електричното и магнитното поле, ε_0 и $\mathbf{c}$ са размерни константи, а c — скоростта на светлината във вакуум.

§ 3. Основни интегрални формули на анализа

В този параграф ще бъдат доказани основните интегрални формули на анализа — формулата на Грийн*, формулата на Остроградски—Гаус** и формулата на Стокс***. Тези формули представляват, от една страна, отиващи далече обобщения на формулата на Нютон—Лайбниц — основната формула на интегралното

* Дж. Грийн — английски математик (1793—1841).
** М. В. Остроградски — руски математик (1801—1861).
К. Ф. Гаус — немски математик (1777—1855).
*** Дж. Г. Стокс — английски физик и математик (1819—1903).

смятане, а, от друга — особено важни формули на математическия анализ и математическата физика.

1. Формула на Грийн. Нека π е равнина в пространството E^3, $\mathbf{k}$ — единичен нормален вектор към π, а D — едносвързана област в π (ще напомним, че областта D се нарича едносвързана, ако всяка частично гладка затворена крива без самопресичания, разположена в D, огражда област, всичките точки на която принадлежат на D). Нека областта D удовлетворява следните две условия:

1) границата C на областта D представлява затворена частично гладка крива без особени точки;

2) в равнината π може да се избере такава правоъгълна декартова координатна система, че всички прави, успоредни на координатните оси, пресичат C в не повече от две точки.

Нека накрая $\mathbf{t}$ е единичният вектор, допирателен към кривата C, съгласуван с $\mathbf{k}$, т. е. положителната посока на обхождане на кривата C съвпада в приложната точка на вектора $\mathbf{t}$ с посоката на този вектор, и ако гледаме от края на нормалата $\mathbf{k}$, контурът C е положително ориентиран (обхождането му се осъществява в посока, обратна на часовниковата стрелка). Казваме, че ориентацията на кривата C е съгласувана с нормалата «по правилото на тирбушона».

В сила е следната теорема.

Теорема 6.1 (формула на Грийн). Нека $\mathbf{a}$ е векторно поле, диференцируемо в областта D, удовлетворяваща условията 1), 2), и нека производната на $\mathbf{a}$ по всяка посока е непрекъсната в обединението $D \cup C = \overline{D}$. Тогава е вярна формулата

$$\iint_D (\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a})\, d\sigma = \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl. \tag{6.25}$$

Интегралът отдясно обикновено се нарича циркулация на векторното поле $\mathbf{a}$ по кривата C, а този отляво — поток на векторното поле $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ през областта D.

Дадената формула допуска следната физическа трактовка: потокът на векторното поле $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ през областта D (потокът топлина, течност и др.) е равен на циркулацията на векторното поле $\mathbf{a}$ по затворения контур C (на работата на силите на полето $\mathbf{a}$ за преместване на точката по C).

Доказателство. Тъй като всички влизащи във формула (6.25) функции са непрекъснати, то двата интеграла съществуват.

Ще отбележим също така, че интегралите в лявата и дясната страна на формула (6.25) са инвариантни относно избора на правоъгълна координатна система, понеже величините $(\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$

са инвариантни, елементарните лице $d\sigma$ и дължина на дъгата dl не зависят от избора на декартовата координатна система.

Ще изберем ортогонална декартова координатна система $Oxyz$ така, че да е изпълнено условие 2) и оста Oz да е насочена в посоката на $\mathbf{k}$. Понеже векторното поле $\mathbf{a} = P(x, y)\,\mathbf{i} + Q(x, y)\,\mathbf{j} + R(x, y)\,\mathbf{k}$ е равнинно, то $R(x, y) \equiv 0$,
$\mathbf{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = (\cos\alpha, \cos\beta, 0) = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$.

Следователно можем да запишем, че

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

По-нататък

$$(\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{t}) = P\cos\alpha + Q\sin\alpha.$$

Понеже за области в равнината $d\sigma = dx\,dy$, то формула (6.25) добива вида

$$\iint_D (\mathbf{k}, \operatorname{rot} \mathbf{a})\, d\sigma = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \oint_C (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\, dl = \oint_C P\,dx + Q\,dy. \tag{6.25'}$$

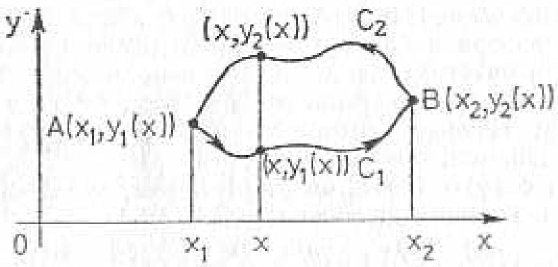
(Тук използувахме, че $dx = \cos\alpha\, dl$, $dy = \sin\alpha\, dl$, l е дължината на дъгата по C, избрана като параметър, чието нарастване е съгласувано с направлението на описване на C.)

За да докажем формулата на Грийн, е достатъчно да докажем двете равенства:

$$I = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\,dy = \oint_C P\,dx,$$

$$J = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\,dy = \oint_C Q\,dy.$$

Да разгледаме фиг. 6.1. Нека права, успоредна на оста Oy, пресича C в точки с ординати $y_1(x)$ и $y_2(x)$, $y_1(x) \le y_2(x)$. Нека x_1 и x_2 са най-малката и най-голямата абсциса на точки от областта $\overline{D}$, кривата C_1 съединява точката $(x_1, y(x_1))$ с точката $(x_2, y(x_2))$, а кривата C_2 — точката $(x_2, y(x_2))$ с точката $(x_1, y(x_1))$, така че $C = C_1 \cup C_2$ и C_1, C_2 са ориентирани съгласувано с C. Тогава по формулата за изразяване на двойния интеграл чрез повторен получаваме



Фиг. 6. 1

$$I=-\int_{x_1}^{x_2}\left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\right]dx=\int_{x_1}^{x_2}P(x,y_1(x))\,dx-$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}P(x,y_2(x))\,dx=\int_{C_1}P\,dx-\left(-\int_{C_2}Pdx\right)=\oint_C Pdx.$$

Аналогично се пресмята интегралът J. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Теорема 6.1 е вярна и за по-общи области D с граница C, които с помощта на краен брой частично гладки криви могат да се разделят на краен брой подобласти D_i с граници C_i, $i=1, 2, \ldots, n$, удовлетворяващи условията 1) и 2). Наистина за всяка от областите D_i съгласно доказаното е вярна формула (6.26). Събирайки получените равенства, поради адитивността на двойния интеграл в лявата страна $\sum_{i=1}^{n}\iint_{D_i}$ можем да заменим с $\iint_D$, а отдясно $\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i}$ — с $\oint_C$, понеже интегралите по «вътрешните» криви се унищожават поради интегриране в противоположни посоки.

Забележка 2. Можем да се откажем във формулировката на теорема 6.1 от условието 2), т. е. да смятаме, че границата на областта D е затворена частично гладка крива C без особени точки. Доказателството на този вариант на теоремата обаче малко се усложнява.

Забележка 3. Условието за гладкост на векторното поле може също малко да се отслаби. Достатъчно е да поискаме полето

* Т. е. по помощните частично гладки криви, разделящи областта D.

а да бъде непрекъснато в $D\cup C=\overline{D}$, а диференцируемо само в D, като производната му по всяка посока да бъде непрекъсната в D. Формула (6.25) се запазва, обаче влизащите в нея интеграли са, изобщо казано, несобствени.

Забележка 4. Теорема 6.1, т. е. формулата на Грийн, е вярна и в общия случай, когато областта D има граница C, която е само ректифицируема крива*.

Забележка 5. Формулата на Грийн (6.25) може да се запише, както това следва от доказателството, във вида (6.25′)

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_C Pdx+Qdy. \tag{6.25′}$$

Ще отбележим, че интегралите в лявата и дясната страна на равенството имат инвариантен характер, т. е. стойността и формата им не се изменят при преминаване към нова декартова координатна система. Наистина стойностите на подинтегралните изрази отляво и отдясно на формула (6.25′) са съответно равни на $(\mathbf{k}, \operatorname{rot}\mathbf{a})$ и $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, които са инвариантни величини. Формата на подинтегралните изрази във формула (6.25′) също очевидно не се изменя при преминаване към нова декартова координатна система $Ox'y'$ — ако векторното поле $\mathbf{a}$ има относно новия базис координати P' и Q', то

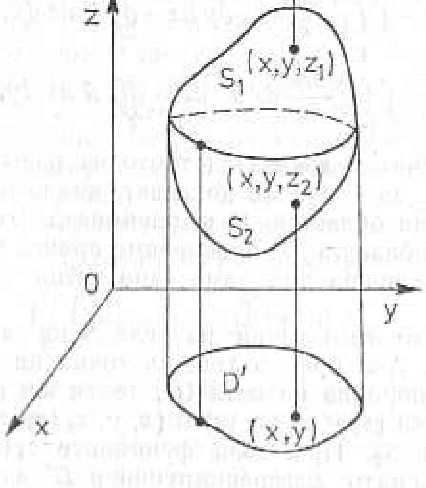
$$(\mathbf{k}, \operatorname{rot}\mathbf{a})=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=\left(\mathbf{k}, \left(\frac{\partial Q'}{\partial x'}-\frac{\partial P'}{\partial y'}\right)\mathbf{k}\right)=\frac{\partial Q'}{\partial x'}-\frac{\partial P'}{\partial y'},$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{t})\,dl=Pdx+Qdy=(P'\cos\alpha'+Q'\sin\alpha')dl=P'dx'+Qdy'.$$

Остава да отбележим, че якобианът на трансформацията при преминаване към новата координатна система е равен по абсолютна стойност на единица, а параметризацията с помощта на дължината на дъгата като параметър не зависи от координатната система. Ето защо интегралите в лявата и дясната страна на (6.25′) не менят стойността и формата си.

2. Формула на Остроградски — Гаус. Нека D е едносвързана област в E^3, т. е. за всяка частично гладка затворена крива C, лежаща в D, може да се намери ориентируема частично гладка повърхнина G, която лежи в D и има граница C. Нека границата S на областта D удовлетворява следните две условия:

* Виж статията на Э. Г. Позняк, Е. В. Шикин в ДАН СССР, 1980, т. 253, № 1, 42—44.



Фиг. 6. 2

интеграла в лявата страна ще получим интеграл върху D, а в дясната страна поради това, че външните нормали към границите на подобластите D_i в точки, принадлежащи на границите на две такива подобласти, са противно насочени, интегралите по повърхнините, които са общи части от границите на две подобласти, имат сума нула. Следователно остават само интеграли по повърхнини, които са части от границите на D_i и които имат обединение точно границата S на областта D.

З а б е л е ж к а 2. Във формулировката на теорема 6.2 можем да се откажем от изискването на условието 2) и да смятаме, че повърхнината S е частично гладка, двустранна, пълна, ограничена, затворена и без особени точки. Доказателството на теоремата в този случай е по-сложно.

З а б е л е ж к а 3. Можем да смятаме, че векторното поле a съществува в $D \cup S = \bar{D}$ и е непрекъснато диференцируемо само в отворената област D. Тогава тройният интеграл във формула (6.26) трябва да се разбира като несобствен.

З а б е л е ж к а 4. Формулата на Остроградски — Гаус може да се запише, както това следва от доказателството, във вида

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

(6.26')

$$= \oint\!\!\!\oint_S (P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy).$$

Ще отбележим, че интегралите в лявата и дясната страна имат инвариантен характер, т. е. стойността и формата им не се менят при преминаване към нова декартова координатна система. За да се уверим в това, е достатъчно да направим разсъждения, аналогични на тези от забележка 5 след доказателството на теорема 6.1.

3. Формула на Стокс. Нека S е едносвързана повърхнина в E^3 (т. е. всяка частично гладка затворена крива без точки на самопресичане, която лежи в S, огражда множество от S, хомеоморфно на кръг), удовлетворяваща следните условия:

1) повърхнината S е частично гладка, двустранна, пълна, ограничена, без особени точки и има граница затворен частично гладък контур C;

2) може да се избере декартова координатна система такава, че S се проектира еднозначно върху всяка от координатните равнини.

Нека $\mathbf{n}$ е единичният вектор на нормалата към S, $\mathbf{t}$ — единичният вектор, допирателен към C, съгласуван с $\mathbf{n}$ (вж. т. 1 на този параграф).

В сила е следната теорема.

Теорема 6.3 (формула на Стокс). Нека $\mathbf{a}$ е векторно поле, непрекъснато диференцируемо в околност на повърхнината S (т. е. в отворено множество, от E^3, съдържащо S). Тогава е изпълнена формулата

$$\oint\!\!\!\oint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{a})\,ds = \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\,dl. \tag{6.27}$$

Теорема 6.3 допуска и такава формулировка: потокът на вектора $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ през повърхнината S е равен на циркулацията на вектора $\mathbf{a}$ по затворения контур C.

Д о к а з а т е л с т в о. При условията на теоремата интегралите във формула (6.27) имат смисъл. Формула (6.27) очевидно е инвариантна относно избора на базис. Да изберем правоъгълна декартова координатна система $Oxyz$ такава, че S се проектира еднозначно върху трите координатни равнини. Нека

$$\mathbf{a} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = (\cos X, \cos Y, \cos Z),$$

$$\mathbf{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

Ориентираме координатната система така, че нормалният вектор $\mathbf{n}$ да образува остри ъгли с координатните оси.

Използувайки израза за $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ спрямо декартова правоъгълна координатна система, можем да запишем:

$$\oiint_S (\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{a})\, ds =$$

$$(6.27') \quad = \oiint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z \right\} ds$$

$$= \oint_C (\mathbf{a}, \mathbf{t})\, dl = \oint_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dl = \oint_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

Очевидно достатъчно е да докажем, че

$$I = \oiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos Y - \frac{\partial P}{\partial y}\cos Z\right) ds = \oint_C P\,dx.$$

Доказателството за останалите събираеми:

$$J = \oiint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos Z - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos X\right) ds = \oint_S Q\,dy,$$

$$L = \oiint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos X - \frac{\partial R}{\partial x}\cos Y\right) ds = \oint_C R\,dz,$$

е аналогично.

Ще отбележим, че S е частично гладка и се проектира еднозначно в Oxy. Нека D е нейната проекция, а Γ — проекцията на C в равнината Oxy (вж. фиг. 6.3). Поради това S се задава с уравнение от вида $z = z(x, y)$, където $z(x, y)$ е диференцируема функция. Имаме

$$\cos Y = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & z'_x \\ 0 & z'_y \end{vmatrix}}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}} = -\frac{z'_y}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}.$$

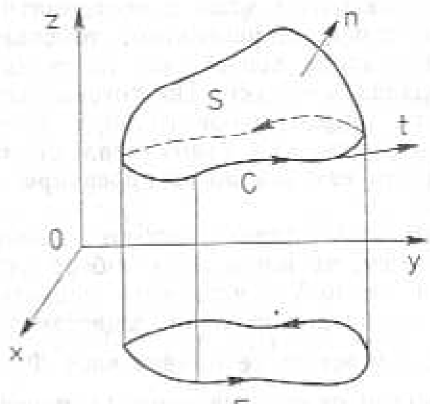
Аналогично $\cos Z = \dfrac{1}{\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}}$.

Тогава, вземайки предвид тези формули, получаваме

$$I = -\oiint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos Z\, ds$$

$$= -\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\left[P(x, y, z(x, y))\right] dx\,dy,$$

понеже върху повърхнината S функцията $P(x, y, z)$ е равна на



Фиг. 6. 3

$P(x, y, z(x, y))$ и $\dfrac{\partial P}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y}$, а интегралът по повърхнината S е равен на двоен интеграл върху D.

Сега, като използуваме формулата на Грийн, имаме

$$-\iint_D \frac{\partial}{\partial y}\left[P(x, y, z(x, y))\right] dx\,dy = \oint_\Gamma P(x, y, z(x, y))\,dx = \oint_C P(x,y,z)dx.$$

Тук използувахме, че ако една точка (x, y) лежи на кривата Γ, то точката $(x, y, z(x, y))$ очевидно принадлежи на кривата C. Теоремата е доказана.

Формулата на Стокс е вярна и за по-общи ограничени, пълни, частично гладки, двустранни повърхнини с частично гладка граница.

Забележка 1. Преди всичко ще покажем, че формулата на Стокс е в сила за повърхнини S, които удовлетворяват условието 1), но, изобщо казано, не удовлетворяват условието 2) за еднозначно проектиране на S във всяка от координатните равнини.

Оказва се, че съществува число $\delta > 0$ такова, че за всяка част Φ на повърхнината S с размери, по-малки от δ*, може да се избере координатна система такава, че Φ се проектира еднозначно във всички координатни равнини. Наистина нека M_0 е фиксирана точка от S. Прекарваме допирателната равнина през точката M_0 и нека $\mathbf{n}_{M_0}$ е единичен нормален вектор към повърхнината в точката M_0. Избираме координатна правоъгълна система такава, че

* Такава част от повърхнината се съдържа в кълбо с радиус δ.

векторът $\mathbf{n}_{M_1}$ сключва остри ъгли с координатните оси. Понеже полето от нормалите $\mathbf{n}$ е непрекъснато, то съществува околност на точката M_0, нормалите във всички точки на която сключват остри ъгли с координатните оси. Но тогава съгласно доказателството на първото твърдение от глава 5 и забележка 2 към него можем да твърдим, че съществува околност на точката M_0 с радиус δ, която еднозначно се проектира върху всички координатни равнини.

Ще подчертаем, че числото δ изобщо зависи от точката M_0: $\delta=\delta(M_0)$. Ще докажем, че може да се избере универсално, независещо от точката число δ с указаното свойство. Да допуснем противното, т. е. че такова число не съществува. Тогава за всяко $\delta_n=\frac{1}{n}$, $n=1, 2, \dots$, може да се намери част Φ_n на повърхнината S с размери, по-малки от δ_n, която не се проектира еднозначно върху трите координатни равнини на произволна декартова координатна система. Избираме във всяка част Φ_n по една точка M_n и от получената редица избираме подредица, клоняща към точка M от повърхнината S. Съгласно предишните разглеждания съществува околност на точката M, която се проектира еднозначно в координатните равнини на подходящо избрана правоъгълна координатна система. Но тази околност за някой номер n съдържа частта Φ_n от S, която поради това също ще се проектира еднозначно върху трите координатни равнини на координатната система. Получи се противоречие с избора на Φ_n, което и трябваше да се докаже.

Сега вече не е трудно да заключим, че формулата на Стокс е вярна за повърхнини, които удовлетворяват условието 1), но не удовлетворяват в общия случай условието 2). За тази цел ще раздробим повърхнината S на краен брой гладки части Φ_n с размери, по-малки от указаното по-горе число δ. Формулата на Стокс е вярна за всяка от частите Φ_n, понеже Φ_n се проектира еднозначно върху всички координатни равнини на подходяща декартова координатна система. Сумираме левите и десните страни на получените формули. Интегралите по общите участъци от границите на частите Φ_n се вземат в противоположни посоки и поради това се унищожават. По тази причина отляво ще получим интеграл по повърхнината S от величината $(\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{a})$, а отдясно — интеграл по границата C на повърхнината S от величината $(\mathbf{a}, \mathbf{t})$, т. е. формулата на Стокс за разглежданата повърхнина от по-общ вид.

Забележка 2. Формулата на Стокс е вярна и за повърхнини S, които с помощта на частично гладки криви могат да се раздробят на краен брой едносвързани повърхнини, удовлетворя-

ващи условието 1). Доказателството на този факт е очевидно: достатъчно е да сумираме интегралите от лявата и дясната страна на формулите на Стокс за указаните повърхнини и да отчетем, че интегралите по кривите, осъществяващи раздробяването, се вземат в различни посоки и поради това се унищожават.

Забележка 3. Както следва от доказателството, формулата на Стокс (6.27) може да се запише във вида (6.27')

$$\oint\limits_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos X + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos Y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos Z \right\} ds = \oint\limits_C (P\,dx + Q\,dy + R\,dz). \tag{6.27'}$$

Ще отбележим, че интегралите отляво и отдясно имат инвариантен характер, т. е. стойността и формата им не се променят при преминаване към нова декартова координатна система. За да се убедим в това, е достатъчно да проведем разсъждения, аналогични на тези от забележка 5 след доказателството на теорема 6.1.

§ 4. Условия за независимост на криволинейния интеграл в равнината от пътя на интегриране

Нека $\mathbf{a}(M)$ е векторно поле, дефинирано в свързана област D в равнината.

Определение 1. Функцията $U(M)$ се нарича потенциал на полето $\mathbf{a}(M)$ в областта D, ако в тази област

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} U(M).$$

Поле $\mathbf{a}$, което притежава потенциал, се нарича потенциално поле.

Теорема 6.4. Нека функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ са непрекъснати в D. Стойността на интеграла

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$$

за произволни точки $A \in D$, $B \in D$ не зависи от частично гладката крива $\overset{\frown}{AB} \subset D$, съединяваща точките A и B, тогава и само тогава, когато полето

$$\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y),\ Q(x, y))$$

е потенциално. В този случай

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy=U(B)-U(A),$$

където $U(x, y)$ е потенциал на полето $\mathbf{a}(x, y)$.

Доказателство. **Достатъчност.** Нека

$$\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y),\ Q(x, y))=\operatorname{grad} U(x, y) =\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Да съединим точките A и B, избрани произволно в D, с гладка крива $\overset{\frown}{AB}\subset D$ и нека $x=x(t), y=y(t),\ a\leqq t\leqq b$ е параметричното представяне на тази крива. От непрекъснатостта на $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ заключаваме, че функцията $U(x, y)$ е диференцируема в D. Тогава по формулата на Нютон—Лайбниц получаваме

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy=\int_a^b P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))(y'(t))\,dt=\int_a^b U'_t\,dt$$

$$=U(x(b), y(b))-U(x(a), y(a))=U(B)-U(A).$$

Необходимост. Фиксираме произволно в D точка $M_0(x_0, y_0)$ и нека $M(x, y)$ е произволна точка от областта D.

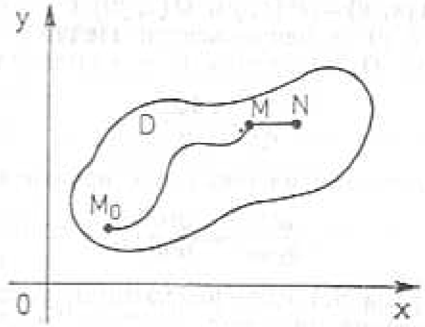
Полагаме

$$U(M)=\int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} P\,dx+Q\,dy,$$

където интегралът е взет върху произволна частично гладка крива, съединяваща точките M_0 и M (вж. фиг. 6.4).

Ще покажем, че така дефинираната функция $U(x, y)$ е търсеният потенциал на полето $\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y), Q(x, y))$. Да докажем например съществуването на $\frac{\partial U}{\partial x}$ и равенството $\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y)$.

Да се преместим от точката $M(x, y)$ в точката $N(x+\Delta x, y)$, така че отсечката MN да се съдържа в D. Това може да се направи за всички достатъчно малки нараствания Δx, тъй като D е отворено множество. При такова преместване функцията $U(x, y)$ ще получи нарастване



Фиг. 6. 4

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int\limits_{\overset{\frown}{M_0MN}} P\,dx+Q\,dy$$

$$-\int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{MN} P\,dx+Q\,dy.$$

Координатата y е константа по отсечката MN и следователно

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=\int\limits_{MN} P\,dx=\int_x^{x+\Delta x} P(t, y)\,dt.$$

Поради непрекъснатостта на функцията $P(x, y)$ съгласно теоремата за крайните нараствания имаме

$$U(x+\Delta x, y)-U(x, y)=P(x+\theta\Delta x, y)\,\Delta x,$$

където $0<\theta<1$.

Оттук $\frac{U(x+\Delta x, y)-U(x, y)}{\Delta x}=P(x+\theta\Delta x, y)$.

Използувайки непрекъснатостта на функцията $P(x, y)$, след граничен преход при $\Delta x\to 0$ получаваме

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P(x, y).$$

Съвършено аналогично се доказва и равенството

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial y}=Q(x, y).$$

Теорема 6.4 е доказана.

Ако полето $\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y), Q(x, y))$ е потенциално и функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ са непрекъснати заедно с частните си производни в областта D, то трябва да е в сила равенството

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

което означава равенство на смесените производни:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}.$$

Съгласно теорема 6.4 едно необходимо условие за независимост на криволинейния интеграл

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

от пътя на интегриране в случая, когато функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и техните частни производни са непрекъснати в областта D, е да бъде в сила леснопроверяемото равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ако областта е едносвързана, то това условие е и достатъчно за независимостта на интеграла $\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$ от избора на кривата, съединяваща дадените точки A и B. За да избегнем използването на недоказаната в общия случай формула на Грийн (забележка 2 към теорема 6.1), отначало ще разгледаме случая, когато областта D е кръг.

Теорема 6.5. Нека функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и техните частни производни са непрекъснати в кръга K. Тогава полето $\mathbf{a}(x, y)=(P(x, y), Q(x, y))$ е потенциално в този кръг тогава и само тогава, когато

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{в } K.$$

Доказателство. Нужно е да докажем само достатъчността на условието. През центъра M_0 на кръга прекарваме правите M_0x' и M_0y', успоредни съответно на осите Ox и Oy. От произволна точка $M(x, y)\in K$ спускаме перпендикуляри MM_1 и MM_2 към M_0x' и M_0y' съответно. Точката M_0 съединяваме с точките M_1 и M_2 с помощта на отсечките M_0M_1 и M_0M_2.

Прилагайки формулата на Грийн (6.25') за правоъгълника, получаваме

$$\int_{M_0M_1MM_2} P\,dx+Q\,dy=\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy=0,$$

откъдето следва, че

$$\int_{M_0M_1M} P\,dx+Q\,dy=\int_{M_0M_2M} P\,dx+Q\,dy,$$

т.е. интегралът $\int_\gamma P\,dx+Q\,dy$ не зависи от начупената γ от две отсечки, успоредни на координатните оси, свързваща фиксираната точка M_0 с точката M. Тогава дефинираме функцията

$$U(M)=\int_{M_0M} P\,dx+Q\,dy,$$

където M_0M е начупена от две отсечки, успоредни на координатните оси. Проверката, че така определената функция $U(x, y)$ представлява потенциал на даденото поле $\mathbf{a}(x, y)$, се извършва аналогично на проверката, извършена при доказателството на теорема 6.4.

Теорема 6.5 е доказана.

Забележка. Теорема 6.5 е в сила за произволна едносвързана област D. За целта трябва да се докаже, че условието

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{в областта } D$$

е достатъчно за независимостта на криволинейния интеграл

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

от избора на кривата $\overset{\frown}{AB}$, съединяваща точките A и B. Да докажем това.

Нека L е произволна затворена частично гладка крива, лежаща в D. Да означим с D^* областта, оградена от кривата L. Поради едносвързаността на областта D всяка точка от областта D^* принадлежи на D. Прилагайки за областта D^* формулата на Грийн (6.25') (вж. забележка 2 към теорема 6.1), имаме

$$\int_L P\,dx+Q\,dy=\iint_{D^*}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy=0,$$

откъдето следва, че за произволно фиксирани точки A и B от областта D и за всеки две частично гладки криви $\overset{\frown}{ACB}$ и $\overset{\frown}{AC'B}$, съединяващи тези точки, са в сила равенствата

$$0=\int\limits_{\overline{ACB}\,\cup\,\overline{BC'A}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overline{ACB}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overline{BC'A}} P\,dx+Q\,dy$$

$$=\int\limits_{\overline{ACB}} P\,dx+Q dy-\int\limits_{\overline{AC'B}} P\,dx+Q\,dy.$$

Поради това

$$\int\limits_{\overline{ACB}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overline{AC'B}} P\,dx+Q\,dy.$$

Следователно стойността на интеграла

$$\int\limits_{\overline{AB}} P\,dx+Q\,dy$$

не зависи от частично гладката крива $\overline{AB}$, съединяваща точките A и B.

§ 5. Някои приложения

1. Изразяване лицето на област в равнината чрез криволинеен интеграл. Нека едносвързаната област D с граница C удовлетворява условията от теорема 6.1. Полагайки във формулата на Грийн (формула (6.25')) $P=-y$, $Q=x$, ще получим

$$\iint\limits_{D} 2\,dx\,dy=\oint\limits_{C} -ydx+xdy.$$

За лицето $\sigma(D)$ на областта D в равнината имаме следното изразяване с помощта на криволинеен интеграл по ориентираната граница на тази област:

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\oint\limits_{C} -ydx+xdy.$$

С получената формула ще намерим лицето на областта, ограничена от кривата $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqq t\leqq 2\pi$, $a>0$, (циклоида) и правата $y=0$. Понеже интегралът

$$\int\limits_{\gamma} -ydx+xdy=0,$$

където γ е отсечката $0\leqq x\leqq 2\pi$, $y=0$, то съответно на положителната ориентация на контура имаме

$$\sigma(D)=\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi}^{0}(-a^2(1-\cos t)^2+a^2(t-\sin t)\sin t)\,dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(2-2\cos t-t\sin t)\,dt=2\pi a^2-\frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi} t\sin t\,dt$$

$$=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}(t\cos t)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

2. Изразяване на обеми с помощта на интеграл по повърхнина. Нека D е едносвързана област в E^3 с граница S, удовлетворяваща условията на теорема 6.2 (формулата на Остроградски — Гаус). Нека в областта D

$$P(x, y, z)=x,\; Q(x, y, z)=y,\; R(x, y, z)=z.$$

Тези функции удовлетворяват условията, при които е в сила формулата на Остроградски — Гаус, и затова

$$\iint\limits_{S} xdydz+ydzdx+zdxdy=\iiint\limits_{D} 3\,dx\,dy\,dz=3V(D),$$

където $V(D)$ е обемът на областта D.

3. Да разгледаме векторното поле, породено от електричен товар с големина q. Разполагаме този товар в началото на координатната система. Силата, която действа на единичен товар, разположен в точката $M(x, y, z)$, се пресмята съгласно закона на Кулон по формулата

$$E(M)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

където $\mathbf{r}$ е радиус-векторът на точката M, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ε_0 е константа.

Електростатичното поле E е потенциално в $E^3\setminus\{0\}$. Ще напомним, че полето $\mathbf{a}(M)$ се нарича потенциално в областта D, ако съществува функция $U(M)$, дефинирана в областта D, такава, че

$$\mathbf{a}(M)=\operatorname{grad} U(M).$$

Потенциал за полето E е функцията

$$\Phi(M)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}.$$

Полето F, породено от материална точка с маса m, разположена в началото на координатната система, се нарича гравитационно и също е потенциално.

По закона на Нютон силата $F(M)$, с която полето действува на маса с големина единица, разположена в точката $M(x, y, z)$, се пресмята по формулата

$$F(M)=-gm\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

За потенциал на полето F в цялото пространство E^3 с изключение на началото на координатната система служи функцията

$$U(M)=gm\frac{1}{r}.$$

За потенциалното поле

$$\mathbf{a}(M)=(P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z)),$$

дефинирано в областта D, лежаща в E^3, независимостта на интеграла

$$\int\limits_{\gamma} P\,dx+Q\,dy+R\,dz$$

от пътя на интегриране (интегралът зависи само от началото и края на пътя) се доказва по същия начин, както и в теорема 6.4, третираща случая на област D, лежаща в E^2.

Ето защо работата, извършвана от всяко поле за преместване на единична пробна частица от точката A до точка B, не зависи от пътя, по който се извършва преместването. Ако разстоянията от началото на координатната система до точките A и B са съответно r_1 и r_2, то тази работа за полето E е равна на

$$\Phi(B)-\Phi(A)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right),$$

а за полето F — на

$$U(B)-U(A)=gm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right).$$

Допълнение към глава 6*

ДИФЕРЕНЦИАЛНИ ФОРМИ В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

§ 1. Антисиметрични полилинейни форми

1. Линейни форми. Нека V е произволно n-мерно векторно пространство, чиито елементи ще означаваме със символите $\xi, \eta, \ldots$. Предмет на нашето изучаване ще бъдат функциите, които на всеки елемент $\xi\in V$ съпоставят някакво реално число.

Определение 1. Функцията $\mathbf{a}(\xi)$ се нарича линейна форма, ако за всички $\xi\in V$, $\eta\in V$ и всяко реално число λ са изпълнени равенствата

1) $\mathbf{a}(\xi+\eta)=\mathbf{a}(\xi)+\mathbf{a}(\eta)$,
2) $\mathbf{a}(\lambda\xi)\ =\lambda\,\mathbf{a}(\xi)$.

Определение 2. Сума на две линейни форми **a** и **b** ще наречем линейната форма **c**, която на всеки вектор $\xi\in V$ съпоставя числото

$$\mathbf{c}(\xi)=\mathbf{a}(\xi)+\mathbf{b}(\xi).$$

Произведение на линейната форма **a** с реалното число λ ще наричаме линейната форма **b**, която на всеки вектор $\xi\in V$ съпоставя числото

$$\mathbf{b}(\xi)=\lambda\,\mathbf{a}(\xi).$$

По такъв начин множеството на всички линейни форми образува векторно пространство, което ще означим със символа $L(V)$**. Ще намерим представяне на линейната форма **a** спрямо даден базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{n}$. Нека

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\mathbf{e}_i.$$

Ако означим $\mathbf{a}_i=\mathbf{a}(\mathbf{e}_i)$, то търсеното представяне ще има вида

$$\mathbf{a}(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\mathbf{a}_i$$

Ще докажем, че размерността $\dim L(V)$ на линейното простран-

* Текстът на това допълнение е взет от книгата на В. А. Илин, Е. Г. Позняк «Основи на математическия анализ», част II, М., Наука, 1973.

** Пространството $L(V)$ се означава също така и със символа V^* и се нарича спрегнато (или дуално) на V.

ство $L(V)$ е равна на n. За това е достатъчно да намерим някакъв базис в $L(V)$, съдържащ точно n елемента, т. е. n линейни форми. Да фиксираме произволен $\{e_i\}$ на пространството V и да разгледаме следните линейни форми:

$$e^k(\xi)=\xi^k \quad (k=1, 2, \ldots, n),$$

където $\{\xi^k\}$ са коефициентите на разлагането на вектора ξ по елементите на базиса $\{e_k\}$. С други думи, линейната форма e^k действува върху елементите на базиса $\{e_i\}$ по правилото

$$e^k(e_i)=\delta_{ik}=\begin{cases} 1 \text{ при } i=k, \\ 0 \text{ при } i\neq k. \end{cases}$$

В такъв случай спрямо дадения базис $\{e_i\}$ линейната форма a има вида

$$a(\xi)=\sum_{i=1}^{n} a_i e^i(\xi), \quad a_i=a(e_i),$$

т. е. линейните форми $e^1(\xi), e^2(\xi), \ldots, e^n(\xi)$ образуват базис в $L(V)$. Този базис се нарича спрегнат (или дуален) на базиса $\{e_i\}$.

2. Билинейни форми. Да означим с $V\times V$ множеството на всички наредени двойки (ξ_1, ξ_2), където $\xi_1\in V$, $\xi_2\in V$, и да разгледаме функциите $a(\xi_1, \xi_2)$, които съпоставят на всеки елемент от $V\times V$ (т. е. на всеки два елемента $\xi_1\in V$ и $\xi_2\in V$) някое реално число.

Определение. Функцията $a(\xi_1, \xi_2)$ се нарича билинейна форма, ако за всяка фиксирана стойност на едната променлива тя е линейна форма относно другата променлива.

С други думи, за произволни вектори $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ и произволни реални числа $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ е изпълнено равенството

$$a(\lambda_1\xi_1+\mu_1\eta_1, \lambda_2\xi_2+\mu_2\eta_2)=$$
$$=\lambda_1\lambda_2 a(\xi_1, \xi_2)+\lambda_1\mu_2 a(\xi_1, \eta_2)+\mu_1\lambda_2 a(\eta_1, \xi_2)+\mu_1\mu_2 a(\eta_1, \eta_2).$$

Множеството на всички билинейни форми лесно може да се превърне в линейно пространство, като се въведат в него по естествен начин операциите събиране и умножение с реално число. Полученото пространство от билинейни форми ще означим с $L_2(V)$.

