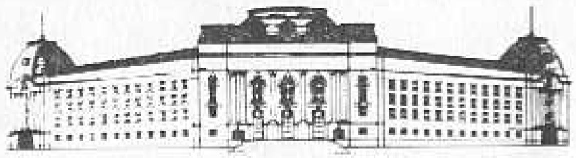


СЪВМЕСТНО ИЗДАНИЕ
МЕЖДУ
МОСКОВСКИ ДЪРЖАВЕН УНИВЕРСИТЕТ
«М. В. ЛОМОНОСОВ»
И СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
«КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ»,
НАПИСАНО ПО ЕДИННА ПРОГРАМА
ЗА ОБУЧЕНИЕТО НА СТУДЕНТИТЕ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ
ЗА СПЕЦИАЛНОСТИТЕ
МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, МЕХАНИКА
И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА

Владимир Александрович Илин
Виктор Антонович Садовничи
Благовест Христов Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

ВТОРА ЧАСТ

Под редакцията
на академик А. Н. Тихонов

НАУКА И ИЗКУСТВО
1989
СОФИЯ

Владимир Бабев 1990г

Индекс 51

Книгата е учебник по математически анализ по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за втората година на обучение на студентите от специалностите математика, информатика, механика и приложна математика. В нея са включени теорията на редовете от числа и функции, теорията на кратните собствени и несобствени интеграли на Риман, теорията на криволинейните интеграли и интегралите по повърхнина, както и теорията на интегралите, зависещи от параметри, теорията на полето (включително теорията на диференциалните форми в евклидови пространства), теорията на редовете и преобразованията на Фурие.

Както и първата част, този учебник съдържа три ясно отделени нива на изложение: елементарно, основно и повишено.

Математически анализ

ВЛАДИМИР ИЛИН
ВИКТОР САДОВНИЧИ
БЛАГОВЕСТ СЕНДОВ

БЪЛГАРО-СЪВЕТСКА
ПЪРВО ИЗДАНИЕ
ДАДЕНА ЗА НАБОР НА 26. VIII. 1988
ПОДПИСАНА ЗА ПЕЧАТ НА 5. VII. 1989
ИЗЛЯЗЛА ОТ ПЕЧАТ ПРЕЗ август 1989
ФОРМАТ 60/90/16. ПЕЧАТНИ КОЛИ 23.50
ИЗДАТЕЛСКИ КОЛИ 23.50
УСЛОВНО ИЗДАТЕЛСКИ КОЛИ 22,87
ИЗДАТЕЛСКИ № 30131
ТИРАЖ 12094 ЦЕНА 1,95 лв.
КОД 02/95346/22511480 5—490—89
ДИ «НАУКА И ИЗКУСТВО» — СОФИЯ
ДП «ДИМИТЪР БЛАГОЕВ» — СОФИЯ

РЕЦЕНЗЕНТИ
ГЕНЧО СКОРДЕВ
ПЛАМЕН ДЖАКОВ
РЕДАКТОР
ВАСИЛ ЦАНОВ
ХУДОЖНИК
ЖЕКО АЛЕКСИЕВ
ХУДОЖЕСТВЕН РЕДАКТОР
КРЕМЕНА ФИЛЧЕВА
ТЕХНИЧЕСКИ РЕДАКТОР
ВЛАДИМИР БОЯДЖИЙСКИ
КОРЕКТОР
ТЕМЕНУЖКА БАЛАБАНОВА

Съдържание

3. Двойни и n-кратни интеграли

4. Криволинейни интеграли

5. Повърхнинни интеграли

6. Теория на полето. Основни интегрални формули на анализа

7. Интеграли, зависещи от параметър

8. Редове на Фурие

9. Преобразование на Фурие

Предговор

Настоящата книга е учебник по математически анализ по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за втори курс.

Тя обхваща напълно материала за втората година на обучение, предвиден от програмата за студентите от университетите в СССР и България, по специалностите математика, приложна математика, информатика и механика.

Учебникът съдържа теорията на редовете от числа и функции, теорията на кратните собствени и несобствени интеграли на Риман, теорията на криволинейните интеграли и на интегралите на повърхнина, както и теорията на интегралите, зависещи от параметри, теорията на полето (включително теорията на диференциалните форми в евклидови пространства), теорията на редовете и преобразованията на Фурие.

Както и първата част, настоящият учебник съдържа три лесноразличими нива на изложение: елементарно, основно и повишено.

Елементарното ниво отговаря на програмата на техническите вузове на СССР със задълбочено изучаване на математически анализ; основното ниво на изложение отговаря на програмата на специалността приложна математика и информатика, а материалът на повишеното ниво на изложение допълва основното ниво с редица раздели, които обикновено се изучават в механо-математическите факултети на университетите.

Текстът, означен в книгата с две отвесни черти, се отнася до повишеното ниво на изложение; текстът, означен с една отвесна черта — до основното ниво на изложение, останалият *текст представлява съдържание на елементарно ниво на изложение.*

За усвояването на материала на елементарно ниво не се изисква четене на материал от основното и повишеното ниво, а за разбиране на материала на основно ниво не се изисква четене на този с повишено ниво.

Като цяло материалът в настоящия учебник много се доближава до курса, който реално може да се прочете за студентите от университетите.

При създаването на учебника авторите са използували традиционните лекционни курсове в Московския и Софийския университет, както и част от материала от книгата на В. А. Илин и Е. Г. Позняк «Основи на математическия анализ».

Авторите изразяват дълбока благодарност на главния редактор на тази книга акад. А. Н. Тихонов за многобройните ценни съвети и забележки.

Авторите дължат особена благодарност на И. С. Ломов и С. Л. Троянски, които оказаха неоценима помощ на всички етапи от написването на тази книга.

Москва, януари 1986 г.

1. Числови редове

Още в средния курс читателите са се срещали със суми, които съдържат безбройно много членове (например със сумата на безкрайна геометрична прогресия).

Макар че изследването на подобни суми, наречени редове, може да бъде сведено към изследване на числови редици, то тези суми изискват самостоятелно задълбочено изучаване. Същите представляват важно средство за представяне на различни функции, срещащи се в анализа.

§ 1. Понятие за числов ред

1. Сходимост и разходимост на редове. Да разгледаме произволната числова редица $u_1, u_2, \ldots, u_k, \ldots$ и формално да образуваме от нейните елементи безкрайната сума

$$u_1+u_2+\cdots+u_k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.1}$$

Формално съставената сума (1.1) е прието да се нарича числов ред или просто ред. При това отделните събираеми u_k е прието да се наричат членове на реда (1.1).

Сумата на първите n члена на реда (1.1) е прието да се нарича n-та частична сума на този ред и да се означава със символа S_n.

И така по определение

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{1.2}$$

Редът (1.1) се нарича сходящ, ако е сходяща редицата $\{S_n\}$ от частичните суми (1.2) на този ред. При това границата S на тази редица се нарича сума на реда (1.1).

По този начин за сходящия ред (1.1) със сума S можем формално да напишем равенството

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} u_k.$$

В случай че за дадения ред (1.1) редицата от частичните суми (1.2) е разходяща, то редът се нарича разходящ.

Виждаме, че понятието сума е дефинирано само за сходящи редове, при това (за разлика от понятието сума на краен брой събираеми) понятието сума на ред се въвежда чрез граничен преход.

В съвременната математика и в нейните приложения често се сблъскваме с редове, за които редицата от частичните суми (1.2) е разходяща. За някои такива редове се въвежда понятие сума в обобщен смисъл. В § 7 от тази глава ще бъдат разгледани най-употребяваните методи за обобщено сумиране на разходящи редове.

Един от основните проблеми на теорията на редовете е този за намиране на признаци за сходимост и разходимост на редове. В § 2 ще бъдат доказани такива признаци за редове с неотрицателни членове, а в § 4 — за редове с произволни членове.

Да се спрем на някои примери на сходящи и разходящи редове.

1°. Ще изучим въпроса за сходимостта на реда, съставен от членовете на геометричната прогресия

$$1+q+q^2+\cdots+q^k+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}. \tag{1.3}$$

Тъй като n-тата частична сума S_n на този ред при $q\neq 1$ има вида

$$S_n=1+q+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}, \tag{1.4}$$

то очевидно при $|q|<1$ редицата от частичните суми $\{S_n\}$ клони към $\frac{1}{1-q}$.

Следователно при $|q|<1$ редът (1.3) е сходящ и има сума, равна на $\frac{1}{1-q}$.

Ако $|q|>1$, то от израза (1.4) се вижда, че редицата от частичните суми $\{S_n\}$ е разходяща, т.е. при $|q|>1$ редът (1.3) е разходящ.

За пълнота остава да разгледаме случая $|q|=1$, т.е. случая, когато q е равно на $+1$ или -1.

В случая $q=+1$ всички членове на реда (1.3) са равни на единица и n-тата частична сума на реда S_n е равна на n. Оттук следва, че в случая $q=+1$ редицата $\{S_n\}$ е разходяща, т.е. редът (1.3) е разходящ.

Накрая в случая $q=-1$ редът (1.3) има вида $1-1+1-1+\cdots$ и следователно редицата $\{S_n\}$ от частичните суми съвпада с очевидно разходящата редица $1, 0, 1, 0, \ldots$ Така че и при $q=-1$ редът (1.3) е разходящ.

2°. За фиксирано число x да разгледаме въпроса за сходимостта на следните редове*:

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}, \tag{1.5}$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-1}}{(2k-1)!}, \tag{1.6}$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-2}}{(2k-2)!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-2}}{(2k-2)!}. \tag{1.7}$$

Означавайки n-тите частични суми на редовете (1.5), (1.6) и (1.7) съответно с $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ и $S_n^{(3)}(x)$, можем да пишем

$$S_n^{(1)}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{1.8}$$

$$S_n^{(2)}(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \tag{1.9}$$

$$S_n^{(3)}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}. \tag{1.10}$$

Като съпоставим изразите (1.8), (1.9) и (1.10) с разлаганията по формулата на Маклорен на функциите e^x, $\sin x$ и $\cos x$ (вж. п. 2, § 9 от глава 6 на част I), получаваме, че

$$\begin{aligned} e^x&=S_n^{(1)}(x)+R_n^{(1)}(x),\\ \sin x&=S_n^{(2)}(x)+R_n^{(2)}(x),\\ \cos x&=S_n^{(3)}(x)+R_n^{(3)}(x), \end{aligned} \tag{1.11}$$

където $R_n^{(1)}(x)$, $R_n^{(2)}(x)$, $R_n^{(3)}(x)$ означават n-тите остатъчни членове в разлаганията по формулата на Маклорен съответно на функциите e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

* Символът 0! отъждествяваме с числото 1.

В пунктове 1 и 2, § 9, глава 2 на част I е доказано, че във всяка точка x от реалната права тези остатъчни членове клонят към нула при $n\to\infty$. Следователно съгласно с (1.11) във всяка точка x от безкрайната права частичните суми $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ и $S_n^{(3)}$ клонят към граници, съответно равни на e^x, $\sin x$ и $\cos x$. Това означава, че редовете (1.5), (1.6) и (1.7) са сходящи във всяка точка x от безкрайната права и техните суми са равни съответно на e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

Забележка 1. Ще подчертаем, че от формална гледна точка изучаването на числовите редове е нова форма на изучаване на числовите редици, понеже: 1) на всеки ред (1.1) еднозначно се съпоставя редицата $\{S_n\}$ от неговите частични суми, 2) на произволна числова редица $\{S_n\}$ еднозначно се съпоставя числовият ред (1.1) с членове $u_1=S_1$, $u_k=S_k-S_{k-1}$ при $k>1$, за който тази редица служи за редица от частични суми.

Забележка 2. Ще отбележим две прости свойства на произволен ред, които следват непосредствено от определението за сходимост на ред.

I. Премахването на краен брой членове на реда (или добавянето към реда на краен брой нови членове) не влияе на сходимостта или разходимостта му.

II. Ако C е различна от нула константа, $u_k'=C\,.\,u_k$, то редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

За обосноваването на първото от тези свойства е достатъчно да се забележи, че в резултат на казаното премахване (или добавяне) на краен брой членове всички частични суми на реда от известно място нататък се изменят с една и съща константа.

За доказателството на второто свойство нека означим с S'_n и S_n n-тите частични суми съответно на редовете $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'$ и $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Вижда се, че $S'_n=C.\ S_n$, където $C\neq 0$. Оттук следва, че $\lim_{n\to\infty} S'_n$ съществува тогава и само тогава, когато съществува $\lim_{n\to\infty} S_n$.

2. Критерии на Коши за сходимост на редове. Тъй като въпросът за сходимост на даден ред е еквивалентен по определение на въпроса за сходимост на редицата от частичните му суми, то ние ще получим необходимо и достатъчно условие за сходимост на даден ред, формулирайки критерия на Коши за редицата от неговите частични суми. За удобство да формулираме отново критерия на Коши за редици. *За да бъде редицата $\{S_n\}$ сходяща, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува номер N такъв, че за всеки номер n, удовлетворяващ условието $n\geq N$, и за всяко естествено $p (p=1, 2, 3, \ldots)$ да е в сила $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$.*

Като следствие от това твърдение получаваме следната теорема.

Теорема 1.1 (критерий на Коши за редове). *За да е сходящ редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува номер N такъв, че за всеки номер n, удовлетворяващ условието $n\geq N$, и за всяко естествено число $p (p=1, 2, \ldots)$ да е в сила*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon. \tag{1.12}$$

За доказателството на тази теорема е достатъчно да забележим, че величината, стояща под знака за модул в неравенство (1.12), е равна на $S_{n+p}-S_n$.

Ще отбележим, че критерият на Коши представлява главно теоретичен интерес. Неговото практическо използуване за доказване на сходимостта или разходимостта на конкретни редове обикновено е свързано с трудности. Затова наличието на критерия на Коши не изключва необходимостта от намиране на други, практически по-ефективни критерии за сходимост и разходимост на редове.

От теорема 1.1 се получават две елементарни, но важни следствия.

Следствие 1. *Ако редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е сходящ, то редицата $r_n=\sum_{k=n}^{\infty} u_k$ е безкрайно малка.* Прието е r_n да се нарича *n-ти остатък* на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

За да докажем следствие 1, е достатъчно да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че $|r_n|\leq\varepsilon$ при $n\geq N$. Последното неравенство следва непосредствено от неравенство (1.12), което е вярно при $p=1, 2, 3, \ldots$ и от теорема 3.13 от т.4, § 1, глава 3, част I.

Следствие 2 (необходимо условие за сходимост на редове). *За да бъде сходящ редът* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, *е необходимо редицата* $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots$ *от членовете на реда да е безкрайно малка.*

Достатъчно е да се докаже, че за дадения сходящ ред и за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N_0 такъв, че при $n\geqq N_0$ е в сила $|u_n|<\varepsilon$. Нека е дадено произволно $\varepsilon>0$. Съгласно теорема 1.1 съществува номер N такъв, че при $n\geqq N$ и за всяко естествено p е изпълнено неравенство (1.12). В частност при $p=1$ това неравенство има вида

(1.12′) $$|u_{n+1}|<\varepsilon \quad (\text{при } n\geqq N).$$

Ако сега положим $N_0=N+1$, то при $n\geqq N_0$, имайки предвид неравенство (1.12′), получаваме $|u_n|<\varepsilon$, което трябваше да се докаже.

С други думи, следствие 2 може да се формулира така: за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е необходимо $\lim_{k\to\infty} u_k=0$. Следователно при изследване сходимостта на даден ред трябва преди всичко да се провери дали клони към нула k-тият член на реда при $k\to\infty$. Ако това не е така, то редът е разходящ. Така например редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{7k^2+8\,000\,k}$$

е очевидно разходящ, понеже

$$\lim_{k\to\infty} u_k=\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{7k^2+8\,000\,k}=\frac{1}{7}\neq 0.$$

Аналогично разходимостта на вече познатия ни ред $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ следва от факта, че $\lim_{k\to\infty}(-1)^{k-1}$ не съществува.

Да подчертаем обаче, че клоненето към нула на k-тия член на реда при $k\to\infty$ е необходимо, но не е достатъчно условие за сходимост на реда. Като пример да разгледаме реда

(1.13) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\cdots$$

Този ред обикновено се нарича *хармоничен* ред. Очевидно за хармоничния ред е изпълнено необходимото условие за сходимост, но (както е доказано в т. 3, § 3, глава 3, част I) редицата от частичните суми на този ред е разходяща.

§ 2. Редове с неотрицателни членове

1. Необходимо и достатъчно условие за сходимост на ред с неотрицателни членове. В този параграф ще разгледаме редове, всички членове на които са неотрицателни.

Редове с неотрицателни членове се срещат често в приложенията. Освен това тяхното предварително изучаване ще облекчи изучаването на редове с членове с произволни знаци. По-нататък, за да подчертаем, че става дума за редове с неотрицателни членове, ще означаваме членовете на такъв ред със символа p_k вместо u_k.

Можем веднага да отбележим основното характеристично свойство на ред с неотрицателни членове: *редицата от частичните суми на такъв ред е ненамаляваща.*

Това ни позволява да докажем следното твърдение.

Теорема 1.2. *За да бъде един ред с неотрицателни членове сходящ, е необходимо и достатъчно редицата от частичните му суми да е ограничена.*

Необходимостта следва от факта, че всяка сходяща редица е ограничена (предвид теорема 3.8 от § 1, глава 3, част I).

Достатъчността следва от това, че редицата от частичните суми е ненамаляваща и следователно за сходимостта ѝ е достатъчно тя да бъде ограничена (предвид теорема 3.15 от точка 2, § 2, глава 3, част I).

2. Критерии за сравнение. В тази точка ще докажем редица критерии, позволяващи да се направи заключение за сходимостта (или разходимостта) на разглеждания ред чрез сравнението му с друг ред, чиято сходимост (или разходимост) е известна.

Теорема 1.3. *Нека* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ *са два реда с неотрицателни членове. Нека за всеки номер* k *е изпълнено*

(1.14) $$p_k\leqq p_k'.$$

Тогава от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ *следва сходимоста на реда* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$; *от разходимостта на реда* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ *следва разходимостта на реда* $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$.

Доказателство. Да означим n-тите частични суми на редовете $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ съответно с S_n и S_n'. От (1.14) следва, че $S_n \leqq S_n'$. Последното неравенство ни позволява да заключим, че от ограничеността на редицата от частични суми $\{S_n'\}$ следва ограниченост на редицата от частични суми $\{S_n\}$ и, обратно, от неограничеността на редицата от частични суми $\{S_n\}$ следва неограниченост на редицата от частични суми $\{S_n'\}$. Вземайки под внимание теорема 1.2, теорема 1.3 е доказана.

Забележка 1. В условията на теорема 1.3 може да се поиска неравенство (1.14) да бъде изпълнено не за всички номера k, а само за тези, които са по-големи от някой номер k_0. Наистина съгласно забележка 2 в края на т. I, § 1 премахването на краен брой членове не влияе на сходимостта на реда.

Забележка 2. Теорема 1.3 остава вярна, ако в предположенията на теоремата заменим неравенство (1.14) със следното неравенство:

$$p_k \leqq C p_k', \tag{1.15}$$

където C е произволна положителна константа.

Наистина от забележка 2 от т. I, § 1 следва, че проблемът за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ е еквивалентен на проблема за сходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} (Cp_k')$. При това естествено можем да поискаме неравенството (1.15) да бъде изпълнено, започвайки от някой достатъчно голям номер k.

Следствие от теорема 1.3. *Ако $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е ред с неотрицателни членове, а $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ е ред със строго положителни членове и ако съществува крайната граница*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p'_k} = L,$$

то от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p'_k$ следва сходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$; от разходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ следва разходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Доказателство. Тъй като $\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'} = L$, то съгласно определението за граница на редица за всяко $\varepsilon > 0$ съществува номер N такъв, че при $k \geqq N$ е в сила

$$L - \varepsilon < \frac{p_k}{p_k'} < L + \varepsilon.$$

Следователно при $k \geqq N$ е вярно неравенството $p_k < (L+\varepsilon)p_k'$. Последното неравенство съвпада с неравенство (1.15) при $C = L + \varepsilon$. Предвид забележка 2 към теорема 1.3 следствието е доказано.

Теорема 1.4. *Нека $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ са два реда със строго положителни членове. Нека за всички номера k е вярно неравенството*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqq \frac{p_{k+1}'}{p_k'}. \tag{1.16}$$

Тогава от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ следва сходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$; от разходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ следва разходимост на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$.

Доказателство. Нека да запишем неравенство (1.16) за $k = 1, 2, \ldots, n-1$, където n е произволен номер. Ще имаме

$$\frac{p_2}{p_1} \leqq \frac{p_2'}{p_1'},$$

$$\frac{p_3}{p_2} \leqq \frac{p_3'}{p_2'},$$

$$\ldots$$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} \leqq \frac{p_n'}{p_{n-1}'}.$$

Като умножим почленно всички написани неравенства, получаваме $\frac{p_n}{p_1} \leqq \frac{p_n'}{p_1'}$, или $p_n \leqq \frac{p_1}{p_1'} p_n'$. Тъй като в последното неравенство величината $C = \frac{p_1}{p_1'}$ е абсолютна положителна константа, независеща от номера k, то съгласно забележка 2 към теорема 1.3 теорема 1.4 е доказана.

Забележка 3. В условията на теорема 1.4 може да се поиска неравенство (1.16) да бъде изпълнено не за всички номера k, а само започвайки от някой номер k (тъй като отстраняването на краен брой членове на реда не влияе на сходимостта на реда).

Двете доказани в тази точка теореми се наричат теореми за сравнение или критерии за сравнение.

Ще дадем примери за прилагане на критериите за сравнение.

1. Да изследваме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2+b^k}, \quad \text{където } b>0.$$

Ако $b \leqq 1$, то k-тият член на разглеждания ред не клони към нула при $k \to \infty$. Следователно необходимото условие за сходимост на редове е нарушено и значи редът е разходящ. Ако $b>1$, то понеже за всяко k е в сила неравенството

$$\frac{1}{2+b^k} < \frac{1}{b^k}$$

и понеже редът $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k}$ е сходящ, теоремата за сравнение 1.3 ни позволява да твърдим, че разглежданият ред е сходящ.

2. Да изследваме въпроса за сходимост при произволно $\alpha \leqq 1$ на следния ред:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{k^\alpha} + \cdots \tag{1.17}$$

Този ред се нарича често обобщен хармоничен ред. Тъй като при $\alpha \leqq 1$ за всеки номер k е в сила неравенството

$$\frac{1}{k^\alpha} \geqq \frac{1}{k}$$

и понеже хармоничният ред е разходящ*, то теоремата за сравнение 1.3 позволява да се твърди, че редът (1.17) е разходящ за всяко $\alpha \leqq 1$.

* Разходимостта на хармоничния ред е доказана в края на т. 2, § 1.

3. Критерии на Даламбер и Коши. Критериите на Даламбер и Коши се основават на сравнението на даден ред с геометрична прогресия

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + \cdots + q^k + \cdots, \quad |q| < 1, \tag{1.18}$$

или с разходящия ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \tag{1.19}$$

Теорема 1.5 (критерий на Даламбер)*. 1. *Ако за всички номера k или най-малкото започвайки от някой номер k, е в сила неравенството*

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqq q < 1^{**} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqq 1\right), \tag{1.20}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ).

Г. *Ако съществува границата*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \tag{1.21}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ при $L<1$ и е разходящ при $L>1$.

Теорема Г обикновено се нарича критерий на Даламбер *в гранична форма*. В тази форма той се използува най-често.

Доказателство. Ще докажем поотделно твърденията 1 и Г.

1) За доказателството на теорема 1 да положим $p_k' = q^k$ $(p_k = 1)$. Тогава $\frac{p_{k+1}'}{p_k'} = q$, където $q<1$ $\left(\frac{p_{k+1}'}{p_k'} = 1\right)$ и ние можем да запишем неравенство (1.20) във вида

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqq \frac{p_{k+1}'}{p_k'} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geqq \frac{p_{k+1}'}{p_k'}\right). \tag{1.22}$$

* Жак Лерон Даламбер — френски математик и философ (1717—1783).

** При това естествено се предполага, че всички членове на реда (най-малкото от някой номер нататък) са строго положителни.

Понеже редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, съвпадащ с реда (1.18) ((1.19)), е сходящ (разходящ), то неравенството (1.22) въз основа на теоремата за сравнение 1.4 гарантира сходимостта (разходимостта) на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Твърдението 1 е доказано.

2) Сега ще докажем теорема Г. Ако $L<1$, то съществува положително число ε такова, че $L=1-2\varepsilon$ и $L+\varepsilon=1-\varepsilon$. По определението за граница на редица за избраното ε съществува номер N такъв, че при $k \geq N$

$$L-\varepsilon<\frac{p_{k+1}}{p_k}<L+\varepsilon=1-\varepsilon. \tag{1.23}$$

Числото $L+\varepsilon=1-\varepsilon$ играе ролята на q в теорема 1. Следователно редът е сходящ.

Ако $L>1$, съществува *положително* число ε такова, че $L=1+\varepsilon$ и $L-\varepsilon=1$. В този случай лявото от неравенствата (1.23) ни дава

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}>L-\varepsilon=1 \qquad (\text{при } k \geq N).$$

Редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е разходящ съгласно твърдение 1. Теорема 1.5 е доказана напълно.

Забележки към теорема 1.5

1) Да обърнем внимание на факта, че в теорема 1.5 (1) неравенството $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q<1$ (за всички k от някой номер нататък) не може да се замени с $\frac{p_{k+1}}{p_k}<1$.

Наистина, както беше доказано по-горе, хармоничният ред (1.13) е разходящ, но за този ред $\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{k}{k+1}<1$ (за всички номера k).

2) Ако в предположенията на теорема 1.5 (Г) $L=1$, то не може да се каже нищо определено за сходимостта на реда (т. е. при $L=1$ критерият на Даламбер «не работи»). Наистина за хармоничния ред (1.13) $L=1$, а както знаем, той е разходящ. При това за реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{1.24}$$

също имаме $L=1$, но този ред е сходящ, както ще бъде доказано в следващата точка.

Теорема 1.6 (критерии на Коши). 1. *Ако за всички номера k или най-малкото започвайки от някой номер k нататък, е вярно неравенството*

$$\sqrt[k]{p_k} \leq q<1 \qquad (\sqrt[k]{p_k} \geq 1), \tag{1.25}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ).

Г. Ако съществува границата

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k}=L, \tag{1.26}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ при $L<1$ и разходящ при $L>1$.

Теорема Г се нарича обикновено критерий на Коши *в гранична форма*.

Доказателство. Твърдения 1 и Г ще докажем поотделно.

1) За доказателството на теорема 1 да положим $p_k'=q^k$ $(p_k'=1)$. Тогава от неравенствата (1.25) получаваме

$$p_k \leq p_k' \qquad (p_k \geq p_k'). \tag{1.27}$$

Тъй като редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, съвпадащ с реда (1.18) ((1.19)), е сходящ (разходящ), то неравенство (1.27) на основата на теоремата за сравнение 1.3 гарантира сходимостта (разходимостта) на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

Теорема 1.6 (1) е доказана.

2) За доказателството на теорема 1.6 (Г) трябва дословно да се повтори схемата на доказателство на теорема 1.5 (Г), като се замени във всички разсъждения $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ с $\sqrt[k]{p_k}$.

Теорема 1.6 е доказана напълно.

Забележки към теорема 1.6

1) Както и в предходната теорема, в теорема 1.6 (1) неравенството $\sqrt[k]{p_k} \leq q<1$ не може да се замени с $\sqrt[k]{p_k}<1$.

2) При $L=1$ критерият на Коши в гранична форма «не работи».

Тези забележки могат да се обосноват веднага чрез двата примера, дадени към съответните забележки към критерия на Даламбер.

3) Възниква въпросът, кой от двата критерия — на Даламбер или на Коши, е по-силен. Да анализираме този въпрос по отношение на критериите на Даламбер и Коши, взети в гранична форма. Може да се докаже, че от съществуването на границата (1.21) следва съществуването на границата (1.26) и равенство на двете граници. (Доказателството е дадено в края на тази част.) Обратното не е вярно. Наистина вижда се, че за реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k+3}{2^{k+1}} \tag{1.28}$$

границата (1.26) съществува и е равна на $\frac{1}{2}$, докато в същото време границата (1.21) не съществува. Следователно критерият на Коши е по-силен от критерия на Даламбер, понеже винаги когато работи критерият на Даламбер, работи и критерият на Коши, но съществуват редове (например редът (1.28)), за които критерият на Коши работи успешно, а критерият на Даламбер не дава резултат. Въпреки това критерият на Даламбер се използува по-често, отколкото критерият на Коши.

Примери. 1) Да изследваме въпроса за сходимостта на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{k})^k}{k!}. \tag{1.29}$$

Да приложим критерия на Даламбер в гранична форма. Имаме

$$p_k=\frac{(\sqrt{k})^k}{k!},\quad \frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{(\sqrt{k+1})^{k+1}\cdot k!}{(k+1)!\,(\sqrt{k})^k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}. \tag{1.30}$$

От (1.30) следва, че

$$\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}\right\}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k+1}}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}}$$
$$=0\cdot\sqrt{e}=0<1,$$

т. е. редът (1.29) е сходящ.

2) Да разгледаме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot 2^{-k}. \tag{1.31}$$

Ще приложим критерия на Коши в гранична форма. Имаме

$$\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\sqrt[k]{k}. \tag{1.32}$$

От равенство (1.32) получаваме* $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=\frac{1}{2}\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k}=\frac{1}{2}<1$

и от критерия на Коши следва сходимостта на реда (1.31).

В заключение ще докажем, че ако съществува и е равна на L границата (1.21), то съществува и също е равна на L границата (1.26). При доказателството ще използуваме две леми.

Лема 1. *Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща и има граница l, то към същата граница клони и редицата $\sigma_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ от средноаритметичните на числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Доказателство. Тъй като редицата $\{a_n\}$ има граница l, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че $|a_n-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ за всички $n\geq N$. Фиксираме N и отбелязваме, че при $n>N$ е в сила равенството

$$\sigma_n-l=\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}$$
$$=\left[\frac{(a_1-l)+\cdots+(a_N-l)}{n}\right]+\left\{\frac{(a_{N+1}-l)+\cdots+(a_n-l)}{n}\right\}.$$

Модулът на дробта, заключена в големите скоби, не надвишава числото $\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{(n-N)}{n}$, което е по-малко от $\frac{\varepsilon}{2}$. Понеже номерът N е фиксиран, то модулът на дробта, заключена в средните скоби, не надминава $\frac{\varepsilon}{2}$ за всички $n\geq N_1$, където N_1 е достатъчно голямо число.

Следователно $|\sigma_n-l|<\varepsilon$ при всички $n\geq N_1$, където N_1 е достатъчно голямо.

Лема 1 е доказана.

Лема 2. Ако редицата от положителни числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е сходяща и има граница L, то към същата граница L клони и редицата от средногеометричните числа

$$b_k=\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}.$$

* За намирането на $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$ е достатъчно да се логаритмува изразът $x^{\frac{1}{x}}$ и да се приложи правилото на Лопитал.