Ще намерим представянето на билинейната форма $a(\xi_1, \xi_2)$ спрямо някакъв базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ на пространството V. Нека $\xi_k=\sum_{j=1}^{n} \xi_k^j e_j$, $k=1, 2$. Като положим $a(e_i, e_j)=a_{ij}$, ще получим търсеното представяне

$$a(\xi_1, \xi_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_1^i\xi_2^j.$$

За да определим размерността на пространството $L_2(V)$, ще образуваме с помощта на линейните форми $e^i(\xi)$, представляващи в $L(V)$ базис, спрегнат на базиса $\{e_i\}$, следните билинейни форми:

$$e^{ij}(\xi_1, \xi_2)=e^i(\xi_1)e^j(\xi_2).$$

Тогава произволна билинейна форма се представя еднозначно във вида

$$a(\xi_1, \xi_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}e^{ij}(\xi_1, \xi_2).$$

Това означава, че формите $e^{ij}(\xi_1, \xi_2)$ образуват базис в $L_2(V)$ и следователно размерността на $L_2(V)$ е равна на n^2.

3. Полилинейни форми. Нека p е естествено число. Да означим със символа $V^p=V\times V\times\cdots\times V$ множеството на всички наредени набори $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ от p вектора, всеки от които принадлежи на V, и да разгледаме функциите, които на всеки такъв набор съпоставят някое реално число.

Определение. Функцията $a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ се нарича полилинейна форма от степен p (или p-форма), ако тя е линейна форма по всеки аргумент при фиксирани стойности на останалите.

Като въведем линейните операции в множеството на всички p-форми, ще получим линейно пространство, което ще означим със символа $L_p(V)$.

Ще намерим представянето на произволна полилинейна форма $a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ относно някакъв базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ на пространството V. Да означим

$$a_{i_1i_2\ldots i_p}=a(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}).$$

Тогава, ако $\xi_k=\sum_{i=1}^{n}\xi_k^i e_i$, то

$$a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n} a_{i_1i_2\ldots i_p}\xi_1^{i_1}\xi_2^{i_2}\ldots\xi_p^{i_p}.$$

Ако $e^k(\xi)$ е базис в $L(V)$, спрегнат на $\{e_i\}$, то е очевидно, че p-формите

$$e^{i_1 i_2 \dots i_p}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = e^{i_1}(\xi_1)\, e^{i_2}(\xi_2) \dots e^{i_p}(\xi_p)$$

образуват базис в $L_p(V)$ и следователно $L_p(V)$ има размерност n^p.

4. Антисиметрични полилинейни форми

Определение. Полилинейната форма $\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ се нарича антисиметрична, ако при разместване на произволни два аргумента тя сменя знака си*. С други думи,

$$\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_p) = -\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_p).$$

Очевидно множеството на всички полилинейни антисиметрични форми от степен p образуват подпространство на линейното пространство $L_p(V)$, което ще означим със символа $A_p(V)$**. Елементите на пространството $A_p(V)$ ще означаваме със символа $\omega = \omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$.

Да забележим, че ако $\{e_i\}$ е произволен базис във V и

$$\omega = \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_p=1}^{n} \omega_{i_1 \dots i_p}\, \xi_1^{i_1} \dots \xi_p^{i_p},$$

то числата $\omega_{i_1 \dots i_p}$ сменят знака си при разместване на два индекса. Това следва от факта, че

$$\omega_{i_1 \dots i_p} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Естествено е да считаме, че $A_1(V) = L_1(V)$, а $A_0(V)$ се състои от всички константи, т. е. съвпада с реалната права.

5. Външно произведение на антисиметрични форми. Да разгледаме две антисиметрични форми $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$. В тази точка ще въведем основната операция в теорията на антисиметричните форми — операцията външно умножение.

Нека

$$\omega^p = \omega^p(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p), \quad \eta_i \in V,$$
$$\omega^q = \omega^q(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_q), \quad \zeta_j \in V.$$

Да разгледаме следната полилинейна форма: $\mathbf{a} \in L_{p+q}(V)$

$$\mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+q}) = \omega^p(\xi_1, \dots, \xi_p) \,.\, \omega^q(\xi_{p+1}, \dots, \xi_{p+q}). \tag{6.1.1}$$

Тази форма, изобщо казано, не е антисиметрична. Именно при разместване на аргументите ξ_i и ξ_j, където $1 \le i \le p$ и $p+1 \le j \le p+q$, формата (6.1.1) може да не смени знака си. От това обстоятелство

* Антисиметричните полилинейни форми се наричат също знакопроменливи или външни.

** Това пространство се означава също и със символа A^pV^* и се нарича p-та външна степен на пространството V^*.

е предизвикана необходимостта от въвеждане на външно произведение.

За да въведем външно произведение, ще ни потрябват някои факти от теорията на пермутациите.

Да напомним, че пермутация на числата $\{1, 2, \dots, m\}$ се нарича функция $\sigma = \sigma(k)$, дефинирана върху множеството на тези числа, която го изобразява взаимноеднозначно върху себе си. Множеството на всички такива пермутации се означава със символа $\sum_m$. Очевидно съществуват $m!$ различни пермутации от $\sum_m$. За две пермутации $\sigma \in \sum_m$ и $\tau \in \sum_m$ се определя по естествен начин суперпозиция $\sigma\tau \in \sum_m$. Пермутацията σ^{-1} се нарича обратна на σ, ако $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = \varepsilon$, където ε е тъждествената пермутация (т. е. $\varepsilon(k) = k$, $k = 1, 2, \dots, m$).

Пермутацията σ се нарича транспозиция, ако тя размества две числа, като запазва местата на останалите. С други думи, съществува двойка числа i и j ($1 \le i \le m$, $1 \le j \le m$, $i \ne j$) такава, че $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ и $\sigma(k) = k$ за $k \ne i$ и $k \ne j$. Очевидно, ако σ е транспозиция, то $\sigma^{-1} = \sigma$, т. е. $\sigma\sigma = \varepsilon$.

Известно е, че всяка пермутация σ се разлага на суперпозиции от транспозиции, при това четността на броя на транспозициите в такова разлагане не зависи от неговия избор и се нарича четност на пермутацията σ.

Да въведем следното означение:

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \text{ако пермутацията } \sigma \text{ е четна,} \\ -1, & \text{ако пермутацията } \sigma \text{ е нечетна.} \end{cases}$$

Забелязваме, че формата $a \in L_r(V)$ принадлежи на $A_p(V)$, ако за всяка пермутация $\sigma \in \sum_p$

$$\mathbf{a}(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) = \operatorname{sgn}\sigma \,.\, \mathbf{a}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p).$$

Да разгледаме отново полилинейната форма (6.1.1). За всяка пермутация $\sigma \in \sum_{p+q}$ ще положим

$$\sigma\mathbf{a}(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = \mathbf{a}(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}). \tag{6.1.2}$$

Лесно можем да се убедим, че ако $\tau \in \sum_{p+q}$ и $\sigma \in \sum_{p+q}$, то $(\tau\sigma)\mathbf{a} = \tau(\sigma\mathbf{a})$.

Ще въведем следното определение.

Определение. Външно произведение на формата $\omega^p \in A_p(V)$ и формата $\omega^q \in A_q(V)$ се нарича формата $\omega \in A_{p+q}(V)$, определена с равенството

(6.1.3) $$\omega(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma \,.\, \tau\mathbf{a},$$

където сумата се взема по всички пермутации $\sigma \in \sum_{p+q}$, удовлетворяващи условието

(6.1.4) $$\sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(p),\ \sigma(p+1)<\cdots<\sigma(p+q),$$

а величината $\sigma\mathbf{a}$ се определя от равенствата (6.1.1) и (6.1.2).

Външното произведение на формите ω^p и ω^q се означава със символа $\omega=\omega^p \wedge \omega^q$.

Ще илюстрираме например как действува пермутация σ, удовлетворяваща условието (6.1.4). Да предположим, че по някакъв път се движат успоредно две автомобилни колони, в първата от които има p, а във втората q коли. След известно време пътят се стеснява и двете колони в движение се престрояват в една. При това автомобилите от първата колона заемат места някъде между автомобилите на втората, като вътре във всяка от двете колони се запазва редът на следване. Като резултат получаваме пермутация, която удовлетворява условието (6.1.4). Лесно се вижда, че е вярно и обратното, всяка такава пермутация може да се реализира в нашия модел.

За да се убедим, че даденото от нас определение е коректно, е необходимо да докажем, че $\omega=\omega^p \wedge \omega^q \in A_{p+q}(V)$. Очевидно от доказателство се нуждае само антисиметричността на формата ω.

Ще покажем, че при разместване на два аргумента ξ_i и ξ_{i+1} формата ω сменя знака си. Оттук лесно следва, че $\omega \in A_{p+q}(V)$. Нека $\tau \in \sum_{p+q}$ е такава пермутация. Да се убедим, че

(6.1.5) $$\tau\omega = -\omega = (\operatorname{sgn}\tau)\,\omega.$$

От равенството (6.1.3) получаваме

$$\tau\omega = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\,.\,(\tau\sigma)\mathbf{a}.$$

Да разбием тая сума на две:

(6.1.6) $$\tau\omega = \sum_\sigma{}' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,\mathbf{a} + \sum_\sigma{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,\mathbf{a}.$$

Към първата сума ще отнесем онези пермутации σ, за които или $\sigma^{-1}(i)\leq p$, $\sigma^{-1}(i+1)\leq p$, или $\sigma^{-1}(i)\geq p+1$, $\sigma^{-1}(i+1)\geq p+1$. За всяка такава пермутация

$$(\tau\sigma)\,\mathbf{a} = -\sigma\,\mathbf{a}.$$

За да направим това твърдение очевидно, да означим $k=\sigma^{-1}(i)$, $l=\sigma^{-1}(i+1)$, т. е. $i=\sigma(k)$, $i+1=\sigma(l)$. Формата $\sigma\mathbf{a}$ представлява произведение на формите ω^p и ω^q, като аргументи на ω^p са векторите $\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)}$, а аргументи на ω^q — векторите $\xi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)}$. Ако $k\leq p$ и $l\leq p$, то $\xi_i=\xi_{\sigma(k)}$ и $\xi_{i+1}=\xi_{\sigma(l)}$ са аргументи на формата ω^p, която по условие е антисиметрична. Тогава при разместването на ξ_i и ξ_{i+1} формата ω^p, а следователно и $\sigma\mathbf{a}$ сменя знака си. Аналогично се разглежда случаят, когато $k\geq p+1$ и $l\geq p+1$.

И така за първата сума е изпълнено равенството

(6.1.7) $$\sum_\sigma{}' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,\mathbf{a} = -\sum_\sigma{}' (\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma\mathbf{a}.$$

Към втората сума ще отнесем онези пермутации σ, за които или $\sigma^{-1}(i)\leq p$, $\sigma^{-1}(i+1)\geq p+1$, или $\sigma^{-1}(i)\geq p+1$, $\sigma^{-1}(i+1)\leq p$. Ще покажем, че множеството от пермутациите $\{\sigma\}$, които удовлетворяват това условие (а също, разбира се, и условието (6.1.4)), съвпада с множеството от пермутациите от вида $\tau\sigma$, където $\sigma\in\{\sigma\}$. Да се върнем на нашия модел с двете автомобилни колони. Твърдението приема следната очевидна форма.

Ако при някакво пренареждане автомобилът с номер k от първата колона се окаже непосредствено пред автомобила с номер l от втората колона, то лесно може да се посочи друго пренареждане, в резултат на което тези автомобили ще си сменят местата, а редът на движение на останалите ще се запази.

Тъй като $\operatorname{sgn}\tau\sigma = -\operatorname{sgn}\sigma$, получаваме

(6.1.8) $$\sum_\sigma{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)(\tau\sigma)\,\mathbf{a} = -\sum_\sigma{}'' (\operatorname{sgn}\tau\sigma)(\tau\sigma)\,\mathbf{a} = -\sum_\sigma{}'' (\operatorname{sgn}\sigma)\sigma\mathbf{a}.$$

Като заместим (6.1.7) и (6.1.8) в (6.1.6), ще получим (6.1.5).

Пример 1. Да разгледаме две линейни форми $\mathfrak{f}(\xi)\in A_1(V)$ и $\mathfrak{g}(\xi)\in A_1(V)$. Външно произведение ще бъде формата

$$\mathfrak{f}\wedge\mathfrak{g} = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\,.\,\sigma\mathfrak{f}(\xi_1)\mathfrak{g}(\xi_2) = \mathfrak{f}(\xi_1)\,\mathfrak{g}(\xi_2) - \mathfrak{g}(\xi_1)\,\mathfrak{f}(\xi_2).$$

Пример 2. Нека $\mathfrak{f}(\xi)\in(A_1(V)$, $\mathfrak{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q)\in A_q(V)$. Външно произведение $\omega=\mathfrak{f}\wedge\mathfrak{g}$ е $(q+1)$-форма, аргументите на която ще означим с $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_q$,

$$\omega = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\,\sigma\,\mathfrak{f}(\xi_0)\,\mathfrak{g}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q) =$$

$$=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i \mathbf{f}(\xi_i)\mathbf{g}(\xi_0,\ldots,\xi_{i-1},\xi_{i+1},\ldots,\xi_q).$$

6. Свойства на външното произведение на антисиметрични форми.
1) Очевидно свойство на външното произведение е линейността:
а) ако $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, то за всяко реално число λ

$$(\lambda\omega^p)\wedge\omega^q=\omega^p\wedge(\lambda\omega^q)=\lambda(\omega^p\wedge\omega^q);$$

б) ако $\omega_1^p \in A_p(V)$, $\omega_2^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$, то

$$(\omega_1^p+\omega_2^p)\wedge\omega^q=\omega_1^p\wedge\omega^q+\omega_2^p\wedge\omega^q.$$

2) Антикомутативност. Ако $\omega^p \in A_p(V)$ и $\omega^q \in A_q(V)$, то

$$\omega^p\wedge\omega^q=(-1)^{pq}\omega^q\wedge\omega^p.$$

Доказателство. Нека

$$\omega^p\wedge\omega^q=\omega=\omega(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{p+q}).$$

Лесно се вижда, че

$$\omega^q\wedge\omega^p=\omega(\xi_{p+1},\xi_{p+2},\ldots,\xi_{p+q},\xi_1,\ldots,\xi_p).$$

Ще се убедим в това, че пермутацията $(\xi_{p+1},\ldots,\xi_{p+q},\xi_1,\ldots,\xi_p)$ може да се получи от векторите $(\xi_1,\ldots,\xi_{p+q})$ чрез pq последователни транспозиции. Векторът ξ_{p+1} може да се придвижи на първо място, като се използуват p транспозиции. След това с помощта на същия брой транспозиции ще придвижим на второ място вектора ξ_{p+2} и т. н. Ще придвижим всичко q вектора, като всеки път използуваме p транспозиции, т. е. общият брой на транспозициите е равен на pq. В такъв случай антикомутативността ще следва от антисиметричността на външното произведение.

3) Асоциативност. Ако $\omega^p \in A_p(V)$, $\omega^q \in A_q(V)$, $\omega^r \in A_r(V)$, то $(\omega^p\wedge\omega^q)\wedge\omega^r=\omega^p\wedge(\omega^q\wedge\omega^r)$.

Доказателство. Нека $\sigma \in \sum_{p+q+r}$. Да разгледаме следната величина:

(6.1.9) $$\omega=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma[\omega^p(\xi_1,\ldots,\xi_p)\omega^q(\xi_{p+1},\ldots,\xi_{p+q})\omega^r(\xi_{p+q+1},\ldots,\xi_{p+q+r})].$$

Сумата (6.1.9) ще бъде равна на $(\omega^p\wedge\omega^q)\wedge\omega^r$, ако отначало извършим сумирането по всички пермутации, които оставят числата $p+q+1$, $p+q+2,\ldots,p+q+r$ без промяна и удовлетворяват условието (6.1.4), а след това да сумираме по всички пермутации, които запазват получения ред на първите $p+q$ аргумента и реда на аргументите $\xi_{p+b+1},\ldots,\xi_{p+q+r}$.

Аналогично можем да получим величината $\omega^p\wedge(\omega^q\wedge\omega^r)$.

Ще покажем, че и в двата случая се получава сума по всички пермутации, удовлетворяващи условията

(6.1.10) $$\begin{cases}\sigma(1)<\sigma(2)<\cdots<\sigma(p),\\ \sigma(p+1)<\sigma(p+2)<\cdots<\sigma(p+q),\\ \sigma(p+q+1)<\cdots<\sigma(p+q+r).\end{cases}$$

За целта ще се върнем отново на нашия модел с автомобилните колони. Да предположим, че по пътя се движат три автомобилни колони, в първата от които има p, във втората q, а в третата r коли. Един от начините за престрояване на трите колони в една се състои в това, че отначало се сливат първата и втората колона, а след това така получената колона се съединява с третата. При другия начин отначало се сливат втората и третата колона, а към тях се присъединява първата. Очевидно е, че пермутацията σ, която се получава в резултат на всяко едно от тези пренареждания, удовлетворява условието (6.1.10) и, обратно, всяка пермутация, която удовлетворява условието (6.1.10), може да се получи както с помощта на първия, така и с помощта на втория начин за пренареждане. Това означава съвпадане на $(\omega^p\wedge\omega^q)\wedge\omega^r$ и $\omega^p\wedge(\omega^q\wedge\omega^r)$.

Асоциативността на външното умножение дава възможност да се разглежда произволно крайно произведение

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\ldots\wedge\omega_m,\quad \text{където } \omega_i \in A_{p_i}(V).$$

Пример 1. Нека $\mathbf{a}_1(\xi), \mathbf{a}_2(\xi),\ldots,\mathbf{a}_m(\xi)$ са линейни форми. Тогава

(6.1.11) $$\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_m=\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma[\mathbf{a}_1(\xi_1)\mathbf{a}_2(\xi_2)\ldots\mathbf{a}_m(\xi_m)],$$

където сумирането се извършва по всички пермутации $\sigma \in \sum_m$.

Това равенство лесно се проверява по индукция. Забелязваме, че ако въведем матрицата $\{\mathbf{a}_i(\xi_j)\}$, то равенството (6.1.11) може да се запише в следния вид:

(6.1.12) $$(\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\ldots\wedge\mathbf{a}_m)(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)=\det\{\mathbf{a}_i(\xi_j)\}.$$

7. Базис в пространството на антисиметричните форми. Да изберем някакъв базис $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ в пространството V и да означим с $\{\mathbf{e}^i\}_{i=1}^n$ спрегнатия му базис в пространството $L(V)$. Ще напомним, че $\mathbf{e}^i(\xi)$ е линейна форма, която в елементите на базиса $\{\mathbf{e}_i\}$ приема стойностите $\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j)=\delta_{ij}$.

В точка 3 показахме, че всевъзможните произведения

$$\mathbf{e}^{i_1}(\xi_1)\,\mathbf{e}^{i_2}(\xi_2)\ldots\mathbf{e}^{i_p}(\xi_p)$$

образуват базис в $L_p(V)$. Тъй като $A_p(V)\subset L_p(V)$, то всяка антисиметрична p-форма може да се разложи по естествен начин като линейна комбинация на посочените произведения. Тези произведения обаче не образуват базис в $A_p(V)$, тъй като не са антисиметрични p-форми, т. е. не принадлежат на $A_p(V)$. Въпреки това чрез тях може да се конструира с помощта на външно произведение базис в $A_p(V)$.

Теорема 6.6. Нека $\{e_i\}_{i=1}^n$ е базис в пространството V, а $\{e^i\}_{i=1}^n$ е спрегнатият му базис в пространството $L(V)$. Всяка антисиметрична p-форма $\omega \in A_p(V)$ може да се представи, и то по единствен начин, във вида

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_p\le n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p}. \tag{6.1.13}$$

Всяко събираемо в сумата от дясната част на (6.1.13) представлява произведение на константата $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p}$ с антисиметричната p-форма $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$.

Доказателство. Съгласно резултатите от точка 4 можем да запишем

$$\omega = \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} e^{i_1} e^{i_2} \dots e^{i_p}, \tag{6.1.14}$$

където числата $\omega_{i_1 i_2 \dots i_p} = \omega(e^{i_1}, e^{i_2}, \dots, e^{i_p})$ са определени еднозначно.

Тъй като формата $\omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$ е антисиметрична, то за всяка пермутация $\sigma \in \sum_p$

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \xi_{\sigma(2)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\, \omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p).$$

Следователно

$$\omega_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(p)}} = (\operatorname{sgn}\sigma)\, \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}. \tag{6.1.15}$$

Групираме събираемите в сумата (6.1.14), различаващи се с пермутация на индекса $i_1 i_2 \dots i_p$, и се възползуваме от равенството (6.1.15). Получаваме

$$\omega = \sum_{i_1<i_2<\dots<i_p} \sum_{\sigma} \omega_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(p)}} e^{i_{\sigma(1)}} \dots e^{i_{\sigma(p)}} =$$

$$= \sum_{i_1<i_2<\dots<i_p} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \Big[\sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma)\, e^{i_{\sigma(1)}} \dots e^{i_{\sigma(p)}} \Big]. \tag{6.1.16}$$

Съгласно примера от точка 6 сумата в квадратните скоби е $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$. Теоремата е доказана.

Следствие 1. Елементите $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$ $(1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le n)$ образуват базис в пространството $A_p(V)$. Този базис е празен за $p>n$ и се състои от един елемент, ако $p=n$.

Следствие 2. Размерността на пространството $A_p(V)$ е равна на C_n^p.

По-нататък обикновено ще считаме, че сме фиксирали избрания базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, и ще означаваме линейните форми $e^i(\xi)$ със символа $e^i(\xi) = \xi^i$. Тогава всяка форма $\omega \in A_p(V)$ приема вида

$$\omega = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p) = \sum_{i_1<\dots<i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} \xi^{i_1} \wedge \dots \wedge \xi^{i_p}. \tag{6.1.17}$$

Пример 1

$$\xi^1 \wedge \xi^2 = (e^1 \wedge e^2) = (\xi_1, \xi_2) = \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn}\sigma)\, \sigma [e^1(\xi_1) e^2(\xi_2)] =$$

$$= e^1(\xi_1) e^2(\xi_2) - e^1(\xi_2) e^2(\xi_1) = \xi_1^1 \xi_2^2 - \xi_2^1 \xi_1^2,$$

където ξ_i^j е j-тият коефициент в разлагането на вектора ξ_i по базиса $\{e_j\}$.

Пример 2

$$\xi^1 \wedge \xi^2 \wedge \dots \wedge \xi^n = \det\{\xi_i^j\},$$

където $\xi_i = \sum_{j=1}^n \xi_i^j e_j$.

§ 2. Диференциални форми

1. Определение. Да разгледаме произволна отворена област G в n-мерното евклидово пространство E^n. Точките в областта G ще означаваме със символите $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ и т. н.

Определение. Диференциална (външна) форма от степен p, дефинирана в областта G, ще наричаме функция $\omega(x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p)$, стойността на която за всяко фиксирано $x \in G$ представлява антисиметрична p-форма от $A_p(E^n)$.

Множеството на всички диференциални p-форми в областта G ще означим с $\Omega_p(G) = \Omega_p(Q, E^n)$.

Ще считаме, че при фиксирани $\xi_1, \dots, \xi_p \in E^n$ p-формата ω е безкрайно диференцируема в G функция. Като използуваме резултатите от § 1, можем да запишем всяка p-форма ω във вида

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p} \xi^{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi^{i_p}. \tag{6.1.18}$$

Навсякъде по-нататък ще означаваме вектора ξ със символа $dx=(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$, а векторите ξ_k — със символите $d_kx=(d_kx^1, d_kx^2, \ldots, d_kx^n)$. За базис в E^n ще изберем векторите $e_k=\{0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}$, където единицата стои на k-то място. Елементи на спрегнатия базис ще бъдат функциите $e^k(\xi)=e^k(dx)$, определени от равенствата $e^k(dx)=dx^k$.

Тогава диференциалната форма (6.1.18) приема вида

$$\omega(x, d_1x, \ldots, d_px) = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Пример 1. Диференциална 0-форма — това е произволна функция, дефинирана в областта G (и съгласно нашите предположения безкрайно диференцируема в G).

Пример 2. Всяка диференциална 1-форма има вида

$$\omega(x, dx) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x)\, dx^k.$$

В частност, когато $n=1$, $\omega(x, dx)=f(x)dx$. Диференциалните форми от степен 1 се наричат също така линейни диференциални форми.

Пример 3. Всяка диференциална 2-форма има вида

$$\omega(x, d_1x, d_2x) = \sum_{l<k} \omega_{lk}(x) dx^l \wedge dx^k.$$

По определение

$$dx^l \wedge dx^k = (e^l \wedge e^k)(d_1x, d_2x) =$$
$$= e^l(d_1x)\, e^k(d_2x) - e^l(d_2x)\, e^k(d_1x) =$$
$$= d_1x^l d_2x^k - d_2x^l d_1x^k = \begin{vmatrix} d_1x^l & d_1x^k \\ d_2x^l & d_2x^k \end{vmatrix}.$$

В частност при $n=2$ получаваме

$$\omega(x, d_1x, d_2x) = f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 \\ d_2x^1 & d_2x^2 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата е равна на елементарното лице, съответствуващо на векторите d_1x и d_2x.

В случая, когато $n=3$, означавайки $\omega_{12}=R$, $\omega_{23}=P$, $\omega_{13}=-Q$, получаваме

$$\omega = P dx^2 \wedge dx^3 - Q dx^1 \wedge dx^3 + R dx^1 \wedge dx^2 = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \end{vmatrix}.$$

Пример 4. Всяка диференциална 3-форма в тримерното пространство има вида

$$\omega(x, d_1x, d_2x, d_3x) = f(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 = f(x) \begin{vmatrix} d_1x^1 & d_1x^2 & d_1x^3 \\ d_2x^1 & d_2x^2 & d_2x^3 \\ d_3x^1 & d_3x^2 & d_3x^3 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата е равна на елементарния обем, отговарящ на векторите d_1x, d_2x, d_3x.

2. Външен диференциал

Определение. Външен диференциал на p-линейна диференциална форма $\omega \in \Omega(G)$ ще наричаме формата $d\omega \in \Omega_{p+1}(G)$, определена от съотношенията

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} d\omega_{i_1\ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

където

$$d\omega_{i_1\ldots i_p} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k}\, dx^k.$$

По такъв начин, ако

$$\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \omega_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},$$

то

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1<\ldots<i_p} \frac{\partial \omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k}\, dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}.$$

Пример 1. Диференциалът на форма от нулева степен (т. е. функция $f(x)$) има вида

$$df(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k}\, dx^k.$$

Пример 2. Да изчислим диференциала на линейната форма

$$\omega=\omega(x, dx)=\sum_{i=1}^{n} \omega_i(x)\,dx^i.$$

Ще получим

$$d\omega=d\omega(x, d_1x, d_2x)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\omega_i(x)}{\partial x^k}\, dx^k\wedge dx^i.$$

Тъй като $dx^k\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^k$ и $dx^k\wedge dx^k=0$, то

$$d\omega=\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\, dx^k\wedge dx^i+\sum_{i<k}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\, dx^k\wedge dx^i=$$

$$=\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}\, dx^k\wedge dx^i-\sum_{k<i}\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\, dx^k\wedge dx^i=$$

$$=\sum_{k<i}\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^k}-\frac{\partial\omega_k}{\partial x^i}\right) dx^k\wedge dx^i.$$

В частност, когато $n=2$, за $\omega=Pdx^1+Qdx^2$ получаваме

$$d\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx^1\wedge dx^2.$$

3. Свойства на външния диференциал. Непосредствено от определението получаваме следните свойства:

1) ако $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_p(G)$, то $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$;

2) ако $\omega\in\Omega_p(G)$ и λ е реално число, то $d(\lambda\omega)=\lambda d\omega$;

3) ако $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_q(G)$, то

$$d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2.$$

Ще докажем свойство 3). Нека

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Ще въведем следното означение:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^k}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Тогава $d\omega$ може да се запише във вида

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n} dx^k\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^k}.$$

Да си припомним, че

$$\omega=\omega_1\wedge\omega_2=(-1)^{pq}\omega_2\wedge\omega_1.$$

По-нататък

$$\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+\omega_1\wedge\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+(-1)^{pq}\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}\wedge\omega_1.$$

Тогава

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n} dx^k\wedge\frac{\partial\omega}{\partial x^k}=\sum_{k=1}^{n} dx^k\wedge\frac{\partial\omega_1}{\partial x^k}\wedge\omega_2+$$

$$+(-1)^{pq}\sum_{k=1}^{n} dx^k\wedge\frac{\partial\omega_2}{\partial x^k}\wedge\omega_1=$$

$$=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^{pq}\, d\omega_2\wedge\omega_1.$$

Тъй като $d\omega_2$ е $(q+1)$-форма, то

$$d\omega_2\wedge d\omega_1=(-1)^{p(q+1)}\omega_1\wedge d\omega_2.$$

Оттук $d\omega=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2$.

В сила е следното важно свойство на диференциала.

Основно свойство на външния диференциал:

$$d(d\omega)=0.$$

Доказателство. Да предположим отначало, че ω е форма от нулева степен, т. е. $\omega(x)=f(x)$. Тогава

$$d(df)=d\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^i}\, dx^k\wedge dx^i.$$

Тъй като $dx^k\wedge dx^i=-dx^i\wedge dx^k$, това равенство може да се препише във вида

$$d(df)=\sum_{i<k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^k\partial x^i}\right) dx^i\wedge dx^k,$$

откъдето следва, че $d(df)=0$.

Нека сега

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Тогава

$$d\omega=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i_1<\ldots<i_p} d\omega_{i_1\ldots i_p}\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}.$$

Забелязваме, че всеки член на сумата представлява външно произведение на диференциали на форми от нулева степен, именно на формите $\omega_{i_1\ldots i_p}(x)$, $e^{i_1}(dx), \ldots, e^{i_p}(dx)$. Остава да приложим свойство 3) и да се възползуваме от това, че за форми от нулева степен основното свойство е доказано.

§ 3. Диференцируеми изображения

1. Определение за диференцируеми изображения. Да разгледаме произволна m-мерна област D в евклидовото пространство E^m и n-мерна област $G\subset E^n$. Точките от областта D ще означаваме със символите $t=(t^1, t^2, \ldots, t^m)$, а точките от областта G — със символите $x=(x^1, x^2, \ldots, x^n)$.

Ще казваме, че φ изобразява D в G, ако

$$\varphi=\{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n\},$$

където $\varphi^k(t)$ са дефинирани в областта D, а векторите x с координати $x^k=\varphi^k(t)$ лежат в областта G.

Ще дефинираме изображение φ^*, което преобразува $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ за всяко p, $0\leq p\leq n$. При това ще считаме, че всеки компонент $\varphi^k(t)$ на изображението φ е безкрайно диференцируем.

Определение. Нека φ е изображение на $D\subset E^m$ в $G\subset E^n$. Ще означим с φ^* изображението, което за всички $0\leq p\leq n$ действува от $\Omega_p(G)$ в $\Omega_p(D)$ по следното правило: ако

$$\omega=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

то

$$\varphi^*(\omega)=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\omega_{i_1\ldots i_p}(\varphi(t))\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{i_p}),$$

където

$$\varphi^*(dx^l)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\varphi^l}{\partial t^k}dt^k.$$

Пример 1. Нека ω е форма от нулева степен, т.е. $\omega=f(x)$. Тогава

$$\varphi^*(f)=f(\varphi(t)).$$

Пример 2. Нека φ изобразява n-мерната област $D\subset E^n$ в n-мерна област $G\subset E^n$ и нека ω е следната n-форма:

$$\omega=dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n.$$

Тогава

$$\varphi^*(\omega)=\left(\sum_{k_1=1}^{n}\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{k_1}}dt^{k_1}\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{k_n=1}^{n}\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^{k_n}}dt^{k_n}\right)=$$

$$=\sum_{k_1=1}^{n}\cdots\sum_{k_n=1}^{n}\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{k_1}}\cdots\frac{\partial\varphi_n}{\partial t^{k_n}}dt^{k_1}\wedge\ldots\wedge dt^{k_n}=$$

$$=dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\sum_{\sigma}(\operatorname{sgn}\sigma)\frac{\partial\varphi^1}{\partial t^{\sigma(1)}}\cdots\frac{\partial\varphi^n}{\partial t^{\sigma(n)}}=$$

$$=dt^1\wedge\ldots\wedge dt^n\det\left\{\frac{\partial\varphi^i}{\partial t^j}\right\}.$$

По такъв начин

$$\varphi^*(dx^1\wedge dx^2\wedge\ldots\wedge dx^n)=\frac{D(\varphi^1,\varphi^2,\ldots,\varphi^n)}{D(t^1,t^2,\ldots,t^n)}dt^1\wedge dt^2\wedge\ldots\wedge dt^n.$$

Забележка. Формата $\varphi^*(\omega)$ се нарича диференциална форма, получена от формата ω със смяна на променливите φ.

2. Свойства на изображението φ^*. Изображението φ^* има следните свойства:

1) Ако $\omega_1\in\Omega_p(G)$, $\omega_2\in\Omega_q(G)$, то

$$\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\varphi^*(\omega_1)\wedge\varphi^*(\omega_2).$$

Доказателство. Нека

$$\omega_1=\sum_{i_1<\ldots<i_p}a_{i_1\ldots i_p}(x)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

$$\omega_2=\sum_{k_1<\ldots<k_q}b_{k_1\ldots k_q}(x)dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_q}.$$

Тогава

$$\omega_1\wedge\omega_2=\sum_{i_1<\ldots<i_p}\sum_{k_1<\ldots<k_q}a_{i_1\ldots i_p}(x)b_{k_1\ldots k_q}(x)\times$$
$$\times dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{k_1}\wedge\ldots\wedge dx^{k_q}$$

и следователно

$$\varphi^*(\omega_1\wedge\omega_2)=\sum_{i}\sum_{k}a_i(\varphi(t))b_k(\varphi(t))\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{k_q})=$$

$$=\sum_{i}a_i(\varphi)\varphi^*(dx^{i_1})\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{i_p})\wedge\left[\sum_{k}b_k(\varphi)\varphi^*(dx^{k_1})\wedge\right.$$
$$\left.\wedge\ldots\wedge\varphi^*(dx^{k_q})\right]=\varphi^*(\omega_1)\wedge\varphi^*(\omega_2).$$

2) Ако $\omega \in \Omega_p(G)$, то $\varphi^*(d\omega) = d\varphi^*(\omega)$.

Доказателство. Отначало ще докажем това равенство за $p=0$, т.е. за $\omega = f(x)$. Получаваме

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i, \quad \varphi^*(\omega) = f(\varphi(t)),$$

$$d\varphi^*(\omega) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t^k} f(\varphi(t))\, dt^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi^i}{\partial t^k}\, dt^k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\, \varphi^*(dx^i) = \varphi^*(d\omega).$$

За произволно p ще проведем доказателството по индукция. Нека $\omega = f_{i_1 \ldots i_p}(x)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. Тогава $d\omega = df_{i_1 \ldots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$. От свойство 1) и от току-що доказаното съотношение имаме

$$\varphi^*(d\omega) = \varphi^*(df) \wedge \varphi^*(dx^{i_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i_p}).$$

От друга страна,

$$d\varphi^*(\omega) = d\varphi^*[(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge dx^{i_p}] =$$
$$= d[\varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(dx^{i_p})].$$

По-нататък съгласно свойство 3) на външния диференциал

$$d\varphi^*(\omega) = d\varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(dx^{i_p}) +$$
$$+ (-1)^{p-1} \varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge d\varphi^*(dx^{i_p}).$$

Забелязваме, че от горното следва $\varphi^*(dx^{i_p}) = d\varphi^*(x^{i_p})$, и тогава от основното свойство на външния диференциал имаме

$$d\varphi^*(dx^{i_p}) = 0.$$

Съгласно индуктивното предположение за $p-1$

$$d\varphi^*(f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) = \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}).$$

Оттук получаваме

$$d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{p-1}}) \wedge \varphi^*(dx^{i_p})$$

и съгласно свойство 1)

$$d\varphi^*(\omega) = \varphi^*(df \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}).$$

Следното важно свойство се нарича транзитивност.

3) Да разгледаме отворените области $U \subset E^l$, $V \subset E^m$, $W \subset E^n$, точките на които са съответно $u = (u^1, u^2, \ldots, u^l)$, $v = (v^1, v^2, \ldots, v^m)$, $w = (w^1, w^2, \ldots, w^n)$. Нека φ изобразява $U \to V$, а ψ изобразява $V \to W$. С $\psi \circ \varphi$ ще означим изображението, наречено композиция, което действува по правилото

$$(\psi \circ \varphi)(u) = \psi[\varphi(u)].$$

Аналогично ще въведем композицията $\varphi^* \circ \psi^*$, която за всяко p преобразува $\Omega_p(W)$ в $\Omega_p(U)$, т.е.