Доказателство. Преди всичко да отбележим, че от непрекъснатостта на логаритмичната функция получаваме $\lim\limits_{k\to\infty} \ln a_k = \ln L$ при $L>0$. (Последното равенство формално е в сила и при $L=0$, когато $\ln L=-\infty$.) Но тогава по лема 1 за сходимост на средноаритметичните съществува границата

$$\lim_{k\to\infty} \ln \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_k}{k} = \ln L.$$

(Последното равенство е вярно и при $L=0$, когато $\ln L=-\infty$.) От последното равенство и от непрекъснатостта на показателната функция получаваме

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \lim_{k\to\infty} e^{\ln \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}} = e^{\ln L} = L.$$

(Тези разсъждения са верни и при $L=0$.) Лема 2 е доказана.

Като приложим лема 2 към числата $a_1=p_1,\ a_2=\frac{p_2}{p_1}, \ldots, a_k=\frac{p_k}{p_{k-1}}$ и използуваме факта, че границата (1.21) съществува и е равна на L, получаваме, че границата (1.26) съществува и е равна също на L.

4. Интегрален критерий на Коши—Маклорен. Критериите на Даламбер и Коши се оказват непригодни за изясняване на въпроса за сходимост на някои често срещани редове с положителни членове. Така например с помощта на тези критерии не може да се изясни въпросът за сходимост на обобщения хармоничен ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} \tag{1.33}$$

(α е произволно реално число).

Всъщност в края на точка 2 установихме, че при $\alpha \leq 1$ редът (1.33) е разходящ, но остава открит въпросът за сходимост на този ред при $\alpha>1$. В тази точка ще докажем един общ критерий за сходимост на редове с неотрицателни членове, от който в частност ще следва сходимостта на реда (1.33) при $\alpha>1$.

Теорема 1.7 (теорема на Коши—Маклорен). Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна и нерастяща върху полуправата $x \geq m$, където m е произволно фиксирано число. Тогава редът

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(m+k) = f(m) + f(m+1) + f(m+2) + \cdots \tag{1.34}$$

е сходящ тогава и само тогава, когато съществува границата на редицата

$$a_n = \int_m^{m+n} f(x)dx \tag{1.35}$$

при $n\to\infty$.

Доказателство. Нека k е произволен номер, удовлетворяващ условието $k \geq 1$, а x е произволна стойност на аргумента от сегмента $m+k-1 \leq x \leq m+k$. Тъй като по условие функцията $f(x)$ е нерастяща в този сегмент, то за всяко x от същия сегмент са верни неравенствата

$$f(m+k) \leq f(x) \leq f(m+k-1). \tag{1.36}$$

Функцията $f(x)$, след като е ограничена и монотонна, е интегруема в интервала $[m+k-1,\ m+k]$ (вж. т. 2, §3, глава 9, част I). Освен това от свойствата на интегралите (вж. свойство б), т. 2, §4, глава 9, част I) следва, че

$$\int_{m+k-1}^{m+k} f(m+k)dx \leq \int_{m+k-1}^{m+k} f(x)dx \leq \int_{m+k-1}^{m+k} f(m+k-1)dx$$

или

$$f(m+k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx \leq f(m+k-1). \tag{1.37}$$

Неравенствата (1.37) сме доказали за всяко $k \geq 1$. Да запишем тези неравенства за значения на k, равни на $1, 2, \ldots, n$, където n е произволен номер. Имаме

$$f(m+1) \leq \int_m^{m+1} f(x)dx \leq f(m),$$

$$f(m+2) \leq \int_{m+1}^{m+2} f(x)dx \leq f(m+1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(n) \leq \int_{m+n-1}^{m+n} f(x)dx \leq f(m+n-1).$$

Като съберем почленно горните неравенства, получаваме

$$\sum_{k=1}^{n} f(m+k) \leq \int_{m}^{m+n} f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{m+n-1} f(m+k). \tag{1.38}$$

Да означим с S_n n-тата частична сума на реда (1.34), равна на

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(m+k).$$

Отчитайки означението (1.35), можем да напишем неравенството (1.38) по следния начин:

$$S_n - f(m) \leq a_n \leq S_{n-1}. \tag{1.39}$$

Неравенствата (1.39) позволяват без труд да докажем теоремата. Наистина от формулата (1.35) очевидно следва, че редицата $\{a_n\}$ е ненамаляваща. Следователно, за да бъде тя сходяща, е необходимо и достатъчно да е ограничена. За сходимостта на реда (1.34) предвид теорема 1.2 е необходимо и достатъчно да бъде ограничена редицата $\{S_n\}$. От неравенствата (1.39) следва, че редицата $\{S_n\}$ е ограничена тогава и само тогава, когато е ограничена редицата $\{a_n\}$, т. е. тогава и само тогава, когато е сходяща редицата $\{a_n\}$. Теоремата е доказана.

Примери. 1) Преди всичко да приложим интегралния критерий на Коши—Маклорен за изясняване сходимостта на обобщения хармоничен ред (1.33). Понеже редът (1.33) може да се разглежда като ред от вида (1.34) при $m=1$, $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ и функцията $f(x)$ е намаляваща и положителна върху полуправата $x \geq 1$, то въпросът за сходимостта на реда (1.33) е еквивалентен на въпроса за сходимост на редицата $\{a_n\}$, където

$$a_n = \int_{1}^{n} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{x=1}^{x=n} = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \left. \ln x \right|_{n=1}^{x=n} = \ln n & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

От вида на елементите a_n следва, че редицата $\{a_n\}$ е разходяща при $\alpha \leq 1$ и сходяща при $\alpha > 1$, при това в последния случай $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\alpha-1}$. Следователно редът (1.33) е разходящ при $\alpha \leq 1$ (това вече установихме по-горе по друг начин) и е сходящ при $\alpha > 1$. В частност при $\alpha = 2$ редът (1.33) преминава в реда (1.24), чиято сходимост вече можем да твърдим.

2) Да изследваме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\beta} k}, \tag{1.40}$$

където β е фиксирано положително число. Редът (1.40) може да се разглежда като ред от вида (1.34) при $m=2$ и $f(x)=\frac{1}{x \ln^{\beta} x}$. Понеже функцията $f(x)$ е неотрицателна и нерастяща върху полуправата $x \geq 2$, то въпросът за сходимостта на реда (1.40) е еквивалентен на въпроса за сходимост на редицата $\{a_n\}$, където

$$a_n = \int_{2}^{n} \frac{dx}{x \ln^{\beta} x} = \begin{cases} \left. \frac{\ln^{1-\beta} x}{1-\beta} \right|_{x=2}^{x=n} = \frac{\ln^{1-\beta} n - \ln^{1-\beta} 2}{1-\beta} & \text{при } \beta \neq 1, \\ \left. \ln \ln x \right|_{x=2}^{x=n} = \ln \ln n - \ln \ln 2 & \text{при } \beta = 1. \end{cases}$$

От вида на елементите a_n следва, че редицата $\{a_n\}$ е сходяща при $\beta > 1$ и разходяща при $\beta \leq 1$. Следователно редът (1.40) е сходящ при $\beta > 1$ и разходящ при $\beta \leq 1$.

5. Критерии на Раабе. Критериите на Даламбер и Коши бяха основани на сравнението на разглеждания ред с ред, представляващ сума на геометрична прогресия. Естествено възниква идеята за получаване на по-тънки критерии, основаващи се на сравнение на разглеждания ред с други стандартни редове, сходящи или разходящи «по-бавно» от реда на геометричната прогресия.

В тази точка ще установим един критерий, основаващ се на сравнението на разглеждания ред с изучения в предната точка стандартен ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots \tag{1.41}$$

Теорема 1.8 (критерий на Раабе*). 1. Ако за всички номера k или поне от известен номер нататък е вярно неравенството

$$k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \geq q > 1^{**} \quad \left(k\left(1 - \frac{p_{k+1}}{p_k}\right) \leq 1\right), \tag{1.42}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ).

* Йозеф Лудвиг Раабе — швейцарски математик (1801—1859).

** Естествено ние предполагаме, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ поне от някой номер нататък има строго положителни членове.

Г. Ако съществува границата

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=L, \tag{1.43}$$

то редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ при $L>1$ и разходящ при $L<1$. Теорема Г обикновено се нарича критерий на Раабе в гранична форма.

Доказателство. Твърденията 1 и Г ще докажем поотделно.

1. За да докажем твърдение 1, да запишем неравенства (1.42) във вида

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq 1-\frac{q}{k} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geq 1-\frac{1}{k}\right). \tag{1.44}$$

Тъй като $q>1$, то съществува число α такова, че $q>\alpha>1$. Като разложим функцията $(1+x)^{\alpha}$ по формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Пеано (вж. т. 2, § 9, глава 6, част I), получаваме

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\overline{\overline{o}}(x).$$

Като положим в последното равенство $x=-\frac{1}{k}$, намираме

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^{\alpha}=1-\frac{\alpha}{k}+\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{k}\right). \tag{1.45}$$

Понеже редицата $\dfrac{\overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}$ е безкрайно малка, то от някой номер k_0 нататък е в сила неравенството

$$\frac{o\left(\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}}\leq q-\alpha. \tag{1.46}$$

От (1.45) и (1.46) получаваме неравенството

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^{\alpha}\geq 1-\frac{q}{k} \quad (\text{при } k\geq k_0). \tag{1.47}$$

Като сравним неравенствата (1.44) и (1.47), получаваме

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq\left(1-\frac{1}{k}\right)^{\alpha} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geq 1-\frac{1}{k}\right) \quad (\text{при } k\geq k_0).$$

Последните неравенства могат да се запишат още във вида

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq\frac{\frac{1}{k^{\alpha}}}{\frac{1}{(k-1)^{\alpha}}} \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geq\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}}\right) \quad (\text{при } k\geq k_0). \tag{1.48}$$

Понеже редът 1.41) е сходящ при $\alpha>1$ и разходящ при $\alpha=1$, то от неравенство (1.48) и теоремата за сравнение 1.4 следва, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е сходящ (разходящ). Теорема 1 е доказана.

2) Точно както при критериите на Даламбер и Коши, ще сведем твърдение Г към твърдението 1. Нека $L>1$. Да положим $\varepsilon=\frac{L-1}{2}$, $q=1+\varepsilon=L-\varepsilon$. По определението за граница от (1.43) следва, че за това ε може да се намери номер k_0 такъв, че $\left|k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)-L\right|<\varepsilon$ при $k>k_0$. Следователно лявото неравенство (1.42) е вярно. Ако $L<1$, то полагаме $\varepsilon=1-L$ и по определението за граница от (1.43) следва, че от някой номер k_0 нататък е в сила дясното неравенство (1.42). Теорема 1.8 е доказана напълно.

Забележка. Ще отбележим, че в теорема 1.8 (1) в лявото неравенство (1.42) не може да се вземе $q=1$ (в такъв случай редът може да не е сходящ). При $L=1$ теорема 1.8 (Г) «не работи» (възможна е и сходимост, и разходимост на реда).

Пример. Да изследваме въпроса за сходимост на реда

$$\sum_{k=2}^{\infty} p_k,\ \text{където}\ p_k=a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k-1}\right)},\ a=\text{const}>0.$$

Непосредствено се проверява, че критериите на Даламбер и Коши, приложени към този ред, «не действуват». Да приложим критерия на Раабе. Лесно се проверява, че

$$k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=\frac{a^{-\frac{1}{k}}-1}{-\frac{1}{k}}.$$

Вижда се, че последната дроб при $k\to\infty$ клони към производната на функцията a^x в точката $x=0$, т. е. клони към $\ln a$. Съгласно критерия на Раабе разглежданият ред е сходящ при $\ln a>1$, т. е. при $a>e$, и разходящ при $\ln a<1$, т. е. при $a<e$. При $a=e$ въпросът за сходимостта на разглеждания ред изисква допълнително

изследване, тъй като критерият на Раабе «не работи». Друг пример на ред, за който критерият на Раабе «не работи», е редът (1.40).

6. Универсален ред за сравнение не съществува. Вече отбелязахме, че критериите на Даламбер и Коши се основават на сравнението на разглеждания ред с реда на геометричната прогресия, а критерият на Раабе — на сравнение с по-бавно сходящия (или разходящ) ред (1.41).

Естествено възниква въпросът не съществува ли такъв универсален сходящ (или разходящ) (възможно най-бавно) ред, с който може да бъде сравнен произволен ред с неотрицателни членове.

Ще докажем, че такъв универсален ред не съществува. Нека са дадени два сходящи реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$. Да означим съответно с r_n и r_n' техните n-ти остатъци*. Ще казваме, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$ е сходящ *по-бавно* от реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, ако $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_n'}=0$. Ще докажем, че *за всеки сходящ ред съществува ред, който е по-бавно сходящ от него.* Наистина нека $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ е произволен сходящ ред и r_n е неговият n-ти остатък. Ще докажем, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, където $p_k'=\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}$, е по-бавно сходящ от реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$. Наистина ако r_n' е n-тият остатък на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{r_n'}=\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{\sqrt{r_n}}=0.$$

Сега да докажем, че не съществува универсален сходящ ред, с който може да бъде сравнен произволен ред. Наистина, ако допуснем, че такъв универсален сходящ ред $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ съществува, като вземем за него построения по-горе ред $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$, ще имаме

* За r_0 вземаме цялата сума $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_k'}=\lim_{k\to\infty} \frac{r_{k-1}-r_k}{\sqrt{r_{k-1}}-\sqrt{r_k}}=\lim_{k\to\infty} (\sqrt{r_{k-1}}+\sqrt{r_k})=0.$$

Следователно от сравнение с реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ не може да се направи заключение за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k'$. Аналогично се доказва, че не съществува универсален разходящ ред, сравнението с който би позволило да установим разходимостта на произволен разходящ ред.

§ 3. Абсолютно и условно сходящи редове

1. Понятията абсолютно и условно сходящи редове. Преминаваме към изучаването на редове, чиито членове са реални числа с произволен знак.

Определение 1. *Ще казваме, че редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.49}$$

е *абсолютно сходящ, ако е сходящ редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|. \tag{1.50}$$

Да отбележим, че в това определение не се предполага сходимост на самия ред (1.49). Оказва се, че това предположение е излишно, понеже е вярна следната теорема.

Теорема 1.9. *От сходимостта на реда* (1.50) *следва сходимост на реда* (1.49).

Доказателство. Ще използуваме критерия на Коши за сходимост на редове, т. е. теорема 1.1. Трябва да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geq N$, и за всяко естествено p е в сила неравенството

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon. \tag{1.51}$$

Да фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Понеже редът (1.50) е сходящ, то съгласно теорема 1.1 съществува номер N такъв, че за всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N$, и за всяко естествено p е в сила неравенството

$$(1.52) \qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon.$$

От друга страна, валидно е очевидното неравенство

$$(1.53) \qquad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|.$$

Като съпоставим неравенства (1.52) и (1.53), получаваме неравенство (1.51). Теоремата е доказана.

Определение 2. *Редът* (1.49) *се нарича условно сходящ, ако е сходящ и в същото време съответният ред от модулите на членовете му* (1.50) *е разходящ.*

Като пример за абсолютно сходящ ред може да служи редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \cdots, \text{ където } \alpha > 1.$$

Този ред е абсолютно сходящ, понеже при $\alpha > 1$ е сходящ редът (1.33). Ще дадем пример за условно сходящ ред. Ще докажем, че е условно сходящ следният ред:

$$(1.54) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Понеже съответният ред от модулите е хармоничният ред, за който знаем, че е разходящ, за да докажем условната сходимост на реда (1.54), е достатъчно да докажем, че този ред е сходящ. Ще докажем, че редът (1.54) има сума $\ln 2$. В т. 2, §9, глава 6, част I получихме развитието на функцията $\ln(1+x)$ по формулата на Маклорен

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

На същото място за всички x от сегмента $0 \leq x \leq 1$ е получена следната оценка за остатъчния член:

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Като положим в последните две съотношения $x=1$, ще имаме

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1),$$

където

$$|R_{n+1}(1)| < \frac{1}{n+1},$$

или

$$(1.55) \qquad \left| \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right] - \ln 2 \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Като означим с S_n n-тата частична сума на реда (1.54), можем да запишем неравенство (1.55) във вида

$$(1.56) \qquad |S_n - \ln 2| < \frac{1}{n+1}.$$

От (1.56) следва, че разликата $S_n - \ln 2$ е безкрайно малка редица. Това доказва сходимостта на реда (1.54) към $\ln 2$.

2. Разместване на членовете в условно сходящ ред. Едно от най-важните свойства на сумите на краен брой реални числа е свойството комутативност. Това свойство твърди, че при разместване на събираемите сборът не се променя. Естествено възниква въпросът, остава ли в сила това свойство за сумата на сходящ ред, т. е. може ли да се измени сумата на сходящ ред при разместване на членовете на този ред. В тази точка ще изясним този въпрос по отношение на условно сходящите редове. Ще започнем нашите разглеждания с изучаването на едно конкретно разместване членовете на реда (1.54). За удобство да запишем реда (1.54) във вида

$$\underbrace{1 - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}} + \cdots$$

В края на предната точка доказахме, че редът (1.54) е условно сходящ и има сума $\ln 2$. Сега да разместим членовете на реда (1.54) така, че след един положителен член да стоят два отрицателни члена. След такова разместване на членовете получаваме реда

$$(1.57) \qquad \underbrace{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2}} - \frac{1}{4k} + \cdots$$

Ще докажем, че редът (1.57) е сходящ и има сума, два пъти по-малка от сумата на реда (1.54). Да означим с S_m и S'_m m-те частични суми съответно на редовете (1.54) и (1.57). Можем да пишем

$$S'_{3m} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) =$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}.$$

И така

$$S'_{3m}=\frac{1}{2}S_{2m}. \tag{1.58}$$

Очевидно имаме

$$S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S_{2m}+\frac{1}{4m}, \tag{1.59}$$

$$S'_{3m-2}=S'_{3m-1}+\frac{1}{4m-2}. \tag{1.60}$$

Понеже $\lim_{m\to\infty} S_{2m}=S$, то след граничен преход при $m\to\infty$ в равенствата (1.58), (1.59) и (1.60) получаваме

$$\lim_{m\to\infty} S'_{3m}=\frac{1}{2}S,\ \lim_{m\to\infty} S'_{3m-1}=\frac{1}{2}S,\ \lim_{m\to\infty} S'_{3m-2}=\frac{1}{2}S.$$

Оттук следва, че редът (1.57) е сходящ и има сума, равна на $\frac{1}{2}S$. Понеже $S=\ln 2\neq 0$, то е ясно, че $\frac{1}{2}S\neq S$. Следователно в резултат на направеното по-горе разместване на членовете на реда (1.54) сумата му се измени. Разгледаният конкретен пример показва, че условно сходящите редове не притежават свойството комутативност. Пълна яснота по въпроса за влиянието на разместването на членовете върху сумата на условно сходящ ред дава следното забележително твърдение, принадлежащо на Риман.

Теорема 1.10 (теорема на Риман). *Ако един ред е условно сходящ, то за всяко отнапред избрано число L съществува такова разместване на членовете на този ред, че новият ред да е сходящ и сумата му е равна на L.*

Доказателство. Нека

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.61}$$

е произволен условно сходящ ред. Да означим с $p_1, p_2, p_3, \dots$ положителните членове на реда (1.61), написани по реда, по който те стоят в реда, а с $q_1, q_2, q_3, \dots$ модулите на отрицателните членове на реда (1.61), записани в същия ред, по който те стоят в реда. Редът (1.61) съдържа безбройно много както положителни, така и отрицателни членове. Наистина, ако членовете с един и същ знак са краен брой, то условната сходимост няма да се повлияе от премахването на краен брой членове от началото на реда. Същевременно ще получим ред, състоящ се от членове с еднакъв знак, който е сходящ и значи абсолютно сходящ. И така с реда (1.61) са свързани два безкрайни реда с положителни членове $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$. Ще означаваме първия ред със символа P, а втория — със символа Q. Ще докажем, че двата реда са разходящи. Да означим с S_n n-тата частична сума на реда (1.61), с P_n — сумата на всички положителни членове, влизащи в S_n, с Q_n — сумата от модулите на отрицателните членове, влизащи в S_n. Тогава очевидно $S_n=P_n-Q_n$ и понеже по условие редът (1.61) е сходящ и има някаква сума S, то

$$\lim_{n\to\infty}(P_n-Q_n)=S. \tag{1.62}$$

От друга страна, понеже редът (1.61) не е абсолютно сходящ, то

$$\lim_{n\to\infty}(P_n+Q_n)=+\infty. \tag{1.63}$$

От (1.62) и (1.63) следва, че $\lim_{n\to\infty} P_n=+\infty$, $\lim_{n\to\infty} Q_n=+\infty$, т. е. двата реда P и Q са разходящи. От разходимостта на редовете P и Q следва, че даже след премахване на произволен краен брой членове на тези редове можем да изберем както от P, така и от Q такъв брой членове, че тяхната сума да надмине всяко отнапред избрано число. Опирайки се на този факт, ще докажем, че може така да се разместят членовете на изходния ред (1.61), че полученият ред да е сходящ и да има сума, равна на отнапред избрано число L. Ще получим търсения ред по следния начин. Най-напред да изберем от изходния ред (1.61) *точно толкова* положителни членове $p_1, p_2, \dots, p_{k_1}$ така, че сумата $p_1+p_2+\dots+p_{k_1}$ да надхвърли L. След това да добавим към избраните вече членове *точно толкова* отрицателни членове $-q_1, -q_2, \dots, -q_{k_2}$ така, че общата сума $p_1+p_2+\dots+p_{k_1}-q_1-q_2-\dots-q_{k_2}$ да стане по-малка от L. След това отново да добавим *точно толкова* положителни членове $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \dots, p_{k_3}$ така, че общата сума $p_1+p_2+\dots+p_{k_1}-q_1-q_2-\dots-q_{k_2}+p_{k_1+1}+\dots+p_{k_3}$ да стане по-голяма от L. Продължавайки по същия начин по-нататък, ще получим един безкраен ред, в който ще влязат всички членове на изходния ред (1.61), тъй като всеки път ще трябва да добавяме поне един положителен или отрицателен член на изходния ред. Остава да се докаже, че полученият ред е сходящ и има сума L. Да отбележим, че в получения ред последователно има групи от положителни и отрицателни членове. Ако една частична сума на получения ред завършва с напълно завършена група, то отклонението на тази частична сума от числото L няма да надминава модула на последния нейн член*. Ако частичната сума завършва на ненапълно завършена група, то отклонението на тази частична сума от числото L не надминава модула на последния член от предпоследната група. За да докажем сходимостта на реда към L, е достатъчно да се убедим в това, че модулите на последните членове на последователните групи образуват безкрайно малка редица. Това непосредствено следва от необходимото условие за сходимост на изходния ред (1.61). Теоремата на Риман е доказана.

Забележка. Аналогично може да се докаже, че ако един ред е условно сходящ, то неговите членове могат да бъдат разместени така, че редицата от частичните суми на преобразувания ред да бъде безкрайно голяма, като всички елементи на същата от някой номер нататък са положителни (съответно отрицателни).

3. Разместване членовете на абсолютно сходящ ред. В предния пункт доказахме, че условно сходящите редове не притежават свойството комутативност. В този пункт ще докажем, че абсолютно сходящите редове притежават това свойство.

Теорема 1.11 (теорема на Коши). *Ако един ред е абсолютно сходящ, то всеки ред, получен от него чрез разместване на членовете му, е също абсолютно сходящ и има същата сума, както първоначалният ред.*

Доказателство. Нека редът

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \tag{1.64}$$

е абсолютно сходящ и сумата му е равна на S. Нека освен това

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k' \tag{1.65}$$

е ред, получен от реда (1.64) чрез разместване на членовете му. Трябва да докажем: 1) че редът (1.65) е сходящ и има сума, равна на S, 2) че редът (1.65) е абсолютно сходящ. Да докажем най-напред 1). Достатъчно е да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува номер N такъв, че при $n\geq N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'-S\right|<\varepsilon. \tag{1.66}$$

Нека фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Понеже редът (1.64) е абсолютно

* Тъй като добавяме към дадената група нови членове точно дотогава, докато общата сума «не премине» през числото L.

сходящ и сумата му е равна на S, то за избраното ε съществува номер N_0 такъв, че са в сила неравенствата

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (p \text{ — произволно естествено число}) \tag{1.67}$$

и

$$\left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k-S\right|<\frac{\varepsilon}{2}\,^{*}. \tag{1.68}$$

Сега да изберем номер N така, че всяка частична сума S_n' на реда (1.65) с номер n, надминаващ N, да съдържа първите N_0 членове на реда (1.64)**.

Ще оценим разликата, стояща в лявата страна на (1.66), и ще докажем, че при $n\geq N$ за тази разлика е в сила неравенство (1.66).

Наистина посочената разлика може да се представи във вида

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'-S=\left(\sum_{k=1}^{n} u_k'-\sum_{k=1}^{N_0} u_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k-S\right). \tag{1.69}$$

Понеже модулът на сума от две числа не надминава сумата от модулите им, то от (1.69) следва, че

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'-S\right|\leq\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'-\sum_{k=1}^{N_0} u_k\right|+\left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k-S\right|. \tag{1.70}$$

От неравенствата (1.68) и (1.70) очевидно следва, че за доказателството на неравенство (1.66) е достатъчно да се докаже при $n\geq N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k'-\sum_{k=1}^{N_0} u_k\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.71}$$

За доказателството на неравенството (1.71) отбелязваме, че при $n\geq N$ първата от сумите, стоящи в лявата страна на (1.71), съдържа всичките N_0 начални членове на реда (1.64). Следователно разликата

* Номерът N_0 в неравенствата (1.67) и (1.68) може да се вземе един и същ. Наистина, ако предварително напишем посочените неравенства с различни номера N_0, то след това можем да вземем по-големия от двата номера N_0.

** Такъв номер N може да бъде избран, тъй като редът (1.65) се получава от (1.64) чрез разместване на някои членове.

$$(1.72)\qquad \sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k$$

представлява сума на $(n-N_0)$ члена на реда (1.64) с номера, *не-надминаващи* N_0.

Ако изберем естественото число p толкова голямо, че номерът N_0+p да надминава номерата на всичките $(n-N_0)$ членове на току-що посочената сума, то за разликата (1.72) е вярно неравенството

$$(1.73)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n} u_k' - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| \leq \sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k|.$$

От неравенства (1.73) и (1.67) следва неравенство (1.71). С това е доказано неравенство (1.66), т.е. доказано е, че редът (1.65) е сходящ и има сума, равна на S. Остава да докажем твърдение 2) за това, че редът (1.65) е абсолютно сходящ. Доказателството на това твърдение следва от твърдение 1), ако го приложим към редовете

$$(1.74)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} |u_k'|.$$

По този начин ще докажем сходимостта на втория ред от (1.74), т.е. ще докажем абсолютната сходимост на реда (1.65). Теорема 1.11 е напълно доказана.

§ 4. Критерии за сходимост на произволни редове

В § 2 получихме критерии за сходимост на редове с неотрицателни членове. В този параграф ще изучим критерии за сходимост на редове, чиито членове имат произволен знак. И така нека

$$(1.75)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

е ред, чиито членове имат произволен знак. Преди всичко ще отбележим, че за да изследваме абсолютната сходимост на този ред, т.е. за да изследваме сходимостта на реда с положителни членове

$$(1.76)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} |u_k|,$$

можем да приложим всеки от критериите от § 2 (критериите на Даламбер, Коши, Раабе и интегралния критерий). Но нито един от посочените критерии не може да се приложи за изясняването на по-тънкия въпрос за условната сходимост на реда (1.75)*.

По-долу ще се заемем с намирането на по-тънки критерии, позволяващи да се докаже сходимостта на реда (1.75) и в тези случаи, когато редът не е абсолютно сходящ.

Ще започнем нашите разглеждания с извода на едно важно тъждество, което представлява основен инструмент за доказателството на формулираните по-долу критерии.

Нека $\{u_k\}$ *и* $\{v_k\}$ *са две произволни редици,* $S_k=u_1+u_2+\cdots+u_k$, n *и* p *са два произволни номера. Тогава вярно е следното тъждество:*

$$(1.77)\qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k-v_{k+1}) + S_{n+p}\cdot v_{n+1} - S_n v_{n+1},$$

което се нарича ***преобразование на Абел.***

Понеже за всяко $k\geq 2$ е вярно равенството $u_k=S_k-S_{k-1}$, то лявата страна на (1.77) може да се представи във вида

$$(1.78)\qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k\cdot v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1}\cdot v_k.$$

В последната сума в дясната страна на (1.78) да сменим индекса на сумиране k с $k-1$. Получаваме

* Да отбележим, че критериите на Даламбер и Коши могат да се прилагат за доказателство на **разходимостта** на реда (1.75), чиито членове имат произволни знаци. Наистина във всеки случай, когато критерият на Даламбер или Коши констатира разходимостта на реда от модулите $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$, k-тият член на реда (1.76) $|u_k|$ не клони към нула при $k\to\infty$, т.е. редът (1.75) е разходящ. Като пример ще докажем, че редът $\sum_{k=1}^{\infty} k!\left(\frac{x}{k}\right)^k$ е разходящ при всяко фиксирано x, удовлетворяващо неравенството $|x|>e$. Нека подчертаем, че непосредствената проверка на факта, че k-тият член на разглеждания ред клони към нула при $k\to\infty$, е затруднително. Ще приложим критерия на Даламбер към разглеждания ред. Като означим с a_k k-тия член на този ред, ще имаме $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$, откъдето $\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{|x|}{e}>1$. Разходимостта на реда е доказана.

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k \cdot v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + $$
$$+ S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}.$$

С това тъждеството на Абел е доказано.

Определение. *Редицата* $\{v_k\}$ *се нарича* *редица с ограничена вариация, ако е сходящ редът*

(1.79) $$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|.$$

Очевидно *всяка редица с ограничена вариация е сходяща.*

Наистина от сходимостта на реда от модулите (1.79) следва сходимостта на реда без модулите

(1.80) $$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1} - v_k].$$

Като означим с S сумата на реда (1.80), а с S_n — n-тата частична сума на този ред и като отчетем, че $S_n = v_{n+1} - v_1$, получаваме, че $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} v_{n+1}$ съществува и е равна на $S + v_1$. Това означава, че редицата $\{v_k\}$ е сходяща и има граница $S + v_1$.

Теорема 1.12 (първи критерий на Абел). *Ако редицата от частичните суми на реда*

(1.81) $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

е ограничена, а $\{v_k\}$ *е редица с ограничена вариация, която клони към нула, то редът*

(1.82) $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$$

е сходящ.

Доказателство. По условие съществува число $M > 0$ такова, че редицата от частичните суми $\{S_n\}$ на реда (1.81) удовлетворява условието $|S_n| \le M$.

Да фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и заедно с него номер N такъв, че при $n \ge N$ и за произволно естествено p са в сила неравенствата

(1.83) $$|v_n| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

(1.84) $$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

(Тук ние използувахме, че редицата $\{v_k\}$ клони към нула и че редът (1.79) е сходящ.)

От тъждеството на Абел (1.77) и от факта, че модулът на сума от три числа не надминава сумата от техните модули, получаваме

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1})\right| + |S_{n+p}|\,|v_{n+p}| + |S_n|\,|v_{n+1}|.$$

Като вземем под внимание, че за всеки номер n е в сила неравенството $|S_n| \le M$, получаваме

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| + M\,|v_{n+p}| + M \cdot |v_{n+1}|.$$

Като съпоставим последното неравенство с (1.83) и (1.84), получаваме, че при $n \ge N$ и за произволно естествено p

(1.85) $$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon,$$

а това означава, че редът (1.82) е сходящ (по критерия на Коши). Теорема 1.12 е доказана.

Теорема 1.13 (втори критерий на Абел). *Ако редът* (1.18) *е сходящ, а* $\{v_k\}$ *е произволна редица с ограничена вариация, то редът* (1.82) *е сходящ.*

Доказателство. Тъй като сходящият ред (1.81) има сходяща, а значи и ограничена редица от частични суми $\{S_n\}$, то съществува константа $M > 0$ такава, че $|S_n| \le M$ за всички номера n.

Да означим с S сумата на реда (1.81), а с v границата на редицата $\{v_k\}$. Тогава можем да твърдим, че всяка от редиците $\{S_n \cdot v_n\}$ и $\{S_n v_{n+1}\}$ клони към $S \cdot v$ при $n \to \infty$ и следователно всяка от редиците

(1.86) $$\{S_n v_n - Sv\} \quad \text{и} \quad \{S_n v_{n+1} - Sv\}$$

е безкрайно малка.

Отчитайки това и сходимостта на реда (1.79) и фиксирайки произволно $\varepsilon > 0$, можем да намерим номер N такъв, че за всяко $n \ge N$ и за произволно естествено p да имаме

(1.87) $$|S_n v_n - Sv| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |S_n v_{n+1} - Sv| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Неравенствата (1.87), оценката $|S_n|\leqq M$ и тъждеството на Абел (1.77), което можем да запишем във вида

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k=\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k-v_{k+1})+[S_{n+p}v_{n+p}-Sv]+[S\,.\,v-S_n v_{n+1}],$$

ни позволяват да твърдим, че е в сила неравенство (1.85) (при всички $n\geqq N$ и за произволно естествено p). Съгласно критерия на Коши теорема 1.13 е доказана.

Следствие 1 от теорема 1.12 (критерий на Дирихле—Абел). *Ако редицата от частичните суми на реда (1.81) е ограничена, а редицата $\{v_k\}$ нерастяща и клони към нула, то редът (1.82) е сходящ.*

Достатъчно е да се забележи, че нерастящата редица $\{v_k\}$, която клони към нула, има ограничена вариация, понеже n-тата частична сума S_n на реда (1.79) е равна на v_1-v_{n+1} и има граница, равна на v_1.

За да формулираме още едно следствие от теорема 1.12, ще въведем понятието ред на Лайбниц.

Ще казваме, че един ред е с алтернативно сменящи се знаци, ако всички членове на реда с нечетни номера са положителни, а всички членове с четни номера — отрицателни.

Ще казваме, че един ред е ред на Лайбниц, ако той е с алтернативно сменящи се знаци и модулите на членовете му образуват нерастяща и сходяща към нула редица.

Следствие 2 от теорема 1.12 (критерий на Лайбниц). *Ако един ред е ред на Лайбниц, то той е сходящ.*

Наистина всеки ред на Лайбниц може да се запише във вида

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\,.\,v_k=v_1-v_2+v_3-v_4+\dots, \tag{1.88}$$

където $\{v_k\}$ е нерастяща и клоняща към нула редица (всички $v_k>0$).

Горният ред е частен случай на реда (1.82) при $u_k=(-1)^{k-1}$, като редът (1.81) е с ограничена редица от частичните суми*. Следователно критерият на Лайбниц следва непосредствено от доказания вече критерий на Дирихле—Абел (следствие 1 от теорема 1.12).

Забележка. Лесно се вижда, че за произволен ред на Лайбниц (1.88) редицата $\{S_{2n}\}$ от частичните суми с четни номера е ненамаляваща, а редицата $\{S_{2n-1}\}$ от частичните суми с нечетни номера е нерастяща. Оттук и от забележка 3 към теорема 3.15 от

* Редицата от частичните суми на реда (1.81) с членове $u_k=(-1)^{k-1}$ ще има вида 1, 0, 1, 0, . . .

част 1 следва, че сумата S на реда на Лайбниц (1.88) за всеки номер n удовлетворява неравенствата

$$S_{2n}\leqq S\leqq S_{2n-1},$$

и понеже $S_{2n-1}-S_{2n}=v_{2n}$, то всяка от сумите S_{2n} и S_{2n-1} се отличава от S с не повече от v_{2n}. Оттук и от факта, че $v_{2n-1}\geqq v_{2n}$, следва, че за произволен номер n е в сила оценката

$$|S_n-S|\leqq v_n.$$

Тази оценка играе важна роля при приближеното пресмятане на сумите на редовете на Лайбниц с помощта на техните частични суми.

Ще дадем примери за използуване на доказаните критерии.

1°. По-горе чрез формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$ ние доказахме сходимостта на реда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}+\dots$

Да отбележим, че сходимостта на този ред следва непосредствено от критерия на Лайбниц.

2°. Ще изучим въпроса за сходимостта на реда

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\dots+\frac{1}{3k-2}+\frac{1}{3k-1}-\frac{2}{3k}+\dots$$

Този ред е ред от вида (1.82) при $v_k=\frac{1}{k}$, $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=-2$, $u_4=1$, $u_5=1$, $u_6=-2, \dots$

Вижда се, че редицата от частичните суми на реда (1.81) с такива u_k има вида 1, 2, 0, 1, 2, 0, ..., т.е. сгщата е ограничена.

Тъй като редицата $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ е нерастяща и клони към нула, то разглежданият ред е сходящ по критерия на Дирихле—Абел.

3°. Да изясним въпроса за сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$, където x е някое фиксирано реално число. Като използуваме означенията на теорема 1.13, да положим $u_k=\cos kx$, $v_k=\frac{1}{k}$. Да оценим редицата от частичните суми $\{S_n\}$ на реда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$. Понеже за всеки номер k имаме

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x=2\sin\frac{x}{2}\cos kx,$$

то като сумираме тези равенства по k от 1 до n, ще получим

$$\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=2S_n\cdot\sin\frac{x}{2}.$$

Оттук

$$S_n=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Следователно за всяко x, което *не е кратно на* 2π, редицата от частичните суми $\{S_n\}$ е ограничена:

$$|S_n|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

Съгласно теорема 1.13 *разглежданият ред е сходящ за всяко* x, *което не е кратно на* 2π. Ако x е кратно на 2π, то разглежданият ред се превръща в хармоничния ред и, както беше доказано по-преди, е разходящ.

§ 5. Аритметични действия със сходящи редове

В този параграф ще разгледаме въпроса за почленно събиране и за умножение на сходящи редове.

Теорема 1.14. *Ако редовете* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$ *са сходящи и имат суми съответно равни на* U *и* V, *то редът* $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k\pm v_k)$ *е също сходящ и има сума, равна на* $U\pm V$.

Доказателство. Да означим с S_n, U_n и V_n n-тите частични суми съответно на редовете $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k\pm v_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}v_k$. Тогава очевидно $S_n=U_n\pm V_n$. Тъй като $\lim_{n\to\infty}U_n=U$, $\lim_{n\to\infty}V_n=V$, то съгласно теореми 3.9 и 3.10 от глава 3, част I съществува границата $\lim_{n\to\infty}Sn=U\pm V$. Теоремата е доказана.

И така можем почленно да събираме и изваждаме сходящи редове.

Преминаваме към въпроса за почленно умножаване на редове.

Теорема 1.15. *Ако двата реда* $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ *и* $\sum_{l=1}^{\infty}v_l$ *са абсолютно сходящи и имат суми, съответно равни на* U *и* V, *то редът, съставен от всички произведения от вида* $u_k.v_l$ $(k=1, 2, \ldots;\ l=1, 2, \ldots)$, *номерирани в произволен ред, също е абсолютно сходящ и сумата му е равна на* $U.V$.

Доказателство. Да означим с $w_1, w_2, w_3, \ldots$ произведенията от вида u_kv_l $(k=1, 2, \ldots;\ l=1, 2, \ldots)$, номерирани в произволен ред. Ще докажем, че редът $\sum_{l=1}^{\infty}|w_l|$ е сходящ. Нека S_n е n-тата частична сума на този ред. Сумата S_n се състои от членове от вида $|u_k v_l|$. Измежду индексите k и l на членовете, влизащи в S_n, съществува най-голям индекс, който да означим с m. Тогава очевидно

(1.89) $\quad S_n\leq(|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_m|)(|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_m|).$

В дясната страна на неравенството (1.89) стои произведението на m-тите частични суми на редовете $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty}|v_k|$. По предположение тези редове са сходящи и следователно всички техни частични суми (значи и всички произведения от частични суми) са ограничени. Следователно ограничена е и редицата от частичните суми $\{S_n\}$. Оттук следва сходимостта на реда $\sum_{l=1}^{\infty}|w_l|$, т. е. абсолютната сходимост на реда $\sum_{l=1}^{\infty}w_l$.

Остава да се докаже, че последният ред има сума S, равна на $U.V$. Понеже този ред е абсолютно сходящ, то съгласно теорема 1.11 неговата сума S не зависи от реда, по който ние го сумираме. Произволна редица (а значи и подредица*) от частични суми на този ред клони към S. Но в такъв случай сумата S на реда $\sum_{l=1}^{\infty}w_l$ е сигурно равна на $U.V$, тъй като именно към това число клони подредицата W_m от частични суми на този ред от вида $W_m=(u_1+u_2+\cdots+u_m)(v_1+v_2+\cdots+v_m)$. Теоремата е доказана.

* Вж. твърдение 1° от т. I, § 3, глава 3, част I.

Произведението на редовете $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ за много цели е удобно да се записва във вида

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right)=$$

$$=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots+(u_1v_k+u_2v_{k-1}+\cdots+u_kv_1)+\cdots$$

Мертенс е доказал следното твърдение: *всеки ред, който е получен при умножението на два реда по посочения начин, е сходящ и сумата му е равна на произведението от сумите на тези два реда, при условие че единият от умножените редове е абсолютно сходящ, а другият е сходящ.*

Нека например редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е абсолютно сходящ, а редът $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ е сходящ. Да означим с U_n и V_n n частични суми съответно на реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, а съответно с U и V — техните суми. Да положим $w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots+u_nv_1$, $W_n=w_1+w_2+\cdots+w_n$. Достатъчно е да докажем, че $\lim_{n\to\infty} W_n=U\,.\,V$. Елементарно се проверява, че $W_n=u_1V_n+u_2V_{n-1}+\cdots+u_nV_1$.

От сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ следва, че неговият остатък $\alpha_n=V-V_n$ е безкрайно малка, а значи и ограничена редица, т. е. съществува константа M такава, че $|\alpha_n|\leq M$ за всички номера n. Вижда се, че

$$W_n=u_1(V-\alpha_n)+u_2(V-\alpha_{n-1})+\cdots+u_n(V-\alpha_1)=U_n\,.\,V-\beta_n,$$

където

$$\beta_n=u_1\alpha_n+u_2\alpha_{n-1}+\cdots+u_n\alpha_1.$$

Тъй като $\lim_{n\to\infty} U_n=U$, то за нашата цел е достатъчно да докажем, че $\{\beta_n\}$ е безкрайно малка редица. Понеже редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ е абсолютно сходящ, то за произволно $\varepsilon>0$ съществува номер m такъв, че $\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|<\frac{\varepsilon}{2M}$. Освен това по същата причина съществува константа M_1 такава, че $\sum_{k=1}^{n} |u_k|\leq M_1$ за всеки номер n.

Сега да представим β_n във вида

$$\beta_n=[u_1\alpha_n+\cdots+u_m\,.\,\alpha_{n+1-m}]+[u_{m+1}\,.\,\alpha_{n-m}+\cdots+u_n\,.\,\alpha_1]$$

и да изберем в зависимост от m номер n_1 толкова голям, че $|\alpha_k|<\frac{\varepsilon}{2M_1}$ при $k>n_1-m$ (това може да се направи, тъй като редицата $\{\alpha_n\}$ е безкрайно малка). Следните четири неравенства

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k|<\frac{\varepsilon}{2M};\ \sum_{k=1}^{n} |u_k|<M_1;\ |\alpha_n|\leq M \text{ и } |\alpha_k|<\frac{\varepsilon}{2M_1} \text{ (при } k>n_1-m)$$

ни позволяват да се убедим, че при $n\geq n_1$ всеки израз в средните скоби в представянето на β_n по модул не надминава $\frac{\varepsilon}{2}$. Оттук следва, че $|\beta_n|<\varepsilon$ при $n\geq n_1$ и понеже ε е произволно положително число, то формулираното твърдение е доказано.

З а б е л е ж к а. В случай че двата реда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ са само условно сходящи, то тяхното почленно умножение даже по указания по-горе специален начин дава в общия случай разходящ ред.

Например, ако редовете $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ съвпадат с условно сходящия по критерия на Лайбниц ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, то за такива редове определената по-горе величина w има вида

$$w_n=(-1)^{n-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{1}\,.\,\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\,.\,\sqrt{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\,.\,\sqrt{1}}\right\}.$$

Тъй като в средните скоби има n положителни събираеми, всяко от които е не по-малко от числото $\frac{1}{n}$, то $|w_n|\geq 1$, а това показва, че е нарушено необходимото условие за сходимост на реда $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ — n-тият член на реда да клони към нула.

§ 6. Безкрайни произведения

1. Основни понятия. С понятието числов ред е тясно свързано понятието *безкрайно числово произведение.* Нека е дадена една безкрайна числова редица $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ Написаният формално израз

$$v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 \ldots v_k \ldots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k \tag{1.90}$$

се нарича безкрайно произведение. Отделните елементи v_k се наричат членове на даденото произведение. Произведението на първите n члена на даденото произведение се нарича n-то частично произведение и се означава със символа

$$P_n = v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n = \prod_{k=1}^{n} v_k.$$

Безкрайното произведение (1.90) се нарича сходящо, ако редицата от частичните произведения P_n има крайна граница P, различна от нула*. Ако безкрайното произведение (1.90) е сходящо, посочената граница P се нарича стойност на това безкрайно произведение, т. е. пише се

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k.$$

Да подчертаем, че последното равенство има смисъл само за сходящи безкрайни произведения. Ясно е, че разглеждането на безкрайните произведения е по същество форма на изучаване на числовите редици, тъй като на всяко безкрайно произведение се съпоставя еднозначно редицата от частичните му произведения и на всяка числова редица $\{P_k\}$, всички членове на която са различни от нула, се съпоставя еднозначно безкрайно произведение, за което тази редица е редицата от частичните произведения (достатъчно е членовете на безкрайното произведение да се положат равни на $v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$ при $k > 1$ и $v_1 = P_1$).

Теорема 1.16. *Необходимо условие за сходимостта на безкрайното произведение (1.90) е k-тият член на това произведение да клони към единица при $k \to \infty$.*

* При $P=0$ безкрайното произведение е прието да се счита разходящо. Както ще видим по-долу, това позволява да се направи ясна аналогия между сходимостта на редовете и безкрайните произведения.

Доказателство. Нека безкрайното произведение (1.90) е сходящо и има стойност P, различна от нула. Тогава имаме $\lim\limits_{k\to\infty} P_{k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} P_k = P \neq 0$. Понеже $v_k = \frac{P_k}{P_{k-1}}$, то $\lim\limits_{k\to\infty} v_k$ съществува и е равна на единица.

Да отбележим, че сходимостта на едно безкрайно произведение не се влияе от отстраняването на произволен краен брой членове на произведението (естествено, ако сред тези членове няма равни на нула). Понеже безкрайно произведение, в което поне един член е равен на нула, съгласно приетото по-горе определение е разходящо, то по-нататък ние изобщо не разглеждаме безкрайни произведения, в които, макар и един член е равен на нула.

Примери за безкрайни произведения

1.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdots \cos\frac{x}{2^n} \cdots \tag{1.91}$$

(x—произволно фиксирано число).

Ще докажем, че безкрайното произведение (1.91) е сходящо за всяко $x \neq \pi \cdot n$ и има стойност $\frac{\sin x}{x}$. Да пресметнем n-тото частично произведение

$$P_n = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdots \cos\frac{x}{2^n}. \tag{1.92}$$

Като умножим двете страни на (1.92) със $\sin\frac{x}{2^n}$ и използуваме последователно формулата за синус от двоен ъгъл $\sin 2y = 2\sin y\cos y$, получаваме

$$P_n \cdot \sin\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\sin x.$$

От последната формула* намираме

$$P_n = \frac{\sin x}{x}\left\{\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right\}.$$

Понеже изразът в големите скоби клони към единица при $n \to \infty$, то

* Считаме, че $x \neq 0$. Ако $x=0$, то всички членове на (1.91) и неговата стойност са равни на единица.

$\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ съществува и е равна на $\frac{\sin x}{x}$. Следователно доказано е, че безкрайното произведение (1.91) е сходящо и има стойност $\frac{\sin x}{x}$ за всяко $x \neq \pi . n$.

2.

(1.93) $$2. \prod_{k=2}^{\infty}\left[1-\frac{2}{k(k+1)}\right]=\prod_{k=2}^{\infty}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{(k-1)}{k}\cdot\frac{(k+2)}{(k+1)}\cdots$$

Ще докажем, че безкрайното произведение (1.93) е сходящо и има стойност $\frac{1}{3}$. Да пресметнем частичното произведение P_n:

$$P_n=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{(n-1)}{n}}\cdot\underbrace{\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{(n+2)}{(n+1)}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}.$$

Оттук следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}$ съществува и е равна на $\frac{1}{3}$.

2. Връзка между сходимостта на безкрайни произведения и на редове. Ако безкрайното произведение (1.90) е сходящо, то съгласно теорема 1.16 $\lim\limits_{k\to\infty} v_k=1$ и следователно всички негови членове v_k от някой номер k_0 нататък са положителни. Понеже краен брой начални членове изобщо не влияят на сходимостта на безкрайното произведение, то при изучаването на въпроса за сходимостта на безкрайните произведения без ограничение на общността можем да разглеждаме само безкрайни произведения с положителни членове.

Теорема 1.17. *За да бъде безкрайното произведение* (1.90) *с положителни членове сходящо, е необходимо и достатъчно да бъде сходящ редът*

(1.94) $$\sum_{k=1}^{\infty}\ln v_k.$$

В случай на сходимост сумата S на реда (1.94) и стойността P на произведението (1.90) са свързани с равенството

(1.95) $$P=e^S.$$

Доказателство. Да означим с P_n n-тото частично произведение на безкрайното произведение (1.90), а с S_n — n-тата частична сума на реда (1.94). Имаме

$$S_n=\ln P_n,\ P_n=e^{S_n}.$$

От непрекъснатостта на показателната и логаритмичната функция следва, че редицата P_n е сходяща тогава и само тогава, когато е сходяща редицата S_n, при това, ако $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=e^S$. Теоремата е доказана.

При изследването на сходимостта на едно безкрайно произведение е удобно това произведение да се представи във вида

(1.96) $$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k)=(1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_k)\dots$$

При това съгласно възприетото по-горе предположение считаме, че $u_k>-1$.

Теорема 1.17 твърди, че въпросът за сходимостта на произведението (1.96) е еквивалентен на въпроса за сходимостта на реда

(1.97) $$\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+u_k).$$

Сега можем да докажем още едно твърдение.

Теорема 1.18. *Ако всички* u_k *(или поне от някой номер* k_0 *нататък) имат един и същ знак, то за сходимостта на безкрайното произведение* (1.96) *е необходимо и достатъчно да бъде сходящ редът*

(1.98) $$\sum_{k=1}^{\infty}u_k.$$

Доказателство. Понеже условието $\lim\limits_{k\to\infty} u_k=0$ е необходимо и за сходимостта на реда (1.98), и за сходимостта на произведението (1.96), ще считаме, че това условие е изпълнено както при доказателството на необходимостта, така и при доказателството на достатъчността. Но от посоченото условие и от асимптотичното равенство*

$$\ln(1+y)=y+\overline{\overline{o}}(y)$$

следва, че

(1.99) $$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+u_k)}{u_k}=1$$

и

* Вж. т. 6, § 10, глава 5, част I.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{\ln(1+u_k)} = 1. \tag{1.100}$$

Понеже по условие от известен номер k_0 нататък всички членове имат един и същ знак, то от условията (1.99) и (1.100) и от теоремата за сравнение 1.3 следва, че редът (1.98) е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът (1.97). Теоремата е доказана.

Примери. 1) От разходимостта на хармоничния ред и от теорема 1.18 следва разходимостта на следните безкрайни произведения:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\cdot$$

Вижда се, че първото произведение е разходящо към $+\infty$, а второто — към нула.

2) От същата теорема 1.18 и от сходимостта на реда (1.33) при $\alpha>1$ следва сходимостта при $\alpha>1$ на следните безкрайни произведения:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{3^\alpha}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k^\alpha}\right)\cdots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) = \left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{3^\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\cdots$$

Както и при редовете за безкрайните произведения, се въвеждат понятията абсолютна и условна сходимост. Безкрайното произведение (1.96) се нарича абсолютно сходящо тогава и само тогава, когато е абсолютно сходящ редът (1.97). Теоремите на Коши 1.11 и Риман 1.10 позволяват да се заключи, че абсолютно сходящите произведения притежават свойството комутативност, докато в същото време условно сходящите произведения не притежават това свойство.

Доказателството на следното твърдение оставяме на читателя.

Теорема 1.19. *Безкрайното произведение (1.96) е абсолютно сходящо тогава и само тогава, когато е абсолютно сходящ редът (1.98).*

Упътване. За доказателството на тази теорема е достатъчно

да се докаже, че редът $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ е сходящ тогава и само тогава, когато е сходящ редът $\sum_{k=1}^{\infty}|\ln(1+u_k)|$. Това следва лесно от съществуването на границите (1.99) и (1.100).

Накрая ще разгледаме още няколко примера.

1°. Да разгледаме безкрайното произведение

$$x.\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\cdots \tag{1.101}$$

Тъй като редът $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ е сходящ, като използуваме теорема 13.19, заключаваме, че безкрайното произведение (1.101) е абсолютно сходящо за фиксирано x, различно от $l\pi$ (където $l=0, \pm1, \ldots$). В т. 3 ще докажем, че това произведение има стойност $\sin x$. По такъв начин ще получим разлагането на функцията $\sin x$ в безкрайно произведение

$$\sin x = x.\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{1.102}$$

2°. От разлагането (1.102) и от съотношението $\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x}$ се получава непосредствено следното разлагане:

$$\cos x = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right]. \tag{1.103}$$

Абсолютната сходимост на произведението в дясната страна на (1.103) за всяко x, различно от $\frac{\pi}{2}(2l-1)$ $(l=0, \pm1, \ldots)$, следва от теорема 1.19 и от сходимостта на реда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

3°. Като положим в разлагането (1.102) $x=\frac{\pi}{2}$, получаваме

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{4k^2-1}{4k^2} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2}. \tag{1.104}$$

От (1.104) получаваме така наречената формула на Валис*

* Джон Валис — английски математик (1616—1703).

$$(1.105)\qquad \frac{\pi}{2}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2k}{(2k-1)}\cdot\frac{2k}{(2k+1)}\cdots$$

С прости преобразувания формулата на Валис може да се приведе във вида

$$(1.106)\qquad \frac{\pi}{2}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1}\left[\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k)!}\right]^2.$$

Първоначално формулата на Валис е била използувана за приближено пресмятане на числото π. Понастоящем за пресмятането на π съществуват по-ефикасни методи. Формулата на Валис (1.105) и (1.106) представлява интерес за редица теоретични изследвания*.

3. Разлагане на функцията $\sin x$ в безкрайно произведение. За удобство ще разделим извода на формула (1.102) на няколко части.

1°. Нека m е п р о и з в о л н о п о л о ж и т е л н о н е ч е т н о число: $m=2n+1$. Преди всичко **ще** докажем, че за всяка различна от $k\pi$ ($k=0, \pm 1, \ldots$) стойност на θ** е в сила следното равенство:

$$(1.107)\qquad \frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}\right),\quad n=\frac{m-1}{2}.$$

За да докажем равенство (1.107), ще използуваме формулата на Муавър***

$$\cos m\theta+i\sin m\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^m.$$

Като представим дясната страна на това равенство по формулата на Нютон и сравним имагинерните части, получаваме

$$\sin m\theta=m\cos^{m-1}\theta\,.\,\sin\theta-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}\theta\,.\,\sin^3\theta+\cdots$$

Отчитайки, че $m=2n+1$, намираме

$$(1.108)\qquad \frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=\cos^{2n}\theta-\frac{(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{2n-2}\theta\sin^2\theta+\cdots$$

В дясната страна на (1.108) всички степенни показатели на коси-

* В частност тя може да бъде използувана за доказателството на така наречената формула на Стирлинг (вж. § 6, глава 7), Джеймс Стирлинг — английски математик (1692—1770).

** В бъдеще ще разглеждаме само стойности на θ, за които $0<|\theta|<\pi$.

*** Тази формула се получава от определението за произведение на две комплексни числа $(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$, (вж. т. I, § 3, гл. 8, част I). Наистина по индукция лесно се доказва чрез това определение, че $(\cos\theta, \sin\theta)^n=(\cos n\theta, \sin n\theta)$.

нусите и синусите са четни. Следователно, ако заменим $\cos^2\theta$ с $1-\sin^2\theta$, то в дясната страна на (1.108) ще се получи *полином от n-та степен* по отношение на $\sin^2\theta$. Полагайки $z=\sin^2\theta$, да означим този полином с $F(z)$, а неговите корени с $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тъй като $z=\sin^2\theta\to 0$ при $\theta\to 0$ и лявата страна на (1.108) клони към единица при $\theta\to 0$, то полиномът $F(z)$ може да се представи във вида

$$\frac{\sin m\theta}{m\sin\theta}=F(z)=\left(1-\frac{z}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{z}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{\alpha_n}\right).$$

Остана да намерим корените $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Като забележим, че тези корени съответствуват на нулите на функцията $\sin m\theta$, получаваме

$$\alpha_1=\sin^2\frac{\pi}{m},\quad \alpha_2=\sin^2\frac{2\pi}{m},\ \ldots,\ \alpha_n=\sin^2\frac{n\pi}{m}.$$

И така равенство (1.107) е доказано.

2°. Като положим в (1.107) $\theta=\frac{x}{m}$ и считайки, че $0<|x|<\pi m$, получаваме

$$(1.109)\qquad \frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right).$$

Фиксираме произволно (различно от нула) x и избираме произволни естествени числа p и n такива, че $2\frac{|x|}{\pi}<p<n=\frac{m-1}{2}$. Тогава равенство (1.109) може да се запише във вида

$$(1.110)\qquad \frac{\sin x}{m\sin\frac{x}{m}}=\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right).\,R_p(x),$$

където

$$(1.111)\qquad R_p(x)=\prod_{k=p+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right).$$

Най-напред ще оценим $R_p(x)$. Понеже $2\frac{|x|}{\pi}<p<n=\frac{m-1}{2}$, то аргументите на всички синуси, намиращи се в равенство (1.111), принадлежат на интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Освен това ясно е, че за

всички k, участвуващи в това равенство, имаме $|x|<\frac{k\pi}{2}$ и следователно

$$0<\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{\sin^2\frac{k\pi}{2m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}=\frac{1}{4\cos^2\frac{k\pi}{2m}}<\frac{1}{2}$$

(имаме $\frac{k\pi}{m}<\frac{\pi}{2}$, т. е. $\frac{k\pi}{2m}<\frac{\pi}{4}$ и затова $\cos^2\frac{k\pi}{2m}>\frac{1}{2}$). Тъй като за всяко β от интервала $0<\beta<\frac{1}{2}$ са в сила неравенствата $1>1-\beta>e^{-2\beta}$*, то за всички номера k, които надминават p, имаме

$$(1.112)\qquad 1>1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}>e^{-2\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}.$$

Като умножим почленно неравенствата (1.112), записани при $k=p+1,\ p+2,\dots,n$, получаваме следната оценка:

$$(1.113)\qquad 1>R_p(x)>e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}.$$

Знаем, че $\frac{k\pi}{m}<\frac{\pi}{2}$ и че за всяко β, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, имаме $1\geq\frac{\sin\beta}{\beta}\geq\frac{2}{\pi}$**, поради което

$$\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}<\frac{1}{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(\frac{k\pi}{m}\right)^2}=\frac{m^2}{4k^2}<\frac{m^2}{4}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right).$$

Следователно

$$e^{-2\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}}>e^{-\frac{m^2}{2}\sin^2\frac{x}{m}\sum\limits_{k=p+1}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)}\geq e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}.$$

* Дясното от тези неравенства следва елементарно от формулата на Маклорен: $e^{-2\beta}=1-2\beta+\frac{(2\beta)^2}{2}-\dots<1-2\beta+2\beta^2<1-\beta$, тъй като $2\beta^2<\beta$.

** Тези неравенства следват от факта, че частното $\frac{\sin\beta}{\beta}$ намалява от 1 до $\frac{2}{\pi}$, когато β се мени от 0 до $\frac{\pi}{2}$. От своя страна функцията $\frac{\sin\beta}{\beta}$ намалява, тъй като $\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)'=\frac{\cos\beta}{\beta^2}(\beta-\operatorname{tg}\beta)<0$ при $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

Последното неравенство позволява да се усили оценка (1.113) по следния начин:

$$(1.114)\qquad 1>R_p(x)>e^{-\frac{m^2}{2p}\sin^2\frac{x}{m}}.$$

3°. Сега да оставим в равенство (1.110) m да клони към безкрайност при фиксирани стойности на x и номера p. Тъй като $\lim\limits_{m\to\infty} m\,.\sin\frac{x}{m}=x$, $\lim\limits_{m\to\infty} m^2\sin^2\frac{k\pi}{m}=(k\pi)^2$, то лявата страна на (1.110) клони към $\frac{\sin x}{x}$, а крайното произведение $\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{k\pi}{m}}\right)$ клони към $\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. По-нататък ще считаме, че последната граница е различна от нула, тъй като, ако тя е равна на нула, то $\sin x=0$ и разлагането (1.102) е доказано. Но тогава съществува границата $\lim\limits_{m\to\infty}R_p(x)$. Да означим тази граница с $\hat{R}_p(x)$. От неравенствата (1.114), които са в сила за всеки номер m, и от теорема 3.13 от глава 3, част I следва, че

$$(1.115)\qquad 1\geq\hat{R}_p(x)\geq e^{-\frac{x^2}{2p}}.$$

От равенство (1.110) при $m\to\infty$ получаваме

$$(1.116)\qquad \frac{\sin x}{x}=\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\hat{R}_p(x).$$

4°. Да фиксираме x и да оставим номерът p да клони към безкрайност в равенство (1.116). Лявата страна на (1.116) не зависи от p, а границата $\lim\limits_{p\to\infty}\hat{R}_p(x)$ съществува (вземаме под внимание неравенство (1.115) и теорема 3.14 от глава 3) и е равна на единица. Следователно съществува и границата

$$\lim_{p\to\infty}\prod_{k=1}^{p}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)=\frac{\sin x}{x}.$$

Следователно разлагането (1.102) за $\sin x$ е доказано.