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(\omega) = \varphi^*[\psi^*(\omega)].$$

Вярно е следното равенство:

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

Доказателство. Да означим $\beta = \psi \circ \varphi$. Това означава, че $\beta = (\beta^1, \beta^2, \ldots, \beta^n)$, където $\beta^k = \psi^k(\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m)$.

Отначало ще извършим доказателството за линейната форма $dw^k \subset \Omega_1(W)$. Получаваме $\beta^*(dw^k) = d\beta^*(w^k) =$

$$= d\beta^k(u) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \beta^k}{\partial u^i}\, du^i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i}\, du^i.$$

По-нататък

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k) = \varphi^*[\psi^*(dw^k)] = \varphi^*[d\psi^*(w^k)] =$$
$$= \varphi^*(d\psi^k) = \varphi^*\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j}\, dv^j\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j}\, \varphi^*(dv^j).$$

Но

$$\varphi^*(dv^j) = d\varphi^*(v^j) = d\varphi^j = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i}\, du^i;$$

тогава

$$(\varphi^* \circ \psi^*)(dw^k) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial \psi^k}{\partial v^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i}\, du^i$$

и равенството е доказано. Оттук следва верността на свойство 3) за произволна линейна форма. По-нататък ще проведем доказателството по индукция. Нека

$$\omega = f(w)\, dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_p} \in \Omega(W).$$

Тогава

$$\beta^*(\omega) = \beta^*(f dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_{p-1}}) \wedge \beta^*(dw^{i_p}) =$$
$$= (\varphi^* \circ \psi^*)(f dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_{p-1}}) \wedge (\varphi^* \circ \psi^*)(dw^{i_p}) =$$
$$= (\varphi^* \circ \psi^*)(f dw^{i_1} \wedge \ldots \wedge dw^{i_p}) = (\varphi^* \circ \psi)(\omega).$$

$$\int_{C_2}\omega=\int_{I^p}f[\varphi_1(s)]\frac{D(\varphi_2^1,\varphi_2^2,\dots,\varphi_2^p)}{D(t^1,t^2,\dots,t^p)}\frac{D(\tau^1,\tau^2,\dots,\tau^p)}{D(s^1,s^2,\dots,s^p)}ds^1\wedge ds^2\wedge\dots\wedge ds^p=$$

$$=\int_{I^p}f[\varphi_1(s)]\frac{D(\varphi_2^1,\dots,\varphi_2^p)}{D(s^1,\dots,s^p)}ds^1\wedge\dots\wedge ds^p=\int_{C_1}\omega.$$

Аналогично може да се покаже, че ако $C_1=-C_2$, то

$$\int_{C_1}\omega=-\int_{C_2}\omega.$$

2. Диференцируеми вериги. Ще ни потрябват повърхности, които се разпадат на няколко парчета, всяко едно от които е образ на някой m-мерен куб. За пример на такава повърхност може да служи състоящата се от две окръжности граница на пръстен, лежащ в двумерната равнина. При това ще различаваме ориентациите на тези окръжности. Във връзка с това много полезно се оказва въвеждането на линейни комбинации с реални коефициенти на сингулярни кубове.

Определение 1. Ще наричаме p-мерна верига C произволен набор

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k,\ C_1,C_2,\dots,C_k\},$$

където λ_i са реални числа, а C_i са p-мерни сингулярни кубове. Ще използуваме означението

$$C=\lambda_1C_1+\dots+\lambda_kC_k.$$

Ще казваме, че C принадлежи на G, ако всичките C_i принадлежат на G.

Множеството на всички p-мерни вериги образува линейно пространство, ако въведем по естествен начин операциите събиране и умножение с реални числа.

Определение 2. Интеграл от формата ω по p-мерна верига C, съдържаща се в G, се нарича числото

$$\int_C\omega=\lambda_1\int_{C_1}\omega+\lambda_2\int_{C_2}\omega+\dots+\lambda_k\int_{C_k}\omega.$$

Сега можем да дефинираме граница на произволен сингулярен куб. За целта ще дефинираме най-напред граница на единичен куб.

Определение 3. Граница на куба I^p ще наречем $(p-1)$-мерната верига

$$\partial I^p=\sum_{i=1}^{p}(-1)^p[I_0^p(i)-I_1^p(i)],$$

където $I_\alpha^p(i)$ е сечението на куба I^p с хиперравнината

$$x^i=\alpha\quad(\alpha=0,1).$$

За да бъде коректно това определение, е необходимо да се разясни какъв смисъл сме вложили в твърдението, че $I_\alpha^p(i)$ е $(p-1)$-мерен сингулярен куб.

Да построим каноничното изображение $\tilde\varphi=\tilde\varphi_i^{\alpha,p}$ на куба I^{p-1} върху $I_\alpha^p(i)$. Нека $s=(s^1,s^2,\dots,s^{p-1})\in I^{p-1}$. Полагаме

$$\tilde\varphi^k(s)=\begin{cases}s^k, & \text{ако } 1\le k<i,\\ \alpha, & \text{ако } k=i,\\ s^{k-1}, & \text{ако } i<k\le p.\end{cases}$$

Очевидно $\tilde\varphi=(\tilde\varphi^1,\tilde\varphi^2,\dots,\tilde\varphi^p)$ изобразява взаимноеднозначно I^{p-1} върху $I_\alpha^p(i)$. В частност за $\alpha=0$ и $i=p$ изображението φ е рестрикция върху $I_0^p(p-1)$ на тъждественото изображение на пространството E^p върху себе си.

Определение 4. Граница на p-мерния сингулярен куб $C=\varphi:I^p\to E^n$ се нарича $(p-1)$-мерната верига

$$\partial C=\sum_{i=1}^{p}(-1)^i[\varphi(I_0^p(i))-\varphi(I_1^p(i))].$$

По този начин границата на образа на куба I^p е образ на границата на I^p с естествената ориентация.

Пример 1. Да разгледаме в равнината квадрата I^2. Очевидно можем да разглеждаме този квадрат като сингулярен куб, където φ е тъждественото изображение. На фиг. 6.5 е показана границата на този квадрат, като посоката на стрелките съвпада с посоката на нарастване на параметъра t^k, по който се извършва интегрирането, в случая, когато тази страна на квадрата влиза във веригата ∂I^2 със знак + и посоката на стрелките е противоположна, ако страната се взема със знак —. Виждаме, че нашето договаряне за знаците води до обичайното обхождане на границата обратно на часовниковата стрелка.

Пример 2. Да разгледаме сингулярния куб $C=\varphi:I^2\to R^2$, където φ има вида

$$\varphi^1=(a+Rt^1)\cos 2\pi t^2,$$
$$\varphi^2=(a+Rt^1)\sin 2\pi t^2.$$

Лесно се вижда, че $\varphi(I^2)$ е пръстен, границата на който е съставена от окръжности с радиуси a и $a+R$. Ще изясним какво

$$\int_{I^p_\alpha(i)} \omega, \text{ където } i=1, 2, \ldots, p, \quad \alpha=0,1.$$

Разглеждаме каноничното изображение $\widetilde{\varphi}: I^{p-1} \to I^p_\alpha(i)$. Съгласно резултатите от точка 1 на този параграф

$$\int_{I^p_\alpha(i)} \omega = \int_{I^{p-1}} f[\widetilde{\varphi}(s)] \frac{D(\widetilde{\varphi}^2, \ldots, \widetilde{\varphi}^p)}{D(s^1, \ldots, s^{p-1})} ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

По определението за канонично изображение $\widetilde{\varphi}_i^{\alpha, p}$ якобианът има вида

$$J = \frac{D(s^2, \ldots, s^{i-1}, \alpha, s^i, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 0, \text{ ако } i \neq 1,$$

и

$$J = \frac{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})}{D(s^1, s^2, \ldots, s^{p-1})} = 1, \text{ ако } i = 1.$$

По такъв начин само интегралите по $I^p_\alpha(i)$ могат да бъдат различни от нула. Получаваме

$$\int_{\partial I^p} \omega = (-1)\Big(\int_{I^p_0(1)} \omega - \int_{I^p_1(1)} \omega\Big) = \int_{I^{p-1}} f(1, s^1, s^2, \ldots, s^{p-1}) ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1} -$$

$$- \int_{I^{p-1}} f(0, s^1, \ldots, s^{p-1}) ds^1 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

По определението за интеграл по куба I^{p-1}

$$\int_{\partial I^p} \omega = \int_0^1 \cdots \int_0^1 [f(1, s^1, \ldots, s^{p-1}) - f(0, s^1, \ldots, s^{p-1})] \, ds^1 ds^2 \ldots ds^{p-1} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s^0} ds^0 \, ds^1 \ldots ds^{p-1} = \int_{I^p} \frac{\partial f}{\partial s^0} ds^0 \wedge \ldots \wedge ds^{p-1}.$$

От друга страна,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial t^1} dt^1 \wedge dt^2 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Следователно

$$\int_{I^p} d\omega = \int_{I^p} \frac{\partial f}{\partial t^1} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^p.$$

Равенството (6.1.19) е доказано.

Доказателство на теоремата на Стокс. По определението за интеграл по сингулярен куб

$$\int_C d\omega = \int_{I^p} \varphi^*(d\omega).$$

Съгласно свойство 2) на диференцируемите изображения (вж. точка 2, § 3)

$$\int_{I^p} \varphi^*(d\omega) = \int_{I^p} d\varphi^*(\omega).$$

По-нататък ще използваме вече доказаната формула на Стокс за куба I^p

$$\int_{I^p} d\varphi^*(\omega) = \int_{\partial I^p} \varphi^*(\omega).$$

Остава да забележим, че от свойството на интегралите по границата на сингулярен куб (вж. края на точка 2 от настоящия параграф)

$$\int_{\partial I^p} \varphi^*(\omega) = \int_{\partial C} \omega.$$

Теоремата окончателно е доказана.

4. Примери. 1) Да разгледаме случая $p=1$. Едномерен сингулярен куб C в E^n — това е някаква крива, чиито граници ще означим с a и b. Формулата на Стокс приема вида

$$\int_C df = \int_{\partial C} f = f(b) - f(a).$$

В частност, когато $n=1$, получаваме формулата на Нютон — Лайбниц

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

2) Нека сега $p=2$. Двумерен сингулярен куб C — това е двумерна повърхност, формата $\omega \in \Omega_1$ има вида

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, dx^k.$$

Като използваме пример 2 от точка 2, § 2, получаваме

$$\int\limits_C \sum_{k<i} \left(\frac{\partial \omega^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega^k}{\partial x^i} \right) dx^k \wedge dx^i = \int\limits_{\partial C} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, dx^k .$$

Ако $n=2$, като означим $\omega = P dx^1 + Q dx^2$, получаваме формулата на Грин

$$\int\limits_C \left(\frac{\partial Q}{\partial x^1} - \frac{\partial P}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 = \int\limits_{\partial C} P dx^1 + Q dx^2 .$$

Ако $n=3$, получаваме обичайната формула на Стокс.

3) Нека $p=n$. Тогава $\omega \in \Omega_{n-1}$ има вида

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

По-нататък

$$d\omega = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \omega_k}{\partial x^l} dx^l \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \omega^k}{\partial x^k} \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n .$$

В частност при $n=3$

$$\omega = P dx^2 \wedge dx^3 - Q dx^1 \wedge dx^3 + R dx^1 \wedge dx^2 ,$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{\partial Q}{\partial x^2} + \frac{\partial R}{\partial x^3} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

и получаваме формулата на Остроградски—Гаус.

7. Интеграли, зависещи от параметри

Тази глава е посветена на изучаването на функции, представени във вид на собствени или несобствени интеграли от функции, които освен от интеграционната променлива зависят и от още една променлива, която се нарича параметър. Функции, които се представят чрез такива интеграли, е прието да се наричат интеграли, зависещи от параметър.

Естествено възниква въпросът за непрекъснатост, интегруемост и диференцируемост на такива функции по параметъра.

§ 1. Равномерна сходимост по едната променлива на функции на две променливи

1. Връзка между равномерната сходимост по едната променлива на функции на две променливи с равномерната сходимост на редици от функции. Нека ни е дадена функция на две променливи $f(x, y)$, където двойката (x, y) принадлежи на подмножеството Z на пространството E^2, а x принадлежи на някакво подмножество на числовата ос $\{x\}=X$ и y принадлежи на някакво подмножество на числовата ос $\{y\}=Y$. Например Z може да бъде правоъгълникът $\prod = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, където $\{x\}=X=[a, b]$, $y=Y=[c, d]$, а $f(x, y)$ е функция, зададена в правоъгълника $\prod$.

Нека по-нататък y_0 е гранична точка на множеството $\{y\}$.

Ако за всяко x от множеството $\{x\}$ съществува крайна граница

$$\lim_{y \to y_0} f(x, y) = g(x),$$

то ще казваме, че функцията $f(x, y)$ поточково клони към функцията $g(x)$ в множеството $\{x\}$ при y, клонящо към y_0, и ще пишем

$$f(x, y) \to g(x) \quad \text{при} \quad y \to y_0.$$

Понятието поточкова сходимост на функцията $f(x, y)$ към $g(x)$ обобщава понятието сходимост в точка на редици от функции (вж. § 11, глава 2).

Действително в частния случай, когато множеството $\{y\}$ е редицата $\{y_n\}$ и $y_n \to y_0$, то функцията $f(x, y)$ може да се разглежда като редицата от функции $f_n(x)=f(x, y_n)$, зададени в множеството $\{x\}$.

Сега ще дефинираме понятието равномерна сходимост по едната променлива x на функцията $f(x, y)$ на двете променливи към граничната функция $g(x)$ при $y \to y_0$.

Дефиниция. Функцията $f(x, y)$ клони равномерно относно x в множеството $\{x\}$ към функцията $g(x)$ при y, клонящо към y_0, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всяко $y \neq y_0$ от множеството $\{y\}$, за което $|y-y_0|<\delta$, и за всички x от множеството $\{x\}$ е изпълнено неравенството

$$|f(x, y)-g(x)|<\varepsilon.$$

Ще докажем едно твърдение, което дава връзка между равномерната сходимост в множеството $\{x\}$ на функцията $f(x, y)$ към $g(x)$ при $y \to y_0$ и равномерната сходимост в множеството $\{x\}$ на редицата от функции $f_n(x)=f(x, y_n)$ при $y_n \to y_0$, където $y_n \neq y_0$ за всяко n и y_0 е гранична точка на множеството $\{y\}$.

Твърдение 1. Функцията $f(x, y)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ относно x в множеството $\{x\}$ при $y \to y_0$ тогава и само тогава, когато редицата от функции $f_n(x)=f(x, y_n)$ е сходяща равномерно в множеството $\{x\}$ към граничната функция $g(x)$ за всяка редица $\{y_n\}$, $y_n \to y_0$, където y_n принадлежат на $\{y\}$ и $y_n \neq y_0$.

Необходимост. Нека $f(x, y)$ клони към $g(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$ при $y \to y_0$. Да вземем произволна редица $\{y_n\}$, където y_n принадлежат на $\{y\}$, $y_n \neq y_0$ и $y_n \to y_0$. Ще покажем, че редицата $f_n(x)$, където $f_n(x)=f(x, y_n)$, клони към $g(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$.

За произволно число $\varepsilon>0$ съществува число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всички y от множеството $\{y\}$, за които $0<|y-y_0|<\delta$, и за всички x от $\{x\}$ е изпълнено неравенството

$$|f(x, y)-g(x)|<\varepsilon.$$

Тъй като $y_n \to y_0$, то съществува такъв номер $N=N(\delta)$, че за всички $n \geqq N$ е изпълнено неравенството

$$|y_n-y_0|<\delta,$$

откъдето следва, че

$$|f(x, y_n)-g(x)|<\varepsilon$$

за всички x, принадлежащи на $\{x\}$, и при всяко $n \geqq N$. Това означава, че $f_n(x)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ в множеството $\{x\}$.

Достатъчност. Нека за всяка редица $\{y_n\}$, сходяща към y_0, където y_n принадлежат на $\{y\}$, $y_n \neq y_0$, съответната редица $f_n(x)=f(x, y_n)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ в множеството $\{x\}$. Ще докажем, че функцията $f(x, y)$ равномерно клони към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$ в множеството $\{x\}$. Допускаме противното, т. е. че съществува число $\varepsilon>0$ такова, че за всяко $\delta>0$ може да се намери $y_\delta \neq y_0$, $|y_\delta-y_0|<\delta$ и точка x_δ от $\{x\}$, за които е изпълнено неравенството

$$|f(x_\delta, y_\delta)-g(x_\delta)| \geqq \varepsilon.$$

Нека δ_n е редица от положителни числа, клоняща към 0. Тогава за съответните редици y_n и x_n ще имаме $y_n \to y_0$, $|y_n-y_0|>0$ и $|f(x_n, y_n)-g(x_n)| \geqq \varepsilon$. Следователно редицата от функции $f(x, y_n)$ не клони към $g(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$. Стигнахме до противоречие. С това твърдение 1 е доказано.

2. Критерий на Коши за равномерна сходимост на функция. Вярна е следната теорема.

Теорема 7.1. *Необходимо и достатъчно условие за равномерна сходимост на функцията $f(x, y)$ в множеството $\{x\}$ към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$ е за всяко число $\varepsilon>0$ да съществува $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всеки две точки y', y'' от множеството $\{y\}$, за които $0<|y'-y_0|<\delta$, $0<|y''-y_0|<\delta$, и за всяко x от $\{x\}$ да бъде изпълнено неравенството*

$$|f(x, y')-f(x, y'')|<\varepsilon.$$

Доказателство. Съгласно твърдение 1 е достатъчно да разгледаме редицата от функции $\{f(x, y_n)\}$, съответствуваща на редицата $\{y_n\}$, където $y_n \to y_0$, $0<|y_n-y_0|$, $y_n \in \{y\}$, и да използваме критерия на Коши за равномерна сходимост на редица от функции (вж. § 1, глава 2).

2. Приложения на понятието равномерна сходимост на функция. Нека множеството $\{x\}=X$ съвпада със сегмента $[a, b]$ и y_0 е гранична точка на множеството $\{y\}=Y$. Да разгледаме функцията $f(x, y)$, където x принадлежи на $[a, b]$, а y е от множеството Y. Ще формулираме няколко твърдения, произтичащи от съответните твърдения за равномерна сходимост на редица от функции (вж. глава 2). Тези твърдения се доказват чрез преминаване към произволна редица $\{y_n\}$, където $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$.

Твърдение 2. Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$ при всяко фиксирано y от Y и равномерно в $[a, b]$ клони към $g(x)$ при $y \to y_0$. Тогава функцията $g(x)$ е интегруема в $[a, b]$ и са верни равенствата

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \Big[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Big]\,dx.$$

За доказателството на това твърдение е достатъчно да се приложи теорема 2.8 от § 4, глава 2.

Твърдение 3. Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната по x, $x \in [a, b]$ при всяко фиксирано y от множеството Y и $f(x, y)$ равномерно в $[a, b]$ клони към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$, то $g(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$.

Доказателството се получава от следствие 1 на теорема 2.7, глава 2.

Твърдение 4. Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната по x в $[a, b]$ при всяко фиксирано y от Y и при $y \to y_0$ тази функция монотонно клони към непрекъснатата функция $g(x)$ във всяка фиксирана точка x от $[a, b]$. Тогава $f(x, y)$ клони към $g(x)$ равномерно в $[a, b]$.

Това твърдение е аналог на теорема 2.4 от глава 2 (признак на Дини).

При прехода към редицата $\{y_n\}$ е необходимо тя да се избере монотонна такава, че $y_n \to y_0$.

Твърдение 5. Ако при всяко фиксирано y от множеството Y функциите на x: $f(x, y)$ и $f'_x(x, y)$ са непрекъснати в $[a, b]$ и при $y \to y_0$ функцията $f(x, y)$ клони към $g(x)$, а функцията $f'_x(x, y)$ клони към $h(x)$ равномерно в $[a, b]$, то функцията $g(x)$ е диференцируема в $[a, b]$ и при това

$$g'(x) = h(x)$$

или

$$\{\lim_{y\to y_0} f(x, y)\}'_x = \lim_{y\to y_0} f'_x(x, y).$$

За доказателството на това твърдение е необходимо да използваме теорема 2.9, глава 2.

Твърдение 6. Нека функцията $f(x, y)$ е зададена и непрекъсната в правоъгълника $\Pi = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Тогава за всяко y_0 от сегмента $[c, d]$ при $y \to y_0$ функцията $f(x, y)$ клони равномерно по x в $[a, b]$ към функцията $f(x, y_0)$.

Доказателство. Тъй като непрекъснатата функция $f(x, y)$ в правоъгълника Π е и равномерно непрекъсната в него, то за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такова, че за всеки две

точки (x', y'), (x'', y'') от Π, за които $|x' - x''| < \delta$, $|y' - y''| < \delta$, е вярно неравенството

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon.$$

Нека $x' = x'' = x$, $y' = y$, $y'' = y_0$. Тогава за всички $y \in [c, d]$ и такива, че $|y - y_0| < \delta$, и за всички x от $[a, b]$ е изпълнено неравенството

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

Това доказва твърдението.

§ 2. Собствени интеграли, зависещи от параметър

1. Свойства на интегралите, зависещи от параметър. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана за x, принадлежащи на сегмента $[a, b]$, и y, принадлежащи на някакво множество $\{y\} = Y$. Да допуснем, че при всяко фиксирано y от Y функцията $f(x, y)$ е интегруема в $[a, b]$. Тогава в множеството Y е дефинирана функцията

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx, \tag{7.1}$$

която се нарича интеграл, зависещ от параметъра y.

Ще изучим свойствата на интеграли, зависещи от параметър.

Да отбележим най-напред, че съгласно твърдение 2 от § 1, ако функцията $f(x, y)$ клони равномерно в $[a, b]$ към функцията $g(x)$ при $y \to y_0$, то в интеграла (7.1) може да се извърши граничен преход под знака на интеграла.

Теорема 7.2 (за непрекъснатост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника $\Pi = \{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$. Тогава интегралът $I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ е непрекъсната функция на параметъра y в $[c, d]$.*

Доказателство. От твърдение 6 на § 1 следва, че функцията $f(x, y)$ клони равномерно към функцията $f(x, y_0)$ при $y \to y_0$ в сегмента $[a, b]$. Следователно, както беше отбелязано по-горе, може да се извърши граничен преход под знака на интеграла и да се получи

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x, y)dx=\int_a^b f(x, y_0)dx=I(y_0),$$

което и трябваше да се докаже.

Теорема 7.3 (за интегриране на интеграла по параметъра). *Ако функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника $\prod=\{a\leq x\leq b, c\leq y\leq d\}$, то функцията $I(y)=\int_a^b f(x, y)dx$ е интегруема в сегмента $[c, d]$. Освен това е вярна формулата*

$$\int_c^d I(y)dy=\int_c^d\Big[\int_a^b f(y, y)dx\Big]dy=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x, y)dy\Big]dx.$$

С други думи, ако са изпълнени условията на теоремата, то в интеграла, зависещ от параметъра, може да се интегрира по този параметър под знака на интеграла.

Доказателство. Съгласно предходната теорема 7.2 функцията $I(y)$ е непрекъсната в $\prod$. Затова тя е интегруема в този сегмент. Верността на формулата следва от равенството на повторните интеграли, тъй като те са равни на двойния интеграл $\iint_{\Pi} f(x,y)dx\,dy$(вж. глава 3).

Теоремата е доказана.

Теорема 7.4 (за диференцируемост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника $\prod$ и има в него непрекъсната производна $f'_y(x, y)$. Тогава функцията, определена от (7.1), е диференцируема в $[c, d]$ и*

$$I'(y)=\int_a^b f'_y(x, y)\,dx. \tag{7.2}$$

С други думи, ако са изпълнени условията на теоремата, то можем да диференцираме под знака на интеграла.

Доказателство. Да разгледаме равенството

$$\frac{f(x, y+h)-f(x, y)}{h}=f'_y(x, y+\theta h),\ 0<\theta<1,$$

което следва от формулата на Лагранж, и да забележим, че $f'_y(x, y+\theta h)$ клони равномерно в $[a, b]$ към $f'_y(x, y)$ при $h\to 0$.

Следователно можем да направим граничен преход под знака на интеграла в равенството

$$\frac{I(y+h)-I(y)}{h}=\int_a^b f'_y(x, y+\theta h)dx$$

при $h\to 0$. Оттук получаваме формула (7.2), което доказва теоремата.

2. Случай, когато границите на интегриране зависят от параметъра. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в правоъгълника $\prod=\{a\leq x\leq b, c\leq y\leq d\}$, а зададените в $[c, d]$ функции $a(y)$ и $b(y)$ изобразяват $[c, d]$ в сегмента $[a, b]$.

Ако за всяко фиксирано y от $[c, d]$ функцията $f(x, y)$ е интегруема по x в сегмента $[a(y), b(y)]$, то очевидно в $[c, d]$ е дефинирана функцията

$$I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx. \tag{7.1*}$$

Вярна е следната теорема.

Теорема 7.5 (за непрекъснатост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в правоъгълника $\prod$, а функциите $a(y)$ и $b(y)$ са непрекъснати в сегмента $[c, d]$. Тогава функцията $I(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx$ е непрекъсната в $[c, d]$.*

Доказателство. Да фиксираме произволно y_0 от сегмента $[c, d]$. Тогава от свойството за адитивност на интеграла получаваме

$$I(y)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y)dx+\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)dx+\int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x, y)dx.$$

Първият интеграл на равенството представлява интеграл, зависещ от параметър, с постоянни граници на интегриране. Следователно той е непрекъсната функция по y и затова при $y\to y_0$ той клони към $\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)dx$. За другите два интеграла получаваме оценките

$$\Big|\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x, y)dx\Big|\leq M\,|b(y)-b(y_0)|,$$

$$\Big|\int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x, y)dx\Big|\leq M\,|a(y_0)-a(y)|.$$

където $M=\sup\limits_{\Pi}|f(x, y)|$. От непрекъснатостта на функциите $a(y)$ и $b(y)$ следва, че при $y\to y_0$ и двата интеграла клонят към нула. Следователно $I(y)\to I(y_0)$ при $y\to y_0$. Теоремата е доказана.

Сега ще докажем теорема за диференцируемост на интеграла $I(y)$, определен от равенството (7.1).

Теорема 7.6 (за диференцируемост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната заедно с производната си $f'_y(x, y)$ в правоъгълника Π, а функциите $a(y)$ и $b(y)$ са диференцируеми в $[c, d]$. Тогава интегралът $I(y)$, определен от равенството (7.1), е диференцируема функция по y в $[c, d]$ и е вярно равенството*

$$I'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)dx+f[b(y), y]b'(y)-f[a(y), y]a'(y). \tag{7.3}$$

Доказателство. Фиксираме произволно y_0 от сегмента $[c, d]$ и записваме диференчното частно във вида

$$\frac{I(y_0+h)-I(y_0)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx-\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0)dx\right] \tag{7.4}$$

(h е избрано така, че $y_0+h\in[c, d]$). Тъй като

$$\int_{a(y_0+h)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx=\int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)dx+\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x, y_0+h)dx+$$
$$+\int_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx,$$

$$\frac{I(y_0+h)-I(y_0)}{h}=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}\frac{f(x, y_0+h)-f(x, y_0)}{h}dx+$$
$$+\frac{1}{h}\int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)dx+\frac{1}{h}\int_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx.$$

В първото събираемо на това равенство съгласно теорема 7.4 можем да направим граничен преход под знака на интеграла при $h\to 0$.

Използувайки първата формула за средните стойности за интеграли, представяме второто и третото събираемо във вида

$$\frac{1}{h}\int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)dx=f(\xi, y_0+h)\,\frac{a(y_0)-a(y_0+h)}{h},$$

$$\frac{1}{h}\int_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx=f(\eta, y_0+h)\,\frac{b(y_0+h)-b(y_0)}{h},$$

където $\xi\in[a(y_0), a(y_0+h)]$ и $\eta\in[b(y_0), b(y_0+h)]$.

От тези равенства и от непрекъснатостта на функциите $a(y)$ и $b(y)$ получаваме

$$\frac{1}{h}\int_{a(y_0+h)}^{a(y_0)} f(x, y_0+h)dx\to -f[a(y_0), y_0]a'(y_0) \text{ при } h\to 0,$$

$$\frac{1}{h}\int_{b(y_0)}^{b(y_0+h)} f(x, y_0+h)dx\to f[b(y_0), y_0]b'(y_0) \text{ при } h\to 0.$$

Следователно в равенството (7.4) може да се направи граничен преход при $h\to 0$ и е вярна формулата (7.3). Теоремата е доказана.

§ 3. Несобствени интеграли, зависещи от параметри

В този параграф ще изучим случая на равномерната относно $y\in\{y\}$ сходимост на функция на две променливи $F(x, y)$ към граничната функция $G(y)$ при $x\to\infty$.

Нека функцията $F(x, y)$ е дефинирана в множеството Z, състоящо се от двойките числа (x, y), където x принадлежи на множеството $\{x\}=X$, а y принадлежи на множеството $\{y\}=Y$, X и Y са множества от числовата ос. Да предположим, че $+\infty$ е гранична точка на множеството X (т. е. за всяко число a множеството $(a, +\infty)$ съдържа поне една точка от множеството X).

Определение 1. Функцията $F(x, y)$ клони към функцията $G(y)$ при x, клонящо към $+\infty$ равномерно относно y в множеството Y, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери число x_0 такова, че ако x принадлежи на множеството X и удовлетворява условието $x>x_0$, то за всички y от Y е изпълнено неравенството

$$|F(x, y)-G(y)|<\varepsilon.$$

1. Несобствени интеграли от първи род, зависещи от параметър. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана за всички $x\geqq a$ при всички y от някакво множество $\{y\}=Y$ и при всяко фиксирано y от Y е интегруема в $[a, +\infty)$, т. е. за всяко y от Y е сходящ интегралът

$$I(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx. \tag{7.5}$$

Определение 2. Несобственият интеграл (7.5) се нарича равномерно сходящ по параметъра y в множеството Y, ако функцията

$$F(t, y)=\int_a^{t} f(x, y)dx \tag{7.6}$$

клони към граничната функция $I(y)$ при $t\to+\infty$ равномерно в множеството Y.

Следващата теорема се нарича критерий на Коши за равномерна сходимост на несобствен интеграл, зависещ от параметър.

Теорема 7.7. *Необходимо и достатъчно условие за равномерна сходимост в множеството Y на несобствения интеграл (7.5) е за всяко $\varepsilon>0$ да съществува число $t_0\geq a$ такова, че за всички t', t'', по-големи от t_0, и при всички y от Y да бъде изпълнено неравенството*

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)dx\right|<\varepsilon.$$

Верността на този критерий следва от теорема 7.1, приложена за функцията

$$F(t, y)=\int_a^{t} f(x, y)dx.$$

От критерия на Коши в частност следва следният признак за сравняване:

Теорема 7.8 (признак на Вайерщрас). *Нека за всички y от Y и всички x от $[a_1,+\infty)$, където $a_1\geq a$, е изпълнено неравенството*

$$|f(x, y)|\leq\varphi(x),$$

където $\varphi(x)$ е интегруема (в несобствен смисъл) функция в $[a,+\infty)$. Тогава интегралът (7.5) е равномерно сходящ по y.

Доказателство. Тъй като интегралът $\int_a^{\infty}\varphi(x)dx$ е сходящ, то за за всяко число $\varepsilon>0$ съществува число $t_0\geq\alpha$ такова, че за всички t', t'', за които $t_0\leq t'\leq t''$, е изпълнено неравенството $\int_{t'}^{t''}\varphi(x)dx<\varepsilon$. Тогава

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)dx\right|\leq\int_{t'}^{t''}|f(x, y)|\,dx\leq\int_{t'}^{t''}\varphi(x)dx<\varepsilon,$$

което и трябваше да се докаже.

Забележка 1. От критерия на Коши за равномерна сходимост на несобствени интеграли следва, че интегралът (7.5) и неговият «остатък» (т. е. интегралът $\int_{a'}^{\infty} f(x, y)dx$, където $a'>a$) имат еднакъв характер на равномерна сходимост.

Забележка 2. Аналогично на доказателството на признака на Дирихле — Абел за несобствени интеграли (вж. част 1, допълнение 1 към глава 9) се доказва следното твърдение (признак на Дирихле — Абел).

Ако интегралът $F(t, y)=\int_a^{t} f(x, y)dx$ е равномерно ограничен, т. е. за всички $t>a$ и y от Y е изпълнено неравенството $|F(t, y)|\leq M$ и функцията $g(x)$ е ограничена и монотонно клони към нула при $x\to+\infty$, то интегралът $\int_a^{\infty} f(x, y)\,g(x)dx$ е равномерно сходящ.

Преминаваме към изучаването на свойствата на несобствени интеграли, зависещи от параметър.

Теорема 7.9. *Нека за всяко b, по-голямо от a, функцията $f(x, y)$ клони към функцията $g(x)$ при $y\to y_0$ равномерно в сегмента $[a,b]$, където y_0 е гранична точка на множеството Y и интегралът $I(y)=\int_a^{\infty} f(x, y)dx$ е равномерно сходящ в множеството Y. Тогава*

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^{\infty} f(x, y)dx=\int_a^{\infty} g(x)dx.$$

Доказателство. Ще докажем, че функцията $g(x)$ е интегруема в интервала $[a, \infty)$. За произволно число $\varepsilon>0$ съществува число $t_0=t_0(\varepsilon)>0$ такова, че за всеки t', t'', по-големи от t_0, и за всяко y от Y е изпълнено неравенството

$$\left|\int_{t'}^{t''} f(x, y)dx\right|<\varepsilon.$$

Ако в горното неравенство оставим y да клони към y_0 при фиксирани t', t'', то ще получим

$$\left|\int_{t'}^{t''} g(x)dx\right| \leq \varepsilon.$$

Това доказва сходимостта на интеграла $\int_a^\infty g(x)dx$.

Нека $\{t_n\}$ е произволна редица, клоняща към $+\infty$. Да разгледаме функционалната редица

$$I_n(y)=\int_a^{t_n(y)} f(x, y)dx,$$

която равномерно в множеството Y клони към $I(y)$, определена в равенството (7.5). Поради твърдение 2 от § 1 всяка от функциите $I_n(y)$ има крайна граница при $y \to y_0$. Освен това

$$\lim_{y\to y_0} I_n(y)=\lim_{y\to y_0}\int_a^{t_n} f(x, y)dx=\int_a^{t_n}[\lim_{y\to y_0} f(x, y)]dx=\int_a^{t_n} g(x)dx.$$

Но тогава съществува и границата

$$\lim_{y\to y_0} I(y)=\lim_{t_n\to\infty}\int_a^{t_n} g(x)dx=\int_a^\infty g(x)dx,$$

тъй като съгласно теорема 2.7 от глава 2 символът $\lim\limits_{t_n\to\infty}$ за равномерно сходяща редица $I_n(y)$ и символът $\lim\limits_{y\to y_0}$ за граница на функциите $I_n(y)$ може да си разменят местата.

Теоремата е доказана.

В частност, ако точката y_0 принадлежи на множеството Y и функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в точката y_0, т. е. за всяко $b>a$ функцията $f(x, y)$ в сегмента $[a, b]$ равномерно клони към функцията $f(x, y_0)$ при $y \to y_0$, то $\lim\limits_{y\to y_0} I(y)=I(y_0)$, т. е. $I(y)$ е непрекъсната в точката y_0.

По-точно вярна е следната теорема.

Теорема 7.9* **(за непрекъснатост на равномерно сходящ несобствен интеграл по параметър).** *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е непрекъсната за $x \geq a$ и $y \in [c, d]$ и интегралът $I(y)=\int_a^\infty f(x, y)dx$ е равномерно сходящ в $[c, d]$. Тогава функцията $I(y)$ е непрекъсната в $(c, d]$.*

Доказателство. Във всеки правоъгълник $\Pi=\{a\leq x\leq t$, $c\leq y\leq d\}$ функцията $f(x, y)$ равномерно в сегмента $[a, t]$ клони към функцията $f(x, y_0)=g(x)$ при $y \to y_0$ (вж. твърдение 6 от § 1). Затова при $t=t_n$ за интегралите $I_n(y)$, въведени при доказателството на теорема 7.9, са изпълнени условията за граничен преход под знака на интеграла. Оттук и от равномерната сходимост в $[c, d]$ на $I_n(y)$ към $I(y)$ получаваме, че $\lim\limits_{y\to y_0} I(y)=I(y_0)$, т. е. функцията $I(y)$ е непрекъсната. Теоремата е доказана.