Забележка. Напълно аналогично на разлагането (1.102) за $\sin x$ и (1.103) за $\cos x$ могат да се получат разлагания в безкрайни произведения за хиперболичните функции

$$\operatorname{sh} x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \quad \operatorname{ch} x = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right].$$

Да отбележим, че от разлаганията за $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ непосредствено се получават разлагания в безкрайни произведения за функциите $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$.

§ 7. Обобщени методи за сумиране на разходящи редове

В глава 1 определихме сума на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1+u_2+\cdots+u_k+\cdots \tag{1.117}$$

като границата S на редицата $\{S_n\}$ от частичните суми на този ред (при условие че тази редица е сходяща).

В много задачи от математическия анализ от теоретичен и практически интерес се налага да се използуват редове, чиито редици от частични суми не са сходящи и значи сумите на тези редове не съществуват в обичайния смисъл. Естествено възниква въпросът за обобщаване на понятието сума на ред и за сумиране на разходящи в обичайния смисъл редове.

В този параграф ще се спрем на някои обобщени методи за сумиране на разходящи редове.

Най-напред ще дадем обща характеристика на методите за сумиране, с които ще се занимаем. Разумно е да поискаме обобщеното понятие за сума да включва в себе си обичайното понятие за сума на ред. По-точно ред, сходящ в обичайния смисъл със сума S, трябва да има и обобщена сума, при това равна на S. Метод за сумиране, който притежава посоченото свойство, се нарича **регулярен**.

Естествено е да се подчини понятието обобщена сума на условието: ако редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ има обобщена сума U, а редът $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ има обобщена сума V, то редът $\sum_{k=1}^{\infty}(Au_k+Bv_k)$, където A и B са произволни константи, да има обобщена сума $AU+BV$. Метод за сумиране, който удовлетворява посоченото свойство, се нарича **линеен**.

В анализа и в неговите приложения обикновено се използуват регулярни линейни методи за сумиране. Ще разгледаме два метода за сумиране, които представляват особен интерес за приложенията.

1. Метод на Чезаро* (или метод на средноаритметичните). Казваме, че редът (1.117) е **сумируем по метода на Чезаро**, ако е сходяща редицата от средноаритметичните на частичните суми на този ред, т.е. съществува границата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n}. \tag{1.118}$$

При това границата (1.118) се нарича *обобщена сума на реда* (1.117) **в смисъл на Чезаро**.

Методът на Чезаро е очевидно линеен метод за сумиране. Регулярността на метода на Чезаро следва от лема 1, доказана в края на т. 3, § 2. Наистина от посочената лема следва, че ако редицата $\{S_n\}$ от частичните суми на реда (1.117) клони към S, то границата (1.118) съществува и е равна на S.

Ще дадем примери на редове, които не са сходящи в обичайния смисъл, но са сумируеми по метода на Чезаро.

1. Да разгледаме очевидно разходящия ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} = 1-1+1-1+\cdots$$

Понеже всички **четни** частични суми S_{2n} на този ред са равни на нула, а всички нечетни частични суми S_{2n-1} са равни на единица, то границата (1.118) съществува и е равна на $\frac{1}{2}$. Следователно разглежданият ред е сумируем по метода на Чезаро и неговата сума в смисъл на Чезаро е равна на $\frac{1}{2}$.

2. Нека x е произволно фиксирано реално число от интервала $(0, 2\pi)$. Да разгледаме разходящия ред**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx = \cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots \tag{1.119}$$

Вече пресметнахме частичната сума S_n на този ред в точка 2 в края на § 2. Имаме

* Ернесто Чезаро — италиански математик (1859—1906).

** Разходимостта на реда (1.119) следва непосредствено от дадения по-долу израз за неговата частична сума.

$$S_n = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Да пресметнем средното аритметично на частичните суми:

$$\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n} = \frac{1}{2n\sin\frac{x}{2}}\sum_{m=1}^{n}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2} =$$

$$\frac{1}{4n\sin^2\frac{x}{2}}\sum_{m=1}^{n}[\cos mx - \cos(m+1)x] - \frac{1}{2} = \frac{\cos x - \cos(n+1)x}{4n\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}.$$

Оттук очевидно следва, че

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n} = -\frac{1}{2}.$$

Следователно редът (1.119) е сумируем по метода на Чезаро и сумата му в смисъл на Чезаро е равна на $-\frac{1}{2}$.

2. Метод за сумиране на Поасон* — Абел. Този метод за сумиране се състои в следното. По зададения ред (1.117) съставяме степенния ред

$$(1.120)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \cdots + u_k x^{k-1} + \cdots$$

Ако този степенен ред е сходящ за всяко x от интервала (0,1) и ако сумата му $S(x)$ има лява граница $\lim\limits_{x\to 1-0} S(x)$ в точката $x=1$, то тогава ще казваме, че редът (1.117) е сумируем по метода на Поасон — Абел. При това посочената граница ще наричаме сума на реда (1.117) в смисъл на Поасон — Абел.

Линейността на метода на Поасон — Абел е очевидна. Ще докажем регулярността на този метод. Нека редът (1.117) е сходящ в обичайния смисъл и сумата му е равна на S. Трябва да се докаже:

1) че редът (1.120) е сходящ за всяко x от интервала (0, 1),

2) че сумата $S(x)$ на реда (1.120) има в точката $x=1$ лява граница, равна на S.

Най-напред ще докажем твърдение 1). Тъй като редът (1.117) е сходящ, то редицата от членовете му е безкрайно малка и следователно е ограничена, т.е. съществува число M такова, че за всички номера k е в сила

$$(1.121)\qquad |u_k| \leq M.$$

Използуваме неравенство (1.121), за да оценим модула на k-тия член на реда (1.120), като считаме, че x е произволно число от интервала (0,1). Получаваме

$$|u_k x^{k-1}| \leq M|x|^{k-1}.$$

Тъй като $|x|<1$, то редът $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x|^{k-1}$ е сходящ. Като използуваме забележка 2 към теоремата за сравнение 1.3, заключаваме, че е сходящ и редът (1.120).

Сега да докажем твърдение 2). Нека S_n е n-та частична сума на реда (1.117), а S е неговата обичайна сума. Чрез преобразованието на Абел* се убеждаваме, че за всяко x от интервала (0,1) е в сила тъждеството

$$(1.122)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}.$$

Да извадим почленно (1.122) от следното очевидно равенство:

$$S = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} S\, x^{k-1}.$$

Като означим с r_k k-тия остатък на реда (1.117), ще имаме

$$S - \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}$$

или

$$(1.123)\qquad S - S(x) = (1-x)\sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}.$$

Нашата цел е да докажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че лявата страна на (1.123) е по-малка от ε за всички x, удовлетворяващи неравенствата $1-\delta<x<1$. Тъй като остатъкът r_k на реда (1.117) клони към нула при $k\to\infty$, то за положителното число $\frac{\varepsilon}{2}$ може да се намери номер k_0 такъв, че $r_k<\frac{\varepsilon}{2}$ при $k\geq k_0$. Следователно

* Симон Дени Поасон — френски математик (1781—1840).

* Преобразованието на Абел (13.82) въведохме в т. 2, § 4. В разглеждания случай трябва да се положи в (1.82) $n=1$, $S_{n-1}=0$ и да се остави след това p да клони към безкрайност.

$$\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left|(1-x)\sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Остава да докажем, че за всички x, които са достатъчно близки до единица, имаме

$$(1-x)\left|\sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1}\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

но това е очевидно, понеже сумата, стояща под знака за модул, е ограничена. Регулярността на метода на Поасон — Абел е доказана.

Като пример да разгледаме отново разходящия ред

$$\sum (-1)^{k-1} = 1-1+1-\dots \tag{1.124}$$

За този ред да построим степенния ред от вида (1.120)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = 1-x+x^2-x^3+\dots$$

Очевидно този ред е сходящ за всички x от интервала $(0,1)$ и сумата му е равна на $\frac{1}{1+x}$. Тъй като

$$\lim_{x\to 1-0} S(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

то редът (1.124) е сумируем по метода на Поасон — Абел и неговата сума в смисъл на Поасон — Абел е равна на $\frac{1}{2}$.

Да обърнем внимание на факта, че сумата на реда (1.124) в смисъл на Поасон — Абел съвпада с неговата сума в смисъл на Чезаро. Този факт не е случаен: може да се докаже, че ако един ред е сумируем по метода на Чезаро, то той е сумируем и по метода на Поасон — Абел, при това сумата му в смисъл на Чезаро съвпада със сумата му в смисъл на Поасон — Абел. Освен това съществуват редове, които са сумируеми по метода на Поасон — Абел, но не са сумируеми по метода на Чезаро*. Детайлно изследване на различни методи за обобщено сумиране на разходящи редове е дадено в монографията на Г. Харди «Расходящиеся ряды», ИЛ, Москва, 1951.

* Следователно може да се каже, че методът на Поасон — Абел е «по-силен» метод за сумиране от метода на Чезаро.

§ 8. Елементарна теория на двойни и повторни редове

Да разгледаме изброимо множество от безкрайни числови редици:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, \dots, & a_{1n}, \dots \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, \dots, & a_{2n}, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, \dots, & a_{nn}, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{1.125}$$

(Първият индекс на числото a_{kl} означава номера на числовата редица, а вторият — номера на елемента.)

Иначе казано, разглеждаме матрицата (1.125), състояща се от безбройно много стълбове и безбройно много редове. Ако формално сумираме елементите на матрицата (1.125), ние можем да съставим от нея различни редове.

Ако отначало сумираме всеки ред на матрицата (1.125), ще получим безкрайна редица от редове от вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \quad (k=1,2,\dots). \tag{1.126}$$

Като сумираме по-нататък получената редица, ще получим формалната сума

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right). \tag{1.127}$$

Тази сума е прието да се нарича **повторен ред**.

Друг повторен ред

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}\right) \tag{1.128}$$

се получава, ако отначало сумираме поотделно всеки стълб на матрицата (1.125), а след това образуваме сумата на елементите на получената по този начин редица.

Повторният ред (1.127) *се нарича* ***сходящ***, *ако всеки от редовете* (1.126) *е сходящ и ако освен това е сходящ редът*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k,$$

където с A_k е означена сумата на k-тия ред (1.126).

Аналогично *повторният ред* (1.128) *се нарича* с х о д я щ, *ако е сходящ всеки от редовете*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \quad (l=1, 2, \ldots) \tag{1.129}$$

и ако е сходящ и редът

$$\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{A}_l ,$$

където $\tilde{A}_l$ *е сумата на l-тия ред* (1.129).

С матрицата (1.125) свързваме освен повторните редове (1.127) и (1.128) още и така наречения д в о е н р е д:

$$\sum_{k,\,l=1}^{\infty} a_{kl} , \tag{1.130}$$

който се нарича с х о д я щ, когато съществува крайната граница

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} \tag{1.131}$$

на така наречените правоъгълни частични суми

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \tag{1.132}$$

при m и n, к л о н я щ и н е з а в и с и м о към безкрайност.

В този случай границата (1.131) се нарича с у м а на двойния ред (1.130).

От тази дефиниция веднага следва, че ако двойният ред (1.130) е получен чрез умножаване членовете на два сходящи «обикновени» реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \text{и} \quad \sum_{l=1}^{\infty} c_l , \tag{1.133}$$

т. е. ако членовете на двойния ред (1.130) са $a_{kl} = b_k c_l$, то този двоен ред е сходящ и сумата му е равна на произведението от сумите на редовете (1.133).

По-нататък ще отбележим, че от (1.132) следва, че за произволни $m \geq 2$, $n \geq 2$

$$a_{mn} = S_{mn} - S_{m(n-1)} - [S_{(m-1)n} - S_{(m-1)(n-1)}] .$$

Това равенство означава, че едно *необходимо условие за сходимост на двойния ред* (1.130) *е общият му член да клони към нула*, т. е. съществуването на равната на нула граница

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} a_{mn}$$

при независимо клонене на m и n към безкрайност.

Ще докажем следното твърдение, хвърлящо светлина върху въпроса за връзката между сходимостта на двойния и повторния ред.

Теорема 1.20. *Ако двойният ред* (1.130) *е сходящ и ако са сходящи всички редове* (1.126) *по редовете на матрицата* (1.125), *то и повторният ред* (1.12) *е сходящ, при това има същата сума, както и двойният ред* (1.130).

Д о к а з а т е л с т в о. Извършваме граничен преход по $n\to\infty$ при фиксирано m в равенство (1.132) и вземаме под внимание, че редът (1.126) има сума A_k. Получаваме

$$\lim_{n\to\infty} S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} A_k . \tag{1.134}$$

От съотношение (1.134) е ясно, че сумата на повторния ред (1.127), която е равна на границата при $m\to\infty$ на дясната страна на (1.134), е точно повторната граница

$$\lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} S_{mn}).$$

Остава да докажем съществуването на повторната граница при предположение, че съществува границата (1.131) и че за всяко m съществува границата (1.134). Също така трябва да докажем, че указаната повторна граница е равна на границата (1.131).

От това, че границата (1.131) съществува и е равна на S, следва, че за всяко $\varepsilon>0$ съществуват номера m_0 и n_0 такива, че при $m \geq m_0$, $n \geq n_0$ е в сила неравенството

$$|S_{mn} - S| < \varepsilon.$$

Като използуваме, че за всеки номер m съществува границата (1.134), ще получим от последното неравенство, че за всяко $m \geq m_0$ е изпълнено неравенството

$$\lim_{n\to\infty} |S_{mn} - S| \leq \varepsilon.$$

Следователно повторната граница $\lim_{m\to\infty} (\lim_{l\to\infty} S_{mn})$ съществува и е равна на S. Теоремата е доказана.

Както за обикновените редове с неотрицателни членове, за двойните редове с неотрицателни членове е вярно следното твърдение.

Теорема 1.21. *Ако всички елементи на матрицата* (1.125) *са неотрицателни, то за сходимостта на съставения от тази матрица двоен ред* (1.130) *е необходимо и достатъчно да са ограничени частичните му суми* (1.132).

Доказателство. Необходимостта е очевидна. За доказателството на достатъчността ще отбележим, че от ограничеността на множеството от частичните суми S_{mn} следва съществуването на точна горна граница на това множество, която ще означим с S:

$$S=\sup_{\substack{1\leq m<\infty\\ 1\leq n<\infty}} S_{mn}.$$

Съгласно дефиницията на точна горна граница за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери частична сума $S_{m_0n_0}$ такава, че

$$S-\varepsilon<S_{m_0n_0}\leq S. \tag{1.135}$$

Поради това, че елементите са неотрицателни, за всички номера m и n, удовлетворяващи условията $m\geq m_0$, $n\geq n_0$, ще бъде в сила неравенството $S_{mn}\geq S_{m_0n_0}$.

От това неравенство и от (1.135) следва, че

$$S-\varepsilon\leq S_{mn}\leq S$$

за всички m и n, за които $m\geq m_0$, $n\geq n_0$.

Следователно границата (1.132) съществува и е равна на S, т. е. двойният ред (1.130) е сходящ.

Определение. *Двойният ред* (1.130) *се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ двойният ред*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}|a_{kl}|, \tag{1.130'}$$

съставен от модулите на елементите на матрицата (1.125).

Теорема 1.22. *Ако двойният ред от модулите* (1.130') *е сходящ, то и двойният ред* (1.130) *е сходящ.*

Доказателство. Да положим $p_{kl}=\frac{|a_{kl}|+a_{kl}}{2}$, $q_{kl}=\frac{|a_{kl}|-a_{kl}}{2}$. Тогава

$$a_{kl}=p_{kl}-q_{kl}. \tag{1.136}$$

Очевидно p_{kl} и q_{kl} са неотрицателни и двете не надминават $|a_{kl}|$. От сходимостта на двойния ред (1.130') и теорема 1.21 следва, че редицата от частичните суми на този ред е ограничена. Следователно частичните суми на всеки от двойните редове

$$\sum_{k,l=1}^{\infty}p_{kl} \quad \text{и} \quad \sum_{k,l=1}^{\infty}q_{kl}$$

са ограничени. Но тогава съгласно теорема 1.21 тези редове са сходящи. Да означим сумите им съответно с P и Q. От (1.136) следва, че двойният ред (1.130) е сходящ и сумата му е равна на $P-Q$.

Сега да разгледаме обичайния ред

$$\sum_{r=1}^{\infty}a_r, \tag{1.137}$$

членовете на който са елементите на матрицата (1.125), номерирани в произволен ред.

Вярно е следното твърдение.

Теорема 1.23. *Да разгледаме следните четири реда: двата повторни реда* (1.127) *и* (1.128), *двойния ред* (1.130) *и реда* (1.137). *Ако поне един от посочените четири реда е сходящ при замяната на членовете му с техните абсолютни стойности, то всички посочени редове са сходящи и имат една и съща сума.*

Доказателство. Най-напред ще докажем, че ако един от посочените четири реда е сходящ при замяната на членовете му с техните абсолютни стойности, то и останалите три реда са сходящи при замяна на членовете им с техните абсолютни стойности.

Тъй като за повторните редове (1.127) и (1.128) разсъжденията са напълно аналогични (трябва само да се смени ролята на първия и втория индекс на членовете), то по-нататък ще разгледаме само повторния ред (1.127). Достатъчно е да се докажат следните три твърдения:

I) сходимостта на повторния ред (1.127), при който всички членове са заменени с техните модули, влече абсолютната сходимост на реда (1.137);

II) от абсолютната сходимост на реда (1.137) следва абсолютната сходимост на двойния ред (1.130);

III) от абсолютната сходимост на реда (1.130) следва сходимостта на повторния ред (1.127), на който всички членове са заменени с техните модули.

За да докажем твърдение I, да означим с S^* сумата на повторния ред (1.127), на който всички членове са заменени с техните модули, т. е. на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|\right). \tag{1.127}$$

Тогава при произволни m и n имаме

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|\leqq S^*. \tag{1.138}$$

Нека $S_r^*=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_r|$ е произволна частична сума на реда

$$\sum_{r=1}^{\infty}|a_r|, \tag{1.137'}$$

който се получава при замяната на членовете на реда (1.137) с техните модули. Очевидно съществуват толкова големи номера m и n, че всички членове на реда (1.137), които влизат в частичната му сума с номер r, да влизат в първите m реда и първите n стълба на матрицата (1.125). Но тогава от (1.138) следва, че

$$S_r^*\leqq S^*.$$

Това неравенство показва, че всички частични суми на реда с неотрицателни членове (1.137) са ограничени. Следователно този ред е сходящ (предвид теорема 1.2).

За да докажем твърдение II, да предположим, че редът (1.137) е сходящ. Тогава от теорема 1.2 следва, че редицата от частичните му суми $\{S_r^*\}$ е ограничена. Да фиксираме произволна частична сума S_{mn}^* на двойния ред от модулите (1.130'). Ясно е, че съществува толкова голям номер r, че r-тата частична сума на реда (1.137) съдържа всички членове, влизащи в сумата S_{mn} на реда (1.130). Но тогава частичната сума S_{mn}^* на реда (1.130') не надминава частичната сума S_r^* на реда (1.137). Следователно множеството на всички частични суми на двойния ред (1.130') е ограничено и значи този ред е сходящ по теорема 1.21.

Остава да докажем твърдение III. Нека е сходящ двойният ред (1.130'). Предвид теорема 1.20 за доказателството на сходимостта на повторния ред от модулите (1.127) е достатъчно да докажем сходимостта на всеки от редовете

$$\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}|,\quad k=1,\,2,\ldots \tag{1.139}$$

За това съгласно теорема 1.2 е достатъчно да се докаже, че редицата от частичните суми на всеки от тези редове е ограничена. Но това е очевидно вярно, тъй като при произволни k и n сумата

$$\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|$$

е ограничена от сумата на двойния ред от модулите (1.130').

Сега остана да докажем, че сумите на трите реда (1.127), (1.130) и (1.137) съвпадат*. Да означим с S сумата на двойния ред (1.130). Очевидно е, че сумата на реда (1.137) е равна на S. Наистина от абсолютната сходимост на този ред следва, че сумата му не се мени при смяна на реда на сумиране, а редът на сумиране може да се измени така, че частичните му суми след изменението да съдържат като подмножество частичните суми S_{mn} на двойния ред (1.130).

За да се убедим, че и сумата на повторния ред (1.127) е равна на S, е достатъчно да забележим, че от сходимостта на реда (1.139) следва сходимостта на реда (1.126), и да използуваме теорема 1.20. Теорема 1.23 е доказана.

* Аналогични разсъждения позволяват да заключим, че и сумата на повторния ред (1.128) съвпада със сумата на посочените три реда.

2. Функционални редици и редове

За представяне на различни функции в анализа широко се използват редове и редици, чиито членове не са числа, а функции, определени в дадено множество.

В настоящата глава се изучават такива редове и редици, които ще наричаме функционални.

§ 1. Сходимост в точка и равномерна сходимост в множество

1. Функционални редици и функционални редове. Да означим с $\{x\}$ едно подмножество на m-мерното евклидово пространство E^m*.

Ако на всяко естествено число n съпоставим някаква функция $f_n(x)$, дефинирана в множеството $\{x\}$, то множеството на номерираните функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$, $\ldots$ ще наричаме функционална редица.

Отделните функции $f_n(x)$ ще наричаме членове или елементи на разглежданата редица, а множеството $\{x\}$, в което са дефинирани всички функции $f_n(x)$, ще наричаме дефиниционна област на тази редица.

Ще подчертаем, че ако дефиниционната област $\{x\}$ е подмножество на m-мерното евклидово пространство E^m, то всяка функция $f_n(x)$ е функция на m променливи $f_n(x)=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, където $x_1, x_2, \ldots, x_m$ са координати на точките x.

За означаване на функционална редица обикновено ще използваме символа $\{f_n(x)\}$.

Нека разгледаме функционалната редица $\{u_n(x)\}$, чиято дефиниционна област е дадено множество $\{x\}$.

* Елементите на множеството $\{x\}$ са точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ с координати $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Формално написаната безкрайна сума

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{2.1}$$

на членовете на посочената функционална редица ще наричаме функционален ред.

При това отделните функции $u_n(x)$ ще наричаме членове на разглеждания ред, а множеството $\{x\}$, в което са дефинирани тези функции, ще наричаме дефиниционна област на разглеждания ред.

Както в случай на числов ред, сумата на първите n члена на функционалния ред (2.1) ще наричаме n-та частична сума на този ред.

Ще отбележим, че изучаването на функционални редове е напълно еквивалентно на изучаването на функционални редици, защото на всеки функционален ред (2.1) еднозначно съответствува функционалната редица

$$S_1(x),\ S_2(x), \ldots, S_n(x), \ldots, \tag{2.2}$$

съставена от неговите частични суми, и, обратно, на всяка функционална редица (2.2) еднозначно съответствува функционалният ред (2.1) с членове $u_1(x)=S_1(x)$, $u_n(x)=S_n(x)-S_{n-1}(x)$ при $n\geq 2$.

Ще дадем примери на функционални редици и редове.

Пример 1. Да разгледаме редицата от функции $\{f_n(x)\}$, всяка от които е определена в сегмента $0\leq x\leq 1$ и има вида

$$f_n(x)=\begin{cases} \cos\frac{\pi n x}{2} & \text{при } 0\leq x\leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{при } \frac{1}{n}<x\leq 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

На фиг. 2.1 са дадени графиките на функциите $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_n(x)$. Дефиниционна област на функционалната редица (2.3) е сегментът [0, 1]. Ще отбележим, че всяка функция $f_n(x)$ е непрекъсната в сегмента [0, 1].

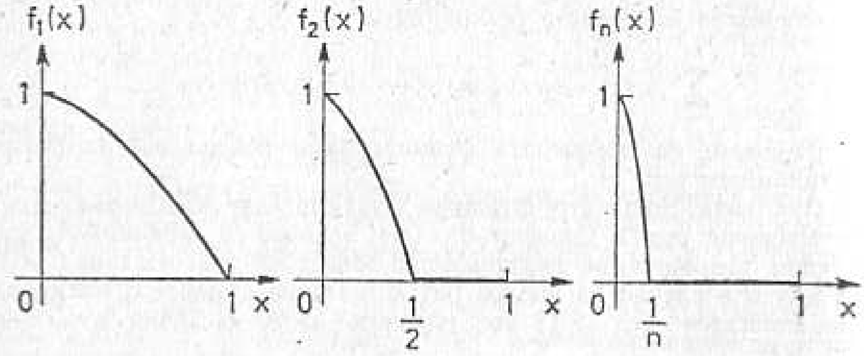
Пример 2. Да разгледаме следния функционален ред:

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x+y)^k}{k!}=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x+y)^n}{n!}+\cdots, \tag{2.4}$$

чиято дефиниционна област е цялата равнина $E^2=\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty\}$.

Като използуваме развитието по формулата на Маклорен на функцията

$$e^u=1+\frac{u}{1!}+\frac{u^2}{2!}+\cdots+\frac{u^n}{n!}+R_{n+1}(u)$$



Фиг. 2. 1

(гл. п. 2, § 9, глава 6, част I), ще видим, че $n+1$-та частична сума

$$S_{n+1}(x,y)=1+\frac{x+y}{1!}+\frac{(x+y)^2}{2!}+\dots+\frac{(x+y)^n}{n!}$$

на реда (2.4) се различава от функцията e^{x+y} с величината $R_{n+1}(x+y)$, където $R_{n+1}(u)$ е остатъчният член във формулата на Маклорен за e^u от ред $n+1$.

2. Сходимост на функционална редица (функционален ред) в точка и в множество. Да предположим, че дефиниционната област на функционалната редица (функционалния ред) е множеството $\{x\}$ в пространство E^m. Да фиксираме произволна точка $x_0=\{\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m\}$ на множеството $\{x\}$ и да разгледаме всички членове на функционалната редица (функционалния ред) в тази точка x_0. Така ще получим числова редица (числов ред). Ако посочената числова редица (посоченият числов ред) е сходяща (сходящ), то казваме, че функционалната редица (функционалният ред) е сходяща (сходящ) в точката x_0.

Множеството, състоящо се от всички точки x_0, в които дадената функционална редица (даденият функционален ред) е сходяща (сходящ), се нарича област на сходимост на дадената редица (дадения ред), а редицата (редът) се нарича сходяща (сходящ) в това множество.

В конкретните ситуации областта на сходимост може да съвпада с дефиниционната област, да бъде подмножество на дефиниционната област или изобщо да бъде празното множество.

Съответните примери се намират по-долу.

Да предположим, че функционалната редица $\{f_n(x)\}$ има за област на сходимост някакво множество $\{x\}$. За произволна точка x от множеството $\{x\}$ да означим $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Очевидно дефиниционната област на така определената функция $f(x)$ съвпада с множеството $\{x\}$. Тази функция наричаме гранична функция на функционалната редица $\{f_n(x)\}$ или кратко — нейна граница.

Аналогично, ако функционалният ред (2.1) има за област на сходимост някое множество $\{x\}$, то на това множество е определена функцията $S(x)$, която е гранична функция на редицата от частични суми на този ред и се нарича негова сума.

Редицата (2.3) от разгледания в предния пункт пример 1 има за област на сходимост целия сегмент $0\le x\le 1$.

Наистина $f_n(0)=1$ за всички номера n, т. е. в точката $x=0$ редицата (2.3) клони към единица. Ако фиксираме произволно x от полусегмента $0<x\le 1$, то всички функции, започвайки от някакъв номер (зависещ, разбира се, от x), ще бъдат равни на нула в тази точка x. Оттук следва, че във всяка точка x на полусегмента $0<x\le 1$ редицата (2.3) клони към нула.

И така редицата (2.3) е сходяща на целия сегмент $0\le x\le 1$ и клони към граничната функция $f(x)$, която има вида

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x=0,\\ 0 & \text{при} \quad 0<x\le 1.\end{cases}$$

Графиката на тази функция е дадена на фиг. 2.2. Ще отбележим веднага, че тази функция не е непрекъсната в сегмента $[0, 1]$ (тя има прекъсване отдясно в точката $x=0$).

Сега ще се убедим, че редът (2.4) от разглежданиия в предния пункт пример 2 има за област на сходимост цялата безкрайна равнина $E^2=\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty\}$.

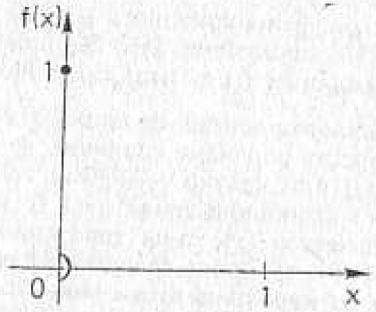
Наистина в п. 2, § 9, глава 6, част I е доказано, че остатъчният член $R_{n+1}(u)$ във формулата на Маклорен за функцията e^u клони към нула при $n\to\infty$ за всяко реално u, а това всъщност означава, че $(n+1)$-та частична сума $S_{n+1}(x, y)$ на реда (2.4) се различава от e^{x+y} с величината $R_{n+1}(x+y)$, която клони към нула при $n\to\infty$ във всяка точка (x, y) от равнината E^2.

И така редът (2.4) е сходящ в цялата равнина E^2 и неговата сума е равна на e^{x+y}.

3. Равномерна сходимост в множество. Нека функционалната редица

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \dots,\ f_n(x),\ \dots \tag{2.5}$$

е сходяща в множеството $\{x\}$ от пространството E^m и нека $f(x)$ е нейната гранична функция.



Фиг. 2. 2

Определение 1. Ще казваме, че редицата (2.5) клони към $f(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geq N(\varepsilon)$, и за всички точки x от множеството $\{x\}$ да е изпълнено неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon. \tag{2.6}$$

В този случай ще казваме, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Забележка 1. В това определение твърде съществено е това, че номерът N зависи само от ε, но не и от x, т.е. твърди се, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери универсален номер $N(\varepsilon)$, започвайки от който неравенството (2.6) да е изпълнено едновременно при всички точки x от множеството $\{x\}$.

Забележка 2. Ще отбележим, че равномерната сходимост на функционалната редица $f_n(x)$ към функцията $f(x)$ в множеството $\{x\}$ е еквивалентна на това числовата редица ε_n, членовете на която са точните горни граници на функцията $|f_n(x)-f(x)|$ в множеството $\{x\}$, да бъде безкрайно малка (в частност тази точна горна граница трябва да съществува).

Забележка 3. От определение 1 непосредствено следва, че ако редицата $\{f_n(x)\}$ клони равномерно към $f(x)$ в цялото множество $\{x\}$, то $\{f_n(x)\}$ клони равномерно към $f(x)$ и във всяко подмножество на множеството $\{x\}$.

Ще приведем пример, показващ, че от сходимостта на функционалната редица $\{f_n(x)\}$ в множеството $\{x\}$ не следва, изобщо казано, равномерна сходимост на $\{f_n(x_n)\}$ за това множество.

Да се върнем към редицата (2.3) от пример 1, разгледан в п. 1. В п. 2 беше доказано, че тази редица клони в целия сегмент [0, 1] към граничната функция

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } x=0, \\ 0 & \text{при } 0<x\leq 1. \end{cases}$$

Ще докажем, че тази редица не е равномерно сходяща в [0, 1].

Да разгледаме редицата от точки $x_n=\frac{1}{2n}$ $(n=1, 2, \ldots)$, принадлежащи на сегмента [0, 1]. Във всяка от тези точки (т.е. за всеки номер n) са в сила съотношенията

$$f_n(x_n)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f(x_n)=0.$$

Така за всеки номер n имаме

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

а това означава, че при $\varepsilon\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ неравенството (2.6) не може да бъде удовлетворено за всички точки x от сегмента [0, 1] едновременно при никакъв номер n, т.е. означава липса на равномерна в сегмента [0, 1] сходимост на разглежданата редица.

Ще отбележим, че разглежданата редица клони към граничната функция $f(x)$ равномерно във всеки сегмент $[\delta, 1]$, където δ е произволно фиксирано число от интервала $0<\delta<1$. Наистина за всяко дадено δ ще се намери номер, започвайки от който всички елементи $f_n(x)$ са равни на нула в целия сегмент $[\delta, 1]$. Тъй като и граничната функция $f(x)$ е равна на нула в сегмента $[\delta, 1]$, то лявата част на (2.6) е равна на нула в целия сегмент $[\delta, 1]$, започвайки от посочения номер. По този начин от посочения номер нататък неравенството (2.6) е изпълнено за всички x от сегмента $[\delta, 1]$ при произволно $\varepsilon>0$.

Определение 2. Ще казваме, че даден функционален ред е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, ако редицата от частичните му суми е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Ще отбележим, че функционалният ред (2.4) от пример 2, разгледан в п. 1, е равномерно сходящ в кръга $x^2+y^2\leq r^2$ с произволен фиксиран радиус r и неговата сума е e^{x+y}.

Наистина навсякъде в посочения кръг имаме $|x|\leq r$, $|y|\leq r$ и затова $|x+y|\leq|x|+|y|\leq 2r$, откъдето поради наличието на оценка (6.62') от п. 2, §9, глава 6, част I ще получим, че навсякъде в посочения кръг имаме

$$|R_{n+1}(x+y)|\leq\frac{(2r)^{n+1}}{(n+1)!}e^{2r}.$$

От последното неравенство следва, че $R_{n+1}(x+y)$ клони към нула при $n\to\infty$ равномерно в кръга $x^2+y^2\leq r^2$, а това значи, че редът (2.4) е равномерно сходящ в посочения кръг и сумата му е e^{x+y}.

4. Критерий на Коши за равномерна сходимост на редица (ред). Валидни са следните две фундаментални теореми.

Теорема 2.1. За да бъде функционалната редица $\{f_n(x)\}$ равномерно сходяща в множеството $\{x\}$, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува номер $N(\varepsilon)$ такъв, че за всяко n, удовлетворяващо условието $n>N(\varepsilon)$, всички естествени числа $p(p=1, 2, \ldots)$ и всички точки x от множеството $\{x\}$ е вярно неравенството

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2. За да бъде функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.8}$$

равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, е необходимо и достатъчно за всяко положително число ε да съществува номер $N(\varepsilon)$ такъв, че за всяко n, удовлетворяващо условието $n\geqq N(\varepsilon)$, всички естествени числа $p(p=1, 2, \ldots)$ и всички точки x от множеството $\{x\}$ е изпълнено

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|<\varepsilon. \tag{2.9}$$

Достатъчно е да докажем само теорема 2.1, тъй като теорема 2.2 е следствие на теорема 2.1 (достатъчно е да отбележим, че в лявата част на (2.9) под знака за абсолютна стойност стои разликата $S_{n+p}(x)-S_n(x)$ на частичните суми с номера $n+p$ и n на функционалния ред (2.8)).

Доказателство на теорема 2.1

Необходимост. Да предположим, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони равномерно в множеството $\{x\}$ към граничната функция $f(x)$. Тогава, като фиксираме произволно $\varepsilon>0$, ще намерим за него номер $N(\varepsilon)$ такъв, че неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{2.10}$$

да е в сила за всяко n, удовлетворяващо условието $n\geqq N(\varepsilon)$, и за всички точки x от множеството $\{x\}$.

Ако p е произволно естествено число, то при $n\geqq N(\varepsilon)$ номерът $n+p$ още повече ще удовлетворява условието $n+p\geqq N(\varepsilon)$, а затова за всички n, удовлетворяващи условието $n\geqq N(\varepsilon)$, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$, толкова повече ще е в сила неравенството

$$|f_{n+p}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.11}$$

Тъй като модулът на сума от две величини не надминава сумата на техните модули, то от (2.10) и (2.11) ще получим, че

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|=|[f_{n+p}(x)-f(x)]+[f(x)-f_n(x)]|\leqq$$
$$\leqq|f_{n+p}(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

(за всяко n, удовлетворяващо условието $n\geqq N(\varepsilon)$, всички естествени числа p и всяко x от множеството $\{x\}$).

Необходимостта е доказана.

Достатъчност. Да предположим, че за произволно $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че неравенството (2.7) да е в сила за всички n, удовлетворяващи условието $n\geqq N(\varepsilon)$, за всички естествени p и за всички точки x от множеството $\{x\}$. От неравенството (2.7) и от критерия на Коши за сходимост на числова редица (гл. п. 3, § 3, глава 3, част I) следва сходимост на редицата $\{f_n(x)\}$ във всяка точка x от множеството $\{x\}$ и съществуването на определена във всяка точка x от множеството $\{x\}$ гранична функция $f(x)$.

Като фиксираме произволен номер n, удовлетворяващ условието $n\geqq N(\varepsilon)$, и произволна точка x от множеството $\{x\}$, да направим граничен преход при $p\to\infty$ в неравенството (2.7). Като използуваме теорема 3.13 от п. 4, § 1, глава 3, част I, ще получим, че за произволен номер n, удовлетворяващ условието $n\geqq N(\varepsilon)$, и произволна точка x от множеството $\{x\}$ е валидно неравенството

$$|f(x)-f_n(x)|\leqq\varepsilon<2\varepsilon.$$

Това всъщност доказва, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони към граничната функция $f(x)$ равномерно в множеството $\{x\}$.

Достатъчността е доказана.

§ 2. Достатъчни условия (признаци) за равномерна сходимост на функционални редици и редове

В п. 1, § 1 се убедихме, че изучаването на функционалните редове е еквивалентно на изучаването на функционални редици. От тази гледна точка всеки признак за равномерна сходимост има две еквивалентни формулировки: една на езика на функционалните редове, друга — на езика на функционалните редици. Ще изразяваме установените признаци на езика на редиците или редовете в по-удобната формулировка, понякога ще привеждаме и двете еквивалентни формулировки.

Теорема 2.3 (признак на Вайерщрас). Ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{2.12}$$

е дефиниран в множество $\{x\}$ и ако съществува сходящ числов ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \tag{2.13}$$

такъв, че за всички точки x от множеството $\{x\}$ и за всички номера k е изпълнено неравенството

$$|u_k(x)| \leq c_k, \tag{2.14}$$

то функционалният ред (2.12) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Доказателство. Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. Тъй като числовият ред (2.13) е сходящ, то по критерия на Коши за сходимост на числови редове (гл. теорема 1.1 от глава 1) ще се намери $N(\varepsilon)$ такова, че

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \tag{2.15}$$

за всяко n, удовлетворяващо $n \geq N(\varepsilon)$, и за всички естествени числа p.

От неравенства (2.14) и (2.15) и от това, че модулът на сума от p събираеми не надминава сумата от модулите им, ще получим, че

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

(за всяко n, удовлетворяващо условието $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени числа p и всички точки x от множеството $\{x\}$).

По критерия на Коши за равномерна сходимост (т. е. по теорема 2.2) следва, че редът (2.12) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$. Теоремата е доказана.

Забележка 1. Накратко критерият на Вайерщрас може да бъде формулиран така: един функционален ред е равномерно сходящ в дадено множество, ако той може да бъде мажориран в това множество от сходящ числов ред.

Забележка 2. Трябва да се подчертае, че критерият на Вайерщрас е само достатъчно и не необходимо условие за равномерната сходимост на функционален ред.

Наистина функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

е равномерно сходящ в сегмента $0 \leq x \leq 1$ и неговата сума е $\ln(1+x)$, защото, както е показано в п. 2, § 9, глава 6, част I, разликата между $\ln(1+x)$ и n-тата частична сума на този ред е равна на остатъчния член $R_{n+1}(x)$ във формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$ и удовлетворява неравенството

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

за всички x от сегмента $0 \leq x \leq 1$.

За посочения функционален ред обаче не съществува мажориращ го в сегмента $0 \leq x \leq 1$ сходящ числов ред, защото за всеки номер k имаме

$$\sup_{[0,1]}\left|\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| = \frac{1}{k},$$

а числовият ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ е разходящ.

Да приложим признака на Вайерщрас, за да установим равномерната сходимост на функционалния ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2x+ky+z)}{k^2}.$$

Може да се твърди, че този ред е равномерно сходящ в цялото тримерно евклидово пространство E^3, защото за всяка точка (x, y, z) от това пространство той се мажорира от сходящия числов ред $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Теорема 2.4 (признак на Дини*)

Ако за всяка точка x от затвореното ограничено множество $\{x\}$ в пространството E^m редицата $\{f_n(x)\}$ е ненамаляваща (нерастяща) и клони в това множество към граничната функция $f(x)$ и ако всички членове на редицата $\{f_n(x)\}$ и граничната функция

* Улис Дини — италиански математик (1845—1918).

$f(x)$ са непрекъснати в множеството $\{x\}$, то сходимостта на редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерна в множеството $\{x\}$.

Доказателство. Без да намаляваме общността, ще предположим, че редицата $\{f_n(x)\}$ не намалява в затвореното ограничено множество $\{x\}$ (случаят на нерастяща редица се свежда до този чрез умножаване на всички елементи на редицата с числото -1). Да положим $r_n(x)=f(x)-f_n(x)$. Редицата $r_n(x)$ има следните свойства:

1) всички $r_n(x)$ са неотрицателни и непрекъснати в множеството $\{x\}$;

2) $\{r_n(x)\}$ не расте в множеството $\{x\}$;

3) във всяка точка x от множеството $\{x\}$ съществува границата

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0.$$

Достатъчно е да се докаже, че редицата $\{r_n(x)\}$ клони към функцията, тъждествено равна на нула, равномерно в множеството $\{x\}$, т. е. достатъчно е да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери поне един номер n такъв, че $r_n(x)<\varepsilon$ за всички x от множеството $\{x\}$. (Тогава поради това, че редицата $\{r_n(x)\}$ е нерастяща, неравенството $r_n(x)<\varepsilon$ ще бъде изпълнено и за всички следващи номера.) Да допуснем, че за някое $\varepsilon>0$ не може да се намери нито един номер n такъв, че да имаме $r_n(x)<\varepsilon$ едновременно за всички x от множеството $\{x\}$. Тогава за всеки номер n ще се намери поне една точка x_n от множеството $\{x\}$ такава, че

$$r_n(x_n)\geq\varepsilon. \tag{2.16}$$

Поради ограничеността на множеството $\{x\}$ по теоремата на Болцано—Вайерщрас (гл. теорема 12.1 от глава 12, част I) от редицата от точки $\{x_n\}$ може да се избере подредица $\{x_{n_k}\}$, клоняща към някаква точка x_0, която поради това, че множеството $\{x\}$ е затворено, му принадлежи. Тъй като функцията $r_m(x)$ (с произволен номер m) е непрекъсната в точката x_0, то за всеки номер m имаме

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k})=r_m(x_0). \tag{2.17}$$

От друга страна, като изберем за всеки номер m надминаващ го номер n_k, ще получим (поради това, че редицата $r_m(x)$ е нерастяща), че

$$r_m(x_{n_k})\geq r_{n_k}(x_{n_k}).$$

Като съпоставим последното неравенство с неравенство (2.16), което е вярно за всеки номер n, ще получим, че

$$r_m(x_{n_k})\geq\varepsilon \tag{2.18}$$

(за всеки номер n_k, надминаващ фиксирания от нас произволен номер m).

От (2.17) и (2.18) следва, че

$$r_m(x_0)\geq\varepsilon$$

(за всеки номер m), а това противоречи на условието, че редицата $\{r_m(x)\}$ клони към нула в точка x_0. Полученото противоречие доказва теоремата.

Забележка. В теоремата на Дини изискването за монотонност на редицата $\{f_n(x)\}$ в множеството $\{x\}$ е твърде съществено, защото немонотонна в множеството $\{x\}$ редица от непрекъснати в това множество $\{x\}$ функции може да клони във всяка точка x от множеството $\{x\}$ към непрекъсната в това множество функция $f(x)$, но да не е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Като пример да разгледаме редицата от функции $\{f_n(x)\}$, за която $f_n(x)$ е равна на $\sin x$ при $0\leq x\leq\frac{\pi}{n}$ и е равна на нула при $\frac{\pi}{n}\leq x\leq\pi$. Тази редица клони към $f(x)=0$ във всяка точка на сегмента $0\leq x\leq\pi$, но не е равномерно сходяща в този сегмент, защото $|f_n(x_n)-f(x_n)|=1$ при $x_n=\frac{\pi}{2n}$ за всички номера n.

Ще приведем еквивалентна формулировка на теоремата на Дини на езика на функционалните редове: ако всички членове на функционалния ред са непрекъснати и неотрицателни (или неположителни) в затвореното ограничено множество $\{x\}$ и ако във всяка точка от множеството $\{x\}$ този ред е сходящ и сумата му е непрекъсната функция, то сходимостта на посочения ред е равномерна в множеството $\{x\}$.

Като пример за използуване на признака на Дини ще изучим въпроса за характера на сходимост на редицата

$$\{(x^2+y^2)^n\}$$

в кръга $x^2+y^2\leq\frac{1}{4}$ с радиус $\frac{1}{2}$ и с център в точката $(0,0)$. Тази сходимост е равномерна в посочения кръг, защото разглежданата редица клони във всяка точка на този кръг към граничната функция $f(x,y)=0$, не расте във всяка точка на кръга и се състои от функции, непрекъснати в посочения кръг.

Преди да формулираме още два признака за равномерна сходимост на функционални редове, ще въведем някои нови понятия.

Определение 1. Ще казваме, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно ограничена в множеството $\{x\}$, ако съществува такова число $M>0$, че за всяко n и за всички точки x от множеството $\{x\}$ да е изпълнено неравенството

$$|f_n(x)| \leq M.$$

Определение 2. Ще казваме, че функционалната редица $\{v_n(x)\}$ има в множеството $\{x\}$ равномерно ограничена вариация, ако функционалният ред

(2.19) $$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)|$$

е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Веднага ще отбележим, че всяка редица, която има в множеството $\{x\}$ равномерно ограничена вариация, е равномерно сходяща в множеството $\{x\}$.

Наистина от равномерната сходимост на реда (2.19) в множеството $\{x\}$ и от критерия на Коши следва равномерната сходимост в множеството $\{x\}$ на реда

(2.19*) $$\sum_{k=1}^{\infty} [v_{k+1}(x) - v_k(x)],$$

чиято n-та частична сума $S_n(x)$ има вида $S_n(x) = v_{n+1}(x) - v_1(x)$. От последното равенство следва, че редицата $\{v_n(x)\}$ е равномерно сходяща и клони към граничната функция $v(x)$, равна на $S(x) + v_1(x)$, където $S(x)$ е сумата на реда (2.19*).

Сега можем да формулираме и да докажем следните два признака.

Теорема 2.5 (първи признак на Абел)

Ако функционалният ред

(2.1) $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

има равномерно ограничена в множеството $\{x\}$ редица от частичните суми, а функционалната редица $v_n(x)$ има равномерно ограничена в множеството $\{x\}$ вариация и гранична функция, тъждествено равна на нула, то функционалният ред

(2.20) $$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) \cdot v_n(x)]$$

е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Доказателство. По условие съществува число $M > 0$ такова, че редицата $\{S_n(x)\}$ от частичните суми на реда (2.1) удовлетворява неравенството $|S_n(x)| \leq M$ за всички номера n и всички точки x от множеството $\{x\}$.

Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и намираме номер N такъв, че за всички $n > N$, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$ да са в сила неравенствата

(2.21) $$|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M},$$

(2.22) $$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Тук използувахме това, че редицата $\{v_n(x)\}$ клони равномерно в множеството $\{x\}$ към функция, тъждествено равна на нула, а също така и равномерната сходимост на реда (2.19) в множеството $\{x\}$.

От тъждеството на Абел (1.77) и понеже модулът на сума от три числа не надвишава сумата от модулите им, получаваме

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) \cdot v_k(x)] \leq \Big| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x) [v_k(x) - v_{k+1}(x)] \Big| +$$
$$+ |S_{n+p}(x)| \cdot |v_{n+p}(x)| + |S_n(x)| \cdot |v_{n+1}(x)|.$$

Като използуваме условието $|S_n(x)| \leq M$, ще получим

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)] \Big| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| +$$
$$+ M |v_{n+p}(x)| + M |v_{n+1}(x)|.$$

Съпоставяме последното неравенство с (2.21) и (2.22) и получаваме, че за всеки номер n, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$ имаме

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)] < \varepsilon,$$

а това означава, че редът (2.20) е равномерно сходящ в множеството (по теорема (2.2).

Теоремата е доказана.

Теорема 2.6 (втори признак на Абел). Ако функционалният ред (2.1) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$ и сумата му $S(x)$ е ограничена в $\{x\}$, а функционалната редица $\{v_n(x)\}$ притежава равномерно ограничена в множеството $\{x\}$ вариация и граничната ѝ функция $v(x)$ е ограничена в $\{x\}$, то функционалният ред (2.20) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Доказателство. Ще започнем от тъждеството на Абел (1.77) от глава 1. Това тъждество може да бъде записано във вида

$$+ [S_{n+p}(x) - S_n(x)] \cdot v_{n+p}(x) + S_n(x) [v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)].$$

(Тук символът $S_k(x)$ означава k-тата частична сума на реда (2.1).)

От последното тъждество следва неравенството

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\,.\,v_k(x)\right| \leqq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |S_k(x)|\,.\,|v_{k+1}(x)-v_k(x)| + \tag{2.23}$$

$$+|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\,.\,|v_{n+p}(x)|+|S_n(x)|\,.\,|v_{n+p}(x)-v_{n+1}(x)|.$$

Тъй като по условие сумата $S(x)$ на реда (2.1) и граничната функция $v(x)$ на редицата $\{v_n(x)\}$ са ограничени в множеството $\{x\}$, то ще се намерят константи M_1 и M_2 такива, че за всички x от множеството $\{x\}$

$$|S(x)| \leqq M_1, \quad |v(x)| \leqq M_2. \tag{2.24}$$

От неравенство (2.24) и от равномерната сходимост на редиците $\{S_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ (клонящи съответно към $S(x)$ и $v(x)$) в множеството $\{x\}$ следва, че съществува такъв номер N_1, че за всички точки x от множеството $\{x\}$ и всички номера $n \geqq N_1$ да бъдат изпълнени неравенствата

$$|S_n(x)| \leqq M_1+1, \quad |v_n(x)| \leqq M_2+1. \tag{2.25}$$

От друга страна, от равномерната в множеството $\{x\}$ сходимост на функционалните редове (2.1) и (2.19) и от критерия на Коши за равномерна сходимост следва, че за произволно $\varepsilon>0$ могат да бъдат намерени номера $N_2(\varepsilon)$ и $N_3(\varepsilon)$ такива, че неравенството

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_2+1)} \tag{2.26}$$

да е изпълнено за точките x от множеството $\{x\}$, всички естествени p и всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geqq N_2(\varepsilon)$, и неравенството

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x)-v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \tag{2.27}$$

да е изпълнено за всички точки x от множеството $\{x\}$, всички естествени p и всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geqq N_3(\varepsilon)$.

Накрая от тъждеството

$$v_{n+p}(x)-v_n(x)=\sum_{k=n+1}^{n+p-1} [v_{k+1}(x)-v_k(x)],$$

от следващото от него неравенство

$$|v_{n+p}(x)-v_n(x)| \leqq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x)-v_k(x)|$$

и от неравенство (2.27) следва, че

$$|v_{n+p}(x)-v_n(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{3(M_1+1)} \tag{2.28}$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, всички естествени p и всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geqq N_3(\varepsilon)$.

Да означим с $N(\varepsilon)$ най-големия от трите номера N_1, $N_2(\varepsilon)$ и $N_3(\varepsilon)$. Тогава при $n \geqq N(\varepsilon)$ за всички точки x от множеството $\{x\}$ и за всички естествени p да бъде изпълнено всяко от четирите неравенства (2.25) — (2.28).

От тези неравенства и от (2.23) следва, че

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\,v_k(x)\right| < \varepsilon$$

при всички $n \geqq N(\varepsilon)$, всички естествени p и за всички точки x от множеството $\{x\}$.

По критерия на Коши редът (2.20) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$. Теоремата е доказана.

Следствие от теорема 2.5 — признак на Дирихле — Абел. Ако редицата от частичните суми на функционалния ред (2.1) е равномерно ограничена в множеството, а функционалната редица $\{v_n(x)\}$ е нерастяща във всяка точка от множеството $\{x\}$ и клони към нула равномерно в това множество, то функционалният ред (2.20) е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$.

Достатъчно е да се отбележи, че нерастяща във всяка точка от множеството $\{x\}$ и клоняща равномерно в това множество към нула редица $\{v_n(x)\}$ притежава в множеството $\{x\}$ равномерно ограничена вариация, защото за нея n-тата частична сума $S_n(x)$ на реда (2.19) е равна на $v_1(x)-v_{n+1}(x)$. Следователно съществува равномерна в множеството $\{x\}$ граница

$$\lim S_n(x)=\lim_{n\to\infty} [v_1(x)-v_{n+1}(x)]=v_1(x).$$

Като пример да изучим въпроса за равномерната сходимост на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k+(1+|x|)^k}. \tag{2.29}$$

Тъй като редицата

$$v_n(x)=\frac{1}{n+(1+|x|)^n}$$

е нерастяща и равномерно клони към нула върху правата $-\infty<x<\infty$, то по признака на Дирихле—Абел редът (2.29) е равномерно сходящ в произволно множество, в което редицата от частичните суми на реда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin kx \tag{2.30}$$

е равномерно ограничена.

За да пресметнем n-тата частична сума $S_n(x)$ на реда (2.30), сумираме

$$2\sin\frac{x}{2}\sin kx=\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x$$

по всички k от 1 до n. При това получаваме съотношението

$$2\sin\frac{x}{2}S_n(x)=\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x,$$

от което следва равенството

$$S_n(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Значи за всички номера n е вярно неравенството

$$|S_n(x)|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},$$

от което следва, че редицата от частичните суми на реда (2.30) е равномерно ограничена във всеки сегмент, който не съдържа точките $x_m=2\pi m$, където $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ (защото във всеки такъв сегмент $\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ има положителна точна долна граница).

И така редът (2.29) е равномерно сходящ във всеки фиксиран сегмент, който не съдържа точките $x_m=2\pi m$, $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$.

По втория признак на Абел редът

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{\sin kx}{k+(1+|x|)^k}\right]\cdot\frac{k+1+|x|}{k+|x|}\right\}$$

е равномерно сходящ във всеки сегмент, който не съдържа точките $x_m=2\pi m$, $m=0,\pm1,\ldots$, защото, както вече доказахме, редът (2.29) е равномерно сходящ в такъв сегмент и има ограничена сума, а редицата $v_k=\frac{k+1+|x|}{k+|x|}$ има равномерно ограничена във всеки сегмент вариация, защото редът

$$\sum_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}-v_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+|x|)(k+|x|+1)}$$

се мажорира на цялата права от сходящия числов ред $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$, следователно е сходящ на цялата права и сумата му е ограничена.

§ 3. Почленен граничен преход

Да разгледаме произволно подмножество $\{x\}$ на пространство E^m и нека $\overset{\circ}{x}$ е точка на сгъстяване на множеството $\{x\}$.

Вярно е следното твърдение.

Теорема 2.7. Ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x) \tag{2.31}$$

е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, сумата му е $S(x)$ и всички членове на този ред имат в точката $\overset{\circ}{x}$ граница

$$\lim_{x\to\overset{\circ}{x}}u_k(x)=b_k,\quad k=1,2,\ldots,$$

то и сумата $S(x)$ има в точката $\overset{\circ}{x}$ граница, при това

$$\lim_{x\to\overset{\circ}{x}}S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[\lim u_k(x)]=\sum_{k=1}^{\infty}b_k, \tag{2.32}$$

т. е. символът lim за граница и символът $\sum$ за сумиране могат да си разменят местата (може да се направи почленен граничен преход).

Доказателство. Най-напред ще докажем сходимостта на числовия ред $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$.

По критерия на Коши, приложен към функционалния ред (2.31), за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon \tag{2.33}$$

за всички номера n, удовлетворяващи условието $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени p и всички точки x от множеството $\{x\}$. В неравенството (2.33) фиксираме номерата n и p и правим граничен преход при $x \to \overset{\circ}{x}$ (такъв граничен преход може да се осъществи по произволна редица от точки от множеството $\{x\}$, клоняща към $\overset{\circ}{x}$). Получаваме

$$|b_{n+1}+b_{n+2}+\cdots+b_{n+p}| \leq \varepsilon < 2\varepsilon$$

(за всяко $n \geq N(\varepsilon)$ и всяко естествено p). Съгласно критерия на Коши редът $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ е сходящ.

Да оценим сега разликата

$$S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Тъй като

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, то за всеки номер n е в сила тъждеството

$$S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} b_k\right]+\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)-\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

от което получаваме неравенството

$$(2.34)\quad \left|S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} b_k\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right|+\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|,$$

което е вярно за всички точки x от множеството $\{x\}$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Тъй като редът $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ е сходящ, а редът $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ е равномерно сходящ в множеството $\{x\}$, то за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер n такъв, че за всички точки x от множеството $\{x\}$

$$(2.35)\quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тъй като границата на крайна сума е равна на сумата от границите на събираемите, то за фиксираното от нас $\varepsilon>0$ и за избрания номер n може да се посочи $\delta>0$ такова, че

$$(2.36)\quad \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-\sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, които удовлетворяват условието $0<\rho(x, \overset{\circ}{x})<\delta$.

От (2.34), (2.35) и (2.36) следва, че

$$\left|S(x)-\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| < \varepsilon$$

за всички точки x от множеството $\{x\}$, удовлетворяващи условието $0<\rho(x, \overset{\circ}{x})<\delta$. Това всъщност доказва, че границата на $S(x)$ в точката $\overset{\circ}{x}$ съществува и че е вярно равенството (2.32).

Теоремата е доказана.

На езика на функционалните редици теорема 2.7 звучи така:

Ако функционалната редица $f_n(x)$ клони равномерно в множеството $\{x\}$ към граничната функция $f(x)$ и всички елементи на тази редица имат граница в точката $\overset{\circ}{x}$, то и граничната функция $f(x)$ има граница в точката $\overset{\circ}{x}$ и при това

$$\lim_{x\to\overset{\circ}{x}} f(x)=\lim_{x\to\overset{\circ}{x}}(\lim_{n\to\infty} f_n(x))=\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to\overset{\circ}{x}} f_n(x)),$$

т. е. символът $\lim\limits_{n\to\infty}$ за граница на редица и символът $\lim\limits_{x\to\overset{\circ}{x}}$ за граница на функция могат да си разменят местата (или както се казва, може да се направи почленен граничен преход при $x\to\overset{\circ}{x}$).

Следствие 1 от теорема 2.7

Ако в условието на теорема 2.7 поискаме допълнително точката $\overset{\circ}{x}$ да принадлежи на множеството $\{x\}$ и всички членове $u_k(x)$ на функционалния ред (2.31) да бъдат непрекъснати в точката $\overset{\circ}{x}$, то и сумата $S(x)$ на този ред ще бъде непрекъсната в точката $\overset{\circ}{x}$.

Наистина в този случай $b_k=u_k(\overset{\circ}{x})$ и равенството (2.32) ще има вида

$$\lim_{x\to x_0} S(x)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(\overset{\circ}{x})=S(\overset{\circ}{x}),$$

а това означава, че сумата $S(x)$ е непрекъсната в точката $\overset{\circ}{x}$.

Следствие 2 от теорема 2.7

Ако всички членове на функционалния ред (функционалната редица) са непрекъснати в гъстото в себе си множество $\{x\}$* и ако този функционален ред (функционална редица) е равномерно сходящ (сходяща) в множеството $\{x\}$, то и сумата на реда (граничната функция на редицата) е непрекъсната в множеството $\{x\}$.

Достатъчно е да се приложи предното следствие във всяка точка x от множеството $\{x\}$.

§ 4. Почленно интегриране и почленно диференциране на функционални редици и редове

1. Почленно интегриране

Ще докажем следната основна теорема.

Теорема 2.8. Ако функционалната редица $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$ и ако всяка функция $f_n(x)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$, то и граничната функция $f(x)$ е интегруема в този сегмент, при това посочената редица може да се интегрира в сегмента $[a, b]$ почленно, т. е. границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

съществува и е равна на $\int_a^b f(x)dx$.

Доказателство. Най-напред ще докажем, че граничната функция $f(x)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Достатъчно е да се докаже, че за граничната функция $f(x)$ ще се намери поне едно деление на сегмента $[a, b]$, за чиято горна сума S и долна сума S е в сила неравенството $S-s<\varepsilon$ (гл. п. 1, § 3, глава 9, част I).

За целта е достатъчно да се покаже, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ може да се намери номер n такъв, че за всяко деление на сегмента $[a, b]$ горната сума S и долната сума s на функцията $f(x)$ и горната сума S_n и долната сума s_n на функцията $f_n(x)$ са свързани с неравенството

$$S-s\leq(S_n-s_n)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.37}$$

* Ще напомним, че множеството $\{x\}$ се нарича гъсто в себе си, ако всяка негова точка е точка на сгъстяване за това множество.

Наистина от интегруемостта на функцията $f_n(x)$ в $[a, b]$ следва, че може да се избере деление така, че да бъде вярно неравенството $S_n-s_n<\frac{\varepsilon}{2}$, от което и от (2.37) ще получим, че $S-s<\varepsilon$, което довършва доказателството на интегруемостта в $[a, b]$ на функцията $f(x)$.

Да разгледаме произволно деление $\{x_k\}$ $(k=1, 2, \dots, m)$ на сегмента $[a, b]$ и да означим със символа $\omega_k(f_n)$ осцилацията* на k-тия частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ на функцията $f_n(x)$, а със символа $\omega_k(f)$ — осцилацията в същия частичен сегмент на граничната функция $f(x)$.