Теорема 7.10. *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е непрекъсната и неотрицателна за $x \in [a, \infty)$ и $y \in [c, d]$. Нека понататък интегралът $I(y)=\int_a^\infty f(x, y)dx$ е непрекъснат по y в $[c, d]$. Тогава този интеграл е равномерно сходящ по y в $[c, d]$.*

Доказателство. Да разгледаме редицата $I_n(y)=\int_a^{t_n} f(x, y)dx$ от непрекъснати в $[c, d]$ функции и нека t_n монотонно клони към $+\infty$. Тогава редицата $\{I_n(y)\}$, монотонно не намалявайки, клони към непрекъснатата функция $I(y)$. Следователно можем да приложим признака на Дини (теорема 2.4, глава 2).

Теоремата е доказана.

Теорема 7.11. *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е непрекъсната и неотрицателна за x и y, принадлежащи съответно на интервалите $[a, \infty)$ и $[c, d]$. Нека освен това функцията $f(x, y)$ във всяка точка x от $[a, \infty)$, монотонно не намалявайки, клони към непрекъснатата функция $g(x)$ при $y \to y_0$. Тогава от сходимостта на интеграла $\int_a^\infty g(x)dx$ следва, че може да се направи граничен преход под знака на интеграла (7.5) при $y \to y_0$.*

Доказателство. От признака на Вайерщрас (теорема 7.8) следва, че интегралът (7.5) е равномерно сходящ в $[c, d]$, тъй като $f(x, y)\leq g(x)$ и $g(x)$ е интегруема в $[a, \infty)$. Затова от теорема 7.9* следва, че може да се направи граничен преход под знака на интеграла.

Да преминем сега към въпроса за интегриране на несобствен интеграл по параметър.

Теорема 7.12 **(за интегриране на несобствен интеграл по параметър).** *Нека функцията на две променливи $f(x, y)$ е дефинирана и непрекъсната за x и y, принадлежащи съответно на интервалите $[a, \infty)$ и $[c, d]$, и нека интегралът $I(y)=\int_a^\infty f(x, y)dx$ е равно-*

мерно сходящ. Тогава функцията $I(y)$ е интегруема в $[c, d]$ и е вярна формулата

$$(*)\quad \int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Доказателство. Съгласно теорема 7.9* функцията $I(y)$ е непрекъсната в $[c, d]$, а следователно и интегруема в този интервал. Да докажем сега формулата (*). Ще разгледаме функциите $I_n(y) = \int_a^{t_n} f(x, y)dx$ при $t_n \to \infty$. За всяка функция $I_n(y)$ от теорема 7.3 получаваме

$$(7.7)\qquad \int_c^d I_n(y)dy = \int_a^{t_n} dx \int_c^d f(x, y)dy.$$

Тъй като в интервала $[c, d]$ редицата $\{I_n(y)\}$ равномерно клони към $I(y)$, то в лявата страна на равенството (7.7) може да се направи граничен преход под знака на интеграла при $n \to \infty$. Следователно при $n \to \infty$ съществува и границата на редицата от интеграли, стоящи в дясната страна на (7.7). Така получаваме

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^d I_n(y)dy = \int_c^d I(y)dy = \lim_{n\to\infty} \int_a^{t_n} dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

което трябваше да се докаже.

Ще докажем сега теорема за интегриране на несобствен интеграл (7.5) по параметър, който се изменя в безкраен интервал.

Теорема 7.13. *Нека $f(x, y)$ е функция, непрекъсната и неотрицателна в областта $a \leq x < \infty$, $c \leq y < \infty$, интегралът $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$ е непрекъснат в интервала $[c, \infty)$, а интегралът $K(x) = \int_c^\infty f(x, y)dy$ е непрекъснат в интервала $[a, \infty)$. Тогава от сходимостта на единия от интегралите $\int_c^\infty I(y)\,dy$ и $\int_a^\infty K(x)\,dx$ следва сходимостта на другия и са верни равенствата*

$$\int_c^\infty I(y)\,dy = \int_a^\infty K(x)\,dx$$

или

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy.$$

По такъв начин, ако са изпълнени условията на теорема 7.13, може да се интегрира по параметъра в безкраен интервал под знака на несобствения интеграл.

Доказателство. От условията на теоремата и от теорема 7.10 интегралите $I(y)$ и $K(x)$ са равномерно сходящи съответно първият в сегмента $[c, d]$ при всяко $d > c$, а вторият в сегмента $[a, b]$ при всяко $b > a$. Нека например е сходящ повторният интеграл $\int_c^\infty I(y)\,dy$. Да разгледаме ненамаляваща редица $\{t_n\}$, $t_n \to +\infty$. Тогава

$$\int_a^{t_n} K(x)\,dx = \int_a^{t_n} dx \int_0^\infty f(x, y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^{t_n} f(x, y)\,dx.$$

Редицата $I(y, t_n) = \int_a^{t_n} f(x, y)\,dx$, $n = 1, 2, \ldots$, за всяко d, по-голямо от c, клони равномерно в сегмента $[c, d]$ към $I(y)$. При това редицата $\{I(y, t_n)\}$ не намалява в $[c, d]$. Оттук и от теорема 7.11 следва равномерната сходимост на интеграла $\int_c^\infty I(y, t)\,dy$. Но тогава съгласно теорема 7.9 може да се направи граничен преход под знака на интеграла, т. е. имаме

$$\int_a^\infty K(x)\,dx = \lim_{t_n\to\infty} \int_a^{t_n} K(x)dx = \lim_{t_n\to\infty} \int_c^\infty I(y, t_n)\,dy = \int_c^\infty I(y)\,dy,$$

което трябваше да се докаже.

Да разгледаме сега въпроса за диференциране по параметър на несобствен интеграл.

Теорема 7.14 (за диференциране на несобствен интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ и нейната производна $f'_y(x, y)$ са непрекъснати в областта $a \leq x < \infty$, $c \leq y \leq d$. Нека по-нататък интегралът $I(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx$ е сходящ във всяка точка y от сегмента $[c, d]$, а интегралът $\int_a^\infty f'_y(x, y)\,dx$ е равномерно сходящ в* *сегмента $[c, d]$. Тогава функцията $I(y)$ има производна* за всяко y от $[c, d]$, при това*

$$I'(y)=\int_a^{\infty} f'_y(x, y)\,dx.$$

Доказателство. Нека $t_n\to\infty$ и $I_n(y)=\int_a^{t_n} f(x, y)\,dx$. Редицата от непрекъснати функции $I_n(y)$ е сходяща във всяка точка от $[c, d]$ към функцията $I(y)$, а редицата от производни $I'_n(y)$ е равномерно сходяща в сегмента $[c, d]$. Тогава съгласно твърдение 5 от § 1 за всяка точка y от сегмента $[c, d]$ съществува $I'(y)=\lim\limits_{n\to\infty} I'_n(y)$.

Но $I'_n(y)=\int_a^{t_n} f'_y(x, y)\,dx$. Следователно

$$I'(y)=\int_a^{\infty} f'_y(x, y)\,dx.$$

2. Несобствени интеграли от втори род, зависещи от параметри. Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана за x, принадлежащо на $[a, b]$, и y, принадлежащо на Y. Нека за всяко фиксирано y от Y функцията $f(x, y)$ е неограничена при $x\to a$, но такава, че интегралът

$$I(y)=\int_a^b f(x, y)\,dx \tag{7.8}$$

е сходящ.

Определение 3. Несобственият интеграл от втори род (7.8) се нарича *равномерно сходящ по параметъра* y в множеството Y, ако за всяко t, удовлетворяващо неравенството $a<t<b$, функцията

$$F(t, y)=\int_t^b f(x, y)\,dx$$

при $t\to a+0$ равномерно клони относно $y\in Y$ към функцията $I(y)$.

Ще отбележим, че с помощта на смяна на променливата x, приведена в допълнение 2 към глава 9, част I, несобственият интеграл от втори род се свежда към несобствен интеграл от първи род. Затова за интеграла (7.8) могат да бъдат формулирани ос-

* При $y=c$ $I(y)$ има дясна производна $I'(c+0)$, а при $y=d$ — лява производна $I'(d-0)$.

новните теореми за граничен преход под знака на несобствения интеграл от първи род, за непрекъснатост по параметъра, за интегриране и диференциране по параметъра под знака на интеграла.

Накрая ще отбележим, че интеграл от вида

$$\int_a^{\infty} f(x, y)\,dx=\int_a^b f(x, y)\,dx+\int_b^{\infty} f(x, y)\,dx,$$

където първото събираемо е интеграл от неограничена функция, а второто събираемо — интеграл с неограничени граници, се нарича равномерно сходящ, ако и двата интеграла в дясната част са равномерно сходящи.

§ 4. Приложение на теорията на интегралите, зависещи от параметър, за пресмятане на някои несобствени интеграли

Описаните в предишните параграфи методи позволяват да се пресметнат някои несобствени интеграли.

1°. Да пресметнем интеграла

$$Q=\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Сходимостта на този интеграл беше установена по-рано (вж. допълнение 2, глава 9, част I).

Ще разгледаме помощната функция

$$f(x, y)=\begin{cases} e^{-yx}\,\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

Функцията $f(x, y)$ и нейната производна $f'_y(x, y)=e^{-yx}\sin x$ са непрекъснати в областта $x\geq 0$, $y\geq 0$ и $f(x, 0)=\frac{\sin x}{x}$. Нека

$$I(y)=\int_0^{\infty} e^{-yx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx=\int_0^{\infty} f(x, y)\,dx.$$

Ще докажем равномерната сходимост на този интеграл при $y\geq 0$. За това е достатъчно да установим равномерната сходимост на интеграла $\int_1^{\infty} e^{-yx} \frac{\sin x}{x}\, dx$. За този интеграл ще приложим признака на Дирихле — Абел от § 3. Интегралът

$$\int_1^t e^{-yx} \sin x\, dx = -\frac{e^{-yx}(y \sin x + \cos x)}{1+y^2}\Bigg|_1^t$$

е ограничен, тъй като

$$\left|\int_1^t e^{-yx} \sin x\, dx\right| \leq \left|\frac{e^{-yt}(y \sin t + \cos t)}{1+y^2}\right| + \left|\frac{e^{-1}(y \sin 1 + \cos 1)}{1+y^2}\right| \leq \frac{2(1+y)}{1+y^2} \leq 3.$$

Функцията $\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ монотонно клони към нула.

От равномерната сходимост на интеграла и непрекъснатостта на подинтегралната функция съгласно теорема 7.9 от § 3 следва непрекъснатостта на функцията $I(y)$ в $[0, \infty)$, т. е. вярно е равенството

$$\lim_{y \to 0+0} I(y) = I(0) = I.$$

Да намерим стойността на $I(y)$. Ще разгледаме спомагателния интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-yx} \sin x\, dx.$$

Съгласно признака на Дирихле — Абел, който очевидно е приложим за този интеграл, заключаваме, че този интеграл е равномерно сходящ в областта $[y_0, \infty)$, ако $y_0 > 0$. Оттук съгласно теорема 7.14, § 3 следва, че интегралът $I(y)$ може да се диференцира по параметъра y във всяка точка $y > 0$. Така за всяко $y > 0$ получаваме

$$I'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-yx} \sin x\, dx = \frac{e^{-yx}(y \sin x + \cos x)}{1+y^2}\Bigg|_0^{\infty} = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Интегрираме това равенство в граници $[y, \infty)$ и получаваме

$$I(\infty) - I(y) = -\operatorname{arc\,tg} t\Big|_y^{\infty} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg}(y).$$

Тъй като $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1$, то при $y \geq y_0$ имаме

$$|I(y)| \leq \int_0^{\infty} e^{-y_0 x}\, dx = -\frac{1}{y_0} e^{-y_0 x}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{y_0} \to 0$$

при $y_0 \to \infty$. Оттук получаваме, че $I(\infty) = 0$, и следователно за всяко $y > 0$ имаме

$$I(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y.$$

Преминаваме към граница в последното равенство при $y \to 0+0$ и получаваме

$$I(0) = I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

2°. Да разгледаме интеграла

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin yx}{x}\, dx.$$

Ще намерим неговото значение за $y > 0$, $y < 0$ и $y = 0$. При $y > 0$ в интеграла $I(y)$ правим смяна на променливата, полагайки $yx = t$. Тогава

$$I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin yx}{x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

При $y < 0$ правим смяна на променливата $yx = -t$, $(t > 0)$. Имаме

$$I(y) = -\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = -\frac{\pi}{2}.$$

При $y = 0$ интеграла $I(y)$ е очевидно равен на нула. Следователно

$$I(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при} \quad y > 0, \\ 0 & \text{при} \quad y = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при} \quad y < 0. \end{cases}$$

Този интеграл понякога се нарича прекъснат множител на Дирихле. В частност с помощта на прекъснатия множител на Дирихле получаваме представяне на функцията $\operatorname{sgn} y$, т. е. на функцията

$$\operatorname{sgn} y = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad y > 0, \\ 0 & \text{при} \quad y = 0, \\ -1 & \text{при} \quad y < 0 \end{cases}$$

във вида

$$\operatorname{sgn} y=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx.$$

3°. Да пресметнем интеграла на Поасон $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ (вж. също § 6, гл. 3). Нека

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx.$$

За пресмятането на този интеграл полагаме $x=yt$, където $y>0$, и разглеждаме интеграла

$$I=I(y)=\int_0^\infty ye^{-y^2t^2}\,dt.$$

Да умножим двете части на горното равенство с e^{-y^2} и да интегрираме в граници $[0,\infty)$. Получаваме

$$I\int_0^\infty e^{-y^2}dy=I^2=\int_0^\infty e^{-y^2}\cdot y\left\{\int_0^\infty e^{-y^2t^2}dt\right\}dy.$$

Да разгледаме функцията $f(y,t)=ye^{-(1+t^2)y^2}$. В областта $y\geqq 0$, $t\geqq 0$ тази функция е непрекъсната, ограничена и неотрицателна. Интегралите

$$\int_0^\infty f(y,t)\,dt=ye^{-y^2}\int_0^\infty e^{-y^2t^2}dt=e^{-y^2}\cdot I$$

и

$$\int_0^\infty f(y,t)\,dy=\int_0^\infty ye^{-(1+t^2)y^2}dy=-\frac{1}{2(1+t^2)}e^{-(1+t^2)y^2}\Big|_0^\infty=\frac{1}{2(1+t^2)}$$

са непрекъснати функции в областта на изменение на параметъра, т. е. съответно в областите $y\geqq 0$ и $t\geqq 0$. Освен това

$$\int_0^\infty dt\int_0^\infty f(y,t)\,dy=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{4}.$$

Следователно са изпълнени всички условия на теорема 7.13 от § 3. Затова

$$I^2=\int_0^\infty e^{-y^2}y\left\{\int_0^\infty e^{-y^2t^2}dt\right\}dy=\int_0^\infty dt\int_0^\infty f(y,t)\,dy=\frac{\pi}{4},$$

т. е.

$$I=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\quad\text{и}\quad\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

§ 5. Ойлерови интеграли

В този параграф ще изучим някои свойства на един важен клас неелементарни функции, наречени ойлерови интеграли*.

Ойлеров интеграл от първи род или «бетафункция» (В-функция) се нарича интегралът

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

В този интеграл α и β са параметри. Ако тези параметри удовлетворяват условията $\alpha<1$ и $\beta<1$, то интегралът $\mathrm{B}(\alpha,\beta)$ е несобствен интеграл, зависещ от параметри, при това подинтегралната функция има особености в точките $x=0$ и $x=1$.

Ойлеров интеграл от втори род или «гамафункция» (Г-функция) се нарича интегралът

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

Ще отбележим, че областта на интегриране е $[0,\infty)$ и при $\alpha<1$ точката $x=0$ е особена точка за подинтегралната функция.

1. Г-функция. Интегралът

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

е сходящ за всяко $\alpha>0$, тъй като $0\leqq x^{\alpha-1}e^{-x}\leqq x^{\alpha-1}$, и интегралът $\int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx$ е сходящ при $\alpha>0$.

В областта $\alpha\geqq\alpha_0$, където α_0 е произволно положително число, този интеграл е равномерно сходящ, тъй като $0\leqq x^{\alpha-1}e^{-x}\leqq x^{\alpha_0-1}$ и може да се приложи признакът на Вайерщрас (теорема 7.8, § 3). И при всички $\alpha>0$ е сходящ интегралът

* По-подробно теорията на интегралите на Ойлер е изложена в книгата на Е. Г. Уитъкер и Д. Н. Уотсън «Курс современного анализа», т. II, Физматгиз, 1963.

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx=\int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx+\int_1^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$

тъй като второто събираемо в дясната част е очевидно сходящ интеграл при $\alpha>0$. Лесно се вижда, че този интеграл е равномерно сходящ в областта $0<\alpha_0\leqq\alpha\leqq A_0<\infty$, където числото A_0 е произволно. Действително за всички такива α и за всички $x>0$

$x^{\alpha-1}e^{-x}\leqq e^{-x}[x^{\alpha_0-1}+x^{A_0-1}]$ и тъй като $\int_0^\infty e^{-x}[x^{\alpha_0-1}+x^{A_0-1}]\,dx$ е сходящ интеграл, то може да се приложи признакът на Вайерщрас. По такъв начин в областта $0<\alpha_0\leqq\alpha\leqq A_0<\infty$ интегралът $\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ е равномерно сходящ. Оттук следва непрекъснатост на функцията $F(\alpha)$ в областта $\alpha>0$. Да докажем сега диференцируемостта на тази функция при $\alpha>0$. Да забележим, че функцията $f'_\alpha(x,\alpha)=\ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}$ е непрекъсната за $\alpha>0$ и $x>0$, и да покажем, че интегралът

$$\int_0^\infty f'_\alpha(x,\alpha)\,dx=\int_0^\infty \ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

е равномерно сходящ по α във всеки сегмент $[\alpha_0, A_0]$, $0<\alpha_0<A_0<\infty$. Да изберем число ε_0 такова, че $0<\varepsilon_0<\alpha_0$. Имаме $\lim\limits_{x\to 0} x^{\varepsilon_0}\ln x=0$. Затова съществува число δ такова, че $|x^{\varepsilon_0}\ln x|\leqq 1$ за $x\in(0,\delta]$. тогава в $(0,\delta]$ е вярно неравенството

$$|\ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}|\leqq x^{\alpha_0-\varepsilon_0-1}$$

и тъй като интегралът $\int_0^\delta \frac{dx}{x^{1-(\alpha_0-\varepsilon_0)}}$ е сходящ, то интегралът $\int_0^\delta \ln x\, x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ е равномерно сходящ относно α в $[\alpha_0, A_0]$. Аналогично за $\alpha<A_0$ съществува такова число $\delta_1>1$, че за всички $x\geqq\delta_1$ е изпълнено неравенството $\left|\frac{\ln x}{x}\cdot\frac{x^{\delta_1+2}}{e^x}\right|\leqq 1$. За тези x и всички $\alpha\leqq A_0$ получаваме $|\ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}|\leqq\frac{1}{x^2}$. Оттук и от признака за сравнение следва, че интегралът $\int_{\delta_1}^\infty \ln x\, x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ е равномерно сходящ относно α в $[\alpha_0, A_0]$. Накрая интегралът

$$\int_\delta^{\delta_1} \ln x\, x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

е равномерно сходящ относно α в $[\alpha_0, A_0]$, тъй като подинтегралната функция е непрекъсната в областта $\delta\leqq x\leqq\delta_1$, $\alpha_0\leqq\alpha\leqq A_0$. Следователно интегралът

$$\int_0^\infty \ln x\,.\,x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

е равномерно сходящ в областта $[\alpha_0, A_0]$ относно α и следователно функцията $\Gamma(\alpha)$ е диференцируема при всяко $\alpha>0$ и е вярно равенството

$$\Gamma'(\alpha)=\int_0^\infty \ln x\, x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

За интеграла $\Gamma'(\alpha)$ може да се повторят същите разсъждения, откъдето следва

$$\Gamma''(\alpha)=\int_0^\infty \ln^2 x\, x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

По индукция се доказва, че Γ-функцията е безкрайно диференцируема за $\alpha>0$ и за n-тата производна е вярно равенството

$$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^\infty \ln^n x\,.\,x^{\alpha-1}\,.\,e^{-x}\,dx.$$

Да интегрираме по части функцията $\Gamma(\alpha+1)$. Имаме

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\,dx=-x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty+\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

Следователно

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha).$$

Горното равенство се нарича функционално уравнение на Γ-функцията. Ако $\alpha>1$, като приложим функционалното уравнение на $\Gamma(\alpha)$, ще получим

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)=\alpha(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1).$$

Ако $n-1<\alpha<n$, то в резултат на последователно прилагане на функционалното уравнение ще получим

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-n+1).$$

Последното равенство показва, че е достатъчно да знаем $\Gamma(\alpha)$ в интервала $(0, 1]$, за да пресметнем нейното значение за всяко $\alpha>0$. Например, ако $\alpha=n$, получаваме

$$\Gamma(n+1)=n(n-1)\dots 2.1\,\Gamma(1).$$

Тъй като $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx=1$, то

$$\Gamma(n+1)=n!.$$

От тази формула например получаваме

$$\Gamma(1)=1=0!,$$

което отговаря на приетото означение $0!=1$.

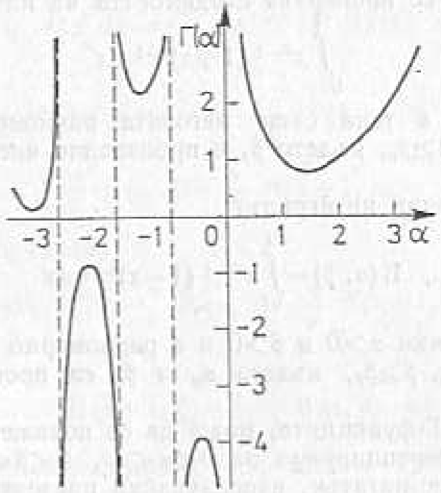
Сега ще изучим поведението на Г-функцията и ще построим нейната графика.

От израза за втората производна на Г-функцията се вижда, че $\Gamma''(\alpha)>0$ за всички $\alpha>0$. Следователно $\Gamma'(\alpha)$ е растяща функция. Тъй като $\Gamma(2)=1$, $\Gamma(1)=1$, то от теоремата на Рол следва, че в сегмента $[1,2]$ производната $\Gamma'(\alpha)$ има единствена нула в някоя точка α_1. Следователно $\Gamma'(\alpha)<0$ при $\alpha<\alpha_1$ и $\Gamma'(\alpha)>0$ при $\alpha>\alpha_1$, т. е. $\Gamma(\alpha)$ монотонно намалява в интервала $(0,\alpha_1)$ и монотонно расте в интервала (α_1, ∞). По-нататък, тъй като $\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$, то $\Gamma(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to 0+0$. При $\alpha>2$ от формулата $\Gamma(\alpha)=\alpha\,\Gamma(\alpha-1)>\alpha\,\Gamma(1)=\alpha$ следва, че $\Gamma(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to+\infty$.

Равенството $\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$ може да се използва за продължаване на Г-функцията и за отрицателни значения на α.

Полагаме за $-1<\alpha<0$, че $\Gamma(\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\alpha}$. Дясната страна на това равенство е определена за всички α от $(-1,0)$. Получаваме, че така определената функция $\Gamma(\alpha)$ приема отрицателни значения в интервала $(-1,0)$ и при $\alpha\to-1+0$, а също така и при $\alpha\to 0-0$ функцията $\Gamma(\alpha)$ клони към $-\infty$.

След като сме дефинирали по такъв начин функцията $\Gamma(\alpha)$ в интервала $(-1,0)$, ние можем по същата формула да я продължим и в интервала $(-2, -1)$. В този интервал продължението на Г-функцията ще се окаже функция, която приема положителни значения и такава, че $\Gamma(\alpha)\to+\infty$ при $\alpha\to-2+0$ и $\alpha\to-1-0$. Продължавайки този процес, ще определим функцията $\Gamma(\alpha)$, която ще има прекъсвания от втори род в целочислените точки $\alpha=-k$, $k=0, 1, 2, \dots$ (вж. фиг. 7.1). Да подчертаем още веднъж, че интегралът



Фиг. 7. 1

$$\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$$

дефинира Г-функцията само за положителни значения на α. Продължението на тази функция за отрицателни значения на α е осъществено с помощта на функционалното уравнение $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha)$.

2. В-функция. Да разгледаме интеграла, определящ В-функцията

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.$$

Интегралът $\int\limits_0^{1/2} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ е сходящ за $\alpha>0$ и за всяко β, тъй като за $0<x\leq\frac{1}{2}$ е вярно неравенството $0\leq x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\leq Cx^{\alpha-1}$ за някакво $C>0$ и интегралът $\int\limits_0^{1/2} x^{\alpha-1}\,dx$ е сходящ за $\alpha>0$.

Този интеграл е равномерно сходящ относно α и β в областта $\alpha\geq\alpha_0>0$, $\beta\geq 0$, тъй като

$$0\leq x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\leq Cx^{\alpha_0-1}$$

за всички $\alpha\geq\alpha_0$ и $\beta\geq 0$ и за всички $x\in[0, 1/2]$.

Аналогично се проверява сходимостта на интеграла

$$\int_{1/2}^{1} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

за $\alpha \geqq 0$ и $\beta > 0$, а така също неговата равномерна сходимост в областта $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq \beta_0$, където β_0 е произволно число, по-голямо от нула.

По такъв начин интегралът

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$$

е сходящ за всички $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и е равномерно сходящ по α и β в областта $\alpha \geqq \alpha_0$, $\beta \geqq \beta_0$, където α_0 и β_0 са произволни положителни числа.

Както и за Г-функцията, може да се покаже, че B-функцията е безкрайно диференцируема за $0<\alpha<\infty$, $0<\beta<\infty$. Но ние ще установим това по-нататък, използувайки представяне на B-функцията чрез Г-функцията. Затова няма да показваме непосредствено диференцируемост на B-функцията.

Ще докажем някои свойства на B-функцията.

1°. Симетричност на B-функцията. Ще покажем, че при всички $\alpha > 0$, $\beta > 0$ е изпълнено равенството

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha),$$

т. е. B-функцията е симетрична относно своите аргументи.

В интеграла, определящ B-функцията, правим смяна на променливата $t = 1-x$. Получаваме

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = -\int_1^0 (1-t)^{\alpha-1}t^{\beta-1}\,dt =$$

$$= \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt = B(\beta, \alpha).$$

2°. Функционално уравнение на B-функцията. Ще покажем, че за всички $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ е вярно следното функционално уравнение:

$$B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,B(\alpha, \beta).$$

Наистина имаме

$$B(\alpha+1, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx = -\frac{1}{\beta}\,x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\Big|_0^1 +$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\,dx = \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)(1-x)^{\beta-1}\,dx =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\left[\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx - \int_0^1 x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}\,dx\right] =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha, \beta) - \frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha+1, \beta).$$

Следователно получаваме

$$B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha, \beta) - \frac{\alpha}{\beta}\,B(\alpha+1, \beta),$$

т. е.

$$B(\alpha+1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\,B(\alpha, \beta).$$

От свойството симетричност за всички $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ получаваме също така формулата

$$B(\alpha, \beta+1) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,B(\alpha, \beta).$$

Последователното прилагане на тази формула ни дава възможност да изразим всяко значение на $B(\alpha, \beta)$ чрез стойностите на тази функция в правоъгълника $\prod = \{0<\alpha\leqq 1, 0<\beta\leqq 1\}$.

3. **Връзка между Г-функцията и B-функцията.** В интеграла, определящ Г-функцията, да направим смяна на променливата, полагайки $x = ut$, където $u > 0$, а в интеграла, определящ B-функцията — $x = \frac{t}{1+t}$. Получаваме

$$\Gamma(\alpha) = u^{\alpha}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-ut}\,dt, \quad B(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,dt.$$

След заменяне в първия интеграл u с $1+v$, а α с $\alpha+\beta$ получаваме

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+v)^{\alpha+\beta}} = \int_0^{\infty} t^{\alpha+\beta-1}e^{-(1+v)t}v^{\alpha-1}\,dt.$$

Да предположим, че $\alpha > 1$, $\beta > 1$, и да разгледаме в областта $t \geqq 0$, $v \geqq 0$ функцията

$$f(t, v) = t^{\alpha+\beta-1}\cdot v^{\alpha-1}\cdot e^{-(1+v)t}.$$

Очевидно, че $f(t, v) \geqq 0$ в тази област. Интегралът

$$I(v)=\int_0^\infty f(t,v)\,dt=\Gamma(\alpha+\beta)\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}$$

е непрекъсната функция по v на полуправата $v\geqq 0$. Интегралът по другата променлива от тази функция е също непрекъсната функция на полуправата $t\geqq 0$, тъй като

$$K(t)=\int_0^\infty f(t,v)\,dv=t^{\alpha+\beta-1}\,e^{-t}\int_0^\infty e^{-tv}\,v^{\alpha-1}\,dv=\Gamma(\alpha)\,t^{\beta-1}\,e^{-t}.$$

И накрая съществува повторният интеграл

$$\int_0^\infty K(t)\,dt=\int_0^\infty dt\int_0^\infty f(t,v)\,dv=\int_0^\infty \Gamma(\alpha)\,t^{\beta-1}\,e^{-t}\,dt=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta).$$

Следователно от теорема 7.13, § 3 следва равенството

$$=\int_0^\infty \Gamma(v)\,dv=\int_0^\infty K(t)\,dt$$

или

$$\int_0^\infty I(v)\,dv=\int_0^\infty \Gamma(\alpha+\beta)\,\frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=$$

$$\int_0^\infty K(t)\,dt=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta).$$

По такъв начин получаваме

$$\Gamma(\alpha+\beta)\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=\Gamma(\alpha+\beta)\,\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta),$$

като се възползувахме от установената по-горе формула

$$\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}}\,dv=\mathrm{B}(\alpha,\beta).$$

Получихме, че за всички $\alpha>1$ и $\beta>1$

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Да разпространим тази формула за $\alpha>0$, $\beta>0$. Да запишем установената формула за значения на α и β такива, че $\alpha+1>1$, $\beta+1>1$:

$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Като използуваме функционалните уравнения, получаваме

$$\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta+1)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+1}\cdot\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\mathrm{B}(\alpha,\beta),$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\,\Gamma(\alpha),\quad \Gamma(\beta+1)=\beta\,\Gamma(\beta),$$

$$\Gamma(\alpha+\beta+2)=(\alpha+\beta+1)\,(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta).$$

Заместваме тези изрази във формулата за $\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)$. Получаваме формулата

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

вярна за всички α и β, за които $\alpha>0$, $\beta>0$.

4. Примери за пресмятане на интеграли с помощта на ойлеровите интеграли. Ще посочим някои примери за пресмятане на интеграли, които се свеждат към ойлеровите интеграли.

1°. Да пресметнем интеграла

$$I=\int_0^\infty x^{\frac{1}{4}}\,(1+x)^{-2}\,dx.$$

Очевидно е, че

$$I=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{4}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).$$

2°. Да пресметнем стойността на интеграла:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha-1} t\,\cos^{\beta-1} t\,dt.$$

Полагаме $x=\sin^2 t$. Получаваме

$$I=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{\alpha}{2}-1}\,(1-x)^{\frac{\beta}{2}-1}\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

3°. Да пресметнем интеграла

$$I_{\alpha-1}=\int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha-1} t\,dt.$$

Като използуваме пример 2° (при $\beta=1$), получаваме

$$I_{\alpha-1}=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

Тъй като

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-t}\,\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\int_0^\infty e^{-(\sqrt{t})^2}\,d\sqrt{t}=2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

то $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}/2$ (вж. пример 3°, § 4). Затова

$$I_{\alpha-1}=\int_0^{\pi/2}\sin^{\alpha-1}t\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}.$$

§ 6. Формула на Стирлинг

Вече знаем, че

$$n!=\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx.$$

Ще намерим представяне на величината $n!$ за големи стойности на n (така нареченото асимптотическо представяне). Ще докажем, че

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\,\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),$$

където величината ω се намира между -1 и $+1$. Това е формулата на Стирлинг.

Преминаваме към нейното доказателство. Да отбележим, че функцията $x^n e^{-x}$ расте в интервала $[0, n]$ от 0 до $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ и намалява в интервала $[n, \infty)$ от $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ до 0. Тъй като

$$x^n e^{-x}=\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x},$$

то

$$n!=\left(\frac{n}{e}\right)^n\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\,dx.$$

Функцията $\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}$ расте от 0 до 1 в интервала $[0, n]$ и намалява от 1 до 0 в интервала $[n, \infty)$. Затова може да се направи смяна на променливата

$$(*)\qquad \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}=e^{-t^2}.$$

При това сегментът $[0, n]$, където се изменя x, ще отговаря на полуправата $(-\infty, 0]$, където се изменя t, а полуправата $[n, \infty)$ на изменението на x ще отговаря на полуправата $[0, \infty)$ на изменението на t.

За да направим смяната (*), е необходимо да намерим производната $\frac{dx}{dt}$. За всяко $x\neq n$, диференцирайки лявата и дясната страна на (*) по t, получаваме

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2tx}{x-n}.$$

От друга страна, логаритмувайки равенството (*), получаваме

$$t^2=x-n-n\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right).$$

Записваме за функцията $f(y)=\ln(1+y)$ формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Лагранж. Получаваме, че съществува число θ от интервала $(0,1)$ такова, че

$$\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta y)^2}.$$

Оттук получаваме, че за $\quad y=\frac{x-n}{n}$

$$\ln\left(1+\frac{x-n}{n}\right)=\frac{x-n}{n}-\frac{1}{2}\,\frac{(x-n)^2}{[n+\theta(x-n)]^2}$$

и затова

$$t^2=\frac{n}{2}\,\frac{(x-n)^2}{[n+\theta(x-n)]^2}.$$

Оттук следва

$$t=\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{x-n}{n+\theta(x-n)}=\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{1}{\theta+\frac{n}{x-n}}.$$

Затова $\frac{n}{x-n}=\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}-\theta$ и следователно

$$\frac{dx}{dt}=2t\,\frac{x}{x-n}=2t\left[1+\frac{n}{x-n}\right]=2t\left[\frac{1}{t}\sqrt{\frac{n}{2}}+1-\theta\right]=2\sqrt{\frac{n}{2}}+2t(1-\theta).$$

Сега в интеграла $\int_0^\infty\left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\,dx$ да направим смяна на променливата, съответстваща на равенството (*). Получаваме

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_0^\infty \left(\frac{x}{n}\right)^n e^{n-x}\, dx = \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\left[2\sqrt{\frac{n}{2}} + 2t(1-\theta)\right] dt =$$

$$= \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt + \frac{2}{\sqrt{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t(1-\theta)\, dt.\right.$$

Да оценим интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t(1-\theta)\, dt$. Имаме

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} t(1-\theta)\, dt \leq 2\int_0^\infty te^{-t^2} dt = -e^{-t^2}\Big|_0^\infty = 1.$$

Отчитайки, че $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ и че $\sqrt{\pi} > \sqrt{2}$, окончателно получаваме

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{n}}\right),$$

където $|\omega| \leq 1$. Формулата на Стирлинг е доказана.

Да забележим, че с по-прецизни оценки може да се докаже следната формула*:

$$n! = \Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{139}{5184n^3} + 0\left(\frac{1}{n^4}\right)\right].$$

§ 7. Кратни интеграли, зависещи от параметър

1. Собствени кратни интеграли, зависещи от параметър. Нека $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е точка от ограничената област Ω_n на n-мерното евклидово пространство E^n, а $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ е точка от ограничената област D_m на m-мерното пространство E^m. Да означим с $\Omega_n \times D_m$ декартовото произведение на областите Ω_n и D_m, което е подмножество на $(n+m)$-мерното евклидово пространство E^{n+m}, състоящо се от точки $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+m})$ такива, че точката $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ принадлежи на Ω_n, а точката $(z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots, z_{n+m})$ принадлежи на D_m (често се пише: $z = (x, y)$).

* Вж. например § 5, гл. 9 от книгата «Основы математического анализа, часть 2» на В. А. Илин и Е. Г. Позняк.

Фактът, че точката z принадлежи на $\Omega_n \times D_m$, обикновено се записва по следния начин: $z = (x, y) \in \Omega_n \times D_m$.

Затворената обвивка на областта Ω_n ще означаваме със символа $\bar{\Omega}_n$, а затворената обвивка на D_m — с $\bar{D}_m$. Лесно се вижда, че затворената обвивка на $\Omega_n \times D_m$ съвпада с $\bar{\Omega}_n \times \bar{D}_m$.