Неравенството 2.27 ще бъде доказано, ако установим, че за достатъчно голям номер е в сила неравенството

$$\omega_k(f)\leq\omega_k(f)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.38}$$

(Наистина, като умножим (2.38) с дължината $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ на частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ и като сумираме така полученото неравенство по всички $k=1, 2, \dots, m$, ще получим неравенството (2.38).)

Ще установим, че за достатъчно големи номера n неравенството (2.38) е изпълнено във всеки сегмент $[x_{n-1}, x_n]$.

За всеки номер n и за всеки две точки x' и x'' от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ е вярно тъждеството

$$f(x')-f(x'')\equiv[f(x')-f_n(x')]+[f_n(x')-f_n(x'')]+[f_n(x'')-f(x'')],$$

от което следва неравенството

$$|f(x')-f(x'')|\leq|f(x')-f_n(x')|+|f_n(x')-f_n(x'')|+|f_n(x'')-f(x'')|. \tag{2.39}$$

От това, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони към функцията $f(x)$ равномерно в сегмента $[a, b]$, следва, че за фиксираното от нас произволно $\varepsilon>0$ ще се намери номер n такъв, че за всички точки x от сегмента $[a, b]$

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{2.40}$$

Като използваме в дясната страна на (2.39) неравенството (2.40), взето за точка $x=x'$ и за точка $x=x''$, ще получим от (2.39)

$$|f(x')-f(x'')|\leq|f_n(x')-f_n(x'')|+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.41}$$

* Ще напомним, че осцилация на функцията в произволен сегмент се нарича разликата между точната горна и точната долна граница на тази функция в посочения сегмент.

(за избрания от нас достатъчно голям номер n и за всеки две точки x' и x'' от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$).

Тъй като при произволно разположение на точките x' и x'' в сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ е вярно неравенството

$$|f_n(x')-f_n(x'')|\leq\omega_k(f_n),$$

то от (2.41) ще получим

$$|f(x')-f(x'')|\leq\omega_k(f_n)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.42}$$

Ще отбележим, че неравенство (2.42) е вярно при произволно разположение на точките x' и x'' в частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$.

Нека означим точната горна и точната долна граница на функцията $f(x)$ в посочения частичен сегмент съответно с M_k и m_k. От определението на точните граници следва, че можем да намерим две редици от точки $\{x_p'\}$ и $\{x_p''\}$ $(p=1, 2, \ldots)$ от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ такива, че

$$\lim_{p\to\infty} x_p'=M_k, \quad \lim_{p\to\infty} x_p''=m_k.$$

От (2.42) следва за всеки номер p

$$|f(x_p')-f(x_p'')|\leq\omega_k(f_n)+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.43}$$

Като направим в неравенство (2.43) граничен преход по $p\to\infty$ и като отбележим, че границата на лявата част на (2.43) е равна на $M_k-m_k=\omega_k(f)$, ще получим като граница от (2.43) исканото неравенство (2.38).

По такъв начин доказателството на интегруемостта на граничната функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ е завършено.

Ще отбележим, че ако в условието на теорема 2.8 бяхме поискали допълнително непрекъснатост за всяка от функциите $f_n(x)$ в сегмента $[a, b]$ (което се прави в повечето учебници по математически анализ), доказателството на интегруемостта на граничната функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ би станало съвсем тривиално: от следствие 2 от теорема 2.7 при такова допълнително изискване граничната функция $f(x)$ би била непрекъсната в сегмента $[a, b]$, а следователно и интегруема в този сегмент.

Остава да докажем второто твърдение на теорема 2.8, че редицата $\{f_n(x)\}$ може да се интегрира почленно в сегмента $[a, b]$.

Достатъчно е да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$$

за всички $n\geq N(\varepsilon)$.

Но $\{f_n(x)\}$ клони равномерно към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, следователно съществува номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{2.44}$$

за всички x от сегмента $[a, b]$ и за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geq N(\varepsilon)$.

От неравенството (2.44) получаваме*

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]dx\right|\leq$$

$$\leq\int_a^b \left|f_n(x)-f(x)\right|dx\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

(за всички $n\geq N(\varepsilon)$).

Доказателството на теорема 2.8 е завършено.

Ще формулираме теорема 2.8 на езика на функционалните редове: Ако функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

е равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$ и всеки член $u_k(x)$ е интегруема функция в сегмента $[a, b]$, то сумата му $S(x)$ е интегруема в сегмента $[a, b]$, при това редът може да бъде почленно интегриран в $[a, b]$, т. е. числовият ред

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b u_k(x)dx$$

е сходящ и сумата му е $\int_a^b S(x)dx$.

Забележка. В следващата глава ще бъде получен аналог

* Използваме следните установени в п. 2, § 4, глава 9, част I оценки: 1) ако $F(x)$ е интегруема в $[a, b]$, то и $|F(x)|$ е интегруема в $[a, b]$, като при това $\left|\int_a^b F(x)dx\right|\leq\int_a^b |F(x)|dx$; 2) ако $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в сегмента $[a, b]$ и навсякъде в този сегмент $f(x)\leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.

на теорема 2.8 за случая, когато функционалната редица е определена и интегруема в някаква област на m-мерното евклидово пространство E^m (при $m \geq 2$).

2. Почленно диференциране. Занапред под думите «функцията $f(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$» ще разбираме, че функцията $f(x)$ има обикновена (двустранна) производна във всяка вътрешна точка от сегмента $[a, b]$, дясна производна $f'(a+0)$ в точката a и лява производна $f'(b-0)$ в точката b.

Вярно е следното твърдение.

Теорема 2.9. Ако всяка функция $f_n(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$, като при това редицата от производните $f_n'(x)$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$, а самата редица $\{f_n(x)\}$ е сходяща поне в една точка x_0 от сегмента $[a, b]$, то редицата $\{f_n(x)\}$ клони към някаква гранична функция $f(x)$ равномерно в сегмента $[a, b]$, като при това тази редица може да бъде диференцирана почленно, т. е. в сегмента $[a, b]$ граничната функция е диференцируема и производната $f'(x)$ е гранична функция за редицата $\{f_n'(x)\}$.

Доказателство. Ще докажем най-напред, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$. От сходимостта на числовата редица $\{f_n(x_0)\}$ и от равномерната сходимост на $\{f_n'(x)\}$ в сегмента $[a, b]$ следва, че за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$\left|f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|f'_{n+p}(x)-f_n'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{2.45}$$

за всички $n \geq N(\varepsilon)$, всички естествени p и за всички x от сегмента $[a, b]$.

Нека x е произволна точка от сегмента $[a, b]$. Тъй като за функцията $[f_{n+p}(t)-f_n(t)]$ при произволни фиксирани номера n и p в сегмента, ограничен от точките x и x_0, са изпълнени всички условия на теоремата на Лагранж, то между x и x_0 ще се намери точка ξ такава, че

$$[f_{n+p}(x)-f_n(x)]-[f_{n+p}(x_0)-f_n(x_0)]=[f'_{n+p}(\xi)-f_n'(\xi)]\,(x-x_0).$$

От последното равенство и от това, че модулът на сумата на две величини не надминава сумата от техните модули, ще получим, като използваме (2.45) и неравенството $|x-x_0| \leq b-a$, че

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

за всяко x от $[a, b]$, за всяко $n \geq N(\varepsilon)$ и всяко естествено p.

От критерия на Коши следва, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$.

Остава да покажем, че граничната функция $f(x)$ има производна във всяка фиксирана точка x от сегмента $[a, b]$ (в крайните точки — едностранна производна) и тази производна е гранична функция на редицата $\{f_n'(x)\}$.

Да фиксираме произволна точка x от сегмента $[a, b]$ и по нея $\delta<0$ такова, че δ-околността на точка x изцяло да се съдържа в $[a, b]$ (ако x е крайна точка на сегмента $[a, b]$, под δ-околност на точка x ще разбираме дясна полуоколност $[a, a+\delta)$ на точката a и лява полуоколност $(b-\delta, b]$ на точката b).

Да означим със символа $\{\Delta x\}$ множеството от всички числа Δx, удовлетворяващи условието $0<|\Delta x|<\delta$ при $a<x<b$, условието $0<\Delta x<\delta$ при $x=a$ и условието $-\delta<\Delta x<0$ при $x=b$, и да докажем, че редицата от функции на аргумента Δx

$$\varphi_n(\Delta x)=\frac{f_n(x+\Delta x)-f_n(x)}{\Delta x} \tag{2.46}$$

е равномерно сходяща в посоченото множество $\{\Delta x\}$.

За произволно $\varepsilon>0$ по критерия на Коши за равномерна сходимост на редицата $\{f_n'(x)\}$ ще се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$|f'_{n+p}(x)-f_n'(x)|<\varepsilon \tag{2.47}$$

за всички x от $[a, b]$, всички $n \geq N(\varepsilon)$ и всички естествени p.

Да фиксираме сега произволно Δx от множеството $\{\Delta x\}$ и при произволни фиксирани номера n и p да приложим теоремата на Лагранж към функцията

$$[f_{n+p}(t)-f_n(t)]$$

в сегмента, ограничен от точките x и $x+\Delta x$.

Съгласно тази теорема ще се намери число θ от интервала $0<\theta<1$ такова, че

$$\frac{[f_{n+p}(x+\Delta x)-f_n(x+\Delta x)]-[f_{n+p}(x)-f_n(x)]}{\Delta x}=f'_{n+p}(x+\theta\Delta x)-f_n'(x+\theta\Delta x).$$

Като използваме (2.46), последното равенство може да се препише във вида

$$\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)=f'_{n+p}(x+\theta\Delta x)-f_n'(x+\theta\Delta x).$$

От последното равенство и от (2.47) заключаваме, че

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x)-\varphi_n(\Delta x)|<\varepsilon$$

за всяко Δx от $\{\Delta x\}$, всяко $n \geq N(\varepsilon)$ и всяко естествено p. По критерия на Коши (т. е. теорема 2.1) редицата $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ е равномерно сходяща в множеството $\{\Delta x\}$. Но тогава към тази редица може да се приложи теорема 2.7 за почленния граничен преход в точката $\Delta x=0$ (на езика на функционалните редици).

Съгласно тази теорема функцията

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

която е гранична функция за редицата (2.46), има граница в точката $\Delta x=0$, като при това тази граница може да бъде пресметната почленно, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[\lim \varphi_n(\Delta x)]=\lim_{n\to\infty}[\lim \varphi_n(\Delta x)]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\lim \frac{f_n(x+\Delta x)-f_n(x)}{\Delta x}\right]=\lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Това всъщност доказва, че производната на граничната функция $f(x)$ в точката x съществува и е равна на $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Теоремата е доказана.

На езика на функционалните редове теорема 2.8 се формулира така: ако всяка функция $u_k(x)$ е диференцируема в сегмента $[a, b]$ и ако редът от производните $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ е равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$, а самият ред $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ е сходящ поне в една точка x_0 от сегмента $[a, b]$, то този ред е равномерно сходящ в сегмента $[a, b]$, като при това може да бъде диференциран в сегмента $[a, b]$ почленно, т. е. неговата сума $S(x)$ има производна, която съвпада със сумата на реда от производните $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$.

Забележка 1. Ще подчертаем, че в теорема 2.9 се предполага само съществуване на производна за всеки член на редицата $f_n(x)$ в сегмента $[a, b]$. Нито ограниченост, нито още повече непрекъснатост на посочената производна (както това се прави в повечето учебници по математически анализ) не се предполага.

Забележка 2. Ако все пак предположим допълнително непрекъснатостта на производната на всеки член на редицата в сегмента $[a, b]$, по следствие 2 от теорема 2.7 и граничната функция $f(x)$ ще има производна, непрекъсната в сегмента $[a, b]$.

Забележка 3. За функции на m променливи теорема 2.9 може да бъде формулирана в следния вид: ако всяка от функциите $f_n(x)=f_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ има в затворената ограничена област G на пространството E^m частна производна $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$ по променливата x_k и ако редицата от производните $\left\{\frac{\partial f_n}{\partial x_k}\right\}$ е равномерно сходяща в областта G, а самата редица $\{f_n(x)\}$ е сходяща във всяка точка от областта G, то редицата $\{f_n(x)\}$ може да бъде диференцирана почленно по променливата x_k в областта G.

От теорема 2.9 лесно се получава следното твърдение.

Теорема 2.10. Ако всяка функция $f_n(x)$ има примитивна в сегмента $[a, b]$ и ако редицата $\{f_n(x)\}$ е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$, то и граничната функция $f(x)$ има примитивна в сегмента $[a, b]$. Още повече, ако x_0 е произволна точка от сегмента $[a, b]$, то редицата от онези примитивни $\Phi_n(x)$ на функциите $f_n(x)$, които удовлетворяват условието $\Phi_n(x)=0$, е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$ и клони към онази примитивна $\Phi(x)$ на граничната функция $f(x)$, която удовлетворява условието $\Phi(x_0)=0$.

Доказателство. За редицата от примитивни $\Phi_n(x)$ на функциите $f_n(x)$, които удовлетворяват условието $\Phi_n(x_0)=0$, са изпълнени всички условия на теорема 2.9. Това осигурява равномерната сходимост на редицата $\{\Phi_n(x)\}$ в $[a, b]$, при това нейната гранична функция $\Phi(x)$ има производна във всяка точка от $[a, b]$, равна на граничната функция на редицата $\{f_n(x)\}$. Теоремата е доказана.

Забележка към теорема 2.10

Ще подчертаем, че в условията на теорема 2.10 не изискваме ограниченост, нито още повече интегруемост на функциите $f_n(x)$ в сегмента $[a, b]$.

Теоремите, доказани в този и предните параграфи, ни позволяват да направим следния забележителен извод: равномерната сходимост не извежда от класа на функциите, които имат граница в дадена точка (теорема 2.7), от класа на непрекъснатите функции (следствие 2 от теорема 2.7), от класа на интегруемите функции (теорема 2.8), от класа на функциите, които имат примитивна (теорема 2.10) и (в случай на равномерна сходимост на производните) от класа на диференцируемите функции (теорема 2.9).

3. Интегрална сходимост. Ще поискаме всяка функция $f_n(x)$ от функционалната редица $\{f_n(x)\}$ и функцията $f(x)$ да бъдат интегруеми в сегмента $[a, b]$.

Тогава (както следва от резултатите в § 4, глава 9, част I) и функцията

$$[f_n(x)-f(x)]^2=f_n^2(x)-2f_n(x)\,.\,f(x)+f^2(x)$$

също ще бъде интегруема в сегмента $[a, b]$.

Ще въведем фундаменталното понятие за интегрална сходимост.

Определение 1. Ще казваме, че функционалната редица

$\{f_n(x)\}$ клони интегрално в сегмента $[a, b]$ към функцията $f(x)$, ако съществува и е равна на нула границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 dx. \tag{2.48}$$

Определение 2. Ще казваме, че функционалният ред

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

е интегрално сходящ в сегмента $[a, b]$, ако редицата от частичните му суми клони интегрално към функцията $S(x)$ (която ще наричаме сума на реда).

Забележка. От определение 1 непосредствено следва, че ако функционалната редица клони интегрално към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, то тази редица клони интегрално към $f(x)$ и във всеки сегмент $[c, d]$, който се съдържа в $[a, b]$.

Аналогична забележка е валидна за интегралната сходимост на функционалните редове.

Ще изясним въпроса за връзката между интегралната сходимост и равномерната сходимост на редици.

Най-напред ще докажем, че ако редицата $\{f_n(x)\}$ клони към $f(x)$ равномерно в сегмента $[a, b]$, то тази редица клони към $f(x)$ и интегрално в сегмента $[a, b]$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От равномерната сходимост на редицата $\{f_n(x)\}$ към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ следва, че за положителното число $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ може да се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че е валидно неравенството

$$|f_n(x)-f(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} \tag{2.49}$$

за всички номера n, удовлетворяващи условието $n\geqq N(\varepsilon)$, и всички точки x от сегмента $[a, b]$.

Но тогава от теоремите за определен интеграл (гл. п. 2, § 4, глава 9, част I) следва, че

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2 dx \leqq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\int_a^b dx=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

за всички $n\geqq N(\varepsilon)$. Това означава, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони интегрално към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$.

Сега ще се убедим, че интегралната сходимост в някакъв сегмент не влече след себе си не само равномерна сходимост в този

сегмент, но и сходимост в поне една точка от посочения сегмент.

Да разгледаме редицата от съдържащи се в $[0, 1]$ сегменти $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, които имат следния вид:

$$I_1=[0,1],$$

$$I_2=\left[0, \tfrac{1}{2}\right],\quad I_3=\left[\tfrac{1}{2}, 1\right],$$

$$I_4=\left[0, \tfrac{1}{4}\right],\quad I_5=\left[\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}\right],\quad I_6=\left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right],\quad I_7=\left[\tfrac{3}{4}, 1\right],$$

. . . .

$$I_{2^n}=\left[0, \tfrac{1}{2^n}\right],\quad I_{2^n+1}=\left[\tfrac{1}{2^n}, \tfrac{2}{2^n}\right], \ldots, I_{2^{n+1}-1}=\left[1-\tfrac{1}{2^n}, 1\right],$$

Определяме n-тия член $f_n(x)$ на функционалната редица $\{f_n(x)\}$ по следния начин:

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & \text{на сегмента } I_n,\\ 0 & \text{в останалите точки на } [0, 1].\end{cases}$$

Да се убедим, че редицата $\{f_n(x)\}$ клони към граничната функция $f(x)=0$ интегрално в сегмента $[0, 1]$. Наистина

$$\int_0^1 [f_n(x)-f(x)]^2 dx=\int_{I_n} dx=\text{дължината на сегмента } I_n,$$ така че

съществува границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 [f_n(x)-f(x)]^2 dx=0.$$

Да се убедим накрая, че построената редица не е сходяща нито в една точка на сегмента $[0, 1]$.

Наистина каквато и точка x_0 от сегмента $[0, 1]$ да фиксираме, ще се намерят произволно големи номера n, както такива, за които сегментът I_n съдържа точката x_0 (за тези номера $f_n(x_0)=1$), така и такива, за които сегментът I_n не съдържа точка x_0 (за такива номера $f_n(x_0)=0$). По такъв начин редицата $\{f_n(x_0)\}$ съдържа безброй много членове, равни на единица, и безброй много членове, равни на нула. Такава редица е разходяща.

Оказва се, че интегралната сходимост на една редица осигурява възможност за почленно интегриране на тази редица.

Теорема 2.11. Ако редицата $\{f_n(x)\}$ клони интегрално към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, то тази редица може да бъде почленно интегрирана в сегмента $[a, b]$, т. е. границата

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

съществува и е равна на $\int_a^b f(x)dx$.

Доказателство. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От интегралната сходимост на $\{f_n(x)\}$ към $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ следва, че ще се намери номер $N(\varepsilon)$ такъв, че

$$\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx<\frac{\varepsilon^2}{b-a} \tag{2.50}$$

за всички $n\geq N(\varepsilon)$.

Като запишем очевидното неравенство* $|A|.|B|\leq\frac{A^2}{2}+\frac{B^2}{2}$ за величините

$$A=[f_n(x)-f(x)].\sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}},\quad B=\sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}},$$

ще получим, че

$$|f_n(x)-f(x)|\leq[f_n(x)-f(x)]^2\frac{b-a}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.51}$$

От (2.51) и от теорията на определения интеграл ще получим

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx\leq\frac{b-a}{2\varepsilon}\int_a^b [f_n(x)-f(x)]^2dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

От последното неравенство и от (2.50) ще получим при всички $n\geq N(\varepsilon)$

$$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \tag{2.52}$$

Тъй като

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|=\left|\int_a^b [f_n(x)-f(x)]dx\right|\leq\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx,$$

то от (2.52) ще получим

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon$$

за всички $n\geq N(\varepsilon)$.

Теоремата е доказана.

* Това неравенство е еквивалентно на неравенството $(|A|-|B|)^2\geq 0$.

§ 5. Равностепенна непрекъснатост на редица от функции

Да предположим, че всяка от функциите $f_n(x)$ от една функционална редица $\{f_n(x)\}$ е дефинирана в някакво гъсто в себе си множество $\{x\}$ от пространство E^m.

Определение. Ще казваме, че редицата $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната в множеството $\{x\}$, ако за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери $\delta>0$ такова, че неравенството

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon \tag{2.53}$$

да е изпълнено за всички номера n и всички точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, които са свързани с условието $\rho(x', x'')<\delta$.

От това определение е очевидно, че ако цялата редица е равностепенно непрекъсната в множеството $\{x\}$, то и всяка нейна подредица е равностепенно непрекъсната в това множество.

За простота на изложението ще разглеждаме редицата $\{f_n(x)\}$ от функции на една променлива x, равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$. По определение за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери $\delta>0$ такова, че неравенство (2.53) е изпълнено за всички номера n и всички точки x' и x'' от сегмента $[a, b]$, които са свързани с условието $|x'-x''|<\delta$.

Ще докажем следното твърдение, което може да се разглежда като функционален аналог на теоремата на Болцано—Вайерщрас.

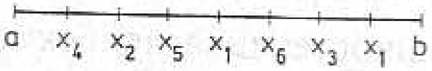
Теорема 2.12 (теорема на Арцела)

Ако функционалната редица $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната и равномерно ограничена в сегмента $[a, b]$, то от тази редица може да се избере подредица, равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$.

Доказателство. Да разгледаме в сегмента $[a, b]$ следната специална редица от точки $\{x_i\}$: за x_1 ще вземем тази точка, която дели сегмента $[a, b]$ на две равни части, за x_2 и x_3 ще вземем тези две точки, които заедно с x_1 делят сегмента $[a, b]$ на четири равни части, за x_4, x_5, x_6 и x_7 ще вземем тези четири точки, които заедно с x_1, x_2 и x_3 делят сегмента $[a, b]$ на 8 равни части (гл. рис. 2.3)... Така построената редица има следното свойство: за всяко $\delta>0$ може да се намери номер n_0 такъв, че във всеки принадлежащ на $[a, b]$ сегмент с дължина δ лежи поне едни от елементите $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$*.

Сега пристъпваме към избора на редица $\{f_n(x)\}$ на равномерно сходяща в $[a, b]$ подредица. Най-напред да разгледаме редицата $\{f_n(x_1)\}$. Тя е ограничена и на основание на теоремата на Болцано—Вайерщрас (ч. I, гл. 3, § 4) можем да изберем сходяща подредица

* За редица, която има такова свойство, казват, че тя е гъста в сегмента $[a, b]$.



Фиг. 2. 3

$$f_{11}(x_1),\ f_{12}(x_1),\ \ldots,\ f_{1n}(x_1),\ \ldots$$

По-нататък разглеждаме числовата редица

$$f_{11}(x_2),\ f_{12}(x_2),\ \ldots,\ f_{1n}(x_2),\ \ldots.$$

По теоремата на Болцано—Вайерщрас от нея може да се избере сходяща подредица

$$f_{21}(x_2),\ f_{22}(x_2),\ \ldots,\ f_{2n}(x_2),\ \ldots$$

Така функционалната редица

$$f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots \tag{2.54}$$

е сходяща и в точка x_1, и в точка x_2.

По-нататък разглеждаме функционалната редица (2.54) в точка x_3 и избираме от нея сходяща подредица

$$f_{31}(x_3),\ f_{32}(x_3),\ \ldots,\ f_{3n}(x_3),\ \ldots$$

С аналогични разсъждения ще получим безброй много подредици:

$$\begin{array}{l}
f_{11}(x),\ f_{12}(x),\ f_{13}(x),\ \ldots,\ f_{1n}(x),\ \ldots\\
f_{21}(x),\ f_{22}(x),\ f_{23}(x),\ \ldots,\ f_{2n}(x),\ \ldots\\
f_{31}(x),\ f_{32}(x),\ f_{33}(x),\ \ldots,\ f_{3n}(x),\ \ldots\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
f_{n1}(x),\ f_{n2}(x),\ f_{n3}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}$$

при това подредицата, стояща в n-тия ред, е сходяща във всяка от точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Да разгледаме сега така наречената «диагонална» подредица

$$f_{11}(x),\ f_{22}(x),\ f_{33}(x),\ \ldots,\ f_{nn}(x),\ \ldots$$

Ще докажем, че тази подредица е равномерно сходяща в сегмента $[a, b]$.

За краткост на записа по-долу ще означаваме тази диагонална подредица (както и изходната редица) със символа

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots,$$

т.е. вместо удвоения индекс ще пишем единичен. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$.

Тъй като диагоналната редица е равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то за фиксираното $\varepsilon>0$ ще се намери $\delta>0$ такова, че за всеки две точки x и x_m от сегмента $[a, b]$, свързани с неравенството $|x-x_m|<\delta$, е вярно неравенството

$$|f_n(x)-f_n(x_m)|<\delta \tag{2.55}$$

за всички номера n. Забелязвайки това, делим сегмента $[a, b]$ на краен брой отсечки с дължина, по-малка от δ. От редицата $\{x_n\}$ ще изберем n_0 първи членове $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ така, че във всяка от споменатите отсечки да се съдържа поне една от точките $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Очевидно е, че диагоналната редица е сходяща във всяка от точките $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Затова за фиксираното по-горе $\varepsilon>0$ ще се намери номер N такъв, че

$$|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|<\frac{\varepsilon}{3} \tag{2.56}$$

за всички $n\geqq N$, всички естествени p и всички $m=1, 2, \ldots, n_0$.

Нека сега x е произволна точка от сегмента $[a, b]$. Тази точка обезателно лежи в една от споменатите по-горе отсечки с дължина, по-малка от δ. Затова за тази точка x ще се намери поне една точка x_m (m е един от номерата, равни на $1, 2, \ldots, n_0$), която да удовлетворява условието $|x-x_m|<\delta$.

Поради това, че модулът от сумата на три величини не надминава сумата на техните модули, можем да напишем

$$\begin{aligned}|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leq&|f_{n+p}(x)-f_{n+p}(x_m)|+\\&+|f_{n+p}(x_m)-f_n(x_m)|+|f_n(x_m)-f_n(x)|.\end{aligned} \tag{2.57}$$

Вторият член в дясната част на (2.57) ще оценим с помощта на неравенство (2.56), а за оценката на първия и третия член в дясната част ще вземем под внимание, че $|x-x_m|<\delta$, и ще привлечем неравенство (2.55), което е изпълнено за всеки номер n (а значи и за всяко $n+p$).

Окончателно ще получим, че за произволно $\varepsilon>0$ ще се намери номер N такъв, че

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|<\varepsilon$$

за всички $n\geqq N$, всички естествени p и всяка точка x от $[a, b]$. Равномерната сходимост на диагоналната редица е доказана. Теорема 2.12 е доказана.

Забележка 1. В теоремата на Арцела вместо равномерната ограниченост на редицата $\{f_n(x)\}$ в сегмента $[a, b]$ е достатъчно да се поиска ограниченост на тази редица поне в една точка на този сегмент. Наистина вярно е следното твърдение: ако редицата $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и е ограничена поне в една точка x_0 от този сегмент, то тази редица е равномерно ограничена в сегмента $[a, b]$. За доказателството на това твърдение ще отбележим, че по определението на равностепенната непрекъснатост за $\varepsilon=1$ ще се намери $\delta>0$ такова, че осцилацията на всяка функция $f_n(x)$ в произволен сегмент с дължина, ненадминаваща δ, не надминава числото $\varepsilon=1$. Тъй като целият сегмент $[a, b]$ може да се покрие с краен брой n_0 сегменти с дължина, ненадминаваща δ, то колебанието на всяка функция $f_n(x)$ в целия сегмент $[a, b]$ не надминава числото n_0. Но тогава от неравенството $|f_n(x_0)|\leq A$, изразяващо ограничеността на редицата $\{f_n(x)\}$ в точка x_0, следва неравенството $|f_n(x)|\leq A+n_0$, което е изпълнено за всяка точка x от сегмента $[a, b]$ и изразява равномерната ограниченост на разглежданата редица в този сегмент.

Забележка 2. Ще установим признак за равностепенна непрекъснатост: ако редицата $\{f_n(x)\}$ се състои от диференцируеми в сегмента $[a, b]$ функции и ако редицата от производните $\{f_n'(x)\}$ е равномерно ограничена в този сегмент, то редицата $\{f_n(x)\}$ е равностепенно непрекъсната в сегмента $[a, b]$.

За доказателство да вземем в сегмента $[a, b]$ две произволни точки x' и x'' и да напишем за функцията $f_n(x)$ в сегмента $[x', x'']$ формулата на Лагранж (гл. част I, глава 6, § 3).

Съгласно теоремата на Лагранж в сегмента $[x', x'']$ ще се намери точка ξ_n такава, че

$$|f_n(x')-f_n(x'')|=|f_n'(\xi_n)|\cdot|x'-x''|. \tag{2.58}$$

Тъй като редицата от производните $\{f_n'(x)\}$ е равномерно ограничена в сегмента $[a, b]$, то ще се намери константа A такава, че за всички номера n да е изпълнено неравенството

$$|f_n'(\xi_n)|\leq A. \tag{2.59}$$

Като поставим (2.59) в (2.58), ще получим

$$|f_n(x')-f_n(x'')|\leq A\,|x'-x''|. \tag{2.60}$$

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Тогава, ако вземем $\delta=\frac{\varepsilon}{A}$ и използваме (2.60), ще получим, че за всички номера n и за всички x' и x'' от $[a, b]$, които са свързани с условието $|x'-x''|<\delta$, ще бъде вярно неравенството

$$|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon.$$

Равностепенната непрекъснатост на редицата $\{f_n(x)\}$ е доказана.

Като пример ще разгледаме редицата $\left\{\frac{\sin nx}{n}\right\}$. Тази редица

е равностепенно непрекъсната във всеки сегмент $[a, b]$, защото във всеки сегмент $[a, b]$ редицата от производните $\{\cos nx\}$ е равномерно ограничена.

Забележка 3. Понятието равностепенна непрекъснатост може да се въведе не по отношение на редица от функции, а по отношение на произволно множество от функции.

§ 6. Степенни редове

1. Степенен ред. Област на сходимост. Степенен ред ще наричаме функционален ред от вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots, \tag{2.61}$$

където $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ са постоянни реални числа, наречени коефициенти на реда (2.61).

Ще изясним как е устроена областта на сходимост на произволен степенен ред.

Ще отбележим, че всеки степенен ред е сходящ в точката $x=0$, като при това съществуват степенни редове, които са сходящи само в тази точка (например редът $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$).

С помощта на коефициентите a_n на реда (2.61) съставяме следната числова редица:

$$\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} \qquad (n=1, 2, \ldots). \tag{2.62}$$

Възможни са два случая: 1) редицата (2.62) е неограничена; 2) редицата (2.62) е ограничена.

В случай 2) редицата (2.62) има крайна горна точка на сгъстяване (лимес супериор) (гл. п. 1, § 3, глава 3, част I), която ние ще означим с L. Ще подчертаем, че посочената горна точка на сгъстяване сигурно е неотрицателна (защото всички елементи на редицата (2.62) са неотрицателни, а следователно и всяка точка на сгъстяване на тази редица е неотрицателна).