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана в $\Omega_n \times D_m$, при това за всяко y_0 от D_m функцията $f(x, y_0)$ е интегруема по x в областта Ω_n. Тогава функцията

$$I(y) = \int_{\Omega_n} f(x, y)\, dx, \tag{7.9}$$

дефинирана в D_m, се нарича интеграл, зависещ от параметър $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, т. е. от m числови параметри.

Точно така, както и в § 2, се доказват теоремите:

Теорема 7.15 (за непрекъснатост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на $n+m$ променливи в областта $\bar{\Omega}_n \times \bar{D}_m$. Тогава интегралът (7.9) е непрекъсната функция по параметъра y в областта D_m.*

Теорема 7.16 (за интегриране на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната като функция на $n+m$ променливи в областта $\bar{\Omega}_n \times \bar{D}_m$. Тогава функцията (7.9) може да се интегрира по параметъра, т. е. вярно е равенството*

$$\int_{D_m} I(y)\, dy = \int_{\Omega_n} dx \int_{D_m} f(x, y)\, dy.$$

Теорема 7.17 (за диференцируемост на интеграл по параметър). *Нека функцията $f(x, y)$ и нейната частна производна $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ са непрекъснати в областта $\bar{\Omega}_n \times \bar{D}_m$. Тогава интегралът (7.9) има в областта D_m непрекъсната частна производна*

$$\frac{\partial I(y)}{\partial y_k}, \quad \text{при това} \quad \frac{\partial I(y)}{\partial y_k} = \int_{\Omega_n} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y_k}\, dx.$$

2. Несобствени кратни интеграли, зависещи от параметър. Ще разгледаме за простота случая, когато $\Omega_n = D_m = D$. Нека функцията $f(x, y)$ също така има специален вид: $f(x, y) = F(x, y)\, g(x)$, където $F(x, y)$ е непрекъсната при $x \neq y$ в $\bar{D} \times \bar{D}$, а функцията $g(x)$ е ограничена в D, $|g(x)| \leq M$. Да разгледаме интеграла

$$V(y) = \int_D F(x, y)\, g(x)\, dx, \tag{7.10}$$

където подинтегралната функция може да има особеност само за $x=y$. По такъв начин особеностите на подинтегралната функция зависят от параметъра.

Ще дефинираме понятието равномерна сходимост на интеграла (7.10) в точка. Да означим с $O(y_0, \delta)$ m-мерното кълбо с радиус δ и с център точката y_0.

Определение. Интегралът (7.10) се нарича **равномерно сходящ по параметъра** y **в точката** $y_0 \in D$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че $O(y_0, \delta)\subset D$ и за всяка кубируема област $G\subset O(y_0, \delta)$ и за всички $y\in O(y_0, \delta)$ е изпълнено неравенството

$$\left|\int_G F(x, y)\, g(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

Теорема 7.18. *Ако интегралът (7.10) е равномерно сходящ по y в точката $y_0 \in D$, то той е непрекъснат в тази точка.*

Доказателство. Трябва да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за $|y-y_0|=\rho(y, y_0)<\delta$ е изпълнено неравенството $|V(y)-V(y_0)|<\varepsilon$. От равномерната сходимост на интеграла в точката y_0 следва съществуването на число $\delta_1>0$ такова, че $O(y_0, \delta_1)\subset D$ и при $y\in O(y_0, \delta_1)$ е изпълнено неравенството

$$\left|\int_{O(y_0, \delta_1)} F(x, y)\, g(x)\, dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нека

$$V_1(y)=\int_{O(y_0, \delta_1)} F(x, y)\, g(x)\, dx,$$

$$V_2(y)=\int_{O'(y_0, \delta_1)} F(x, y)\, g(x)\, dx,$$

където $O'(y_0, \delta_1)=D\setminus O(y_0, \delta_1)$ е допълнението на кълбото $O(y_0, \delta_1)$ до областта D.

Ще отбележим, че за $x\in O'(y_0, \delta_1)$, $y\in O\left(y_0, \frac{\delta_1}{2}\right)$ функцията $F(x, y)$ е равномерно непрекъсната като функция и на двата аргумента. Затова съществува положително число $\delta<\frac{\delta_1}{2}$ такова, че за $\rho(y, y_0)<\delta$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|F(x, y_0)-F(x, y)|<\frac{\varepsilon}{3M|D|},$$

където M е константата, ограничаваща $g(x)$ в D, и $|D|$ е обемът на областта D. Тъй като при $\rho(y, y_0)<\delta$ ще бъде изпълнено неравенството

$$|V_2(y)-V_2(y_0)|\leq M\int_{O'(y_0, \delta_1)} |F(x, y_0)-F(x, y)|\, dx<\frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$V_1(y)<\frac{\varepsilon}{3}, \quad V_1(y_0)<\frac{\varepsilon}{3},$$

то

$$|V(y)-V(y_0)|\leq|V_1(y)|+|V_1(y_0)|+|V_2(y)-V_2(y_0)|<\varepsilon.$$

Теоремата е доказана.

Ще посочим достатъчно условие за равномерна сходимост на интеграла (7.10) по параметъра във всяка точка $y_0 \in D$.

Теорема 7.19. *Нека функцията $F(x, y)$ е непрекъсната в $\overline{D}\times\overline{D}$ при $x\neq y$, а $g(x)$ е ограничена в D. Да предположим, че съществуват константи λ, $0<\lambda<m$ и $C>0$ такива, че за всички $x\in D$ и $y\in D$ е изпълнено неравенството*

$$|F(x, y)|\leq C|x-y|^{-\lambda}.$$

Тогава интегралът (7.10) е равномерно сходящ по y във всяка точка $y_0\in D$.

Доказателство. Ще докажем, че за всяка точка y_0 от областта D и всяко число $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за всяка кубируема област $G\subset O(y_0, \delta)$ и всички $y\in O(y_0, \delta)$ е изпълнено неравенството

$$\left|\int_G F(x, y)\, g(x)\, dx\right|<\varepsilon.$$

Отчитайки оценката за $F(x, y)$ и ограничеността на $g(x)$, получаваме

$$\left|\int_G F(x, y)\, g(x)\, dx\right|\leq M_1\int_G |x-y|^{-\lambda}\, dx.$$

Да фиксираме точка $y\in O(y_0, \delta)$. От условието $G\subset O(y_0, \delta)$ следва че $G\subset O(y, 2\delta)$. Затова

$$\left|\int_G F(x, y)\, g(x)\, dx\right|\leq M_1\int_{O(y, 2\delta)} |x-y|^{-\lambda}\, dx.$$

Интегралът в дясната част може да се пресметне в m-мерните сферически координати. Имаме

$$\left|\int_G F(x, y)\, g(x)\, dx\right|\leq M_2\int_0^{2\delta} r^{m-1-\lambda}\, dr=\frac{M_2 2^{m-\lambda}\delta^{m-\lambda}}{m-\lambda}=M_3\delta^{m-\lambda}.$$

Ясно е, че за достатъчно малко δ величината $\left| \int\limits_G F(x, y)\, g(x)\, dx \right|$ може да се направи по-малка от ε. Теоремата е доказана.

Пример. Да приложим получените резултати към теорията на така наречените нютонови потенциали. Нека в някоя точка $A_0(x, y, z)$ е поместена маса m_0. Нека маса m, поместена в точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$, по закона за всемирното привличане действува сила

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m m_0}{R^2} \vec{r},$$

където $R = \rho(A_0, A_1)$, γ е гравитационна константа и $\vec{r} = \frac{\vec{R}}{R}$ е единичен вектор, имащ едно и също направление с вектора $\overrightarrow{A_0 A_1}$. Нека $\gamma = 1$, $m = 1$. Тогава

$$\vec{F} = -\frac{m_0}{R} \vec{r},$$

или покомпонентно

$$X = -\frac{m_0}{R^3}(x_1 - x), \quad Y = -\frac{m_0}{R^3}(y_1 - y), \quad Z = -\frac{m_0}{R^3}(z_1 - z).$$

Очевидно потенциалът на силата на привличане, определен като скаларна функция U такава, че $\vec{F} = \operatorname{grad} U$, е равен на

$$U = \frac{m_0}{R}.$$

Ако масата е съсредоточена не в точката $A_0(x, y, z)$, а е разпределена в областта D с плътност $\mu(x, y, z)$, то за потенциала и за компонентите на силата ще получим

$$u(x_1, y_1, z_1) = \iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R}\, dx\, dy\, dz,$$

$$X = -\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(x_1 - x)\, dx\, dy\, dz,$$

$$Y = -\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(y_1 - y)\, dx\, dy\, dz,$$

$$Z = -\iiint\limits_D \frac{\mu(x, y, z)}{R^3}(z_1 - z)\, dx\, dy\, dz.$$

Интегралите за X, Y и Z са частните производни на потенциала U. Подинтегралните изрази за всички интеграли може да се оценят чрез $CR^{-\lambda}$, където $\lambda = 1$ за интеграла, определящ потенциала U, и $\lambda = 2$ за интегралите, определящи компонентите на силата. Тъй като $\lambda < 3$, то от теорема 7.19 следва равномерната сходимост на тези интеграли по параметъра във всяка точка $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

Следователно по теорема 7.18 те са непрекъснати функции на точката $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

8. Редове на Фурие

Изучаваното в тази глава разлагане на функция в ред на Фурие е обобщение и развитие на идеята за разлагане на вектор по базис.

От линейната алгебра е известно, че ако в крайномерно линейно пространство изберем някакъв базис, то всеки вектор от това пространство може да бъде разложен по базиса, т. е. да се представи като линейна комбинация на базисните вектори. Съществено по-сложни са въпросите за избор на базис и разлагане по базиса в случай на безкрайномерно пространство. В тази глава тези въпроси се изучават за случая на така наречените евклидови безкрайномерни пространства и за базиси от специален тип (така наречените ортонормирани базиси).

Особено подробно се изучава базисът в пространството от всички частично непрекъснати върху даден затворен интервал функции, образуван от така наречената тригонометрична система.

§ I. Ортонормирани системи и общи редове на Фурие

1. Ортонормирани системи. Ще разглеждаме произволно евклидово пространство.

Ще припомним, че линейното пространство R се нарича евклидово, ако е зададено правило, чрез което на всеки два елемента **f** и **g** от пространството R се съпоставя число, наричано скаларно произведение на тези елементи, което означаваме със символа $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$.

При това скаларното произведение удовлетворява следните четири аксиоми:

1°. $(\mathbf{f}, \mathbf{g})=(\mathbf{g}, \mathbf{f})$ (симетричност);
2°. $(\mathbf{f}+\mathbf{g}, \mathbf{h})=(\mathbf{f}, \mathbf{h})+(\mathbf{g}, \mathbf{h})$;
3°. $(\lambda\mathbf{f}, \mathbf{g})=\lambda(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ за всяко реално λ;

4°. $(\mathbf{f}, \mathbf{f})>0$, ако **f** е ненулев елемент,
$(\mathbf{f}, \mathbf{f})=0$, ако **f** е нулевият елемент.

Свойства 2° и 3° означават, че скаларното произведение е линейна функция на първия си аргумент.

Ще припомним още, че линейното (и в частност евклидовото) пространство се нарича безкрайномерно, ако в това пространство съществуват произволно много линейно независими елементи.

Ще дадем класически пример на евклидово пространство с безкрайна размерност.

Ще припомним, че функцията $f(x)$ се нарича частично непрекъсната в сегмента $[a, b]$, ако тя е непрекъсната навсякъде в сегмента с изключение може би на краен брой точки, във всяка от които тя има прекъсване от I род*.

За линейното пространство от всички частично непрекъснати върху сегмента $[a, b]$ функции е естествено да въведем скаларно произведение на функциите $f(x)$ и $g(x)$ чрез равенството

$$(f, g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{8.1}$$

Тривиално се проверява, че при такова определение на скаларното произведение са изпълнени първите три аксиоми: 1°. $(f, g)=(g, f)$; 2°. $(f+g, h)=(f, h)+(g, h)$; 3°. $(\lambda f, g)=\lambda(f, g)$ за всяко реално λ.

Обаче за да се окаже, че е справедлива и четвъртата аксиома [$(f, f)\geq 0$ и е равно на нула тогава и само тогава, когато f е нулевият елемент], се налага да приемем допълнително уговорката, че стойността на частично непрекъснатата функция $f(x)$ във всяка нейна точка на прекъсване x_i да е равна на полусумата от лявата и дясната ѝ граница в тази точка:

$$f(x_i)=\frac{f(x_i+0)+f(x_i-0)}{2}. \tag{8.2}$$

Да се убедим, че ако във всяка точка на прекъсване x_i е изпълнено условието (8.2), то за скаларното произведение (8.1) е в сила аксиома 4°.

Наистина първо винаги $(f, f)=\int_a^b f^2(x)\geq 0$. Освен това да отбележим, че понеже $f(x)$ е частично непрекъсната в $[a, b]$, то сегментът $[a, b]$ се представя като обединение на краен брой сегменти $[x_{i-1}, x_i]$, във всеки от които функцията $f(x)$ е непрекъсната, при условие че за стойност на $f(x)$ в краищата на съответния сегмент

* Т. е. във всяка точка на прекъсване x_0 на функцията $f(x)$ съществуват крайна лява и дясна граница.

$[x_{i-1}, x_i]$ се вземат $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$ съответно. От равенството $\int_a^b f^2(x)dx=0$ следва, че за всеки сегмент $[x_{i-1}, x_i[$ е изпълнено равенството $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\,dx=0$.

От последното равенство и от непрекъснатостта на $f(x)$ в сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ следва, че $f(x)\equiv 0$ в $[x_{i-1}, x_i]$. В частност $f(x_{i-1}+0)$ и $f(x_i-0)$ са равни на нула. Понеже тези разсъждения са верни за всеки сегмент $[x_{i-1}, x_i]$, т. е за всяко $i=1, 2, \dots, n$, то лявата и дясната граница във всяка точка x_i са равни на нула, а оттук и от равенството (8.2) следва, че и самата стойност $f(x_i)$ във всяка точка x_i е равна на нула. И така функцията $f(x)$ е равна на нула във всички точки на сегмента $[a, b]$, т. е. с нулевият елемент на линейното пространство от всички частично непрекъснати в сегмента $[a, b]$ функции.

По такъв начин доказахме, че пространството от всички частично непрекъснати функции в сегмента $[a, b]$ с условие (8.2) във всяка точка на прекъсване и със скаларно произведение, определено чрез съотношението (8.1), е евклидово пространство.

Това евклидово пространство по-нататък ще обозначаваме със символа R_0.

Ще припомним сега две общи свойства на произволно евклидово пространство, които естествено ще притежава и пространството R_0.

1. Във всяко евклидово пространство за произволни елементи $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ е изпълнено неравенството

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})^2 \leqq (\mathbf{f}, \mathbf{f}) \cdot (\mathbf{g}, \mathbf{g}), \tag{8.3}$$

наричано неравенство на Коши—Буняковски*.

2. Във всяко евклидово пространство за произволен елемент $\mathbf{f}$ от това пространство можем да въведем понятието **норма** на този елемент, определяйки я като число, означавано със символа $\|\mathbf{f}\|$ и определено с равенството

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})} \tag{8.4}$$

така, че са изпълнени следните три свойства:

* Ще отбележим, че за доказателството на неравенството (8.3) вследствие на аксиома 4° на скаларното произведение за произволно реално λ е изпълнено неравенството $(\lambda\,.\,\mathbf{f}-\mathbf{g},\ \lambda\,.\,\mathbf{f}-\mathbf{g})\geq 0$, което от аксиомите 1°—4° е еквивалентно на неравенството $\lambda^2\,.\,(\mathbf{f}, \mathbf{f})-2\lambda\,.\,(\mathbf{f}, \mathbf{g})+(\mathbf{g}, \mathbf{g})\geq 0$. Необходимо и достатъчно условие за неотрицателност на квадратния тричлен, стоящ в лявата част на последното неравенство, е неговата дискриминанта да е неположителна, т. е. неравенството $(\mathbf{f}, \mathbf{g})^2-(\mathbf{f}, \mathbf{f})\,.\,(\mathbf{g}, \mathbf{g})\leq 0$, което е еквивалентно на неравенството (8.3).

1°. $\|\mathbf{f}\|\geq 0$, като $\|\mathbf{f}\|=0$ само когато $\mathbf{f}$ е нулевият елемент;
2°. $\|\lambda\,.\,\mathbf{f}\|=|\lambda|\,.\,\|\mathbf{f}\|$ за всеки елемент $\mathbf{f}$ и всяко реално λ;
3°. за всеки два елемента $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ е в сила неравенството

$$\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\| \leqq \|\mathbf{f}\| + \|\mathbf{g}\|, \tag{8.5}$$

наричано неравенство на триъгълника.

Наистина верността на свойство 1° веднага следва от (8.4) и аксиома 4° на скаларното произведение.

За да обосновем свойството 2°, ще отбележим, че от (8.4) и аксиомите на скаларното произведение имаме

$$\|\lambda.\mathbf{f}\| = \sqrt{(\lambda\mathbf{f}, \lambda\mathbf{f})} = \sqrt{\lambda\,.\,(\mathbf{f}, \lambda\mathbf{f})} = \sqrt{\lambda\,(\lambda\mathbf{f}, \mathbf{f})} = \sqrt{\lambda^2\,(\mathbf{f}, \mathbf{f})} = |\lambda|\,.\,\|\mathbf{f}\|.$$

Накрая верността на свойство 3° следва от (8.4), аксиомите на скаларното произведение и неравенството на Коши—Буняковски (8.3). Наистина

$$\|\mathbf{f}+\mathbf{g}\| = \sqrt{(\mathbf{f}+\mathbf{g}, \mathbf{f}+\mathbf{g})} = \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})+2(\mathbf{f}, \mathbf{g})+(\mathbf{g}, \mathbf{g})} \leq$$

$$\leq \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})+2\sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}\,.\,\sqrt{(\mathbf{g}, \mathbf{g})}+(\mathbf{g}, \mathbf{g})} = \sqrt{[\sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}+\sqrt{(\mathbf{g}, \mathbf{g})}]^2} =$$

$$= \sqrt{(\mathbf{f}, \mathbf{f})}+\sqrt{(\mathbf{g}, \mathbf{g})} = \|\mathbf{f}\|+\|\mathbf{g}\|.$$

В частност във въведеното по-горе евклидово пространство R_0 от всички частично непрекъснати в сегмента $[a, b]$ функции нормата (8.4) за произволен елемент f се определя с равенството

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}, \tag{8.6}$$

а неравенствата на Коши—Буняковски (8.3) и на триъгълника (8.5) добиват следния вид:

$$\left(\int_a^b f(x)\,.\,g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx\,.\,\int_a^b g^2(x)\,dx, \tag{8.7}$$

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}. \tag{8.8}$$

Ще въведем сега за произволно безкрайномерно евклидово пространство R понятията ортогонални елементи и ортонормирана система от елементи.

Определение 1. Елементите $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ от евклидовото пространство се наричат ортогонални, ако скаларното произведение $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ на тези елементи е равно на нула.

Нека да разгледаме в произволното безкрайномерно евклидово пространство R една редица от елементи

$$\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n, \ldots \quad (8.9)$$

Определение 2. Редицата (8.9) се нарича ортонормирана система, ако всеки два елемента от тази редица са ортогонални и всеки елемент има норма, равна на единица.

Класически пример за ортонормирана система в пространството R_0 от всички частично непрекъснати в затворения интервал $[a, b]$ функции е тригонометричната система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \quad (8.10)$$

Читателят лесно ще провери, че функциите (8.10) са две по две ортогонални (относно скаларното произведение (8.1) при $a=-\pi$ и $b=\pi$) и че нормата на всяка от тези функции (определена с равенството (8.6) при $a=-\pi$ и $b=\pi$) е равна на единица.

В математиката и в нейните приложения често се срещат различни ортонормирани (в съответните множества) системи от функции.

Ще дадем няколко примера на такива системи.

1°. Полиномите, определени с равенството

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n . n!} \cdot \frac{d[(x^2-1)^n]}{dx^n} \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \quad (8.11)$$

е прието да се наричат полиноми на Лежандър.

Не е трудно да се убедим, че образуваните с помощта на полиномите (8.11) функции

$$\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot P_n(x) \quad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

образуват ортонормирана (в сегмента $[-1, +1]$) система от функции.

2°. Полиномите, определени с равенствата $T_0(x)=1$, $T_n(x)=2^{1-n}\cos(n \arccos x)$ при $n=1, 2, \ldots$, се наричат полиноми на Чебишев. Измежду всички полиноми от n-та степен с коефициент пред x^n, равен на единица, полиномът на Чебишев $T_n(x)$ има най-малък максимум на модула на сегмента $-1 \leq x \leq 1$. Може да се докаже, че получените с помощта на полиномите на Чебишев функции

$$\Psi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}}, \quad \Psi_n(x)=\frac{2^{n-0,5}\, T_n(x)}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{1-x^2}} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

образуват ортонормирана (в сегмента $[-1, +1]$) система.

3°. В теорията на вероятностите често се използува така наречената система на Радемахер*

* Радемахер — немски математик (род. 1882 г.).

$$\Psi_n(x)=\varphi(2^n . x) \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

където $\varphi(t)=\operatorname{sgn}(\sin 2 . \pi . t)$.

Лесно се проверява, че тази система е ортонормирана в сегмента $0 \leq x \leq 1$.

4°. В редица изследвания намира приложение така наречената система на Хаар*, която е ортонормирана в сегмента $0 \leq x \leq 1$. Елементите на тази система $\chi_n^{(k)}(x)$ се определят за всяко $n=0, 1, 2, \ldots$ и за всички k, приемащи стойности $1, 2, 4, \ldots, 2^n$. Те имат вида

$$=\begin{cases} \sqrt{2^n} & \text{при } \frac{2k-2}{2^{n+1}} \leq x < \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n} & \text{при } \frac{2k-1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{2k}{2^{n+1}}, \\ 0 & \text{в останалите точки от } [0, 1]. \end{cases}$$

Всяка функция на Хаар е стъпалце от същия вид, както функцията $\sqrt{2^n} . \operatorname{sgn} x$ в сегмента $[-2^{-(n+1)}, 2^{-(n+1)}]$. За всяко фиксирано число n при увеличаване стойността на k това стъпалце се придвижва надясно. Навсякъде извън съответното стъпалце всяка функция на Хаар е тъждествено равна на нула.

2. Понятие за общ ред на Фурие. Нека в произволното безкрайномерно евклидово пространство R е зададена ортонормираната система от елементи $\{\Psi_k\}$.

Определение 1. Ред на Фурие на елемента $\mathbf{f}$ от R по ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ ще наричаме реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k . \Psi_k, \quad (8.12)$$

където с f_k са обозначени числата, наричани коефициенти на Фурие на елемента $\mathbf{f}$ и определени чрез равенствата

$$f_k=(\mathbf{f}, \Psi_k), \qquad k=1, 2, \ldots$$

Естествено е да наречем крайната сума

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} f_k . \Psi_k \quad (8.13)$$

n-та частична сума на реда на Фурие (8.12).

Да разгледаме наред с n-тата частична сума (8.13) произволна линейна комбинация на първите n елемента от ортонормираната система $\{\Psi_k\}$:

* Хаар — немски математик (1885—1933).

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \Psi_k, \tag{8.14}$$

където $c_1, c_2, \ldots, c_n$ са някакви константи.

Ще изясним по какво се отличава n-тата частична сума на реда на Фурие (8.13) от всички други суми (8.14).

Нека се договорим да наричаме израза $\|\mathbf{f}-\mathbf{g}\|$ отклонение $\mathbf{f}$ от $\mathbf{g}$ (относно нормата в даденото евклидово пространство).

Справедлива е следната основна теорема.

Теорема 8.1. Най-малко отклонение на елемента $\mathbf{f}$ от всевъзможните суми от вида (8.14) относно нормата на даденото евклидово пространство има n-тата частична сума (8.13) на реда на Фурие на елемента $\mathbf{f}$.

Доказателство. Отчитайки ортонормираността на системата $\{\Psi_k\}$ и използувайки аксиомите на скаларното произведение, може да запишем

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\Psi_k-\mathbf{f}\right\|^2=\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\Psi_k-\mathbf{f},\ \sum_{l=1}^{n} c_l\Psi_l-\mathbf{f}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} c_k^2(\Psi_k,\Psi_k)-2\sum_{k=1}^{n} c_k(\mathbf{f},\Psi_k)+(\mathbf{f},\mathbf{f})=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} c_k^2-2\sum_{k=1}^{n} c_k\cdot f_k+\|\mathbf{f}\|^2=\sum_{k=1}^{n}(c_k-f_k)^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2+\|\mathbf{f}\|^2.$$

И така

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\Psi_k-\mathbf{f}\right\|^2=\sum_{k=1}^{n}(c_k-f_k)^2+\|\mathbf{f}\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{8.15}$$

В лявата част на (8.15) стои квадратът от отклонението на сумата (8.14) от елемента $\mathbf{f}$ (относно нормата на даденото евклидово пространство). От вида на дясната част на (8.15) следва, че указаният квадрат на отклонението е най-малък при $c_k=f_k$ (тъй като тогава първата сума в дясната част на (8.15) става равна на нула, а останалите събираеми в дясната част на (8.15) не зависят от c_k). Теоремата е доказана.

Следствие 1. За произволен елемент f от дадено евклидово пространство, за всяка ортонормирана система $\{\Psi_k\}$, за всеки избор на константите c_k и за всяко n е изпълнено неравенството

$$\|\mathbf{f}\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2\leq\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\Psi_k-\mathbf{f}\right\|^2. \tag{8.16}$$

Неравенството (8.16) е директно следствие от тъждеството (8.15).

Следствие 2. За произволен елемент $\mathbf{f}$ от дадено евклидово пространство, всяка ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ и всяко натурално число n е в сила равенството

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\Psi_k-\mathbf{f}\right\|^2=\|\mathbf{f}\|^2-\sum_{k=1}^{n} f_k^2, \tag{8.17}$$

често наричано равенство на Бесел*.

За доказателството на равенството (8.17) е достатъчно да положим в (8.15) $c_k=f_k$.

Теорема 8.2. За всеки елемент $\mathbf{f}$ от дадено евклидово пространство и всяка ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ е изпълнено следното неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2\leq\|\mathbf{f}\|^2, \tag{8.18}$$

наричано неравенство на Бесел.

Доказателство. От неотрицателността на лявата част на (8.17) следва, че за всяко n

$$\sum_{k=1}^{n} f_k^2\leq\|\mathbf{f}\|^2. \tag{8.19}$$

Но това означава, че редът с неотрицателни членове, стоящ в лявата страна на (8.18), има ограничена редица от частични суми и затова е сходящ. След граничен преход при $n\to\infty$ (вж. теорема 3.13 от част I) в неравенството (8.19) се получава неравенството (8.18). Теоремата е доказана.

За пример нека да разгледаме пространството R_0 от всички частично непрекъснати в сегмента $-\pi\leq x\leq\pi$ функции и в това пространство реда на Фурие по тригонометричната система (8.10) (този ред е прието да се нарича тригонометричен ред на Фурие). За произволна частично непрекъсната в сегмента $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$ указаният ред на Фурие е от вида

$$\bar{f}_0\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\bar{f}_k\cdot\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}+\bar{\bar{f}}_k\cdot\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right), \tag{8.20}$$

където коефициентите на Фурие $\bar{f}_k$ и $\bar{\bar{f}}_k$ се определят чрез формулите

* Ф. Бесел—немски астроном и математик (1784—1846).

$$\bar{f}_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$\bar{f}_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\quad \bar{\bar{f}}_k=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\ (k=1, 2, \ldots).$$

Неравенството на Бесел за всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ придобива вида

$$\bar{f}_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\bar{f}_k^2+\bar{\bar{f}}_k^2)\leq\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{8.21}$$

Отклонението на $f(x)$ от $g(x)$ по норма в този случай е равно на така нареченото средно квадратично отклонение:

$$\|f-g\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-g(x)]^2\,dx}. \tag{8.22}$$

Ще отбележим, че в теорията на тригонометричните редове на Фурие е приета по традиция друга форма на запис както на самия ред на Фурие (8.20), така и на неравенството на Бесел (8.21). А именно тригонометричният ред на Фурие (8.20) обикновено се записва във вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{8.20'}$$

където

$$\begin{cases} a_0=\dfrac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\\ a_k=\dfrac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\\ b_k=\dfrac{\bar{\bar{f}}_k}{\sqrt{\pi}}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \end{cases} \tag{8.23}$$

$(k=1, 2, \ldots).$

При такава форма на запис неравенството на Бесел 8.21 придобива вида

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{8.21'}$$

Забележка. От неравенството на Бесел (8.21') следва, че за всяка частично непрекъсната в затворения интервал $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ коефициентите a_k и b_k, наричани тригонометрични коефициенти на Фурие, на функцията $f(x)$ клонят към нула при $n\to\infty$ (поради необходимото условие за сходимост на реда от лявата страна на (8.21)).

§ 2. Затворени и пълни ортонормирани системи

Както и в предишния параграф, ще разглеждаме произволна ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ в някое безкрайномерно евклидово пространство R.

Определение 1. Ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ се нарича затворена, ако за всеки елемент $\mathbf{f}$ от даденото евклидово пространство R и за всяко положително ε може да се намери такава линейна комбинация (8.14) от краен брой елементи на $\{\Psi_k\}$, че отклонението ѝ от $\mathbf{f}$ (относно нормата на пространството R) да е по-малко от ε.

С други думи, системата $\{\Psi_k\}$ се нарича затворена, ако произволен елемент $\mathbf{f}$ от даденото евклидово пространство R може да се приближи с произволна точност с линейна комбинация от краен брой елементи от $\{\Psi_k\}$ относно нормата на това пространство.

Забележка 1. Тук не разглеждаме въпроса за съществуване на затворени ортонормирани системи в произволно евклидово пространство. Ще отбележим, че в трета част ще бъде изучен един важен клас евклидови пространства — така наречените хилбертови пространства и ще бъде установено съществуването във всяко такова пространство на затворени ортонормирани системи.

Теорема 8.3. Ако ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ е затворена, то за всеки елемент $\mathbf{f}$ от разглежданото евклидово пространство неравенството на Бесел се превръща в точно равенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2=\|\mathbf{f}\|^2, \tag{8.24}$$

наричано равенство на Парсевал*.

* М. Парсевал — френски математик, умрял през 1836 г.

Доказателство. Да фиксираме произволен елемент $\mathbf{f}$ от разглежданото евклидово пространство и произволно положително число ε. Тъй като системата $\{\Psi_k\}$ е затворена, то съществува естествено число n и числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такива, че квадратът на нормата, стояща в дясната част на (8.16), е по-малък от ε. Поради (8.16) това означава, че за произволното $\varepsilon > 0$ ще се намери естествено число n, за което

$$\|\mathbf{f}\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon. \tag{8.25}$$

За всички естествени числа, по-големи от n, неравенството (8.25) ще бъде също изпълнено, тъй като при растенето на n сумата, стояща в лявата страна на (8.25), може само да расте.

И така доказахме, че за произволно $\varepsilon > 0$ съществува естествено число n, започвайки от което е изпълнено неравенството (8.25).

Съвместно с неравенството (8.19) това означава, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ е сходящ към сумата $\|\mathbf{f}\|^2$. Теоремата е доказана.

Теорема 8.4. Ако ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ е затворена, то за произволен елемент $\mathbf{f}$ редът на Фурие на този елемент е сходящ към него относно евклидовата норма, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \Psi_k - \mathbf{f} \right\| = 0. \tag{8.26}$$

Доказателство. Твърдението на тази теорема непосредствено следва от равенството (8.17) и от предишната теорема.

Забележка 2. В пространството от всички частично непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции сходимостта относно нормата (8.26) преминава в средноквадратична сходимост на този сегмент (вж. п. 3, §4, гл. 2). По такъв начин, ако докажем затвореността на тригонометричната система (8.10), то твърдението на теорема 8.4 ще означава, че за всяка частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ тригонометричният ред на Фурие на тази функция е сходящ към нея в указания сегмент относно средноквадратичното разстояние.

Определение 2. Ортонормираната система $\{\Psi_k\}$ се нарича пълна, ако освен нулевия елемент не съществува друг елемент от даденото евклидово пространство, който да е ортогонален на всички елементи Ψ_k от системата $\{\Psi_k\}$.

С други думи, системата $\{\Psi_k\}$ се нарича пълна, ако всеки елемент $\mathbf{f}$, който е ортогонален на всички елементи Ψ_k от системата $\{\Psi_k\}$, е нулевият елемент.

Теорема 8.5. Всяка затворена ортонормирана система е пълна система.

Доказателство. Нека системата $\{\Psi_k\}$ е затворена и нека $\mathbf{f}$ да е елемент от даденото евклидово пространство, който е ортогонален на всички елементи Ψ_k от системата $\{\Psi_k\}$.

Тогава всички коефициенти на Фурие f_k на елемента $\mathbf{f}$ по системата $\{\Psi_k\}$ са равни на нула и следователно поради равенството на Парсевал (8.24) и $\|\mathbf{f}\| = 0$. Последното равенство (по силата на свойство 1° на нормата) означава, че $\mathbf{f}$ е нулевият елемент. Теоремата е доказана.

Забележка 3. Показахме, че в произволно евклидово пространство от затвореността на ортонормираната система следва нейната пълнота. Ще отбележим без доказателство, че в произволно евклидово пространство от пълнотата на ортонормираната система в общия случай не следва затвореността на тази система. В третата част ще бъде доказано, че за един важен клас евклидови пространства — така наречените хилбертови пространства — пълнотата на ортонормираната система е еквивалентна на нейната затвореност.

Теорема 8.6. За всяка пълна (и още повече за всяка затворена) ортонормирана система $\{\Psi_k\}$ два различни елемента $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ от едно евклидово пространство не могат да имат еднакви редове на Фурие.

Доказателство. Ако коефициентите на Фурие на елементите $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ съвпадат, то всички коефициенти на Фурие на разликата $(\mathbf{f}-\mathbf{g})$ са равни на нула. Т. е. разликата $(\mathbf{f}-\mathbf{g})$ е ортогонална на всички елементи Ψ_k от пълната система $\{\Psi_k\}$. Но това означава, че разликата $(\mathbf{f}-\mathbf{g})$ е нулевият елемент, т. е. $\mathbf{f}$ съвпада с $\mathbf{g}$. Теоремата е доказана.

С това завършваме разглеждането на общите редове на Фурие по произволни ортонормирани системи в произволно евклидово пространство R.

Нашата следваща цел ще бъде по-детайлното изучаване реда на Фурие по тригонометричната система (8.10).

§ 3. Затвореност на тригонометричната система и следствия от нея

1. Равномерно приближаване на непрекъсната функция с тригонометрични полиноми. В този параграф ще установим затвореността (а следователно и пълнотата) на тригонометричната система

(8.10) в пространството от всички частично непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции. Но преди да пристъпим към доказателството на затвореността на тригонометричната система, ще установим важната теорема за равномерното приближаване на непрекъснатата функция с така наречените тригонометрични полиноми.

Тригонометричен полином ще наричаме произволна линейна комбинация на крайно число елементи от тригонометричната система (8.10), т. е. израз от вида

$$T(x)=\bar{c}_0+\sum_{k=1}^{n}(\bar{c}_k\cos kx+\bar{\bar{c}}_k\sin kx),$$

където n е произволно естествено, а $\bar{c}_0$, $\bar{c}_k$ и $\bar{\bar{c}}_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ са произволни реални числа.

Ще отбележим две елементарни твърдения:

1°. Ако $P(x)$ е някакъв алгебричен полином, то $P(\cos x)$ и $P(\sin x)$ са тригонометрични полиноми.

2°. Ако $T(x)$ е тригонометричен полином, то всеки от изразите $[T(x)\,.\,\sin x]$ и $[T(x)\,.\,\sin^2 x]$ също е тригонометричен полином.

И двете твърдения следват от факта, че произведението на две (а следователно и на произволен краен брой) тригонометрични функции* на аргумента x се представя като крайна линейна комбинация от тригонометрични функции с аргумент от типа kx (убедете се в това).

В теорията на тригонометричните редове на Фурие важна роля играе понятието периодична функция.

Функцията $f(x)$ се нарича периодична функция с период T, ако: 1) $f(x)$ е определена за всички реални x; 2) за всяко реално x е изпълнено равенството

$$f(x+T)=f(x).$$

Това равенство обикновено се нарича условие за периодичност. Към разглеждане на периодични функции ни довежда изучаването на различни колебателни процеси.

Ще отбележим, че елементите от тригонометричната система (8.10) са периодични функции с период 2π.

Теорема 8.7 (теорема на Вайерщрас). Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$, то функцията $f(x)$ може равномерно да се приближи с тригонометрични полиноми в $[-\pi, \pi]$, т. е. за тази функция $f(x)$ и за всяко положително число ε съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ е изпълнено неравенството

(8.27) $$|f(x)-T(x)|<\varepsilon.$$

* Под тригонометрични функции в дадения случай се разбира функциите синус и косинус.

Доказателство. За удобство ще разделим доказателството на две части.

1°. Отначало допълнително ще предположим, че функцията $f(x)$ е четна, т. е. за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ удовлетворява условието $f(-x)=f(x)$.

Поради теоремата за непрекъснатост на съставна функция (вж. ч. I, гл. 4, § 1) функцията $F(t)=f(\arccos t)$ е непрекъсната функция като функция на аргумента t в сегмента $-1\leq t\leq 1$. Тогава поради теоремата на Вайерщрас за алгебрични полиноми (вж. теорема 2.18 от глава 2) за всяко $\varepsilon>0$ съществува алгебричен полином $P(t)$ такъв, че $|f(\arccos t)-P(t)|<\varepsilon$ за всички t от сегмента $-1\leq t\leq 1$.

Полагайки $t=\cos x$, получаваме, че

(8.28) $$|f(x)-P(\cos x)|<\varepsilon$$

за всички x от сегмента $0\leq x\leq\pi$.

Тъй като двете функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ са четни, то неравенството (8.28) е изпълнено и за всички x от сегмента $-\pi\leq x\leq 0$. По такъв начин неравенството (8.28) е изпълнено за всички x от сегмента $-\pi\leq x\leq\pi$ и понеже (по силата на отбелязаното по-горе твърдение 1°) $P(\cos x)$ е тригонометричен полином, то за четна функция $f(x)$ теоремата е доказана.

Да отбележим сега, че една функция $f(x)$, удовлетворяваща условията на доказваната теорема, може периодично с период 2π да бъде продължена на цялата безкрайна права $-\infty<x<+\infty$, при това така, че продължената функция ще бъде непрекъсната във всяка точка x от безкрайната права. Ако функцията $f(x)$ е продължена по такъв начин, то, понеже $P(\cos x)$ е периодична функция с период 2π, получаваме, че за четна функция $f(x)$ неравенството (8.28) е изпълнено върху безкрайната права $-\infty<x<+\infty$.

2°. Нека сега $f(x)$ е произволна функция, която удовлетворява условията на доказаната теорема. Тази функция ще продължим върху цялата безкрайна права периодично с период 2π и ще образуваме следните две четни функции:

(8.29) $$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

(8.30) $$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}\,.\,\sin x.$$

По доказаното в пункт 1° за всяко $\varepsilon>0$ съществуват тригонометрични полиноми $T_1(x)$ и $T_2(x)$ такива, че върху цялата безкрайна права

$$|f_1(x)-T_1(x)|<\frac{\varepsilon}{4}, \qquad |f_2(x)-T_2(x)|<\frac{\varepsilon}{4}$$

и затова

$$|f_1(x)\sin^2 x-T_1(x)\sin^2 x|<\frac{\varepsilon}{4},$$

$$|f_2(x)\sin x-T_2(x)\sin x|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Събираме последните две неравенства и отчитаме, че модулът от сумата на две величини не надминава сумата от техните модули.

От равенствата (8.29) и (8.30) получаваме, че на цялата безкрайна права е изпълнено неравенството

$$(8.31) \qquad |f(x)\sin^2 x-T_3(x)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

където с $T_3(x)$ е означен тригонометричният полином

$$T_3(x)=T_1(x)\sin^2 x+T_2(x)\sin x.$$

В проведените от нас разсъждения вместо функцията $f(x)$ може да вземем функцията $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$*. Напълно аналогично с (8.31) ще получим, че за функцията $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ съществува тригонометричен полином $T_4(x)$ такъв, че върху цялата безкрайна права

$$(8.32) \qquad \left|f\left(x+\frac{\pi}{2}\right).\sin^2 x-T_4(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Заменяме в (8.32) x с $x-\frac{\pi}{2}$ и въвеждаме тригонометричния полином $T_5(x)=T_4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Получаваме, че върху цялата безкрайна права е вярно неравенството

$$(8.33) \qquad |f(x).\cos^2 x-T_5(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Накрая събираме неравенствата (8.31) и (8.33) и обозначаваме с $T(x)$ тригонометричния полином $T_3(x)+T_5(x)$. Получаваме, че върху цялата безкрайна права е вярно неравенството (8.27). Теоремата е доказана.

Забележка. Всяко от условията 1) непрекъснатост на $f(x)$ върху сегмента $[-\pi, \pi]$; 2) равенство на стойностите $f(-\pi)$ и $f(\pi)$

* Тъй като тази функция удовлетворява същите условия, както и получената след продължението на функцията $f(x)$.

са необходими условия за равномерното приближение на функцията $f(x)$ с тригонометрични полиноми в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Теоремата на Вайерщрас може да се преформулира по следния начин: за да може функцията $f(x)$ равномерно върху сегмента $[-\pi, \pi]$ да се приближи с тригонометрични полиноми с произволна точност, е необходимо и достатъчно тя да бъде непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и да удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$.

Достатъчността е точно съдържанието на теорема 8.7.

Ще се спрем на доказателството на необходимостта. Нека съществува редица от тригонометрични полиноми $\{T_n(x)\}$, която равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$ клони към функцията $f(x)$. Тъй като всяка от функциите $T_n(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$, то по следствие 2 от теорема 2.7 и функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$. За всяко $\varepsilon>0$ съществува полином $T_n(x)$ такъв, че $|f(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$. Следователно

$$|f(-\pi)-T_n(-\pi)|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f(\pi)-T_n(\pi)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

От последните две неравенства и от равенството $T_n(-\pi)=T_n(\pi)$ заключаваме, че $|f(-\pi)-f(\pi)|<\varepsilon$, откъдето $f(-\pi)=f(\pi)$ (тъй като $\varepsilon>0$ е произволно).

2. Доказателство на затвореността на тригонометричната система. Опирайки се на теоремата на Вайерщрас, ще докажем следната основна теорема.

Теорема 8.8. Тригонометричната система (8.10) е затворена*, т. е. за всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ и за всяко положително ε съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че

$$(8.34) \qquad \|f(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,dx}<\varepsilon.$$

Доказателство. Преди всичко да отбележим, че за произволна, частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ и за всяко $\varepsilon>0$ съществува непрекъсната в този сегмент функция $F(x)$, удовлетворяваща условието $F(-\pi)=F(\pi)$ и такава, че

$$(8.35) \qquad \|f(x)-F(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-F(x)]^2\,dx}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

* А следователно (теорема 8.5) и пълна.

Наистина достатъчно е да изберем функцията $F(x)$ да съвпада с $f(x)$ навсякъде освен в достатъчно малки околности на точките на прекъсване на функцията $f(x)$ и на точката $x=\pi$, а в указаните околности да изберем $F(x)$ линейна функция така, че $F(x)$ да е непрекъсната върху целия сегмент $[-\pi, \pi]$ и да удовлетворява условието $F(-\pi)=F(\pi)$.

Тъй като частично непрекъснатата функция и срязващата я линейна функция са ограничени, избирайки указаните околности в точките на прекъсване на $f(x)$ и в точката $x=\pi$ достатъчно малки, ще осигурим изпълнението на неравенството (8.35).

По теоремата на Вайерщрас 8.7 за функцията $F(x)$ съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че за всички x от сегмента $[-\pi, \pi]$ е изпълнено неравенството

$$|F(x)-T(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}. \tag{8.36}$$

От (8.36) заключаваме, че

$$\|F(x)-T(x)\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [F(x)-T(x)]^2\, dx} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.37}$$

От (8.35) и (8.37) и от неравенството на триъгълника за нормата следва неравенството (8.34). Теоремата е доказана.

Забележка 1. От теоремите 8.8 и 8.5 веднага следва, че тригонометричната система (8.10) е пълна. Това от своя страна дава, че системата $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ е пълна в множеството от всички частично непрекъснати в сегмента $[0, \pi]$ (или съответно в сегмента $[-\pi, 0]$) функции. Наистина всяка частично непрекъсната в сегмента $[0, \pi]$ функция $f(x)$, която е ортогонална в този сегмент към всички елементи от системата $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right\}$, след нечетно продължение върху сегмента $[-\pi, 0]$ се оказва, че е ортогонална върху сегмента $[-\pi, \pi]$ на всички елементи от тригонометричната система (8.10). От пълнотата на системата (8.10) следва, че тази функция е равна на нула в $[-\pi, \pi]$, а следователно и в $[0, \pi]$. Съвършено аналогично се доказва, че и системата $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx$ $(n=1, 2, \ldots)$ е пълна в множеството от всички функции, които са частично непрекъснати в сегмента $[0, \pi]$ (или съответно в сегмента $[-\pi, 0]$).

Забележка 2. Може да се покаже, че измежду ортонормираните системи, указани в § 1, системите, образувани с помощта на полиномите на Лежандър, полиномите на Чебишев и функциите на Хаар, са затворени, а системата на Радемахер не е затворена.

3. Следствия от затвореността на тригонометричната система

Следствие 1. За всяка частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ е изпълнено равенството на Парсевал

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx \tag{8.38}$$

(следва от теорема 8.3).

Следствие 2. Тригонометричният ред на Фурие на произволна, частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ клони към тази функция в указания сегмент относно средноквадратичното разстояние (следва от теорема 8.4 и забележка 2 към същата теорема).

Следствие 3. Тригонометричният ред на Фурие на произволна, частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ може почленно да се интегрира в този сегмент (следва от предишното следствие и теорема 2.11, глава 2).

Следствие 4. Ако две частично непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имат еднакви тригонометрични редове на Фурие, то тези функции съвпадат тъждествено на този сегмент (следва от теорема 8.6).

Следствие 5. Ако тригонометричният ред на Фурие на частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ е равномерно сходящ в някакъв сегмент $[a, b]$, съдържащ се в сегмента $[-\pi, \pi]$, то той клони в сегмента $[a, b]$ именно към функцията $f(x)$.

Доказателство. Нека $g(x)$ е тази функция, към която клони равномерно в $[a, b]$ тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$. Ще докажем, че $f(x)\equiv g(x)$ на целия сегмент $[a, b]$. Тъй като от равномерната сходимост в сегмента $[a, b]$ следва средноквадратичната сходимост в този интервал (вж. гл. 2, § 4, п. 3), то тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ клони към функцията $g(x)$ в сегмента $[a, b]$ относно средноквадратичното разстояние. Това означава, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува n_1, започвайки от което n-тата частична сума на тригонометричния ред на Фурие удовлетворява неравенството

$$\|g(x)-S_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b [g(x)-S_n(x)]^2\, dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.39}$$

От друга страна, по силата на следствие 2 редицата $S_n(x)$ клони към $f(x)$ относно средноквадратичното разстояние в целия сегмент $[-\pi, \pi]$ и в частност и на сегмента $[a, b]$, т. е. за фиксираното >0 съществува число n_2, започвайки от което

$$\| S_n(x)-f(x) \| = \sqrt{\int_a^b [S_n(x)-f(x)]^2\,dx} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.40}$$

От (8.39) и (8.40) и от неравенството на триъгълника

$$\| g(x)-f(x) \| \leq \| g(x)-S_n(x) \| + \| S_n(x)-f(x) \|$$

следва, че $\| g(x)-f(x) \| < \varepsilon$. От последното неравенство и от произволността на $\varepsilon>0$ следва, че $\| g(x)-f(x) \| = 0$, а оттук въз основа на първото свойство на нормата получаваме, че $g(x)-f(x)$ е нулевият елемент в пространството от всички частично непрекъснати в $[a, b]$ функции, т. е. е тъждествено равна на нула в сегмента $[a, b]$. Следствие 5 е доказано.

Забележка 1. Разбира се, в следствие 5 сегментът $[a, b]$ може да съвпада с целия сегмент $[-\pi, \pi]$, т. е. от равномерната сходимост на реда на Фурие на функцията $f(x)$ върху целия сегмент $[-\pi, \pi]$ следва, че този ред клони в указания сегмент именно към функцията $f(x)$.

Забележка 2. Аналогични следствия са в сила и за реда на Фурие по произволна друга затворена ортонормирана система в пространството от частично непрекъснатите в произволен сегмент $[a, b]$ функции със скаларно произведение (8.1) и норма (8.7). Примери на такива системи са указаните в § 1 ортонормирани системи, получени от полиномите на Лежандър и Чебишев, и системата на Хаар.

§ 4. Най-прости условия за равномерна сходимост и за почленна диференцируемост на тригонометричния ред на Фурие

1. Уводни бележки. В математичната физика и в други раздели от математиката съществена роля играе въпросът за условията, при които тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ (към тази функция) в дадена точка x от сегмента $[-\pi, \pi]$.

Още в края на миналия век е било известно, че съществуват непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ функции, удовлетворяващи условието $f(-\pi)=f(\pi)$, тригонометричните редове на които са разходящи в отнапред зададена точка от сегмента $[-\pi, \pi]$ (или даже са разходящи върху безкрайно множество от точки от сегмента $[-\pi, \pi]$, навсякъде гъсто в този сегмент)*.

По такъв начин само непрекъснатостта на функцията $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$ без допълнителни условия не осигурява не само равномерната сходимост на тригонометричния ред на Фурие на тази функция, но дори и сходимостта на този ред в отнапред зададена точка от този сегмент.

В този и в следващите параграфи ще изясним какви изисквания трябва да добавим към непрекъснатостта на функцията $f(x)$ (или да поставим вместо непрекъснатостта на $f(x)$), за да осигурим сходимостта на тригонометричния ред на Фурие в зададена точка, а също и за да осигурим равномерната сходимост на указания ред в целия сегмент $[-\pi, \pi]$ или в някаква негова част.

При изучаването на сходимостта на реда на Фурие възниква и друг въпрос: обезателно ли тригонометричният ред на Фурие на произволно частично непрекъсната (или непрекъсната) в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ е сходящ поне в една точка от този сегмент?

Положителен отговор на този въпрос беше получен едва през 1966 г.

Отговорът на този въпрос е следствие от фундаменталната теорема, доказана през 1966 г. от Л. Карлесон**, която реши знаменитата проблема на Н. Н. Лузин***, поставена още през 1914 г.: тригонометричният ред на Фурие на всяка функция, за която съществува в смисъл на Лебег интегралът $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$, е сходящ към тази функция почти навсякъде в сегмента $[-\pi, \pi]$****.

От теоремата на Карлесон следва, че редът на Фурие не само за всяка частично непрекъсната, но и за всяка интегруема в сегмента $[-\pi, \pi]$ в собствен смисъл на Риман функция $f(x)$ е сходящ към тази функция почти навсякъде в сегмента $[-\pi, \pi]$ (тъй като

* Първи пример на такава функция е бил построен от френския математик Дю Буа Раймон през 1876 г.

** Л. Карлесон — съвременен шведски математик. Пълното доказателство на теоремата на Карлесон може да се намери в сборника от преводни статии «Математика», т. II, № 4, 1967, стр. 113—132.

*** Николай Николаевич Лузин — съветски математик, основател на съвременната московска математическа школа по теория на функциите (1883—1950). Постановката на проблемата на Лузин, решена от Карлесон, и други негови проблеми могат да се намерят в книгата на Н. Н. Лузин «Интеграл и тригонометричен ред», Москва—Ленинград, Гостехиздат, 1951.

**** Определението на интеграл в смисъл на Лебег и сходимост почти навсякъде в даден сегмент виж. в част 3 на тази книга.

за такава функция съществува интегралът $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$ в смисъл на Риман, а следователно и в смисъл на Лебег).

Ще отбележим, че ако функцията $f(x)$ е интегруема в сегмента $[-\pi,\pi]$ не в смисъл на Риман, а само в смисъл на Лебег, то тригонометричният ред на Фурие на тази функция може да не е сходящ в нито една точка от сегмента $[-\pi,\pi]$. Първият пример на интегруема в сегмента $[-\pi,\pi]$ в смисъл на Лебег функция $f(x)$ с навсякъде разходящ тригонометричен ред на Фурие беше построен през 1923 г. от съветския математик А. Н. Колмогоров*.

2. Най-прости условия за абсолютна и равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие. Да установим следната терминология.

Определение 1. Ще казваме, че функцията $f(x)$ има в сегмента $[a, b]$ *частично непрекъсната производна*, ако производната $f'(x)$ съществува и е непрекъсната навсякъде в сегмента $[a, b]$ с изключение може би на краен брой точки, във всяка от които функцията $f'(x)$ има крайна лява и дясна граница**.

Определение 2. Ще казваме, че функцията $f(x)$ има в сегмента $[a, b]$ частично непрекъсната производна от ред $n\geq 1$, ако функцията $f^{(n-1)}(x)$ има на този сегмент частично непрекъсната производна в смисъл на определението 1.

Теорема 8.9. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi,\pi]$, има в този сегмент частично непрекъсната производна и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$, то тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ към тази функция равномерно в сегмента $[-\pi,\pi]$. Нещо повече, редът, съставен от модулите на членовете на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$, е сходящ равномерно в сегмента $[-\pi,\pi]$.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че редът от модулите на членовете на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$

$$\frac{|a_0|}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\{|a_k\cos kx|+|b_k\sin kx|\} \tag{8.41}$$

е сходящ равномерно в сегмента $[-\pi,\pi]$, тъй като оттук ще следва

* Примерът на А. Н. Колмогоров може да се намери на стр. 412—421 от книгата на Н. К. Бари «Тригонометрични редове», Москва, Физматгиз, 1961.

** При това функцията $f'(x)$ може да се окаже недефинирана в краен брой точки от сегмента $[a, b]$. В тези точки ще я додефинираме по произволен начин (например ще я положим равна на полусумата на лявата и дясната й граница).

както равномерната в сегмента $[-\pi,\pi]$ сходимост на самия тригонометричен ред на Фурие на функцията $f(x)$, така и сходимостта на този ред (следствие 5 от п. 3, § 3) именно към функцията $f(x)$.

Предвид признака на Вайерщрас (вж. теорема 2.3 от глава 2) за доказателството на равномерната в сегмента $[-\pi,\pi]$ сходимост на реда (8.41) е достатъчно да докажем сходимостта на мажориращия го числов ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{|a_k|+|b_k|\}. \tag{8.42}$$

Да означим с α_k и β_k тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f'(x)$ (дефинирайки я по произволен начин в крайния брой точки, в които не съществува производната на $f(x)$*).

Интегрираме по части и отчитаме, че $f(x)$ е непрекъсната в целия сегмент $[-\pi,\pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$. Получаваме следните съотношения:

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)\,dx=k\,.\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx=k\,.\,b_k,$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(kx)\,dx=-k\,.\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx=-k\,.\,a_k,$$

които свързват тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f'(x)$ и функцията $f(x)$**.

По такъв начин

$$|a_k|+|b_k|=\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k}$$

и за да докажем сходимостта на реда (8.42), е достатъчно да докажем сходимостта на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k}\right\}. \tag{8.43}$$

* Например може да положим функцията $f'(x)$ в указаните точки да е равна на полусумата от лявата и дясната й граница.

** При интегрирането по части е необходимо да се раздели сегментът $[-\pi,\pi]$ на краен брой подсегменти без общи вътрешни точки, така че на всеки от тях производната $f'(x)$ да е непрекъсната. Прилагаме формулата за интегриране по части на всеки от тези подсегменти и сумираме всички интеграли, като отчитаме, че сумата от всички проинтегрирани членове е нула (тъй като $f(x)$ е непрекъсната в целия сегмент $[-\pi,\pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$).

Сходимостта на реда (8.43) следва от елементарните неравенства*

$$\frac{|\alpha_k|}{k} \le \frac{1}{2}\left(\alpha_k^2+\frac{1}{k^2}\right),$$

(8.44)

$$\frac{|\beta_k|}{k} \le \frac{1}{2}\left(\beta_k^2+\frac{1}{k^2}\right)$$

и от сходимостта на редовете

(8.45)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k^2+\beta_k^2\right),\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},$$

първият от които е сходящ по силата на равенството на Парсевал за частично непрекъснатата функция $f'(x)$, а вторият — по силата на интегралния признак на Коши—Маклорен (вж. гл. 1, п. 4, § 2). Теоремата е доказана.

Забележка. Ако функцията $f(x)$, удовлетворяваща условията на теорема 8.9, я продължим периодически (с период 2π) върху цялата безкрайна права, то теорема 8.9 дава сходимостта на тригонометричния ред на Фурие към така продължената функция, като тази сходимост е равномерна в цялата безкрайна права.

3. Най-прости условия за почленно диференциране на тригонометричен ред на Фурие. Преди всичко ще докажем следната лема за реда на тригонометричните коефициенти на Фурие.

Лема 1. Нека функцията $f(x)$ и всички нейни производни до някакъв ред m (m е цяло неотрицателно число) са непрекъснати в сегмента $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяват условията

(8.46)
$$\begin{cases} f(-\pi)=f(\pi), \\ f'(-\pi)=f'(\pi), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f^{(m)}(-\pi)=f^{(m)}(\pi). \end{cases}$$

Нека освен това функцията $f(x)$ да има в сегмента $[-\pi, \pi]$ частично непрекъсната производна от ред $m+1$. Тогава следният ред е сходящ:

(8.47)
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k|+|b_k|),$$

в който с a_k и b_k сме означили тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f(x)$.

* Имаме предвид елементарното неравенство $|a|\cdot|b| \le \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, следващо от неотрицателността на израза $(|a|-|b|)^2$.

Доказателство. Да означим с α_k и β_k тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f^{(m+1)}(x)$, определяйки тази функция по произволен начин в крайния брой точки, в които не съществува производната от ред $m+1$ на функцията $f(x)$. Като интегрираме изразите за α_k и β_k по части m пъти, използуваме непрекъснатостта на самата функция $f(x)$, както и на всички нейни производни до ред m в сегмента $[-\pi, \pi]$, и съотношенията (8.46), ще установим следната връзка между тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $f^{(m+1)}(x)$ и на самата функция $f(x)$*:

$$|\alpha_k|+|\beta_k|=k^{m+1}(|a_k|+|b_k|).$$

По такъв начин

$$k^m(|a_k|+|b_k|)=\frac{|\alpha_k|}{k}+\frac{|\beta_k|}{k}$$

и сходимостта на реда (8.47) следва от елементарните неравенства (8.44) и от сходимостта на редовете (8.45), първият от които е сходящ поради равенството на Парсевал за частично непрекъснатата функция $f^{(m+1)}(x)$, а вторият — по силата на признака на Коши — Маклорен. Лемата е доказана.

Непосредствено следствие от лема 1 е следната теорема.

Теорема 8.10. Нека функцията $f(x)$ да удовлетворява условията на лема 1, като $m \ge 1$. Тогава тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ може да се диференцира почленно m пъти в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Нека S да е някое от числата $1, 2, \ldots, m$. След S-кратно почленно диференциране на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ се получава редът

(8.48)
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s\left\{a_k\cos\left(kx-\frac{\pi s}{2}\right)+b_k\sin\left(kx-\frac{\pi s}{2}\right)\right\}.$$

Ще отбележим, че за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ както първоначалният ред на Фурие, така и редът (8.48) (с произволно $s=1, 2, \ldots, m$) се мажорират от сходящите числови редове (8.47). По признака на Вайерщрас (вж. теорема 2.3 от глава 2) както изходният ред на Фурие, така и всеки от редовете (8.48) (при $s=1, 2, \ldots, m$) са сходящи равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$, а това (по силата на теорема 2.9 от глава 2) осигурява възможността за m-кратното почленно диференциране на първоначалния ред на Фурие. Теоремата е доказана.

* При интегрирането по части сегментът $[-\pi, \pi]$ трябва да се раздели на краен брой без вътрешни точки подсегменти, на всеки от които функцията $f^{(m+1)}(x)$ да е непрекъсната, и да се отчете, че при събирането на всички интеграли по подсегментите сумата от проинтегрираните членове е равна на нула.

§ 5. По-точни условия за равномерна сходимост и условия за сходимост в точка

1. Модул на непрекъснатост на функция. Класи на Хьолдер. Ще започнем с изясняване на понятията, характеризиращи гладкостта на изучаваните функции, и с определяне на класовете от функции, чрез които ще бъдат формулирани условията за сходимост на тригонометричния ред на Фурие.

Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в сегмента $[a, b]$.

Определение 1. За всяко $\delta>0$ ще наречем модул на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ точната горна граница от модула на разликата $|f(x')-f(x'')|$ върху множеството от всички x' и x'', принадлежащи на сегмента $[a, b]$ и удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$.

Ще означаваме модула на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ със символа $\omega(\delta, f)$. Така по дефиниция*

$$\omega(\delta, f)=\sup_{\substack{|x'-x''|<\delta \\ x', x'' \in [a, b]}}|f(x')-f(x'')|.$$

Директно следствие от теоремата на Кантор (вж. част I, теорема 4.16) е, че модулът на непрекъснатост $\omega(\delta, f)$ на произволна, непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция $f(x)$ клони към нула при $\delta\to 0$**.

Обаче за произволна, непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ не може да се твърди нищо повече за реда на нейния модул на непрекъснатост $\omega(\delta, f)$ при малки δ.

Ще покажем сега, че ако функцията $f(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$ и нейната производна $f'(x)$ е ограничена в този сегмент, то модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в указания сегмент $\omega(\delta, f)$ има ред $\omega(\delta, f)=O(\delta)$***.

Наистина от теоремата на Лагранж**** следва, че за произволни точки x' и x'' от сегмента $[a, b]$ съществува точка ξ между точките x' и x'' и такава, че

$$|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)|\cdot|x'-x''|. \tag{8.49}$$

* Ще напомним, че символът $\in$ означава «принадлежи», така че записът $x', x''\in[a, b]$ означава, че точките x' и x'' принадлежат на сегмента $[a, b]$.

** Тъй като (по силата на теоремата на Кантор) за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ за всички x' и x'' от сегмента $[a, b]$, удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$.

*** Ще напомним, че символът $\alpha=O(\delta)$ беше въведен в част I и означава, че съществува константа M такава, че $|\alpha|\leq M\delta$.

**** Вж. теорема 6.5 от част I.

Тъй като производната $f'(x)$ е ограничена в сегмента $[a, b]$, то съществува константа M такава, че за всички x от този сегмент е изпълнено $|f'(x)|\leq M$ и следователно $|f'(\xi)|\leq M$. От последното неравенство и от (8.49) следва, че $|f(x')-f(x'')|\leq M\cdot\delta$ за всички x' и x'' от $[a, b]$, които удовлетворяват условието $|x'-x''|<\delta$. Но това означава, че $\omega(\delta, f)\leq M\cdot\delta$, т.е. че $\omega(\delta, f)=O(\delta)$.

Нека α е произволно реално число от полусегмента $0<\alpha\leq 1$.

Определение 2. Ще казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в сегмента $[a, b]$ на класа на Хьолдер C^α с показател α $(0<\alpha\leq 1)$, ако модулът на непрекъснатост $\omega(\delta, f)$ на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ има ред $\omega(\delta, f)=O(\delta^\alpha)$.

Фактът, че функцията $f(x)$ принадлежи в сегмента $[a, b]$ на класа на Хьолдер C^α, обикновено се изразява чрез следното означение: $f(x)\in C^\alpha\,[a, b]$.

Веднага ще отбележим, че ако функцията $f(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$ и нейната производна е ограничена в този сегмент, то тази функция обезателно принадлежи в сегмента $[a, b]$ на класа на Хьолдер C^1* (това твърдение веднага следва от доказаното по-горе съотношение $\omega(\delta, f)=O(\delta)$).

Забележка. Нека $f(x)\in C^\alpha\,[a, b]$. Точната горна граница на дробта $\dfrac{|f(x')-f(x'')|}{|x'-x''|^\alpha}$ върху множеството от всички различни помежду си точки x' и x'', принадлежащи на сегмента $[a, b]$, се нарича константа на Хьолдер (или коефициент на Хьолдер) на функцията $f(x)$ (в сегмента $[a, b]$). Сумата от константата на Хьолдер на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ и точната горна граница на $|f(x)|$ в този сегмент се нарича хьолдерова норма на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ и се обозначава със символа

$$\|f\|_{C^\alpha[a,b]}.$$

Пример. Функцията $f(x)=\sqrt{x}$ принадлежи в сегмента $[0, 1]$ на класа $C^{1/2}$, тъй като за произволни x' и x'' от $[0, 1]$, свързани с условието $x'>x''$, е изпълнено неравенството

* Класът на Хьолдер C^1, съответствуващ на стойността $\alpha=1$, често се нарича клас на Липшиц.

$$|f(x')-f(x'')|=\sqrt{x'-x''}\cdot\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\leqq\sqrt{x'-x''}$$

(при това константата на Хьолдер, която е равна на точната горна граница в $[0,1]$ на дробта $\frac{\sqrt{x'-x''}}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}$, е равна на едно, а хьолдеровата норма е равна на две).

2. Формула за частичната сума на тригонометричния ред на Фурие. Нека $f(x)$ да е произволна функция, която е дефинирана и е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Периодично продължение на тази функция върху цялата безкрайна права ще наричаме тази дефинирана върху цялата безкрайна права функция $f(x)$, която удовлетворява следните три изисквания: 1) съвпада с първоначално зададената функция в интервала $-\pi<x<\pi$; 2) приема в краищата на сегмента $[-\pi, \pi]$ стойността

$$f(\pi)=f(-\pi)=\frac{1}{2}\,(f(-\pi+0)+f(\pi-0));$$

3) удовлетворява условието за периодичност с период 2π, т. е. за всяко x удовлетворява съотношението $f(x+2\pi)=f(x)$.

Ще докажем следното просто твърдение.

Лема 1. Ако функцията $F(x)$ е периодичното продължение върху цялата безкрайна права на функцията $F(x)$, която първоначално е дефинирана и е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$, то всички интеграли от тази функция върху интервали с дължина 2π са равни помежду си, т. е. за всяко x е изпълнено равенството

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt=\int_{-\pi+x}^{\pi+x} F(t)\,dt. \tag{8.50}$$

Доказателство. От адитивността на интеграла имаме

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} F(t)dt=\int_{-\pi+x}^{-\pi} F(t)dt+\int_{-\pi}^{\pi} F(t)dt+\int_{\pi}^{\pi+x} F(t)dt. \tag{8.51}$$

С помощта на смяната $y=t+2\pi$ ще получим, използвайки условието за периодичност $F(y-2\pi)=F(y)$, че

$$\int_{-\pi+x}^{-\pi} F(t)dt=\int_{\pi+x}^{\pi} F(y-2\pi)dy=\int_{\pi+x}^{\pi} F(y)dy=-\int_{\pi}^{\pi+x} F(y)dy. \tag{8.52}$$

От (8.51) и (8.52) следва съотношението (8.50).

Нека сега функцията $f(x)$ е периодичното продължение върху цялата безкрайна права на функцията $f(x)$, която първоначално е дефинирана и частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Да пресметнем частичната сума на тригонометричния ред на Фурие $S_n(x, f)$ на функцията f в точката x:

$$S_n(x, f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\,.\cos kx+b_k\,.\sin kx).$$

Като използваме формулите за коефициентите на Фурие

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)dy,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ky)dy,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ky)dy\quad (k=1, 2, \dots)$$

и линейното свойство на интеграла, изразът за $S_n(x, f)$ може да се запише в следния вид:

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ky.\cos kx+\sin ky\,.\sin kx)\right]dy=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(y-x)\right]dy.$$

Чрез смяна на променливата $y=t+x$ получаваме

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt.$$

Накрая използваме лема 1 и забелязваме, че подинтегралната функция в последния интеграл е периодична функция на аргумента t с период 2π. Получаваме

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt. \tag{8.53}$$

Да пресметнем сумата, стояща в квадратните скоби на (8.53). За тази цел да отбележим, че за всяко естествено число k и за всяко реално число t е изпълнено равенството

$$2\sin\frac{t}{2}\cos kt=\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t.$$

Като сумираме това равенство по всички стойности на k от 1 до n, ще получим

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\sin\frac{t}{2}.$$

Оттук имаме

$$2\sin\frac{t}{2}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]=\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t$$

и следователно

$$\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}. \tag{8.54}$$

Заместваме (8.54) в (8.53) и окончателно получаваме следната формула за n-тата частична сума на тригонометричен ред на Фурие:

$$S_n(x,f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt, \tag{8.55}$$

която е валидна за всяка точка от безкрайната права.

Забележка. От формула 8.55 и от факта, че всички частични суми $S_n(x, 1)$ на функцията $f(x)\equiv 1$ са равни на единица, следва равенството

$$1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.56}$$

3. Спомагателни твърдения. Ще докажем следното твърдение.

Лема 2. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е продължена периодично с период 2π върху цялата безкрайна права. Тогава за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta(\varepsilon)>0$ такова, че за всички u, удовлетворяващи условието $|u|\leq\delta$, е изпълнено неравенството

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+t)-f(t)|\,dt<\varepsilon.$$

Доказателство. Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Съгласно теорема 8.8 (за затвореността на тригонометричната система) съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че

$$\|f(x)-T(x)\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T(t)]^2dt}<\frac{\varepsilon}{3\sqrt{2\pi}},$$

и затова въз основа на неравенството на Коши—Буняковски* имаме

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-T(t)|\,dt\leq\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-T(t)]^2dt\,.\int_{-\pi}^{\pi}dt}<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.57}$$

От неравенството (8.57) и от периодичността (с период 2π) на функциите $f(t)$ и $T(t)$ получаваме, че за всяко реално u

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-T(t+u)|\,dt<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.58}$$

Тъй като модулът от сумата на три израза не надминава сумата от модулите на тези изрази, то за всяко реално u е изпълнено неравенството

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-f(t)|\,dt\leq\int_{-\pi}^{\pi}|f(t+u)-T(t+u)|\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}|T(t+u)-T(t)|\,dt+\int_{-\pi}^{\pi}|T(t)-f(t)|\,dt. \tag{8.59}$$

Сега остава само да забележим, че от непрекъснатостта на тригонометричния полином и теоремата на Кантор (вж. теорема 4.16 от част I) за фиксираното от нас $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за $|u|\leq\delta$ и за всички t от $[-\pi, \pi]$

$$|T(t+u)-T(t)|<\frac{\varepsilon}{6\pi},$$

поради което

* Вж. неравенство (8.7) за $a=-\pi$ и $b=\pi$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |T(t+u)-T(t)|\,dt \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.60}$$

Съпоставяме неравенството (8.59) с неравенствата (8.57), (8.58) и (8.60). Получаваме

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+u)-f(t)|\,dt < \varepsilon \tag{8.61}$$

за всички u, за които $|u| \leq \delta$. Лемата е доказана.

Ще изведем от лема 2 редица важни за по-нататък следствия.

Следствие 1. Ако функцията $f(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е периодично (с период 2π) продължена върху цялата реална права, а x е произволна фиксирана точка от сегмента $[-\pi, \pi]$, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt < \varepsilon \tag{8.62}$$

за $|u| \leq \delta$.

Доказателство. Извършваме в интеграла, стоящ в лявата част на (8.62), смяна на променливата $\tau = x+t$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt = \int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau,$$

и забелязваме, че (поради равенството (8.50))

$$\int_{-\pi+x}^{\pi+x} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\tau+u)-f(\tau)|\,d\tau.$$

Очевидно е, че неравенството (8.62) е следствие от (8.61).

Следствие 2. Ако всяка от функциите $f(t)$ и $g(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права, то функцията

$$I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\,dt$$

е непрекъсната функция на променливата x в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Нека x е произволна точка от сегмента $[-\pi, \pi]$. Тогава

$$I(x+u)-I(x) = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t+u)-f(x+t)]g(t)\,dt$$

и понеже частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $g(t)$ удовлетворява условието за ограниченост $|g(t)| \leq M$ в този сегмент, то

$$|I(x+u)-I(x)| \leq M.\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t+u)-f(x+t)|\,dt$$

и затова поради (8.62) за всяко x

$$|I(x+u)-I(x)| < \varepsilon, \qquad \text{ако } |u| \leq \delta(\varepsilon).$$

Непрекъснатостта на функцията $I(x)$ в точката x е доказана.