Достигаме до извода, че са възможни три случая: I) редицата (2.62) е неограничена; II) редицата (2.62) е ограничена и има крайна горна точка на сгъстяване $L>0$; III) редицата (2.62) е ограничена и има горна точка на сгъстяване $L=0$.

Ще докажем следното забележително твърдение.

Теорема 2.13 (теорема на Коши—Адамар)

I. Ако редицата (2.62) е неограничена, то степенният ред (2.61) е сходящ само при $x=0$.

II. Ако редицата (2.62) е ограничена и има горна точка на сгъстяване $L>0$, то редът (2.61) е абсолютно сходящ за онези значения на x, които удовлетворяват неравенството $|x|<\frac{1}{L}$, и е разходящ за онези значения на x, които удовлетворяват неравенството $|x|>\frac{1}{L}$.

III. Ако редицата (2.62) е ограничена и нейната горна точка на сгъстяване L е равна на нула, то редът (2.61) е абсолютно сходящ за всички значения на x.

Доказателство

I. Нека редицата (2.62) е неограничена. Тогава при $x\neq 0$ редицата

$$|x|\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{|a_n x^n|}$$

също ще бъде неограничена, т. е. тази редица ще има членове с произволно големи номера n, удовлетворяващи неравенството

$$\sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|}<1 \quad \text{или} \quad |a_n x^n|>1.$$

Но това означава, че за реда (2.61) (при $x\neq 0$) е нарушено необходимото условие за сходимост (гл. п. 2, § 1, глава 1), т. е. редът (2.61) е разходящ при $x\neq 0$.

II. Нека редицата (2.62) е ограничена и нейната горна точка на сгъстяване L е строго положителна. Ще докажем, че редът (2.61) е абсолютно сходящ при $|x|<\frac{1}{L}$ и разходящ при $|x|>\frac{1}{L}$.

а) Фиксираме отначало произволно x, удовлетворяващо неравенството $|x|<\frac{1}{L}$. Тогава ще се намери $\varepsilon>0$ такова, че $|x|<\frac{1}{L+\varepsilon}$. От свойствата на горната точка на сгъстяване следва, че всички елементи на $\sqrt[n]{|a_n|}$, като започнем от някакъв номер n, удовлетворяват неравенството

$$\sqrt[n]{|a_n|}<L+\frac{\varepsilon}{2}.$$

По такъв начин от посочения номер n нататък е вярно неравенството

$$\sqrt[n]{|a_n\cdot x^n|}=|x|\cdot\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{L+\varepsilon/2}{L+\varepsilon}<1,$$

т. е. редът (2.61) е абсолютно сходящ по признака на Коши (гл. п. 3, § 2, глава 1).

б) Сега фиксираме произволно x, удовлетворяващо неравенството $|x|>\frac{1}{L}$.

Тогава ще се намери $\varepsilon>0$ такова, че $|x|>\frac{1}{L-\varepsilon}$. [По определението на горната точка на сгъстяване имаме, че от редицата (2.62) може да се избере подредица $\left\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right\}$ $(k=1, 2, \ldots)$, клоняща към L.

Но това означава, че от някакъв номер k нататък е вярно неравенството

$$L-\varepsilon<\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}<L+\varepsilon.$$

По такъв начин от посочения номер k нататък е изпълнено неравенството

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}\cdot x^{nk}|}=|x|\cdot\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}>\frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon}=1$$

или

$$|a^{nk}\cdot x^{n_k}|>1,$$

т. е. нарушено е необходимото условие за сходимост на реда (2.61) и този ред е разходящ.

III. Нека редицата (2.62) е ограничена и нейната горна точка на сгъстяване е $L=0$. Ще докажем, че редът (2.61) е абсолютно сходящ при всяко x.

Фиксираме произволно $x\neq 0$ (при $x=0$ редът (2.61) е абсолютно сходящ). Т. к. горната точка на сгъстяване L е равна на нула и редицата (2.62) не може да има отрицателни точки на сгъстяване, то числото $L=0$ е единствена точка на сгъстяване, а следователно и граница на тази редица, т. е. редицата (2.62) е безкрайно малка.

Но тогава за положителното число $\frac{1}{2|x|}$ ще се намери номер, започвайки от който

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{2|x|}.$$

Значи от посочения номер нататък

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1,$$

т. е. редът (2.61) е абсолютно сходящ по признака на Коши (гл. п. 3, § 2, глава 1). Теоремата е доказана.

Доказаната теорема води непосредствено до следното фундаментално твърдение.

Теорема 2.14. За всеки степенен ред (2.61) съществува неотрицателно число R (което може да бъде ∞) такова, че този ред е абсолютно сходящ при $|x|<R$ и разходящ при $|x|>R$.

Това число R се нарича радиус на сходимост на разглеждания степенен ред, а интервалът $(-R, R)$ се нарича интервал на сходимост. Радиусът на сходимост се пресмята по формулата

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \tag{2.63}$$

(в случай на $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ имаме $R = \infty$).

Забележка 1. В краищата на интервала на сходимост, т. е. в точките $x=-R$ и $x=R$, степенният ред може да бъде както сходящ, така и разходящ*.

Тъй като за реда $1+\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ радиусът на сходимост R е равен на единица, то интервалът на сходимост има вида $(-1, 1)$ и този ред е разходящ в краищата на посочения интервал.

За реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ интервалът на сходимост е същият $(-1, 1)$, но този ред е сходящ в двата края на посочения интервал.

Забележка 2. Всички резултати от настоящия пункт са валидни за реда (2.61), в който реалната променлива x е заместена с комплексната променлива z и коефициентите a_n са произволни комплексни числа.

За такъв ред се установява съществуването на положително число R такова, че редът е абсолютно сходящ при $|z|<R$ и разходящ при $|z|>R$.

За пресмятане на R е валидна формула (2.63). Числото R се

* Ще отбележим следната теорема на Абел: ако степенният ред (2.61) е сходящ при $x=R$, то неговата сума $S(x)$ е непрекъсната в точката R отляво. Без ограничения на общността може да се смята, че $R=1$, но в такъв вид теоремата на Абел (фактически установяваща регулярността на метода за сумиране на Поасон—Абел) е доказана в п. 2, § 7, глава 1.

нарича радиус на сходимост, а областта $|z|<R$ — кръг на сходимост на посочения ред.

2. Непрекъснатост на сумата на степенен ред. Нека степенният ред (2.61) има радиус на сходимост $R>0$.

Лема 2. Ако положителното число r удовлетворява условието $r<R$, то редът (2.61) е равномерно сходящ в сегмента $[-r, r]$, т. е. при $|x| \leq r$.

Доказателство. От теорема 2.14 следва, че редът (2.61) е абсолютно сходящ при $x=r$, т. е. сходящ е редът

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot r^n.$$

Но последният числов ред мажорира реда (2.61) при всички x от сегмента $[-r, r]$. По признака на Вайерщрас редът (2.61) е равномерно сходящ в сегмента $[-r, r]$. Лемата е доказана.

Следствие. В условията на лема 2 сумата на реда (2.61) е непрекъсната функция в сегмента $[-r, r]$ (по теорема 2.7).

Теорема 2.15. Сумата на степенния ред е непрекъсната функция във всички вътрешни точки от неговия интервал на сходимост.

Доказателство. Нека $S(x)$ е сумата на степенния ред (2.61), а R — неговият радиус на сходимост. Фиксираме произволно x от вътрешността на интервала на сходимост, т. е. такова, че $|x|<R$. Винаги ще се намери число r такова, че $|x|<r<R$. Съгласно следствието от лема 2 функцията $S(x)$ е непрекъсната в сегмента $[-r, r]$. Следователно $S(x)$ е непрекъсната и в точката x. Теоремата е доказана.

3. Почленно интегриране и почленно диференциране на степенен ред

Теорема 2.16. Ако $R>0$ е радиусът на сходимост на степенния ред (2.61), а x удовлетворява условието $|x|<R$, то редът (2.61) може да бъде интегриран почленно в сегмента $[0, x]$. Полученият в резултат на почленното интегриране ред има същия радиус на сходимост R, както и изходният ред.

Доказателство. За всяко x, удовлетворяващо условието $|x|<R$, ще се намери r такова, че $|x|<r<R$. Съгласно лема 2 редът (2.61) е равномерно сходящ в сегмента $[0, x]$, а значи и в сегмента $[0, x]$. Но тогава от теорема 2.8 следва, че този ред може да бъде интегриран почленно в сегмента $[0, x]$.

В резултат на почленното интегриране ще се получи степенният ред

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots,$$

радиусът на сходимост на който съгласно теорема 2.4 е реципрочната стойност на горната точка на сгъстяване на редицата

$$(2.64)\qquad \sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}}=\frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}.$$

Тъй като горната точка на сгъстяване на редицата (2.64) е същата като тази на редицата (2.62)*, то теоремата е доказана.

Теорема 2.17. Степенният ред (2.61) може да бъде диференциран почленно във всяка вътрешна точка от неговия интервал на сходимост. Редът, получен при почленното диференциране, има същия радиус на сходимост R, какъвто и изходният ред.

Доказателство. Достатъчно е (съгласно теорема 2.9 и лема 2) да се докаже само второто твърдение на теоремата.

В резултат на почленното диференциране на (2.61) ще получим реда

$$a_1+2a_2x+\cdots+na_{n-1}x^{n-1}+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots,$$

чийто радиус на сходимост R съгласно теорема 2.14 е реципрочен на горната точка на сгъстяване на редицата

$$(2.65)\qquad \left\{\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}\right\}.$$

Тъй като редицата (2.65) има същата горна точка на сгъстяване като (2.62)**, то теоремата е доказана.

Следствие. Степенният ред може да бъде диференциран по-

* Защото $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n-1}|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n+1]{|a_n|}=$
$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}^{\frac{n}{n+1}}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}.$

** Защото $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{n+1}|}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n-1]{|a_n|}=$
$=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}^{\frac{n}{n-1}}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}.$

членно във вътрешността на интервала на сходимост произволен брой пъти.

Редът, получен при n-кратното почленно диференциране на изходния ред има същия радиус на сходимост, както изходният ред.

§ 7. Разлагане на функции в степенни редове

1. Разлагане на функция в степенен ред

Определение. Ще казваме, че функцията $f(x)$ може да бъде разложена в степенен ред в интервала $(-R, R)$ (в множеството $\{x\}$), ако съществува сходящ в посочения интервал (посоченото множество) степенен ред, чиято сума е $f(x)$.

В сила са следните твърдения.

1°. Ако една функция $f(x)$ се разлага в степенен ред в интервала $(-R, +R)$, то тя има в този интервал производни от произволен ред*.

Наистина вътре в интервала на сходимост, който съдържа интервала $(-R, +R)$, степенният ред може да бъде диференциран почленно произволен брой пъти, като получените при това редове са сходящи във вътрешността на същия интервал на сходимост (теорема 2.17).

Но тогава сумите на редовете, получени чрез произволен брой диференцирания по теорема 2.15, са непрекъснати функции в интервала $(-R, +R)$.

2°. Ако функцията $f(x)$ може да бъде разложена в интервала $(-R,R)$ в степенен ред, то това може да стане само по един начин.

Наистина нека функцията $f(x)$ се разлага в интервала $(-R,+R)$ в степенен ред (2.61).

Като диференцираме посочения ред почленно n пъти (което със сигурност може да се направи вътре в интервал $(-R, +R)$), ще получим

$$f^{(n)}(x)=a_n\,.\,n!+a_{n+1}\,.\,(n+1)!x+\cdots$$

Оттук при $x=0$ ще намерим

* Ще отбележим, че съществуват функции, които имат в даден интервал непрекъснати производни от произволен ред, но не могат да бъдат разложени в този интервал в степенен ред. Такава функция е например

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

$$f^{(n)}(0)=a_n\,.\,n!$$

или

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,. \qquad (2.66)$$

Така коефициентите на степенния ред (2.61), в който може да бъде разложена $f(x)$, се определят еднозначно по формула (2.66).

Да предположим сега, че функцията $f(x)$ има в интервала $(-R, +R)$ непрекъснати производни от произволен ред.

Определение 2. Степенният ред (2.61), коефициентите на който се определят по формула (2.66), се нарича ред на Тейлор за функцията $f(x)$.

Твърдение 2⁰ ни води до следното твърдение.

3⁰. Ако функция $f(x)$ може да бъде разложена в интервала $(-R, +R)$ в степенен ред, то този ред съвпада с реда на Тейлор за функцията $f(x)$.

В заключение ще формулираме следното твърдение, което следва непосредствено от § 8, глава 6, част I.

4⁰. За да може функцията $f(x)$ да бъде разложена в ред на Тейлор в интервала $(-R, +R)$ (в множеството $\{x\}$), е необходимо и достатъчно остатъчният член във формулата на Маклорен за тази функция да клони към нула в посочения интервал (посоченото множество).

2. Разлагане на някои елементарни функции в ред на Тейлор. В част I (п. 2, § 9, глава, 6) е доказано, че остатъчните членове във формулата на Маклорен за функциите e^x, $\cos x$ и $\sin x$ клонят към нула на цялата безкрайна права, а остатъчният член във формулата на Маклорен за функцията $\ln(1+x)$ клони към нула в полусегмента $-1<x\leq+1$.

Като използуваме твърдение 4⁰ от предния пункт, получаваме следните разлагания:

$$e^x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

$$\cos x=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\,.$$

Първите три разлагания са сходящи за всички значения на x, а последното — за значенията на x от полусегмента $-1<x\leq+1$.

Да се спрем сега на разлагането в степенен ред на функцията $(1+x)^\alpha$ (наречено биномен ред).

Ако $f(x)=(1+x)^\alpha$, то

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}.$$

Затова формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Коши има вида (гл. част I, глава 6, § 8)

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k+R_{n+1}(x), \qquad (2.67)$$

където

$$R_{n+1}(x)=\frac{(1-\theta)^n}{n!}\,x^{n+1}f^{(n+1)}(\theta x)=$$

$$=\frac{(1-\theta)^n}{n!}\,x^{n+1}\,.\,\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}= \qquad (2.68)$$

$$=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\,\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}\,.\,x^{n+1}$$

(θ — някакво число от интервала $0<\theta<1$).

Най-напред ще се убедим в това, че при $\alpha>0$ навсякъде в интервала $-1<x<1$ остатъчният член $R_{n+1}(x)$ клони към нула (при $n\to\infty$).

Наистина всички членове на редицата $\left\{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)\right\}^n$ навсякъде в посочения интервал не надминават единица; редицата $\left\{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}\right\}$ е ограничена, а числото $\alpha(1+\theta x)^{\alpha-1}$ е ограничено при всяко фиксирано $\alpha>0$ и при всяко x от интервала $-1<x<1$; и най-после редицата $\{x^{n+1}\}$ е безкрайно малка за произволно x от интервала $-1<x<1$.

Следователно от (2.67) следва, че при $\alpha>0$ навсякъде в интервала $-1<x<1$ е валидно разлагането

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\,x^k. \qquad (2.69)$$

Сега ще докажем, че при $\alpha>0$ редът, стоящ в дясната част (2.69), е равномерно сходящ в затворения сегмент $-1\leqq x\leqq 1$ и неговата сума е $(1+x)^\alpha$.

Навсякъде в посочения сегмент този ред се мажорира от следния числов ред:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\alpha|\,|1-\alpha|\ldots|k-1-\alpha|}{k!}. \tag{2.70}$$

От признака на Вайерщрас следва, че за установяване на равномерната в сегмента $-1\leqq x\leqq +1$ сходимост на реда, стоящ в дясната част на (2.69), е достатъчно да се докаже сходимостта на мажориращия ред (2.70).

Да означим k-тия член на реда (2.70) със символа p_k. Тогава за всички достатъчно големи k ще получим

$$\frac{p_{k+1}}{p_k}=\frac{k-\alpha}{k+1}=1-\frac{1+\alpha}{k+1}. \tag{2.71}$$

От формула (2.71) следва, че

$$\lim_{k\to\infty} k\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)=(1+\alpha)\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}=1+\alpha>1,$$

т. е. редът (2.70) е сходящ по признака на Раабе (глава 1, §2, п. 5).

С това е доказано, че при $\alpha>0$ редът, стоящ в дясната част на (2.69), е равномерно сходящ в сегмента $-1\leqq x\leqq +1$. Остава да се покаже, че сумата на посочения ред в сегмента $-1\leqq x\leqq +1$ съвпада с функцията $(1+x)^\alpha$.

От казаното по-горе сумата на посочения ред $S(x)$ и функцията $(1+x)^\alpha$ съвпадат навсякъде в интервала $-1<x<+1$. Освен това двете функции $S(x)$ и $(1+x)^\alpha$ са непрекъснати в сегмента $-1\leqq x\leqq +1$ (сумата $S(x)$ като сума на равномерно сходящ ред от непрекъснати функции; непрекъснатостта на функцията $(1+x)^\alpha$ при $\alpha>0$ е очевидна).

Но тогава значенията на функциите $S(x)$ и $(1+x)^\alpha$ в точките $x=-1$ и $x=1$ **съвпадат**, т. е. сумата на реда, стоящ в дясната част на (2.69), е $(1+x)^\alpha$ в затворения сегмент.

3. Елементарни понятия за функции на комплексна променлива. По-горе вече бе отбелязано, че за степенен ред относно комплексна променлива z

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\ldots$$

са валидни теореми (2.13) и (2.14) (за съществуването и големината на радиуса на сходимост). Редове от този тип се използуват за определяне функции на комплексната променлива z.

Функциите e^z, $\cos z$ и $\sin z$ на комплексната променлива z се определят като суми на следните редове:

$$e^z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \tag{2.72}$$

$$\cos z=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \tag{2.73}$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{2.74}$$

Лесно се проверява, че посочените три реда са абсолютно сходящи за всички значения на z (техният радиус на сходимост е $R=\infty$).

Сега ще установим връзка между функциите e^z, $\cos z$ и $\sin z$.

Като заместим във формула (2.72) z с iz, ще получим

$$e^{iz}=1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\ldots=$$

$$=\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\right). \tag{2.75}$$

Като съпоставим дясната част на равенство (2.75) с разлаганията (2.73) и (2.74), стигаме до следната забележителна формула:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \tag{2.76}$$

Формула (2.76) играе фундаментална роля в теорията на функциите на комплексна променлива и се нарича формула на Ойлер.

Като положим във формулата на Ойлер променливата z, равна отначало на реалното число x, а след това на реалното число $-x$, ще получим следните две формули:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,\qquad e^{-ix}=\cos x-i\sin x.$$

Като съберем и извадим тези две формули, ще получим формули, изразяващи $\cos x$ и $\sin x$ чрез показателната функция

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},\\[2mm] \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}.\end{cases} \tag{2.77}$$

Накрая ще се спрем на определението на логаритмичната функция $w=\ln z$ на комплексната променлива z. Тази функция естествено се определя като функция, обратна на показателната, т. е. от съотношението $z=e^w$. Полагаме $w=u+iv$, $z=x+iy$ и си поставяме за цел да изразим u и v чрез $z=x+iy$.

От съотношението

$$z=x+iy=e^{u+iv}=e^u(\cos v+i\sin v)$$

ще получим, като използуваме понятията модул и аргумент на комплексното число,

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=e^u, \quad \arg z=v-2\pi k,$$

където

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\dots$$

От последните равенства намираме, че

$$u=\ln|z|=\ln\sqrt{x^2+y^2},$$

$$v=\arg z+2\pi k \quad (k=0,\pm1,\pm2,\dots)$$

или окончателно

(2.78) $\quad \ln z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k)$, където $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

Формула (2.78) показва, че логаритмичната функция в комплексната равнина не е еднозначна: нейната имагинерна част за едно и също значение на z има безброй много значения, отговарящи на различни $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

Лесно се вижда, че аналогична ситуация ще имаме и при определянето даже в реалната област на обратните тригонометрични функции.

4. Равномерно апроксимиране на непрекъсната функция с многочлени (теорема на Вайерщрас). В този пункт ще докажем фундаментална теорема, принадлежаща на Вайерщрас и установена от него в 1895 г.

Теорема 2.18 (теорема на Вайерщрас). Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то съществува редица от многочлени $\{P_n(x)\}$, равномерно в сегмента $[a, b]$ клоняща към $f(x)$, т. е. за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери многочлен $P(x)$ такъв, че

$$|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

едновременно за всички x от сегмента $[a, b]$.

С други думи, непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция $f(x)$ може равномерно в този сегмент да се апроксимира с многочлен с отнапред зададена точност ε.

Доказателство. Без да ограничаваме общността, можем вместо сегмента $[a, b]$ да разглеждаме сегмента $[0,1]$*. Освен това достатъчно е да докажем теоремата за непрекъсната функция $f(x)$, която става нула в краищата на сегмента $[0,1]$, т. е. удовлетворява условията $f(0)=0$ и $f(1)=0$. Наистина, ако $f(x)$ не удовлетворява тези условия, като положим

$$g(x)=f(x)-f(0)-x[f(1)-f(0)],$$

ще получим непрекъсната в сегмента $[0,1]$ функция $g(x)$, удовлетворяваща условията $g(0)=0$ и $g(1)=0$, и от възможността за представяне на $g(x)$ като граница на равномерно сходяща редица от многочлени ще следва, че и $f(x)$ е граница на равномерно сходяща редица от многочлени (защото разликата $f(x)-g(x)$ е многочлен от първа степен).

И така нека функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[0,1]$ и удовлетворява условията $f(0)=0$, $f(1)=0$. Такава функция можем да продължим в цялата безкрайна права, като я положим равна на нула извън границите на сегмента $[0,1]$, и можем да твърдим, че така продължената функция е равномерно непрекъсната в цялата права.

Да разгледаме следната конкретна редица от неотрицателни многочлени от степен $2n$:

(2.79) $\quad Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n \quad (n=1,2,\dots)$,

за всеки от които константата c_n е избрана така, че е изпълнено равенството

(2.80) $\quad \int\limits_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx=1.$

Без да пресмятаме точното значение на константата c_n, ще я оценим отгоре.

За целта ще отбележим, че за всеки номер $n=1,2,\dots$ и за всички x от сегмента $[0,1]$ е вярно неравенството**

(2.81) $\quad (1-x^2)^n\geq1-nx^2.$

Като приложим неравенство (2.81) и вземем под внимание, че $\frac{1}{\sqrt{n}}\leq1$ при всяко $n\geq1$, ще имаме

* Тъй като единият от тези сегменти се преобразува в другия посредством линейната смяна $x=(b-a)t+a$.

** Това неравенство следва от това, че при $n\geq1$ функцията $\varphi(x)=(1-x^2)^n-(1-nx^2)$ е неотрицателна навсякъде в сегмента $0\leq x\leq1$, защото тази функция става нула при $x=0$ и има навсякъде в посочения сегмент неотрицателна производна $\varphi'(x)=2nx[1-(1-x^2)^{n-1}]$.

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^n dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-x^2)^n dx \geq$$

(2.82) $$\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)dx = \frac{4}{3}\,\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

От (2.79), (2.80) и (2.82) заключаваме, че за всички номера $n=1, 2, \ldots$ е вярна следната оценка отгоре за постоянната c_n:

(2.83) $$c_n < \sqrt{n}.$$

От (2.83) и (2.79) следва, че при всяко $\delta > 0$ за всички x от сегмента $\delta \leq |x| \leq 1$ е вярно неравенството

(2.84) $$0 \leq Q_n(x) \leq \sqrt{n}\,(1-\delta^2)^n.$$

От (2.84) следва, че при всяко фиксирано $\delta > 0$ редицата от неотрицателни многочлени $\{Q_n(x)\}$ клони към нула равномерно в сегмента $\delta \leq |x| \leq 1$*.

Да положим сега за всяко x от сегмента $0 \leq x \leq 1$

(2.85) $$P_n(x) = \int_{-1}^{+1} f(x+t)\,Q_n(t)dt$$

и да се убедим в това, че за всяко $n=1, 2, \ldots$ функцията $P_n(x)$ е многочлен от степен $2n$ и при това $\{P_n(x)\}$ е търсената редица от многочлени, която клони равномерно в сегмента $[0,1]$ към функцията $f(x)$.

Тъй като изучаваната функция $f(x)$ е равна на нула извън сегмента $[0,1]$, то за всяко x от сегмента $[0,1]$ интегралът (2.85) може да бъде записан във вида

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,dt.$$

Като заменим в последния интеграл променливата t с $t-x$, ще му придадем следния вид:

(2.86) $$P_n(x) = \int_0^1 f(t)\,Q_n(t-x)\,dt.$$

* Наистина достатъчно е да се докаже, че редицата $a_n = (1-\delta^2)^n\sqrt{n}$ клони към нула, но тъй като $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = (1-\delta^2)\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2n}} = (1-\delta^2) < 1$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ по признака на Коши (гл. теорема 1.6 от глава 1).

От (2.86) и (2.79) е ясно, че функцията $P_n(x)$ е многочлен от степен $2n$.

Остава да се докаже, че редицата $\{P_n(x)\}$ клони към $f(x)$ равномерно в сегмента $0 \leq x \leq 1$.

Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$. За фиксираното ε от равномерната непрекъснатост на $f(x)$ на цялата безкрайна права следва, че ще се намери $\delta > 0$ такова, че

(2.87) $$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |x-y| < \delta.$$

Ще отбележим още, че тъй като $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[0,1]$, то тя е и ограничена в този сегмент, а следователно и навсякъде в безкрайната права. Това означава, че съществува константа A такава, че за всички x

(2.88) $$|f(x)| \leq A.$$

Като използуваме (2.80), (2.84), (2.87) и (2.88) и като използуваме неотрицателността на $Q_n(x)$, да оценим разликата $P_n(x)-f(x)$.

За всички x от сегмента $0 \leq x \leq 1$ ще имаме

$$|P_n(x)-f(x)| = \left|\int_{-1}^{1}[f(x+t)-f(x)]\,Q_n(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|\,Q_n(t)\,dt \leq 2A\int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\,dt +$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,dt + 2A\int_{\delta}^{1} Q_n(t)dt \leq 4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2}.$$

За да завършим доказателството на теоремата, е достатъчно да отбележим, че за всички достатъчно големи номера n е вярно неравенството

$$4A\sqrt{n}(1-\delta^2)^n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следствие. Ако не само функцията $f(x)$, но и нейните производни до някакъв ред k включително са непрекъснати в сегмента $[0,1]$*, то съществува редица от многочлени $\{P_n(x)\}$ такава, че всяка от редиците $\{P_n(x)\}, \{P_n'(x)\}, \ldots, \{P_n^{(k)}(x)\}$ е равномерно сходяща и клони съответно към $f(x), f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$.

Наистина, без да ограничаваме общността, можем да смятаме, че всяка от функциите $f(x), f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ приема стойност нула

* Разбира се, вместо $[0,1]$ може да се вземе $[a, b]$.

при $x=0$ и при $x=1$*, а при такива условия функцията $f(x)$ може да се продължи в цялата безкрайна права, като я положим равна на нула извън $[0,1]$ така, че продължената функция и всичките ѝ производни до k-тия ред включително ще се окажат равномерно непрекъснати в цялата безкрайна права.

Но тогава, като означим с $P_n(x)$ същия като по-горе многочлен (2.85) и повторим разсъжденията, проведени при доказателството на теорема (2.18), ще докажем, че всяка от разликите

$$P_n(x)-f(x),\ P_n'(x)-f'(x),\ \ldots,\ P_n^{(k)}(x)-f^{(k)}(x)$$

е безкрайно малка равномерно относно x в сегмента $0\leq x\leq 1$.

Забележка 1. Изложеното от нас доказателство лесно се обобщава за случая на функция на m променливи $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, непрекъсната в m-мерния куб $0\leq x_i\leq 1$ $(i=1,2,\ldots, m)$. По същия начин, както в теорема 2.18, се доказва, че за всяка функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ съществува равномерно сходяща в m-мерния куб редица от многочлени на m променливи $x_1, x_2, \ldots, x_m$, която клони към нея в този куб.

Забележка 2. Ще отбележим, че фигуриращите в теорема 2.18 многочлени може да бъдат заменени с по-общи класове функции, като се запази при това твърдението за възможността за апроксимиране с такива функции на произволна непрекъсната функция f.

Ще се уговорим да наричаме произволна съвкупност A от функции, определени в някакво множество E, алгебра, ако** 1) $f+g\in A$; 2) $f\cdot g\in A$; 3) $\alpha\cdot f\in A$ при произволни $f\in A$ и $g\in A$ и при всяко реално α.

С други думи, алгебрата е съвкупност от функции, затворена относно събирането и умножението на функции и умножението на функции с реални числа.

Ако за всяка точка x от множеството E може да се намери някаква функция $g\in A$ такава, че $g(x)\neq 0$, ще казваме, че алгебра A не се анулира в нито една точка x от множеството E.

Ще казваме, че съвкупността A от функции, определени в множеството E, разделя точките на множеството E, ако за всеки две различни точки x_1 и x_2 от това множество може да се намери функция f от A такава, че $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Вярно е следното забележително твърдение, наречено теорема на Вайерщрас — Стоун***:

* Ако $f(x)$ удовлетворява тези условия, то ние можем да намерим многочлен $P_k(x)$ от степен $2k$ такъв, че за функцията $g(x)=f(x)-P_k(x)$ тези условия да бъдат изпълнени.

** Ще напомним, че символът $f\in A$ означава принадлежността на f към A.

*** М. Стоун — съвременен американски математик.

Нека A е алгебра от непрекъснати в компактното* множество E функции, която разделя точките на множеството E и не се анулира в нито една точка на това множество. Тогава всяка непрекъсната в множеството E функция $f(x)$ може да бъде представена като граница на равномерно сходяща редица от функции от алгебрата A.

* Ще напомним, че компактно се нарича всяко затворено и ограничено подмножество на E^n.

3. Двойни и n-кратни интеграли

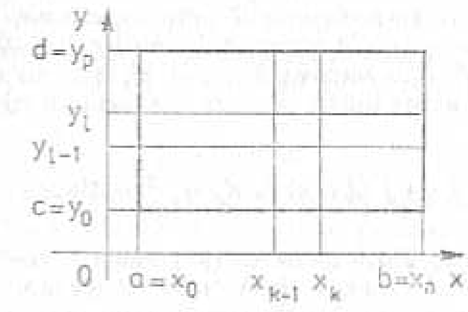
В първата глава на част I бяха формулирани важните задачи за пресмятане лицето на криволинеен трапец и на пътя, изминат от материална точка, които водят до понятието определен интеграл. Аналогични «многомерни» задачи, като например задачата за пресмятане на обема или задачата за пресмятане на масата на нееднородно тяло, по естествен начин водят до разглеждането на двойни и тройни интеграли.

В тази глава се излага теорията на n-кратните интеграли ($n\geq 2$). Построяването на теорията на n-кратните интеграли се извършва напълно аналогично на построяването на теорията на еднократните интеграли. За по-ефективно използуване на аналогията с еднократните интеграли отначало се въвежда понятието двоен интеграл върху правоъгълник. След това се въвежда понятието двоен интеграл върху произволна област както с помощта на праволинейно, така и с помощта на произволно разбиване на тази област. Построената теория се пренася за случая на n-кратен интеграл. В края на главата се изучават n-кратни несобствени интеграли.