Следствие 3. Ако всяка от функциите $f(t)$ и $g(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодично (с период 2π) са продължени върху цялата безкрайна права, то тригонометричните коефициенти на Фурие на функцията $F(x, t) = f(x+t)\,g(t)$ при разлагането ѝ по променливата t

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\cos(nt)\,dt, \tag{8.63}$$

$$b_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin(nt)\,dt \tag{8.64}$$

клонят към нула (при $n\to\infty$) равномерно по x в сегмента $[-\pi, \pi]$ (а следователно и на цялата безкрайна права).

Доказателство. За произволна фиксирана точка x от сегмента $[-\pi, \pi]$ функцията $F(x, t) = f(x+t)\,g(t)$ е частично непрекъсната функция на аргумента t в сегмента $[-\pi, \pi]$ и затова за тази функция е в сила равенството на Парсевал*

$$\frac{a_0^2(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k^2(x) + b_k^2(x)] =$$

* Вж. следствие I от п. 3, § 3 на тази глава.

$$(8.65)\qquad =\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)\, g^2(t)\, dt.$$

От равенството (8.65) следва сходимостта на реда, стоящ в лявата му част, във всяка фиксирана точка x от сегмента $[-\pi, \pi]$. Тъй като указаният ред е с *неотрицателни* членове, то за доказателството на равномерната в сегмента $[-\pi, \pi]$ сходимост на указания ред по силата на теоремата на Дини* е достатъчно да докажем, че както функциите $a_n(x)$ и $b_n(x)$, така и сумата на реда (8.65) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x+t)g^2(t)dt$ са непрекъснати функции на променливата x в сегмента $[-\pi, \pi]$. Но това веднага следва от предишното следствие (достатъчно е да отчетем, че квадратът на частично непрекъсната функция е пак частично непрекъсната функция и че $\cos nt$ и $\sin nt$ при произволно фиксирано n са непрекъснати функции).

Следствие 4. Ако всяка от функциите $f(t)$ и $g(t)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е продължена периодично (с период 2π) върху цялата безкрайна права, то редицата

$$(8.66)\qquad \bar{\bar{c}}_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt$$

клони към нула равномерно по x в сегмента $[-\pi, \pi]$ (а следователно и на цялата безкрайна права).

Доказателство. Достатъчно е да отчетем, че

$$\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]=\cos(nt)\sin\frac{t}{2}+\sin(nt)\cos\frac{t}{2},$$

и да приложим предишното следствие, вземайки в (8.63) вместо функцията $g(t)$ функцията $g(t)\sin\frac{t}{2}$, а в (8.64) вместо $g(t)$ функцията $g(t)\cos\frac{t}{2}$.

4. Принцип за локализация. В тази точка ще докажем, че въпросът за това, сходящ или разходящ е тригонометричният ред на Фурие на частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодичната (с период 2π) функция $f(x)$ в дадена точка x, се решава от поведението на функцията $f(x)$ в колкото искаме малка околност на точката x. Това забележително свойство на тригонометричния ред

* Вж. теорема 2.4 (формулировката в термини на редове).

на Фурие е прието да се нарича принцип за локализация.

Ще започнем с доказателството на една важна лема.

Лема 3 (лема на Риман). Ако функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права и ако тази функция е равна на нула в някакъв сегмент $[a, b]$*, то за произволно положително число δ, по-малко от $\frac{b-a}{2}$, тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ клони към нула равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$.

Доказателство. Нека δ е произволно положително число, по-малко от $\frac{b-a}{a}$. Частичната сума на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ в произволна точка x от безкрайната права се определя от равенството (8.55). Полагайки

$$(8.67)\qquad g(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}} & \text{при } \delta\leq|t|\leq\pi,\\[2mm] 0 & \text{при } |t|<\delta\end{cases}$$

и отчитайки, че $f(x+t)$ е равна на нула, при условие че x принадлежи на сегмента $[a+\delta, b-\delta)$, а t принадлежи на сегмента $|t|\leq\delta$**, можем по следния начин да препишем равенството (8.55) за произволна точка x от сегмента $[a+\delta, b-\delta]$:

$$S_n(x, f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

Остава да вземем предвид, че редицата, стояща в дясната част на последното равенство, поради следствие 4 от т. 3 клони към нула равномерно по x върху цялата безкрайна права. Лемата е доказана.

Следните теореми следват непосредствено от доказаната лема.

Теорема 8.11. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и е продължена периодично (с период 2π) върху цялата безкрайна права и нека $[a, b]$ е някакъв сегмент. При произволно положително δ, по-малко от $\frac{b-a}{2}$, за да бъде тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ сходящ (към тази функция) равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$, достатъчно е да съ-

* Сегментът $[a, b]$ е съвсем произволен. В частност този сегмент може да не се съдържа изцяло в $[-\pi, \pi]$.

** Поради това, че функцията $f(x)$ е равна на нула върху целия сегмент $[a, b]$.

ществува частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодична (с период 2π) функция $g(x)$, имаща равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$ тригонометричен ред на Фурие и съвпадаща в сегмента $[a, b]$ с функцията $f(x)$.

Доказателство. Прилагаме лема 3 за разликата $[f(x)-g(x)]$. Получаваме, че тригонометричният ред на Фурие на разликата $[f(x)-g(x)]$ при произволно δ от интервала $0<\delta<(b-a)/2$ клони към нула равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$, а оттук и от равномерната в сегмента $[a, b]$ сходимост на тригонометричния ред на Фурие на функцията $g(x)$ следва равномерната в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$ сходимост на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$. Фактът, че последният ред клони в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$ именно към функцията $f(x)$, се получава непосредствено от следствие 5, т. 3, § 3 на тази глава. Теоремата е доказана.

Теорема 8.12. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и продължена периодично (с период 2π) върху цялата безкрайна права и нека x_0 е някоя точка от безкрайната права. За да бъде тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ сходящ в точката x_0, е достатъчно да съществува частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодична (с период 2π) функция $g(x)$, имаща сходящ в точката x_0 тригонометричен ред на Фурие и съвпадаща с $f(x)$ в произволно малка δ-околност на точката x_0.

Доказателство. Достатъчно е да приложим лема 3 към разликата $[f(x)-g(x)]$ върху сегмента $\left[x_0-\frac{\delta}{2}, x_0+\frac{\delta}{2}\right]$ и да отчетем, че от сходимостта на тригонометричните редове на функциите $[f(x)-g(x)]$ и $g(x)$ в точката x_0 следва сходимостта в тази точка и на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$. Теоремата е доказана.

Теорема 8.12 не дава конкретни условия, осигуряващи сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ в точката x_0. Тя показва само, че тези условия се определят единствено от поведението на $f(x)$ в произволно малка околност на точката x_0 (т. е. имат локален характер).

5. Равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие за функции от класа на Хьолдер. В тази и в следващите точки ще се занимаваме с уточняване на условията, осигуряващи равномерна сходимост и сходимост в дадена точка x_0 на тригонометричния ред на Фурие.

Ще докажем следната основна теорема.

Теорема 8.13. Ако функцията $f(x)$ принадлежи в сегмента $[-\pi, \pi]$ на класа на Хьолдер C^α с произволен положителен показател α $(0<\alpha\leq 1)$ и ако освен това $f(-\pi)=f(\pi)$, то тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ (към тази функция) равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Доказателство. Както обикновено, ще считаме, че функцията $f(x)$ е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права. Условието $f(-\pi)=f(\pi)$ осигурява така продължената функция да принадлежи на класа на Хьолдер C^α върху цялата безкрайна права.

Нека x да е произволна точка от сегмента $[-\pi, \pi]$. Умножаваме двете страни на равенството (8.56) с $f(x)$ и изваждаме така полученото равенство от (8.55). Получаваме равенството

$$S_n(x, f)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+t)-f(x)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.68}$$

От условието, че $f(x)$ принадлежи на класа на Хьолдер C^α, следва, че съществува константа M такава, че

$$|f(x+t)-f(x)|\leq M t^\alpha \tag{8.69}$$

поне когато x и t принадлежат на сегмента $[-\pi, \pi]$.

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$ и нека $\delta>0$ да удовлетворява неравенството

$$\frac{M}{\alpha}\cdot\delta^\alpha<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.70}$$

Представяме сегмента $[-\pi, \pi]$ като сума от сегмента $|t|\leq\delta$ и на множеството $\delta\leq|t|\leq\pi$ и записваме равенството (8.68)

$$\begin{aligned} S_n(x, f)-f(x)=&\frac{1}{\pi}\int_{|t|\leq\delta}[f(x+t)-f(x)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+\\ &+\frac{1}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}f(x+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt-\frac{f(x)}{\pi}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt. \end{aligned} \tag{8.71}$$

За оценката на първия от интегралите в дясната страна на (8.71) ще се възползуваме от неравенството (8.69) и ще използуваме, че $\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\leq\frac{\pi}{2|t|}$ за всички t от сегмента $[-\pi, \pi]$*. Ще получим, че

* Отбелязаното неравенство веднага следва от факта, че функцията

за всяко естествено число n и за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ е вярно

$$\left|\int\limits_{|t|\leq\delta} [f(x+t)-f(x)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|\leq$$

$$\leq\int\limits_{|t|\leq\delta}|f(x+t)-f(x)|\,\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\,dt\leq$$

$$\leq\frac{M\pi}{2}\int\limits_{|t|\leq\delta}|t|^{\alpha-1}\,dt=M\pi\int\limits_0^{\delta}t^{\alpha-1}\,dt=$$

$$=\frac{M\pi}{\alpha}\cdot\delta^{\alpha}.$$

Оттук въз основа на (8.70) за всяко естествено число n и за всяко x от сегмента $[-\pi, \pi]$ имаме

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{|t|\leq\delta}[f(x+t)-f(x)]\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8.72}$$

Вторият от интегралите в дясната страна на (8.71) с помощта на частично непрекъснатата в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция $g(t)$ (8.67) се записва във вида

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi}f(x+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

По силата на следствие 4 от т. 3 дясната страна на последното равенство клони към нула (при $n\to\infty$) равномерно по x в сегмента $[-\pi, \pi]$. Затова за фиксираното от нас $\varepsilon>0$ съществува естествено число N_1 такова, че

$\frac{\sin x}{x}$ при изменението на x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ намалява от 1 до $2/\pi$. Намаляването на функцията $\frac{\sin x}{x}$ от своя страна следва от това, че $\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{\cos x}{x^2}(x-\operatorname{tg}x)<0$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$, тъй като $x<\operatorname{tg}x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$ (вж. глава 4, част I).

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi}f(x+t)\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{8.73}$$

за всички $n\geq N_1$ и всички x от сегмента $[-\pi, \pi]$.

За да оценим последния интеграл от дясната страна на (8.71), ще отбележим, че с помощта на частично непрекъснатата функция (8.67) този интеграл се записва във вида

$$\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]dt.$$

Интегралът, стоящ в дясната част на последното равенство, клони към нула (при $n\to\infty$) по силата на все същото следствие 4 от т. 3 (достатъчно е да приложим това следствие към функцията $f(x)\equiv1$). Отчитаме също, че функцията $f(x)$ е ограничена в сегмента $[-\pi, \pi]$, и получаваме, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число N_2 такова, че

$$\left|\frac{f(x)}{\pi}\int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{8.74}$$

за всички $n\geq N_2$ и всички точки x от сегмента $[-\pi, \pi]$.

Обозначаваме с N по-голямото от числата N_1 и N_2 и получаваме по силата на (8.71) — (8.74), че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число N такова, че

$$|S_n(x,f)-f(x)|<\varepsilon$$

за всяко $n\geq N$ и всички x от сегмента $[-\pi, \pi]$. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Очевидно при условията на теорема 8.13 тригонометричният ред на Фурие е сходящ равномерно не само в сегмента $[-\pi, \pi]$, но и равномерно върху цялата безкрайна права (към функцията, която е периодичното (с период 2π) продължение на функцията $f(x)$ върху цялата безкрайна права).

Забележка 2. Ще отбележим, че при оценката на интегралите (8.73) и (8.74) използувахме само частичната непрекъснатост (и следващата от нея ограниченост) на функцията $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$ (принадлежността на $f(x)$ на класа C^{α} на Хьолдер при оценката на тези интеграли не се използува).

Забележка 3. Естествено възниква въпросът за това, може ли в теорема 8.13 да се намали изискването за гладкост на функцията $f(x)$ със запазване на твърдението на тази теорема за равномерна сходимост на реда на Фурие на функцията $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$.

Ще припомним, че принадлежността на $f(x)$ в сегмента $[-\pi, \pi]$ към класа на Хьолдер C^α по дефиниция означава, че модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в този сегмент има ред

$$\omega(\delta, f) = O(\delta^\alpha).$$

Ще формулираме без доказателство така наречената теорема на Дини—Липшиц, която твърди, че за равномерната в сегмента $[-\pi, \pi]$ сходимост на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ е достатъчно тази функция да удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$ и нейният модул на непрекъснатост в сегмента $[-\pi, \pi]$ да има ред

$$\omega(x, f) \overset{=}{=} o\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right),$$

т.е. да бъде безкрайно малка величина при $\delta \to 0$, имаща по-висок ред, отколкото $\frac{1}{\ln(1/\delta)}$.

Теоремата на Дини—Липшиц съдържа окончателно (чрез модула на непрекъснатост) условие за равномерна сходимост на тригонометричния ред на Фурие към тази функция, тъй като може да се построи функция $f(x)$, удовлетворяваща условието $f(-\pi)=f(\pi)$ с модул на непрекъснатост, имащ в сегмента $[-\pi, \pi]$ ред $O\left(\frac{1}{\ln(1/\delta)}\right)$, и с тригонометричен ред на Фурие, който е разходящ на множество от точки, което е навсякъде гъсто в сегмента $[-\pi, \pi]$*.

В условията на теорема 8.13 след периодичното (с период 2π) продължение на функцията $f(x)$ се оказа, че тя принадлежи класа на Хьолдер C^α върху цялата безкрайна права. Естествено възниква въпросът за поведението на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$, която принадлежи на класа на Хьолдер C^α само в някакъв сегмент $[a, b]$, а навсякъде извън този сегмент удовлетворява само обикновеното изискване за частична непрекъснатост.

Отговор на този въпрос дава следната теорема.

Теорема 8.14. Нека функцията $f(x)$ е частично непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и периодично (с период 2π) е продължена върху цялата безкрайна права. Нека освен това в някакъв сегмент $[a, b]$,

* Доказателство на теоремата на Дини—Липшиц и конструкция на току-що указания пример може да намерите например в книгата А. Зигмунд, «Тригонометрические ряды», т. I, «Мир», 1965, стр. 108 и 477.

имащ дължина, по-малка от 2π, тази функция принадлежи на класа на Хьолдер C^α с произволен положителен показател α $(0<\alpha\leq 1)$. Тогава за всяко δ от интервала $0<\delta<(b-a)/2$ тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ клони (към тази функция) равномерно в сегмента $[a+\delta, b-\delta]$.

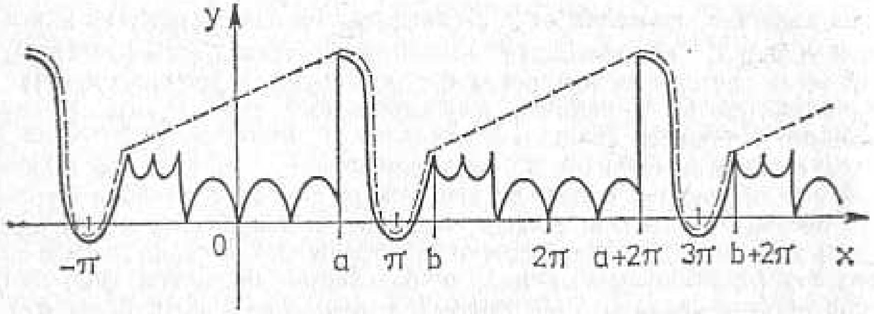
Доказателство. Да построим функция $g(x)$, която в сегмента $[a, b]$ съвпада с $f(x)$, в сегмента $[b, a+2\pi]$ е линейна функция от вида $Ax+B$, приемаща значение $f(b)$ при $x=b$ и $f(a)$ при $x=a+2\pi$*, и която периодично (с период 2π) е продължена от сегмента $[a, a+2\pi]$ върху цялата безкрайна права (на фиг. 8.1 непрекъснатата линия представлява графиката на функцията $f(x)$, а пунктираната линия — графиката на построената по нея функция $g(x)$.

Очевидно, че построената от нас функция $g(x)$ удовлетворява условието $g(-\pi)=g(\pi)$ и принадлежи на класа на Хьолдер C^α (със същия положителен показател α, както и $f(x)$) върху цялата безкрайна права**. Поради теорема 8.13 и забележка 1 тригонометричният ред на Фурие на функцията $g(x)$ е равномерно сходящ в цялата безкрайна права, а затова поради теорема 8.11 тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ (към тази функция) равномерно в сегмента $[a-\delta, b+\delta]$ за всяко δ от интервала $0<\delta<(b-a)/2$. Теоремата е доказана.

Забележка 4. Твърдението на теорема 8.14 остава в сила и за сегмент $[a, b]$, имащ дължина, равна на 2π (т.е. за случая $b=a+2\pi$), но в този случай при доказателството на теоремата трябва, фиксирайки произволно δ от интервала $0<\delta<\pi$, да вземем функцията $g(x)$, съвпадаща с $f(x)$ в сегмента $\left[a+\frac{\delta}{2}, a+2\pi-\frac{\delta}{2}\right]$, линейна в сегмента $\left[a+2\pi-\frac{\delta}{2}, a+2\pi+\frac{\delta}{2}\right]$ и периодично (с период 2π) продължена от сегмента $\left[a+\frac{\delta}{2}, a+2\pi+\frac{\delta}{2}\right]$ върху цялата безкрайна права. Ако сегментът $[a, b]$ има дължина, по-голяма от 2π, то от принадлежността на $f(x)$ на класа на Хьолдер C^α в този сегмент и от условието за периодичност на $f(x)$ (с период 2π)

* Условието функцията $Ax+B$ да приема стойността $f(b)$ при $x=b$ и $f(a)$ при $x=a+2\pi$ еднозначно определя константите A и B: $A=\frac{f(a)-f(b)}{a+2\pi-b}$, $B=\frac{(a+2\pi)f(b)-bf(a)}{a+2\pi-b}$.

** Достатъчно е да отчетем, че $g(x)$ е навсякъде непрекъсната и че линейната функция има ограничена производна и затова принадлежи на класа на Хьолдер C^α за всяко $\alpha\leq 1$.



Фиг. 8. 1

следва, че $f(x)$ принадлежи към класа C^{α} върху цялата безкрайна права, т. е. този случай се свежда към теорема 8.13.

6. Върху сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на частично хьолдерова функция

Дефиниция 1. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е частично хьолдерова в сегмента $[a, b]$, ако тази функция е частично непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и ако сегментът $[a, b]$ с помощта на краен брой точки $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ се разделя на подсегменти $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, на всеки от които тази функция принадлежи към класа C^{α_k} с някакъв положителен показател α_k $(0<\alpha_k\leq 1)$, като при определянето на класа на Хьолдер в подсегмента $[x_{k-1}, x_k]$ за стойността на функцията в краищата на сегмента трябва да се вземат граничните стойности $f(x_{k-1}+0)$ и $f(x_{k-1}-0)$*.

С други думи, областта, където е зададена всяка частично хьолдерова функция, се разпада на краен брой сегменти без общи вътрешни точки, на всеки от които тази функция принадлежи към класа на Хьолдер с някакъв положителен показател.

Всеки от тези сегменти ще наричаме област на гладкост на функцията.

Дефиниция 2. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е частично гладка в сегмента $[a, b]$, ако тази функция е частично непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и притежава в този сегмент частично непрекъсната производна**, т. е. ако функцията $f(x)$ е частично

* Както за всяка частично непрекъсната функция, за частично хьолдерова функция стойностите във всяка точка x_k трябва да са равни на полусумата от дясната и лявата гранична стойност в тази точка, т. е. трябва да е в сила равенството $f(x_k)=\frac{1}{2}\,[f(x_k+0)+f(x_k-0)]$.

** Вж. дефиниция 1 от т. 2, § 4 на тази глава.

непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и нейната производна $f'(x)$ съществува и е непрекъсната навсякъде в този сегмент с изключение може би на краен брой точки, във всяка от които функцията $f'(x)$ има крайна дясна и лява гранична стойност.

Ясно е, че всяка частично гладка в сегмента $[a, b]$ функция $f(x)$ е частично хьолдерова в този сегмент.

В сила е следната основна теорема.

Теорема 8.15. Нека $f(x)$ е частично хьолдерова в сегмента $[-\pi, \pi]$ функция, която е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права. Тогава тригонометричният ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ във всяка точка x от безкрайната права към стойността $f(x)=\frac{1}{2}\,[f(x+0)+f(x-0)]$, при това сходимостта на този ред е равномерна във всеки фиксиран сегмент, лежащ в областта на гладкост на функцията $f(x)$.

Доказателство. Твърдението на теоремата за равномерната сходимост във всеки фиксиран сегмент, лежащ в областта на гладкост, веднага следва от теорема 8.14. Оттук следва и сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ във всяка вътрешна точка от областта на гладкост на функцията $f(x)$*. Остава да докажем сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)$ във всяка точка на съединение на две области на гладкост.

Да фиксираме една от тези точки и да я означим с x. Тогава съществуват константи M_1 и M_2 такива, че при всяко достатъчно малко положително t е изпълнено неравенството

$$|f(x+t)-f(x+0)|\leq M_1\,.\,t^{\alpha_1}\quad(0<\alpha_1\leq 1), \tag{8.75}$$

а при всяко достатъчно малко отрицателно t е в сила неравенството

$$|f(x+t)-f(x-0)|\leq M_2\,|\,t\,|^{\alpha_2}\quad(0<\alpha_2\leq 1). \tag{8.76}$$

Да означим с M по-голямото от числата M_1 и M_2, а с α по-малкото от числата α_1 и α_2. Тогава при $|\,t\,|\leq\delta$ в дясната част на всяко от неравенствата (8.75) и (8.76) може да напишем $M.\,|\,t\,|^{\alpha}$.

Да фиксираме сега произволно $\varepsilon>0$ и по него $\delta>0$, удовлетворяващо неравенството (8.70) и толкова малко, че при $|\,t\,|\leq\delta$ са в сила и двете неравенства (8.75) и (8.76), като в дясната част на тези неравенства може да вземем числото $M\,.\,|\,t\,|^{\alpha}$. Повтаряйки разсъжденията, проведени при доказателството на теорема 8.13, ще достигнем до равенството (8.71) и за доказателството на тео-

* Тъй като всяка вътрешна точка от участъка на гладкост може да се обхване със сегмент, лежащ в този участък изцяло.

ремата остава да се убедим, че във фиксираната точка x са справедливи оценките (8.72), (8.73) и (8.74). В забележка 2 на т. 5 отбелязахме, че оценките (8.73) и (8.74) са валидни за всяка частично непрекъсната и периодична (с период 2π) функция. Остава да докажем валидността на оценката (8.72) за всички естествени числа.

Имайки предвид, че $f(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ и че*

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=2\int_{0}^{\delta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=2\int_{-\delta}^{0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

може да запишем интеграла, стоящ в лявата част на (8.72), по следния начин:

$$\frac{1}{\pi}\int_{|t|\le\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+t)-f(x+0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt+ \tag{8.77}$$

* Тъй като функцията

$$\varphi(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

е четна, т. е. за всяко t удовлетворява условието $\varphi(-t)=\varphi(t)$, то имаме $\int_{0}^{\delta}\varphi(t)\,dt=\int_{-\delta}^{0}\varphi(t)\,dt$ (достатъчно е в един от тези интеграли да извършим смяната $t=-\tau$) и затова

$$\int_{-\delta}^{\delta}\varphi(t)\,dt=2\int_{0}^{\delta}\varphi(t)\,dt=2\int_{-\delta}^{0}\varphi(t)\,dt.$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x+0)-f(x-0)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

За да оценим интегралите, стоящи в дясната част на (8.77), ще се възползуваме от неравенствата (8.75) и (8.76), като поставим в десните части на тези неравенства числото $M\,.\,|t|^{\alpha}$. Като използуваме вече приложената при доказателството на теорема 8.13 оценка

$$\frac{1}{2\left|\sin\frac{t}{2}\right|}\le\frac{\pi}{2|t|}\quad(\text{при } |t|\le\pi)$$

и неравенството (8.70), ще получим

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|t|\le\delta}[f(x+t)-f(x)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right|\le$$

$$\le\frac{M}{2}\left[\int_{0}^{\delta}t^{\alpha-1}\,dt+\int_{-\delta}^{0}|t|^{\alpha-1}\,dt\right]=$$

$$=\frac{M}{\alpha}\,.\,\delta^{\alpha}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценката (8.72), а с нея и теоремата са доказани.

Следствие 1. Твърдението на теорема 8.15 ще бъде сигурно вярно, ако в нейната формулировка вместо частично хьолдерова вземем частично гладка (в сегмента $[-\pi,\pi]$) функция, която е периодично (с период 2π) продължена върху цялата безкрайна права.

За да формулираме още едно следствие, ще въведем едно ново понятие. Нека $0<\alpha\le1$.

Определение 3. Ще казваме, че функцията $f(x)$ *удовлетворява в дадената точка x отляво (отдясно) условието на Хьолдер* от ред α, ако за функцията $f(x)$ съществува в точката x дясната (лявата) граница и ако съществува такава константа M, че за всички достатъчно малки положителни (отрицателни) t е изпълнено неравенството

$$\frac{|f(x+t)-f(x+0)|}{t^{\alpha}}\le M\quad\left(\frac{|f(x+t)-f(x-0)|}{|t|^{\alpha}}\le M\right).$$

Очевидно, че ако функцията $f(x)$ има в дадената точка x дясна (лява) производна, т. е. съществува границата

$$\lim_{t\to 0+0} \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} \quad \left(\lim_{t\to 0-0} \frac{f(x+t)-f(x-0)}{t} \right),$$

то функцията $f(x)$ удовлетворява в тази точка отдясно (отляво) условието на Хьолдер от произволен ред $\alpha \leqq 1$.

Следствие 2 (условие за сходимост на тригонометричен ред на Фурие в дадена точка). За сходимостта на тригонометричния ред на Фурие на частично непрекъснатата и периодична (с период 2π) функция $f(x)$ в дадена точка от безкрайната права е достатъчно функцията $f(x)$ да удовлетворява в точката x отдясно условието на Хьолдер от някакъв положителен ред α_1 и отляво условието на Хьолдер от някакъв положителен ред α_2 (и още повече достатъчно е функцията $f(x)$ да има в точката x лява и дясна производна).

Доказателство. Достатъчно е да забележим, че ако функцията $f(x)$ удовлетворява в точката x отдясно (отляво) условието на Хьолдер от ред α_1 (от ред α_2), то съществува константа M_1 (константа M_2) такава, че за всички достатъчно малки положителни (отрицателни) t е в сила неравенството (8.75) (неравенството (8.76)). Но изложеното от нас доказателство на теорема 8.15 използва само неравенствата (8.75) и (8.76), частичната непрекъснатост и периодичността на функцията $f(x)$.

Пример. Без да пресмятаме коефициентите на Фурие на функцията

$$f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при } -\pi \leqq x < 0, \\ 1/2 & \text{при } x=0, \\ \sqrt{x} & \text{при } 0 < x \leqq \pi, \end{cases}$$

може да твърдим, че тригонометричният ред на Фурие на тази функция е сходящ в точката $x=0$ към стойността $\frac{1}{2}$, тъй като функцията $f(x)$ има в тази точка лява производна и удовлетворява отдясно условието на Хьолдер от ред $\alpha_2=\frac{1}{2}$.

7. Сумируемост на тригонометричния ред на Фурие на непрекъснатата функция по метода на средните аритметични. Вече отбелязахме, че тригонометричният ред на Фурие от непрекъсната и периодична (с период 2π) функция може да бъде разходящ (вж. т. 1). Ще докажем, че този ред въпреки това винаги е сумируем (равномерно в цялата безкрайна права) по метода на Чезаро (или по метода на средните аритметични)*.

Теорема 8.16 (теорема на Фейер)**. Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-\pi, \pi]$ и удовлетворява условието $f(-\pi)=f(\pi)$, то средното аритметично от частичните суми на нейния тригонометричен ред на Фурие

$$\sigma_n(x, f)=\frac{S_0(x, f)+S_1(x, f)+\cdots+S_{n-1}(x, f)}{n}$$

клони (към тази функция) равномерно в сегмента $[-\pi, \pi]$ (а когато функцията е продължена върху цялата безкрайна права с период 2π, то равномерно в цялата безкрайна права).

Доказателство. От равенството (8.55) за $S_n(x, f)$ получаваме

$$\sigma_n(x, f)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right] dt. \tag{8.78}$$

За да пресметнем сумата, стояща в квадратните скоби на (8.78), ще сумираме тъждествата

$$2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\cos kt-\cos(k+1)t$$

за всички $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ще получим

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=$$

$$=1-\cos nt=2\sin^2\frac{nt}{2}.$$

С помощта на последното равенство (8.78) се преобразува във вида

$$\sigma_n(x, f)=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt. \tag{8.79}$$

От (8.79) веднага следва, че

$$\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=1, \tag{8.80}$$

тъй като лявата част на (8.80) е равна на средното аритметично на частичните суми на тригонометричния ред на Фурие на функцията $f(x)\equiv 1$, а всички указани частични суми са тъждествено равни на единица (вж. т. 2).

* Вж. т. 1, § 7, гл. 1.

** Л. Фейер е доказал своята теорема през 1904 г. Л. Фейер — унгарски математик (1880—1959).

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. По теоремата на Вайерщрас 8.7 съществува тригонометричен полином $T(x)$ такъв, че

$$|f(x)-T(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2} \tag{8.81}$$

за всички x от безкрайната права. От линейността на средните аритметични имаме $\sigma_n(x,f)=\sigma_n(x,f-T)+\sigma_n(x,T)$, така че

$$|\sigma_n(x,f)-T(x)|\leq|\sigma_n(x,f-T)|+|\sigma_n(x,T)-T(x)|. \tag{8.82}$$

Записваме равенството (8.79) за функцията $[f(x)-T(x)]$, отчитайки неотрицателността на функцията $\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}$, наричана ядро на Фейер, и използваме оценката (8.81) и равенството (8.80). Получаваме

$$|\sigma_n(x,f-T)|\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+t)-T(x+t)|\,\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\leq \tag{8.83}$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\pi\,.\,n}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Неравенството (8.83) е изпълнено за всяко естествено число n. Да отбележим сега, че тригонометричният ред на Фурие на полинома $T(x)$ съвпада с този полином. Оттук следва, че всички частични суми $S_n(x,T)$, започвайки от някакво естествено число n_0, са равни на $T(x)$. Но това ни позволява за фиксираното по-горе произволно $\varepsilon>0$ да намерим естествено число N_ε такова, че

$$|\sigma_n(x,T)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{8.84}$$

за всяко $n\geq N$ и всяко x.

От неравенствата (8.82), (8.83) и (8.84) заключаваме, че $|\sigma_n(x,f)-f(x)|<\varepsilon$ за всяко $n\geq N$ и всяко x. Теоремата е доказана.

8. Заключителни бележки. 1°. За решаването на редица конкретни задачи се налага да развиваме функцията в тригонометричен ред на Фурие не на сегмента $[-\pi,\pi]$, а на сегмента $[-l,l]$, където l е произволно положително число. За прехода към този случай е достатъчно във всички изложени по-горе разсъждения да заменим

променливата x с $\frac{\pi}{l}\,.\,x$. Разбира се, при такава линейна смяна на променливите всички установени от нас резултати остават валидни. Тези резултати ще се отнасят за тригонометричния ред на Фурие

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right) \tag{8.85}$$

със следните формули за коефициентите на Фурие:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\left(\frac{\pi}{l}kt\right)dt,\quad b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\left(\frac{\pi}{l}kt\right)dt \tag{8.86}$$

$$(k=1,2,\ldots).$$

Няма да формулираме отново всички установени теореми, а само ще отбележим, че във всички формулировки сегментът $[-\pi,\pi]$ трябва да се замени със сегмента $[-l,l]$, а периодът 2π — с период $2l$.

2°. Ще напомним, че функцията $f(x)$ се нарича четна, ако удовлетворява условието $f(-x)=f(x)$, и нечетна, ако удовлетворява условието $f(-x)=-f(x)$.

От вида (8.86) на тригонометричните коефициенти на Фурие следва, че за четна функция $f(x)$ всички коефициенти b_k $(k=1,2,\ldots)$ са равни на нула, а за нечетна функция всички коефициенти a_k $(k=0,1,2,\ldots)$ са равни на нула. По такъв начин една четна функция $f(x)$ се разлага в тригонометричен ред на Фурие само по косинуси:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi}{l}kx,$$

а една нечетна функция $f(x)$ се разлага в тригонометричен ред на Фурие само по синуси:

$$\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{\pi}{l}kx.$$

3°. Ще въведем често употребяваната комплексна форма на записване на тригонометричния ред на Фурие (8.85).

Като използваме съотношенията (вж. т. 3, § 7, гл. 2)

$$e^{-i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx-i\sin\frac{\pi}{l}kx,$$

$$e^{i\frac{\pi}{l}kx}=\cos\frac{\pi}{l}kx+i\sin\frac{\pi}{l}kx,$$

лесно е да се убедим, че тригонометричният ред на Фурие (8.85) с коефициенти на Фурие (8.86) се записва във вида

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\frac{\pi}{l}kx}, \tag{8.87}$$

в който комплексните коефициенти c_k имат вида

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\,.\,e^{i\frac{\pi}{l}kt}\,dt$$

и се изразяват чрез коефициентите (8.86) по формулите

$$c_0=\frac{a_0}{2}\,,\ c_{-k}=\frac{a_k-ib_k}{2}\,,\quad c_k=\frac{a_k+ib_k}{2}\quad (k=1, 2, \ldots).$$

§ 6. Кратни тригонометрични редове на Фурие

1. Понятие за кратен тригонометричен ред на Фурие и за неговите правоъгълни и сферични частични суми. Нека функцията на N променливи $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е дефинирана и интегруема в N-мерния куб $-\pi\leq x_k\leq\pi$ $(k=1, 2, \ldots, N)$. Този куб ще обозначим със символа $\prod$. Удобно е да запишем кратния тригонометричен ред на такава функция направо в комплексна форма, използувайки за съкращаване на записа понятието за скаларно произведение на два N-мерни вектора.

Нека $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е вектор с произволни реални координати $x_1, x_2, \ldots, x_N$, а $n=(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ да е вектор с целочислени координати $n_1, n_2, \ldots, n_N$.

Кратен тригонометричен ред на Фурие на функцията $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ се нарича ред

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\hat{f}_n\, e^{-i(x,\,n)}, \tag{8.88}$$

в който числата $\hat{f}_n$, наричани коефициенти на Фурие, се определят с равенствата

$$\hat{f}_n=\hat{f}_{n_1 n_2\ldots n_N}=$$

$$=(2\pi)^{-N}\,.\int\ldots\int_{\prod} f(y_1, y_2, \ldots, y_N)\, e^{i(y_1 n_1+\cdots+y_N n_N)}\ dy_1\ldots dy_N, \tag{8.89}$$

а символът (x, n) обозначава скаларното произведение на векторите x и n, равно на $x_1\,.\,n_1+x_2\,.\,n_2+\cdots+x_N\,.\,n_N$.

Разбира се, кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) може да се разглежда като ред на Фурие по ортонормираната (в N-мерния куб $\prod$) система*, образувана с помощта на всевъзможните произведения от елементите на едномерни тригонометрични системи, взети по променливите $x_1, x_2, \ldots, x_N$ съответно. Тази ортонормирана система е прието да се нарича кратна тригонометрична система.

Както и за всяка ортонормирана система, за кратната тригонометрична система е вярно неравенството на Бесел:

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}_n\right|^2\leq(2\pi)^{-N}\int\ldots\int_{\prod} f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,dx_1\ldots dx_N \tag{8.90}$$

(тук $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е произволна непрекъсната (или интегруема) в N-мерния куб функция).

Да разгледаме въпроса за сходимост на кратен тригонометричен ред на Фурие. Ако в дадена точка $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ такъв ред не е сходящ абсолютно, то въпросът за неговата сходимост (поради теоремата на Риман 1.10) зависи от реда, в който се вземат неговите членове (или което е същото, зависи от реда на сумиране по индексите $n_1, n_2, \ldots, n_N$).
Широко са разпространени два начина за сумиране на кратния тригонометричен ред на Фурие — сферичен и правоъгълен.

Сферични частични суми на кратния тригонометричен ред на Фурие (8.88) се наричат сумите от вида

$$S_\lambda(x, f)=\sum_{|n|\leq\lambda}\hat{f}_n\, e^{-i(x,\,n)},$$

където сумирането е по всички целочислени стойности $n_1, n_2, \ldots, n_N$, удовлетворяващи условието $|n|=\sqrt{n_1^2+n_2^2+\cdots+n_N^2}\leq\lambda$.

Ще казваме, че кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88)

* При това скаларното произведение на две произволни функции се дефинира като интеграл от произведението на тези функции върху куба $\prod$.

е сумируем в дадената точка x по сферичния метод, ако в тази точка съществува границата $\lim\limits_{\lambda\to\infty} S_\lambda(x, f)$.

Правоъгълни частични суми на кратния тригонометричен ред на Фурие (8.88) се наричат сумите от вида

$$S_{m_1, m_2, \ldots, m_N}(x, f) = \sum_{n_1=-m_1}^{m_1} \cdots \sum_{n_N=-m_N}^{m_N} \hat{f}_n e^{-i(x,\, n)}.$$

Ще казваме, че кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) е сумируем в дадената точка x по правоъгълния метод (или по метода на Принсхейм), ако в тази точка съществува границата

$$\lim_{\substack{m_1\to\infty \\ m_2\to\infty \\ \cdots\cdots \\ m_N\to\infty}} S_{m_1, m_2, \ldots, m_N}(x, f)$$

всеки от индексите $m_1, m_2, \ldots, m_N$ клони независимо към безкрайност).

И двата метода за сумиране имат своите преимущества и недостатъци. При разглеждането на кратен тригонометричен ред на Фурие като ред на Фурие по ортонормирана система е естествено да подредим неговите членове по нарастването на $|n|$ и да използуваме сферичните частични суми.

Правоъгълните частични суми се използуват при изследване на поведението на кратните степенни редове около границата на областта му на сходимост. Трябва да отбележим, че определението на сумата на реда като граница на правоъгълните суми (за разлика от определението, опиращо се на границата на сферичните суми) не налага никакви ограничения на безкрайното множество от парциални суми на този ред.

Преди да формулираме условия за сходимост на кратен тригонометричен ред на Фурие, ще определим някои характеристики за гладкост на функция на N променливи.

2. Модул на непрекъснатост и класове на Хьолдер за функции на N променливи. Нека функцията $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е дефинирана и непрекъсната в N-мерната област D.

Определение 1. За всяко $\delta > 0$ модул на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в областта D наричаме точната горна граница от модула на разликата $|f(x') - f(x'')|$ по множеството от всички точки x' и x'', които принадлежат на областта D и разстоянието $\rho(x', x'')$ между които е по-малко от δ.

Модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в областта D ще означаваме със символа $\omega(\delta, f)$.

Определение 2. За произволно $\varkappa$ от полусегмента $(0, 1]$ ще казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в областта D на класа на Хьолдер $C^\varkappa$ с показател $\varkappa$ и ще пишем $f(x) \in C^\varkappa(D)$, ако модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)$ в областта D има ред $\omega(\delta, f) = \bar{\bar{O}}(\delta^\varkappa)$.

Нека сега α е произволно (не непременно цяло) положително число. Винаги можем да представим това число във вида $\alpha = r + \varkappa$, където r е цяло, а $\varkappa$ се съдържа в полусегмента $(0, 1]$.

Определение 3. Ще казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в областта D на класа на Хьолдер C^α с показател $\alpha > 0$ и ще пишем $f(x) \in C^\alpha(D)$, ако всички частни производни на функцията $f(x)$ от ред r са непрекъснати в областта D и всяка частна производна от ред r принадлежи на класа $C^\varkappa(D)$, въведен в определение 2.

3. Условия за абсолютна сходимост на кратен тригонометричен ред на Фурие

Теорема 8.17. Ако функцията $f(x)$ периодично (с период 2π по всяка от променливите) е продължена в E^N и притежава в E^N непрекъснати върху цялото пространство производни от ред $s = [N/2] + 1$, където $[N/2]$ е цялата част на числото $N/2$, то кратният тригонометричен ред на Фурие на функцията $f(x)$ е сходящ към тази функция абсолютно и равномерно в цялото пространство E^N.

Доказателство. Да се договорим да означаваме със символа $\left(\widehat{\dfrac{\partial^m f}{\partial x_k^m}}\right)_n$ коефициента на Фурие на производната $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_k^m}$ с номер $n = (n_1, n_2, \ldots, n_N)$. Чрез интегриране по части получаваме, че $\left(\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_n = i\, n_k \cdot \hat{f}_n$ (за всяко $k = 1, 2, \ldots, N$), така че $\sum\limits_{k=1}^{N} \left|\left(\widehat{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_n\right| = |\hat{f}_n| \cdot (|n_1| + |n_2| + \cdots + |n_N|)$ и следователно

$$|\hat{f}_n| = (|n_1| + |n_2| + \cdots + |n_N|)^{-1} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left|\left(\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_k}}\right)_n\right|. \tag{8.91}$$

Формулата (8.91) е вярна не само за функцията f, но и за всяка частна производна на функцията f до ред $s-1$ включително.

Оттук веднага следва съотношението

$$|\hat{f}_n| \leq (|n_1| + |n_2| + \cdots + |n_N|)^{-s} \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_N=s} \left|\left(\widehat{\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_N^{s_N}}}\right)_n\right|, \tag{8.92}$$

като в дясната част сумираме по всички цели неотрицателни

$s_1, s_2, \ldots, s_N$, удовлетворяващи условието $s_1+s_2+\cdots+s_N=s$ (така че броят на събираемите в тази сума е равен на N^s). От (8.92) следва*, че

$$|\hat{f}_n| \leq \tag{8.93}$$
$$\leq \frac{1}{2}(|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-2s}+\frac{N^s}{2}\sum_{s_1+\cdots+s_N=s}\left|\left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_n\right|^2.$$

Отчитаме, че $s=\frac{N}{2}+\varepsilon$, където $\varepsilon=1$ за четно N и $\varepsilon=\frac{1}{2}$ за нечетно N, и че

$$(|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-2s}=(|n_1|+|n_2|+\cdots+|n_N|)^{-N-2\varepsilon}\leq$$
$$\leq |n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\cdot|n_2|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\ldots|n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}},$$

и получаваме от (8.93), че

$$|\hat{f}_n|\leq\frac{1}{2}|n_1|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\cdot|n_2|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}\cdot|n_N|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}+ \tag{8.94}$$
$$+\frac{N^s}{2}\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_N=s}\left|\left(\frac{\widehat{\partial^s f}}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_n\right|^2.$$

За да бъде кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) абсолютно и равномерно сходящ, е достатъчно (поради признака на Вайерщрас) да докажем сходимостта на мажориращия го числов ред

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}|\hat{f}_n|,$$

но (поради неравенството (8.94)) сходимостта на последния ред е директно следствие от сходимостта за всяко $k=1, 2, \ldots, N$ на числовия ред $\sum\limits_{n_k=-\infty}^{\infty}|n_k|^{-1-\frac{2\varepsilon}{N}}$ и от сходимостта за произволни $s_1, s_2, \ldots, s_N$ на реда

* Използувахме неравенствата $|a|\cdot|b|\leq\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$ и $(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_p|)^2\leq p\,(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_p^2)$.

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_N=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_N^{s_N}}\right)_n\right|^2,$$

следваща от неравенството на Бесел (8.90), приложено към непрекъснатата функция $\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}\ldots\partial x_N^{s_N}}$.

Фактът, че кратният тригонометричен ред на Фурие (8.88) е сходящ именно към функцията $f(x)$, следва от пълнотата на кратната тригонометрична система*. Наистина, ако редът (8.88) би бил равномерно сходящ към някаква функция $g(x)$, то от възможността за почленно интегриране на такъв ред би следвало, че всички коефициенти на Фурие на функцията $g(x)$ съвпадат със съответните коефициенти на Фурие на функцията $f(x)$. Но тогава разликата $[f(x)-g(x)]$ би била ортогонална на всички елементи на кратната тригонометрична система и (поради пълнотата на тази система) би била равна на нула. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Теорема 8.17 може да бъде уточнена. Вярно е следното твърдение: ако функцията $f(x)$, периодична по всяка от променливите си (с период 2π), принадлежи в E^N на класа на Хьолдер C^α при $\alpha>\frac{N}{2}$, то кратният тригонометричен ред на Фурие на $f(x)$ е сходящ (към тази функция) абсолютно и равномерно в цялото пространство E^N.

Изясняването на условията за неабсолютна сходимост на кратния тригонометричен ред на Фурие изисква привличането на по-тънка техника.

* Пълнотата на кратната тригонометрична система веднага следва от пълнотата на съставящите я едномерни тригонометрични системи.

9. Преобразование на Фурие

Ако функцията $f(x)$ е дефинирана в цялата безкрайна права или в полуправата и не е периодична, то естествено е тази функция да се разложи не в тригонометричен ред на Фурие, а в така наречения интеграл на Фурие. Настоящата глава е посветена на изучаването на това разлагане.

Ще започнем с някои насочващи съображения. Нека периодичната в сегмента $[-l, l]$ функция $f(x)$ е разложена в ред на Фурие:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right),$$

където

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,\ a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt,\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt.$$

Като заместим формално изразите за a_k и b_k в разлагането на функцията $f(x)$, получаваме

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}kx\,.\cos\frac{\pi}{l}kt\,dt+$$

$$+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{\pi}{l}kx\,.\sin\frac{\pi}{l}kt\,dt=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+$$

$$+\frac{1}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(t)\left[\cos\frac{\pi}{l}kx\,.\cos\frac{\pi}{l}kt+\sin\frac{\pi}{l}kx\,.\sin\frac{\pi}{l}kt\right]dt,$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi}{l}k(t-x)\,dt.$$

Да предположим, че функцията $f(x)$ е абсолютно интегруема върху цялата права, т.е. че е сходящ несобственият интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$, и да извършим в равенството за $f(x)$ формално граничен преход при $l\to\infty$. Първото събираемо в дясната страна на горното равенство клони към нула при $l\to\infty$, а второто събираемо е интегрална сума за интеграла $\int_0^{\infty}g(\lambda)d\lambda$ на функцията

$$g(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt,$$

ако положим $\lambda_k=\frac{\pi}{l}k$ и $\Delta\lambda=\frac{\pi}{l}$.

Формалният граничен преход води до равенството

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Това равенство се нарича **формула на Фурие** (за обръщане).

Ако положим

$$a_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda t\,dt,\ b_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda t\,dt,$$

то формулата на Фурие може да се запише във вида

$$f(x)=\int_0^{\infty}(a_\lambda\cos\lambda x+b_\lambda\sin\lambda x)\,d\lambda.$$

Да пристъпим сега към по-строго изложение на теорията на преобразованието на Фурие.

§ 1. Представяне на функция с интеграл на Фурие

Навсякъде по-нататък ще искаме функцията $f(x)$ да е абсолютно интегруема върху безкрайната права $(-\infty, \infty)$, т. е. ще искаме да е сходящ несобственият интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx. \tag{9.1}$$

Определение 1. Казваме, че функцията $f(x)$ принадлежи в безкрайната права $(-\infty, \infty)$ на класа L_1, т. е. $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$, ако функцията $f(x)$ е интегруема по Риман върху всеки сегмент (казваме, че $f(x)$ е локално интегруема) и ако е сходящ несобственият интеграл (9.1).

1. Помощни твърдения. Една комплекснозначна функция $g(\lambda)$ на реална променлива λ ще разглеждаме като двойка реални функции $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$: $g(\lambda)=u(\lambda)+iv(\lambda)$. Комплексната функция $g(\lambda)$ е непрекъсната в дадена точка λ, ако и само ако всяка от функциите $u(\lambda)$ и $v(\lambda)$ е непрекъсната в тази точка.

Лема 1. Ако $f \in L_1(-\infty, \infty)$, то за произволно реално число λ съществува несобственият интеграл

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx, \tag{9.2}$$

наричан преобразование на Фурие на функцията $f(x)$ (или Фурие-образ на f). Функцията (9.2) непрекъсната по λ във всяка точка от безкрайната права.

Доказателство. От равенството $|f(x)e^{i\lambda x}|=|f(x)|$ и от сходимостта на интеграла (9.1) следва съществуването на несобствения интеграл $g(\lambda)$: $|g(\lambda)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} f(x)\,dx\right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx<\infty$. От признака на Вайерщрас (вж. теорема 7.8, § 3, гл. 7) следва равномерната сходимост на интеграла (9.2) и поради непрекъснатостта на $e^{i\lambda x}$ по λ от теорема 7.9, § 3, гл.7 следва непрекъснатостта на $g(\lambda)$ във всеки сегмент, т. е. във всяка точка от безкрайната права.

Лема 2 (лема на Риман). Нека функцията $f(x)$ е интегруема и абсолютно интегруема в интервала (a, b). Тогава

$$\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx \to 0$$

при $\lambda \to \infty$ (λ е реално).

Доказателство. Нека $\varepsilon>0$ и да изберем сегмент $[c, d]$, съдържащ се в (a, b), такъв, че при всяко λ

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx-\int_c^d f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|<\varepsilon.$$

Наистина от оценките

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx-\int_c^d f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \leqq \int_a^c |f(x)\,e^{i\lambda x}|\,dx+$$

$$+\int_d^b |f(x)e^{i\lambda x}|\,dx=\int_a^c |f(x)|\,dx+\int_d^b |f(x)|\,dx$$

и от абсолютната интегруемост на $f(x)$ върху (a, b) следва съществуването на такъв сегмент $[c, d]$.

Тъй като f е абсолютно интегруема в $[a, b]$, то съществува такава малка сума на Дарбу

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j, \quad m_j=\inf_{x \in [x_{j-1},\, x_j]} f(x),$$

че

$$0 \leqq \int_a^b f(x)\,dx-\sum_{j=1}^{m} m_j\,\Delta x_j<\varepsilon, \quad \Delta x_j=x_j-x_{j-1}.$$

Да определим частично постоянна функция $p(x)$ в $[c, d]$ чрез $p(x)=m_j$ при $x \in [x_{j-1}, x_j]$ $j=1, 2, \ldots, k$. Ясно е, че $p(x)<f(x)$ в $[c, d]$ и

$$0 \leqq \left|\int_c^d f(x)e^{i\lambda x}\,dx-\int_c^d p(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \leqq \int_c^d |f(x)-p(x)|\,|e^{i\lambda x}|\,dx \leqq$$

$$\leqq \int_a^b (f(x)-p(x))\,dx<\varepsilon.$$

Обаче

$$\int_c^d p(x)e^{i\lambda x}\,dx=\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} m_j e^{i\lambda x}\,dx-\frac{1}{i\lambda}\sum_{j=1}^{m}(m_j e^{i\lambda x})\Big|_{x_{j-1}}^{x_j}\to 0$$

при $\lambda\to\infty$. Следователно $\int_c^d p(x)e^{i\lambda x}\,dx$ клони към нула при $\lambda\to\infty$ и с произволна точност приближава интеграла $\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}\,dx$. Следователно последният интеграл също клони към нула при $\lambda\to\infty$. Лемата е доказана.

Лема 3. Преобразованието на Фурие $g(\lambda)$ на функцията $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ клони към нула при $|\lambda|\to\infty$, т. е.

$$\lim_{\lambda\to\infty}|g(\lambda)|=0.$$

Доказателство. Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От сходимостта на интеграла (9.1) следва, че може да изберем число $A>0$ такова, че

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(x)|\,dx+\int_A^\infty|f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

За така избраното A е в сила неравенството

$$|g(\lambda)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}\,dx\right|\le\left|\int_{-A}^{A}f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx\right|+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поради предишната лема интегралът, стоящ в дясната част, може да бъде направен при достатъчно голямо λ по-малък от $\frac{\varepsilon}{2}$ и следователно $|g(\lambda)|<\varepsilon$.

Лемата е доказана.

Като следствие от нашите разсъждения получаваме, че

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x\,.\,f(x)\,dx=0,\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sin\lambda x\,.\,f(x)\,dx=0.$$

2. Основна теорема. Формула за обръщане

Определение 2. За произволна функция $f(x)$ от класа $L_1(-\infty,\infty)$ границата

$$\text{(9.3)}\qquad \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(t-x)}f(t)\,dt\right]d\lambda$$

(при условие че тази граница съществува) ще наричаме разлагане на функцията $f(x)$ в интеграл на Фурие.

Възниква въпросът за съществуването на разлагане на функцията $f(x)$ в интеграл на Фурие.

Отговор дава следната теорема.

Теорема 9.1. Ако функцията $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ и ако f удовлетворява в дадена точка x отдясно условието на Хьолдер от ред α_1, където $0<\alpha_1\le 1$, а отляво — условието на Хьолдер от ред α_2, където $0<\alpha_2\le 1$, то в точката x е изпълнено равенството

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

По такъв начин във всяка точка x, в която имаме $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ (в частност във всяка точка на непрекъснатост на f) и за която са изпълнени условията на теоремата, е налице равенството

$$\text{(9.4)}\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda,$$

където несобственият интеграл се разбира в смисъл на главна стойност, т. е. при симетрично клонене на границите на интегриране към безкрайност.

Доказателство. Тъй като $g(\lambda)$ е непрекъсната функция, то за всяко $A>0$ съществува интегралът

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}e^{-ix\lambda}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}f(t)\,dt\right]d\lambda.$$

В интеграла отдясно поради равномерната по λ върху сегмента $[-A,A]$ сходимост на вътрешния (ограден с квадратни скоби) интеграл можем да сменим реда на интегриране по t и λ и да се възползуваме от равенствата

$$e^{i\lambda(t-x)}=\cos\lambda(t-x)+i\sin\lambda(t-x),$$

$$\int_{-A}^{A}\cos\lambda(t-x)\,d\lambda=\frac{2\sin A(t-x)}{(t-x)},\quad \int_{-\lambda}^{\lambda}\sin\lambda(t-x)\,d\lambda=0,$$

и сменяме променливата $t=x+u$. Получаваме

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-A}^{A} e^{i\lambda(t-x)}\,d\lambda\right]f(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+u)\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Следователно за всяко $A>0$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)\,e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du+$$

(9.5)

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Тъй като $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du=\frac{\pi}{2}$ и $\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin Au}{u}\,du=\frac{\pi}{2}$,

то

$$f(x+0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x+0)\,\frac{\sin Au}{u}\,du,$$

$$f(x-0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x-0)\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Изваждаме последните две равенства от (9.5) и получаваме

$$\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda-\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x+u)-f(x+0)]\times$$

(9.6)

$$\times\frac{\sin Au}{u}\,du+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\,\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Тъй като функцията $f(x)$ удовлетворява отдясно условието на Хьолдер от ред α_1, то съществува константа M_1 такава, че за достатъчно малки положителни u ще бъде изпълнено неравенството

$$|f(x+u)-f(x+0)|\leq M_1u^{\alpha_1},\ 0<\alpha_1\leq 1.$$

Аналогично от условието на Хьолдер отляво от ред α_2 ще получим неравенството

$$|f(x+u)-f(x-0)|\leq M_2|u|^{\alpha_2}$$

за всички достатъчно малки по модул отрицателни u. Нека $M=\max\{M_1, M_2\}$ и $\alpha=\min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Тогава горните две оценки са еквивалентни на следното неравенство:

(9.7)
$$|f(x+u)-f(x\pm 0)|\leq M|u|^{\alpha}$$

при $|u|<\delta$, където $\delta>0$ е достатъчно малко.

Да препишем съотношението (9.6) по следния начин:

$$\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\times$$

(9.8)

$$\times\frac{\sin Au}{u}\,du+\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\,\frac{\sin Au}{u}\,du-$$

$$-\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du-\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}\,du.$$

Нека ε е фиксирано произволно $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ изпълнява условието $\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}<\frac{\varepsilon}{4}$.

Да оценим първите два интеграла в дясната част на (9.8). От (9.7) получаваме

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{0}^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\,\frac{\sin Au}{u}\,du\right|\leq\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}|f(x+u)-f(x+0)|\,\frac{du}{u}\leq$$

$$\leq\frac{M}{\pi}\int_{0}^{\delta}u^{\alpha-1}\,du=\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}.$$

Аналогично

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{0}^{\delta}[f(x-u)-f(x-0)]\,\frac{\sin Au}{u}\,du\right|\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{0}|f(x+u)-f(x-0)|\,\frac{du}{|u|}\leq$$

$$\leq\frac{M}{\pi}\int_{-\delta}^{0}|u|^{\alpha-1}\,du=\frac{M\delta^{\alpha}}{\pi\alpha}.$$

Затова

$$\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\delta}[f(x+u)-f(x+0)]\frac{\sin Au}{u}\,du\right|+$$

(9.9)
$$+\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\delta}^{0}[f(x+u)-f(x-0)]\frac{\sin Au}{u}\,du\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

За да оценим третия интеграл в дясната част на (9.8), ще разгледаме функцията

$$g(u)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\,\frac{f(x+u)}{u} & \text{при } |u|\geq\delta,\\ 0 & \text{при } |u|<\delta.\end{cases}$$

Функцията $g(u)\in L_1(-\infty,\infty)$ и затова поради лемата на Риман

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\sin Au\,du=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{|u|\geq\delta}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du=0.$$

Но това и означава, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ съществува естествено число N_1 такова, че при $A\geq N_1$

(9.10)
$$\frac{1}{\pi}\left|\int_{|A|\geq\delta}f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\,du\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Освен това

$$\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}\,du=\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du=\int_{A\delta}^{\infty}\frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau\longrightarrow 0$$

при $A\longrightarrow\infty$. Оттук следва, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ и за разглежданата точка x ще се намери N_2 такова, че

(9.11)
$$\left|\frac{f(x+0)}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin Au}{u}\,du\right|+\left|\frac{f(x-0)}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{\sin Au}{u}\,du\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

при $A\geq N_2$. Нека $N=\max\{N_1, N_2\}$. Заместваме (9.9), (9.10) и (9.11) в (9.8) и получаваме

$$\left|\int_{-A}^{A}g(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,d\lambda-\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right|<\varepsilon$$

при $A\geq N$. Теоремата е доказана.

Забележка. **Определение 3.** Ще казваме, че функцията $f(x)$, дефинирана в някоя прободена околност на точката x, удовлетворява в точката x условието на Дини, ако:

а) в точката x съществуват двете едностранни граници

$$f(x+0)=\lim_{u\to 0+0}f(x+u),\quad f(x-0)=\lim_{u\to 0+0}f(x-u);$$

б) двата интеграла

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\,du,\quad \int_0^{\varepsilon}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\,du$$

са *абсолютно* сходящи за някаква положителна стойност на ε.

Ясно е, че ако непрекъснатата в околност на точката x функция $f(x)$ удовлетворява в точката x условието на Хьолдер

$$|f(x+u)-f(x)|\leq M|u|^{\alpha},\ 0<\alpha\leq 1,$$

имаме

$$\frac{|f(x+u)-f(x)|}{u}\leq\frac{M}{|u|^{\alpha-1}},$$

следователно за функцията $f(x)$ е изпълнено и условието на Дини.

Обратното, разбира се, не е вярно.

Може да се докаже, че условието на Дини също осигурява разлагането на функцията $f(x)$ в интеграл на Фурие в дадената точка.

Да направим някои изводи от получените резултати. При условие че $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$, за функцията $f(x)$ съществува преобразование на Фурие

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx.$$

Да го означим по следния начин: $g(\lambda)=F(f)$, където с F сме означили оператора на Фурие.

Ако са изпълнени условията на теорема 9.1 и условието $f(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, то, както доказахме, функцията се разлага в интеграл на Фурие, т.е. вярна е формулата

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

Тази формула се нарича обратно преобразование на Фурие.

Да го означим по следния начин: $f(x)=\frac{1}{2\pi}\ F^{-1}(g)$, където с F^{-1} е означен обратният оператор на Фурие, приложен към функцията $g(\lambda)$, т. е. към образа на Фурие на функцията $f(x)$.

Да подчертаем, че въпреки че формулите за преобразованието на Фурие и за обратното преобразование на Фурие външно си приличат (вж. формулите (9.2) и (9.4)), по същество те са различни: в първата от тях интегралът съществува в обикновен смисъл (понеже $f\in L_1(-\infty, \infty)$), а във втората, изобщо казано, само в смисъл на главна стойност. Освен това равенството (9.2) е определението на функцията $g(\lambda)$, а равенството (9.4) съдържа твърдението, че интегралът вдясно е равен на изходната функция $f(x)$.

3. Някои примери. Да разгледаме правото и обратното преобразование на Фурие в случая на четна и нечетна функция.

1°. **Случай на четна функция** $f(x)$. Очевидно в случая, когато $f(x)=f(-x)$, от формула (9.2) получаваме

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\lambda x+i\sin\lambda x)\,dx=2\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx.$$

Оттук следва, че $g(\lambda)$ също е четна функция. Затова

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\cos\lambda x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} g(\lambda)\cos\lambda x\,dx.$$

Първата от тези формули се нарича *косинус преобразование на Фурие на функцията* $f(x)$, а втората — *обратно косинус преобразование на Фурие*.

2°. **Случай на нечетна** $f(x)$. Нека $f(x)=-f(-x)$. Тогава очевидно получаваме *синус преобразование на Фурие*

$$g(\lambda)=2\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx$$

и *обратно синус преобразование на Фурие*

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx.$$

3°. Нека $f(x)=e^{-\gamma|x|}$, $\gamma>0$. Тогава

$$F(f)=g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|x|}e^{i\lambda x}\,dx=2\int_{0}^{\infty} e^{-\gamma x}\cos\lambda x\,dx.$$

След двукратно интегриране по части получаваме

$$F(f)=g(\lambda)=\frac{2\gamma}{\lambda^2+\gamma^2}.$$

4°. Нека

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } |x|\leq a,\\ 0 & \text{при } |x|>a.\end{cases}$$

Тогава

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx=\int_{-a}^{a} e^{i\lambda x}\,dx=\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}=\frac{2\sin\lambda a}{\lambda}.$$

Да отбележим, че $g(\lambda)$ не принадлежи на $L_1(-\infty, \infty)$.

§ 2. Някои свойства на преобразованието на Фурие

Да установим връзка между скоростта на намаляване на функцията $f(x)$ и гладкостта (диференцируемостта) на нейното преобразование на Фурие, а също и между гладкостта на функцията и скоростта на намаляване на нейното преобразование на Фурие.

Верни са твърденията.

Твърдение 1. Нека за някое естествено число k функцията $(1+|x|)^k f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$. Тогава преобразованието на Фурие $g(\lambda)$ на функцията $f(x)$ е диференцируемо k пъти, при това производната по λ от произволен ред $m=1, 2, \dots$ може да се пресметне чрез диференциране под знака на интеграла (9.2), т. е. по формулата

$$g^{(m)}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(ix)^m e^{i\lambda x}\,dx,\ m=1, 2, \dots, k. \tag{9.12}$$

Доказателство. За всяко $m=1, 2, \dots, k$ е вярно неравенството

$$|(e^{ix\lambda}f(x))^{(m)}|=|e^{ix\lambda}(ix)^m f(x)|\leq(1+|x|^k)\,.\,|f(x)|.$$

Интегралът $\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^k)|f(x)|\,dx$ е сходящ. От сходимостта на този интеграл и от признака на Вайерщрас (вж. теорема 7.8 от § 3, гл. 7) следва равномерната по λ сходимост на интеграла

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}\,dx$ в произволен сегмент. От теорема 7.14, § 3, гл. 7 следва възможността да се диференцира този интеграл по λ до ред $m=1, 2, \ldots, k$, а също и верността на формула (9.12). Твърдението е доказано.

Твърдение 2. Нека функцията $f(x)$ да има във всяка точка x всички производни до ред $k \geq 1$ включително, като при това $f(x)$ и всички $f^{(m)}(x)$, $m=1, 2, \ldots, k$, са абсолютно интегруеми в $(-\infty, \infty)$ и за произволно m между 0 и $k-1$ $f^{(m)}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ ($f^{(0)}(x) \equiv f(x)$).

Тогава $|g(\lambda)| = \overline{\overline{O}}(|\lambda|^{-k})$ при $|\lambda| \to \infty$, където $g(\lambda)$ е преобразованието на Фурие на $f(x)$.

Доказателство. Нека $A>0$. Тогава

$$\int\limits_{-A}^{A} f^{(k)}(x)\,e^{i\lambda x}\,dx = \left[f^{(k-1)}(x)\,e^{i\lambda x}\right]_{-A}^{A} - \left[f^{(k-2)}(x)\,(i\lambda)\,e^{i\lambda x}\right]_{-A}^{A} +$$

$$+\cdots+(-i)^k\lambda^k \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx.$$

Оставяме A да клони към безкрайност и отчитаме, че производните на функцията $f(x)$ клонят към нула. Получаваме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)\,e^{i\lambda x}\,dx = (-i\lambda)^k \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{i\lambda x}\,dx = (-i\lambda)^k\,g(\lambda).$$

Съгласно лема 3 преобразованието на Фурие на функцията $f^{(k)}(x)$ клони кум нула при $|\lambda| \to \infty$. Следователно

$$|g(\lambda)| = O(|\lambda|^{-k}).$$

Твърдението е доказано.

Твърдение 3 (равенство на Планшерел*). Нека функцията $f(x)$ и нейната втора производна да са абсолютно интегруеми в $(-\infty, \infty)$, $f(x) \to 0$, $f'(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Нека функцията $\varphi(x)$ да е абсолютно интегруема в $(-\infty, \infty)$. Тогава

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,\overline{\psi(\lambda)}\,d\lambda,$$

където $g(\lambda)=F(f)$, $\psi(\lambda)=F(\varphi)$ са преобразованията на Фурие на функциите f и φ съответно и $\overline{\psi(\lambda)}$ е функцията, комплексно спрегната към $\psi(\lambda)$.

* М. Планшерел — швейцарски математик (1885—1967).

Доказателство. По формулата за обръщане $f(x) = \frac{1}{2\pi} F^{-1}(g) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\,dx$, като съгласно твърдение 2

$$|g(\lambda)| \leq c(1+|\lambda|)^{-2}.$$

Следователно интегралът за $f(x)$ е сходящ абсолютно и равномерно (относно x) върху $(-\infty, \infty)$.

Умножаваме двете части на формулата за $f(x)$ с $\varphi(x)$ и интегрираме по x от $-A$ до A. Получаваме

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A} \varphi(x)\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\;e^{-i\lambda x}\,d\lambda\right]dx.$$

В дясната част на тази формула можем да сменим реда на интегриране, тъй като интегралът $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda$ е равномерно сходящ по λ върху $(-\infty, \infty)$. Затова

$$\text{(9.13)} \qquad \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\overline{\int\limits_{-A}^{A} \varphi(x)\,e^{i\lambda x}\,dx}\right] g(\lambda)\,d\lambda,$$

където чертата означава комплексното спрягане.

От оценката

$$\left|\int\limits_{-A}^{A} \varphi(x)\,e^{i\lambda x}\,dx\right| |g(\lambda)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\,dx \,.\, c(1+|\lambda|)^{-2}$$

и от признака на Вайерщрас интегралът в дясната част на (9.13) е сходящ равномерно по A върху цялата безкрайна права. Следователно в (9.13) може да извършим граничен преход при $|A| \to \infty$ под знака на интеграла. Получаваме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,\overline{\psi(\lambda)}\,d\lambda,$$

което и трябваше да докажем.

В края на този параграф ще докажем теоремата на Котелников*, която играе важна роля в теорията на радиовръзките. За тази цел да направим няколко предварителни пояснения. Нека функцията $f(x)$ е периодична в сегмента с период $2l$ и абсолютно интегруема върху интервала $[-l, l]$. Да разложим функцията $f(x)$ в ред на Фурие (който в случая, когато удовлетворява допълнителни условия, е сходящ към нея)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\frac{\pi}{l}kx+b_k\sin\frac{\pi}{l}kx\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{\pi}{l}kx}.$$

Функцията $f(x)$ се нарича сигнал, числата $\{a_0, a_k, b_k\}$ или $\{c_k\}$ — спектър на сигнала, числото $\frac{k}{2l}$ се нарича честота на сигнала f. Разлагането на периодична функция в ред на Фурие се нарича хармоничен анализ на дадената функция.

Ако функцията $f(x)$ не е периодична, то нейният ред на Фурие, както знаем, може да бъде заменен с интеграла на Фурие на функцията $f(x)$ и

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

Функцията $f(x)$ може, както преди, да наричаме сигнал, функцията $g(\lambda)$ — спектър на сигнала (в дадения случай спектърът е непрекъснат), λ — честота на сигнала.

Задачата за възстановяване на сигнал по неговия спектър е важна за практиката. Ще подчертаем, че често не е необходимо да знаем спектъра $g(\lambda)$ за всички честоти λ, а и приборите улавят спектъра само в някакъв диапазон от честоти $|\lambda|\leqq a$ (например човешкото ухо улавя сигнали в диапазон от 20 херца до 20 килохерца).

Затова ще считаме, че сигналът $f(x)$ (x е времето, $-\infty<x<\infty$) има финитен спектър, различен от нула само за честоти λ, $|\lambda|\leqq a$. По такъв начин при $|\lambda|>a$ имаме, че $g(\lambda)\equiv 0$. Следователно

$$(9.14)\qquad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}g(\lambda)e^{-i\lambda x}\,d\lambda.$$

Да разложим в сегмента $[-a, a]$ функцията $g(\lambda)$ в ред на Фурие

$$g(\lambda)=\sum_{-\infty}^{\infty}d_k e^{i\frac{\pi}{a}k\lambda}.$$

* В. А. Котельников (роден през 1908 г.) — известен съветски академик, специалист в теорията на радиовръзките.

Отчитаме (9.14) и получаваме, че

$$(9.15)\qquad d_k=\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}g(\lambda)e^{-i\frac{\pi}{a}\lambda k}\,d\lambda=\frac{\pi}{a}f\left(+\frac{\pi}{a}k\right).$$

Заместваме в реда за $g(\lambda)$ тези коефициенти и после $g(\lambda)$ в интеграла (9.14). Получаваме

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left(\frac{\pi}{a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)e^{-i\lambda x+i\frac{\pi}{a}\lambda k}\right)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)\int_{-a}^{a}e^{i\lambda\left(\frac{\pi}{a}k-x\right)}\,d\lambda.$$

Доказахме следната теорема.

Теорема 9.2 (на **Котелников**). За сигнала $f(x)$ с финитен спектър $g(\lambda)$ е в сила съотношението

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f\left(\frac{\pi}{a}k\right)\frac{\sin a\left(x-\frac{\pi}{a}k\right)}{a\left(x-\frac{\pi}{a}k\right)}.$$

Теорема 9.2 показва, че сигнал, зададен от функцията $f(x)$ с финитен спектър $g(\lambda)$, съсредоточен в ивицата честоти $|\lambda|\leqq a$, се възстановява само по отчетените стойности $f\left(\frac{\pi}{a}k\right)$, предавани през равни интервали от време $\frac{\pi}{a}$.

§ 3. Кратен интеграл на Фурие

В този параграф ще обсъдим началните понятия за кратен интеграл на Фурие. Нека функцията на $N\geqq 2$ променливи $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ е такава, че съществува несобственият интеграл

$$\int\underset{E^N}{\cdots}\int f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N.$$

Преобразование на Фурие (образ на $f(x)$) на тази функция ще наричаме израза

$$g(\lambda)=g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)=\int\underset{E^N}{\cdots}\int f(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,e^{i(x,\lambda)}\,dx_1dx_2\ldots dx_N,$$

където (x,λ) означава скаларното произведение на векторите $x=(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ и $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$, т. е.

$$(x, \lambda)=\sum_{i=1}^{N} x_i\lambda_i.$$

По същия начин, както в § 1, можем да докажем, че $g(\lambda)$ е непрекъсната функция на λ в E^N и клони към нула при

$$|\lambda|=\left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2\right)^{1/2} \to 0.$$

Границата

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int \ldots \int_{E^N} g(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)\, e^{-(x,\lambda)}\, d\lambda_1\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_N,$$

при условие че тя съществува, се нарича разлагане на функцията $f(x)$ в N-кратен интеграл на Фурие. С граничен преход получаваме, както и в случая на една променлива, следната формула за обръщане:

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^N} \int \ldots \int_{E^N} g(\lambda)\, e^{-i(x,\lambda)}\, d\lambda,$$

където

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad \lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N).$$