§ 1. Определение и условия за съществуване на двоен интеграл

1. Определение на двоен интеграл за правоъгълник. Да разгледаме произволна функция $f(x, y)$, зададена навсякъде в правоъгълника $R=[a, b]\times[c, d]$ (фиг. 3.1). Ще въведем понятието интегрална сума на функцията $f(x, y)$.

Да разделим сегмента $[a, b]$ на n частични сегмента с помощта на точките $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$, а сегмента $[c, d]$ на p частични сегмента с помощта на точките $c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_p=d$. На това деление на сегментите съответствува деление на правоъгълника R с прави, успоредни на осите Ox и Oy, на np частични пра-



Фиг. 3.1

воъгълника $R_{kl}=[x_{k-1}, x_k]\times[y_{l-1}, y_l]$ ($k=1, 2, \ldots, n$; $l=1, 2, \ldots, p$). Да означим построеното деление на правоъгълника R със символа T. Деление на правоъгълника R, получено от делението T чрез добавяне на нови прави, успоредни на осите Ox и Oy, наричаме *дробно* на делението T.

Навсякъде в тази глава под термина «правоъгълник» ще разбираме правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси.

Във всеки частичен правоъгълник R_{kl} избираме произволна точка (ξ_k, η_l). Полагаме $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_l=y_l-y_{l-1}$, а с ΔR_{kl} означаваме площта на правоъгълника R_{kl}. Очевидно $\Delta R_{kl}=\Delta x_k \cdot \Delta y_l$. Под *диаметър* на правоъгълника R_{kl} ще разбираме дължината на диагонала, равна на $\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_l)^2}$. Най-големия от диаметрите на всички частични правоъгълници ще наричаме *диаметър на делението* T на правоъгълника R и ще означаваме с Δ.

Определение 1. *Числото*

$$\sigma=\sigma(f, T)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l)\cdot\Delta R_{kl} \tag{3.1}$$

ще наричаме интегрална сума на функцията $f(x, y)$, съответствуваща на делението T на правоъгълника R и дадения избор на междинните точки (ξ_k, η_l) в частичните правоъгълници на делението T.

Определение 2. *Числото I се нарича граница на интегралните суми (3.1) при $\Delta\to 0$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че при $\Delta<\delta$ е изпълнено неравенството $|\sigma-I|<\varepsilon$ независимо от избора на междинните точки (ξ_k, η_l) на R_{kl}.*

Определение 3. *Функцията $f(x, y)$ се нарича интегруема* *(по Риман) в правоъгълника R, ако съществува крайна граница на интегралните суми на тази функция при $\Delta\to 0$.*

Тази граница I се нарича **двоен интеграл** *на функцията $f(x, y)$ върху правоъгълника R и се означава с един от следните символи:*

$$I=\iint_R f(x, y)\,dx\,dy=\iint_R f(M)\,d\sigma .$$

Забележка. По същия начин, както и за еднократен интеграл (вж. част I, глава 9, § 1), чрез допускане на противното, се установява, че всяка интегруема върху правоъгълника R функция $f(x, y)$ е ограничена в този правоъгълник. Затова в цялата глава освен в последния параграф ще разглеждаме само ограничени функции, без това да бъде явно споменавано.

2. Условия за съществуване на двоен интеграл за правоъгълник. Теорията на Дарбу, развита в глава 9 от част I за еднократен определен интеграл, напълно се пренася в случая на двоен интеграл за правоъгълника R. Поради пълната аналогия се ограничаваме само със скициране на общата схема на разсъжденията.

За дадено деление T на правоъгълника R съставяме две суми: голяма сума

$$S=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl}\,.\,\Delta R_{kl} \qquad (M_{kl}=\sup_{R_{kl}} f(x, y))$$

и малка сума

$$s=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\,.\,\Delta R_{kl} \qquad (m_{kl}=\inf_{R_{kl}} f(x, y)).$$

В сила са следните твърдения (доказателствата им са напълно аналогични на доказателствата, дадени в п. 2, § 2, глава 9, част I).

Лема 1. За всяко деление T на правоъгълника R при всеки избор на междинните точки (ξ_k, η_l) в частичните правоъгълници R_{kl} интегралната сума σ удовлетворява неравенствата $s\leq\sigma\leq S$.

Лема 2. За всяко фиксирано деление T и за всяко число $\varepsilon>0$ междинните точки $(\xi_k, \eta_l)\in R_{kl}$ могат да се изберат така, че интегралната сума σ да удовлетворява неравенствата $0\leq S-\sigma<\varepsilon$.

Точките (ξ_k, η_l) могат да се изберат и по такъв начин, че интегралната сума да удовлетворява неравенствата $0\leq\sigma-s<\varepsilon$.

Лема 3. Нека T' е дробно на делението T на правоъгълника R и нека s' и S' са съответните малка и голяма сума на делението T'. Тогава са изпълнени неравенствата

$$s\leq s', \qquad S'\leq S.$$

Лема 4. Нека T' и T'' са две произволни деления на правоъгълника R; S', s' и S'', s'' са съответните големи и малки суми за тези деления. Тогава

$$s'\leq S''.$$

Лема 5. Множеството $\{S\}$ на големите суми на дадена функция $f(x, y)$ за всевъзможните деления на правоъгълника R е ограничено отдолу. Множеството от малките суми $\{s\}$ е ограничено отгоре.

Следователно съществуват числа

$$\bar{I}=\inf\{S\}, \quad \underline{I}=\sup\{s\},$$

наричани съответно **горен и долен интеграл на Дарбу** (от функцията $f(x, y)$ върху правоъгълника R). Лесно се вижда, че $\underline{I}\leq\bar{I}$.

Лема 6. Нека T' е дробно на делението T на правоъгълника R, получено от T с добавянето на l нови прави, и нека S', s' и S, s са съответните голяма и малка интегрална сума на деленията T' и T. Тогава са верни оценките

$$S-S'\leq(M-m)\,.\,l\,.\,\Delta\,.\,d;\quad s'-s\leq(M-m)\,.\,l\,.\,\Delta\,.\,d,$$

където $M=\sup\limits_R f(x, y)$, $m=\inf\limits_R f(x, y)$, Δ е диаметърът на делението T, d е диаметърът на правоъгълника R.

Аналогично на понятието граница на интегралните суми (§ 1, определение 2) се въвеждат понятията граница на голямата и малката сума. Например числото $\bar{I}$ се нарича граница на големите суми S при $\Delta\to 0$, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че $|S-\bar{I}|<\varepsilon$ при $\Delta<\delta$.

Лема 7. Горният и долният интеграл на Дарбу $\bar{I}$ и $\underline{I}$ на функцията $f(x, y)$ върху правоъгълника R са съответно границите на големите и малките суми при $\Delta\to 0$.

От леми 1—7 следва

Теорема 3.1. *За да бъде ограничената в правоъгълника R функция $f(x, y)$ интегруема в този правоъгълник, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова деление T на правоъгълника R, за което $S-s<\varepsilon$.*

Както и в глава 9 на част I, теорема 3.1 заедно с теоремата за равномерна непрекъснатост ни позволява да намерим много важни класове от интегруеми функции.

Теорема 3.2. *Всяка непрекъсната в правоъгълника R функция $f(x, y)$ е интегруема в този правоъгълник.*

Определение 1. *Елементарна фигура се нарича множе-*

ство от точки, което е обединение на краен брой правоъгълници (със страни, успоредни на координатните оси).

Да отбележим, че правоъгълниците от определение 1 могат да имат или да нямат общи вътрешни точки.

Определение 2. *Ще казваме, че функцията $f(x, y)$ притежава в правоъгълника R (в произволна затворена област D) I-свойство, ако 1) $f(x, y)$ е ограничена в R (в D); 2) за всяко $\varepsilon>0$ съществува елементарна фигура с лице, по-малко от ε, съдържаща всички точки на прекъсване на функцията $f(x, y)$.*

Теорема 3.3. *Ако функцията $f(x, y)$ притежава в правоъгълника R I-свойство, то тя е интегруема в този правоъгълник.*

Доказателствата на теореми 3.2 и 3.3 са напълно аналогични на доказателствата на теореми 9.1 и 9.2 от част I.

3. Определение и условия за съществуване на двоен интеграл за произволна област. В п. 2, § 2, глава 10, част I бяха въведени понятията измеримост и лице на равнинни фигури. Да напомним, че равнинна фигура наричаме част от равнината, заградена от проста затворена крива. Една равнинна фигура се нарича измерима, ако горната и долната мярка на лицето на тази фигура* са равни. Това число се нарича лице на фигурата. Тези понятия без изменение се пренасят и в случая на произволно ограничено множество Q от точки в равнината.

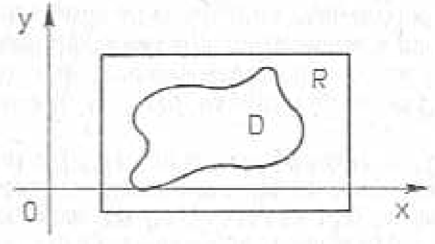
Във всички определения и твърдения на споменатата подточка вместо равнинна фигура може да се постави произволно ограничено множество Q в равнината.

В същата подточка беше дадено определение за крива (или граница на фигура) с нулево лице: казваме, че кривата има лице, равно на нула, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува многоъгълник, съдържащ Γ, чието лице е по-малко от ε. В това определение терминът «многоъгълник» може да се замени с термина «елементарна фигура». Това е така, защото всяка елементарна фигура е многоъгълник, а всеки многоъгълник с лице, по-малко от ε, се съдържа в елементарна фигура с лице, по-малко от $32\,\varepsilon$ (вж. теорема 10.2", част I).

В сила е следното твърдение.

Твърдение 1. Нека кривата Γ има лице нула и равнината е покрита с квадратна мрежа със стъпка h. Тогава за всяко $\varepsilon>0$ съществува $h>0$ такова, че сумата от лицата на всички квадрати, имащи общи точки с Γ, е по-малка от ε.

* Горна мярка на лицето се определя като точната долна граница на лицата на всички многоъгълници, съдържащи фигурата, а долна мярка на лицето — като точната горна граница на лицата на всички многоъгълници, съдържащи се във фигурата.



Фиг. 3. 2

Наистина за всяко $\varepsilon>0$ съществува елементарна фигура Q, съдържаща Γ, и с лице, по-малко от $\varepsilon/4$. При достатъчно малко h всички квадрати, имащи общи точки с Γ, ще се съдържат в елементарна фигура, получаваща се от Q след замяната на всеки правоъгълник с правоъгълник с два пъти по-големи страни и със същия център.

Нека отбележим, че класът на криви с лице нула е много широк. Например в този клас са всички ректифицируеми криви (вж. § 1, глава 10, част I).

Сега ще въведем понятието двоен интеграл за произволна двумерна област D.

Нека D е произволна ограничена затворена област, границата Γ на която има лице нула, а $f(x, y)$ е произволна ограничена функция, дефинирана в областта D.

Нека означим с R някой правоъгълник, съдържащ областта D (фиг. 3.2). Определяме в правоъгълника R следната функция:

$$F(x, y)=\begin{cases} f(x, y), & (x, y)\in D, \\ 0, & (x, y)\in R\setminus D. \end{cases} \tag{3.2}$$

Определение. *Функцията $f(x, y)$ се нарича интегруема в областта D, ако функцията $F(x, y)$ е интегруема в правоъгълника R. Числото $I=\iint_R F(x, y)\, dx\, dy$ се нарича двоен интеграл от функцията $f(x, y)$ върху областта D и се означава*

$$I=\iint_D f(x, y)\, dx\, dy=\iint_D f(M)\, d\sigma.$$

От това определение следва

Твърдение 2. *Интегралът $\iint_D 1\, dx\, dy$ е равен на лицето на областта D.*

Наистина, вземайки все по-фини деления на правоъгълника

R, получаваме, че големите интегрални суми за тези деления са равни на лицата на елементарни фигури, съдържащи R, а малките суми са равни на лицата на елементарни фигури, съдържащи се в R. Интегруемостта на функцията $f(x,y)=1$ в областта D следва от теорема 3.3.

Твърдение 3. *Нека функцията $f(x,y)$ е интегруема в ограничената измерима област D, равнината е покрита с квадратна мрежа със стъпка h, $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ са тези квадрати от мрежата, които се съдържат в областта D, (ξ_k, η_k) е произволна точка от квадрата C_k, $m_k=\inf\limits_{C_k} f(x,y)$, $k=1,2,\ldots,n(h)$. Тогава всяка от сумите*

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_k, \eta_k)\, h^2, \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k h^2$$

има граница $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ при $h\to 0$.

Доказателството следва непосредствено от факта, че тези суми се отличават от обикновената интегрална сума или от малката сума на функцията $f(x,y)$ в областта D съответно само по липсата на събираеми по квадратите, имащи общи точки с границата Г на областта D, като сумата на всички липсващи събираеми по модул е по-малка от произведението на числото $M=\sup\limits_D |f(x,y)|$ и лицето S на елементарната фигура, състояща се от квадрати, имащи общи точки с Г. Тъй като границата Г има лице нула, то $S\to 0$ при $h\to 0$ поради твърдение 1.

От теорема 3.3 и определението за двоен интеграл, дадено по-горе, получаваме следната основна теорема.

Теорема 3.4. *Ако функцията $f(x,y)$ притежава I-свойство в областта D, то тя е интегруема в тази област.*

Доказателство. Функцията $F(x,y)$, определена с (3.2), ще притежава I-свойство в правоъгълника R.

Наистина функцията $F(x,y)$ е ограничена в R и всички нейни точки на прекъсване съвпадат или с прекъсванията на $f(x,y)$, или лежат на границата Г на областта D. Но границата Г има лице нула. Така твърдението на теоремата следва от теорема 3.3. С това теорема 3.4 е доказана.

Следствие 1. *Ако функцията $f(x,y)$ е ограничена в областта D и има в тази област прекъсвания само по краен брой ректифицируеми криви, то $f(x,y)$ е интегруема в областта D.*

Следствие 2. *Ако функцията $f(x,y)$ притежава I-свойство в областта D, а функцията $g(x,y)$ е ограничена и съвпада с $f(x,y)$ навсякъде в D освен върху множество с мярка нула, то функцията $g(x,y)$ е интегруема в областта D, като*

$$\iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

Не сме изяснили коректно ли е горното определение на понятието двоен интеграл, по-точно зависи ли съществуването на двойния интеграл и големината му от: 1) избора на координатните оси Ox и Oy; 2) избора на правоъгълника R, върху който определяме функцията $F(x,y)$.

В следващата подточка ще бъде дадено друго определение за интегруемост на функцията $f(x,y)$ и двоен интеграл, независещо от избора на координатната система и правоъгълника R, и ще бъде доказана еквивалентността на това определение с даденото по-горе.

4. Общо определение на двоен интеграл. Нека D е затворена ограничена област, чиято граница Г има лице нула. Разделяме областта D с помощта на краен брой произволни криви с лице нула на краен брой r (не непременно свързани) затворени частични области $D_1, D_2, \ldots, D_r$. Всяка област D_i има граница с лице нула и затова е измерима. Означаваме лицето на областта D_i със символа ΔD_i.

Във всяка област D_i избираме произволна точка $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Определение 1. *Числото*

$$\tilde{\sigma}=\sum_{i=1}^{r} f(p_i)\,\Delta D_i \tag{3.3}$$

се нарича интегрална сума на функцията $f(x,y)$, съответстваща на даденото деление на областта D на частични области D_i и на дадения избор на междинните точки P_i в частичните области.

Диаметър на областта D_i се нарича числото $d_i=\sup\limits_{M_1, M_2\in D_i} \rho(M_1, M_2)$ ($\rho(M_1, M_2)$ е разстоянието между точките M_1 и M_2). Диаметър на делението на областта D се нарича числото $\tilde{\Delta}=\max\limits_{1\le i\le r} d_i$.

Определение 2. *Числото I се нарича граница на интегралните суми (3.3) при $\tilde{\Delta}\to 0$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че при $\tilde{\Delta}<\delta$ независимо от избора на точките P_i в частичните области D_i е изпълнено неравенството $|\tilde{\sigma}-I|<\varepsilon$.*

Определение 3 (общо определение за интегруемост). *Функция-*

та $f(x, y)$ се нарича интегруема (по Риман) върху областта D, ако съществува крайна граница I на интегралните суми $\tilde{\sigma}$ на тази функция при $\tilde{\Delta}\to 0$. Тази граница I се нарича двоен интеграл от функцията $f(x, y)$ върху областта D.

Ще докажем следната основна теорема.

Теорема 3.5. *Общото определение за интегруемост е еквивалентно на определението, дадено в п. 3.*

Доказателство I. Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D съгласно общото определение за интегруемост и двойният ѝ интеграл според това определение е I. Построяваме правоъгълник R, съдържащ D, разделяме го на частични правоъгълници и определяме в R функцията $F(x, y)$ по (3.2). Разглеждаме интегралната сума (3.3) $\tilde{\sigma}$ на функцията $f(x, y)$ и интегралната сума (3.1) σ на функцията $F(x, y)$. Тези суми може да се отличават една от друга само по събираеми, съответствуващи на частични правоъгълници, имащи общи точки с границата Γ на областта D. Тъй като Γ има лице нула, а функцията $f(x, y)$ е ограничена, то тази функция е интегруема съгласно определението от п. 3 и има съгласно това определение същия двоен интеграл I.

II. Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D съгласно определението от п. 3 и I е двойният интеграл от $f(x, y)$ върху областта I съгласно това определение. Ще покажем, че за $f(x, y)$ границата на интегралните суми $\tilde{\sigma}$ при $\tilde{\Delta}\to 0$ съществува и е равна на I.

Съставяме за дадено деление на областта D голямата и малката сума

$$\tilde{S}=\sum_{i=1}^{r} \tilde{M}_i\,.\,\Delta D_i \quad \text{и} \quad \tilde{s}=\sum_{i=1}^{r} \tilde{m}_i\,.\,\Delta D_i$$

тук $\tilde{M}_i=\sup\limits_{D_i} f(x, y)$, $\tilde{m}_i=\inf\limits_{D_i} f(x, y)$. Тъй като за всяко деление при всеки избор на междинните точки в интегралната сума $\tilde{\sigma}$ имаме

$$\tilde{s}\leq\tilde{\sigma}\leq\tilde{S},$$

то е достатъчно да се докаже, че сумите $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ клонят към I при $\tilde{\Delta}\to 0$, т.е. за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че всяка сума $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ се различава от I по-малко от ε при $\tilde{\Delta}<\delta$.

Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. От теорема 3.1 и твърдение 1 за това ε съществува деление T на правоъгълника R $(D\subset R)$ на частични правоъгълници R_k такова, че

$$S-s<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \sum_{R_k\cap\Gamma\neq\varnothing} \Delta R_k<\frac{\varepsilon}{6M_0}, \tag{3.4}$$

където $M_0=\sup\limits_{D}|f(x, y)|$.

Нека Q е елементарна фигура с лице, по-малко от $\frac{\varepsilon}{6M_0}$, която съдържа във вътрешността си всички отсечки от правите, определящи делението T, и границата Γ на областта D. Нека δ е положителната точна долна граница на разстоянието между две точки, едната от които принадлежи на границата на Q, а другата на отсечките от правите, определящи делението T, или на границата Γ. Построяването на фигурата Q може да се осъществи по схемата, приложена при доказателството на твърдение 1 от п. 3.

Ще докажем, че сумите $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ за всяко деление на областта D, удовлетворяващо условието $\tilde{\Delta}<\delta$, изпълняват неравенствата

$$\tilde{S}<S+\frac{\varepsilon}{2}, \qquad s-\frac{\varepsilon}{2}<\tilde{s}. \tag{3.5}$$

Ще докажем само първото от неравенствата (3.5), защото второто се доказва аналогично.

От сумата $\tilde{S}$ премахваме всички събираеми $\tilde{M}_i\,.\,\Delta D_i$, съответствуващи на области D_i, всяка от които не лежи изцяло в някой от частичните правоъгълници на делението T. За всички такива области имаме $D_i\subset Q$ (поради $d_i\leq\tilde{\Delta}<\delta$) и следователно общата сума от лицата на тези области е по-малка от $\frac{\varepsilon}{6M_0}$.

Следователно сумата на всички премахнати събираеми $\tilde{M}_i\,.\,\Delta D_i$ е по-малка от $\frac{\varepsilon}{6}$ и е в сила оценката

$$\tilde{S}<\sum_i{}' \tilde{M}_i\,\Delta D_i+\frac{\varepsilon}{6}, \tag{3.6}$$

където прим̀ът означава, че сумираме само по тези частични области D_i, които изцяло се съдържат в някой от правоъгълниците на делението T.

Нека сега заменим в дясната част на (3.6) точните горни граници $\tilde{M}_i$ в областите D_i, съдържащи се в частичния правоъгълник R_k, с точната горна граница M_k в правоъгълника R_k. Означаваме $\tilde{R}_k=\bigcup\limits_{D_i\subset R_k} D_i$ и нека $\Delta\tilde{R}_k$ означава лицето на областта $\tilde{R}_k$. Тогава

$$\tilde{S}<\sum_k M_k\,\Delta\tilde{R}_k+\frac{\varepsilon}{6}. \tag{3.7}$$

За правоъгълниците $R_k \subset D$ имаме $R_k \setminus \tilde{R}_k \subset Q$ и затова за тях

$$\sum_k \Delta(R_k \setminus \tilde{R}_k) = \sum_k (\Delta R_k - \Delta\tilde{R}_k) \leq \Delta Q < \frac{\varepsilon}{6M_0},$$

а за правоъгълниците R_k, пресичащи се с Γ, е изпълнено

$$\sum_k \Delta(R_k \setminus \tilde{R}_k) \leq \sum_k \Delta R_k < \frac{\varepsilon}{6M_0}$$

и следователно

$$|S - \sum_k M_k \Delta\tilde{R}_k| = |\sum_k M_k (\Delta R_k - \Delta\tilde{R}_k)| < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3},$$

откъдето

$$\sum_k M_k \Delta\tilde{R}_k < S + \frac{\varepsilon}{3}.$$

От последното неравенство и неравенството (3.7) получаваме

$$\tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = S + \frac{\varepsilon}{2},$$

с което първото неравенство (3.5) е доказано. Второто неравенство (3.5) се доказва аналогично.

От (3.5) получаваме

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \tilde{s} \leq \tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$

Поради (3.4) всяка от сумите s и S се различава от I по-малко от $\frac{\varepsilon}{2}$, откъдето поради (3.8) всяка от сумите $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$ се отличава от I по-малко от ε. Теоремата е доказана.

§ 2. Основни свойства на двойния интеграл

Свойствата на двойния интеграл са аналогични на свойствата на еднократния определен интеграл.

1°. **Адитивност.** *Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D и ако областта D с помощта на крива Γ с лице нула е разделена на две свързани области D_1 и D_2 без общи вътрешни точки, то функцията $f(x, y)$ е интегруема върху всяка от областите D_1 и D_2, като*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy. \tag{3.9}$$

За да докажем това свойство, разделяме областите D_1 и D_2 на краен брой измерими области, като по този начин получаваме и деление на D. Нека $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$, $\tilde{S}_1$ и $\tilde{s}_1$, $\tilde{S}_2$ и $\tilde{s}_2$ са големите и малките суми на функцията $f(x, y)$ съответно в областите D, D_1, D_2.

Тъй като $D_1 \subset D$ и $D_2 \subset D$, то

$$\tilde{S}_1 - \tilde{s}_1 \leq \tilde{S} - \tilde{s} \text{ и } \tilde{S}_2 - \tilde{s}_2 \leq \tilde{S} - \tilde{s},$$

откъдето следва интегруемостта на функцията $f(x, y)$ върху всяка от областите D_1 и D_2.

Равенството (3.9) следва от равенствата

$$\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2, \quad \tilde{s} = \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2. \tag{3.10}$$

Забележка. Вярно е и обратното твърдение: от интегруемостта на функцията $f(x, y)$ върху всяка от областите D_1 и D_2 следва интегруемостта на функцията върху областта D и равенството (3.9).

Наистина, като разделим областта D на краен брой измерими части D_i и въведем големите и малките суми за функцията $f(x, y)$ върху областите D, D_1, D_2, получаваме равенствата (3.10) с точност до събираеми, съответстващи на тези области D_i, които имат общи вътрешни точки с кривата Γ. Кривата Γ има лице нула, функцията $f(x, y)$ е ограничена и затова сумата на тези събираеми ще клони към нула заедно с диаметъра на делението $\tilde{\Delta}$.

Доказателството на следващите свойства (както и доказателството на свойство 1°) е напълно аналогично на доказателството на съответните свойства на еднократния определен интеграл. Затова ще се ограничим само с формулирането на тези свойства.

2°. **Линейно свойство.** *Нека функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта D, α и β са произволни реални числа. Тогава функцията $\alpha . f(x, y) + \beta . g(x, y)$ е интегруема в областта D, като*

$$\iint_D [\alpha . f(x,y) + \beta . g(x,y)]dx\,dy = \alpha \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \beta \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

3°. *Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта D, то и произведението им е интегруемо в D.*

4°. *Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта D и навсякъде в тази област е изпълнено $f(x, y) \leq g(x, y)$, то*

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

5⁰. *Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D, то и функцията $|f(x, y)|$ е интегруема в областта D, като*

$$\left|\iint_D f(x, y)\,dx\,dy\right| \leq \iint_D |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

(Обратното твърдение е невярно: от интегруемостта на $|f(x, y)|$ в D, изобщо казано, не следва интегруемостта на $f(x, y)$ в D.)

6⁰. *Ако функцията $f(x, y)$ е интегруема в областта D, а $g(x, y)$ е ограничена и съвпада с $f(x, y)$ навсякъде в D с изключение на множество от точки с мярка нула, то и $g(x, y)$ е интегруема в областта D.*

7⁰. **Теорема за средните стойности.** *Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в областта D, като функцията $g(x, y)$ е неотрицателна (неположителна) навсякъде в тази област, $M = \sup_D f(x, y)$, $m = \inf_D f(x, y)$, то съществува число $\mu \in [m, M]$, за което е изпълнено*

$$\iint_D f(x, y)\, g(x, y)\, dx\,dy = \mu \iint_D g(x, y)\, dx\,dy.$$

Ако освен това функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в D, а областта D е свързана, то в тази област съществува такава точка (ξ, η), за която $\mu = f(\xi, \eta)$.

8⁰. **Геометрично свойство.** $\iint_D 1\,dx\,dy$ *е равен на лицето на областта D* (вж. твърдение 2, п. 3).

§ 3. Свеждане на двоен интеграл към повторен еднократен интеграл

Ефективен начин за пресмятане на двоен интеграл е свеждането му към повторен еднократен интеграл.

1. Случай на правоъгълник. Ще започнем с простия случай, когато областта на интегриране е правоъгълник $R = [a, b] \times [c, d]$.

Теорема 3.6. *Нека функцията $f(x, y)$ е интегруема в правоъгълника R и за всяко $x \in [a, b]$ съществува еднократният интеграл*

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{3.11}$$

Тогава съществува повторният интеграл

$$\int_a^b I(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx$$

и е изпълнено равенството

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx. \tag{3.12}$$

Доказателство. Разделяме правоъгълника R с помощта на точките $\{x_k\}$, $\{y_l\}$ на $n.p$ частични правоъгълника

$$R_{kl} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$$

($k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, p$), като $x_0 = a$, $x_n = b$, $y_0 = c$, $y_p = d$ и $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1} > 0$.

Нека, както и в § 1, с Δ да означим диаметъра на делението на правоъгълника R, $M_{kl} = \sup_{R_{kl}} f(x, y)$, $m_{kl} = \inf_{R_{kl}} f(x, y)$, а S и s да са голямата и малката сума на функцията $f(x, y)$. Тогава навсякъде в правоъгълника R_{kl} е изпълнено

$$m_{kl} \leq f(x, y) \leq M_{kl}. \tag{3.13}$$

Фиксираме произволно число $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и интегрираме неравенството (3.13) по y в граници от y_{l-1} до y_l, като полагаме в него $x = \xi_k$. Получаваме

$$m_{kl} \cdot \Delta y_l \leq \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y)\,dy \leq M_{kl} \cdot \Delta y_l. \tag{3.14}$$

Умножаваме (3.14) с Δx_k и сумираме получените неравенства отначало по l от 1 до p, а след това по k от 1 до n. Използувайки означението (3.11), имаме

$$\begin{aligned} s = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} m_{kl}\,\Delta x_k\,\Delta y_l \leq \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\,\Delta x_k \leq \\ \leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} M_{kl}\,\Delta x_k\,\Delta y_l = S. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Нека диаметърът на делението $\Delta \to 0$. Тогава и $\max_k \Delta x_k \to 0$. При това s и S клонят към двойния интеграл $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$. Следователно средният член в (3.15) клони към същия двоен интеграл.

Но тази граница по определението на еднократен интеграл е равна на

$$\int_a^b I(x)\,dx=\int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx.$$

По такъв начин е доказано съществуването на повторния интеграл и равенството (3.12). Теоремата е доказана.

Забележка. От доказателството на теорема 3.6 е ясно, че можем да сменим местата на x и y, т.е. можем да предположим съществуването на двойния интеграл и съществуването за всяко $y\in[c,d]$ на еднократния интеграл

$$K(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Тогава теоремата ще твърди съществуването на повторния интеграл

$$\int_c^d K(y)\,dy=\int_c^d\Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy$$

и равенството му с двойния интеграл.

2. Случай на произволна област. Да разгледаме сега произволна ограничена затворена измерима област D с граница Г.

Теорема 3.7. *Нека са изпълнени следните условия: 1) областта D е такава, че всяка права, успоредна на оста Oy, пресича границата Г по цяла отсечка $[y_1(x), y_2(x)]$ или в не повече от две точки, ординатите на които са $y_1(x)$ и $y_2(x)$, където $y_1(x)\le y_2(x)$* (фиг. 3.3); *2) функцията $f(x,y)$ е интегруема в областта D и за всяко $x\in[x_1,x_2]$ съществува еднократният интеграл*

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

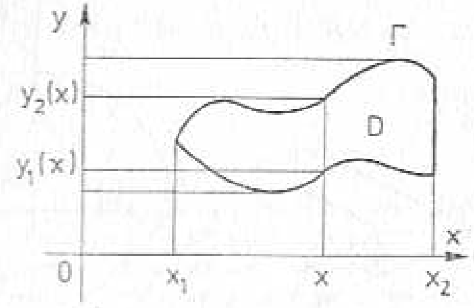
($[x_1,x_2]$ е проекцията на областта D върху оста Ox).

Тогава съществува повторният интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2}\Big[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx$$

и е изпълнено равенството

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{x_1}^{x_2}\Big[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\Big]dx. \tag{3.16}$$



Фиг. 3. 3

Доказателство. Нека R е правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси, съдържащ областта D, а $F(x,y)$ е функцията (3.2), съвпадаща с $f(x,y)$ в D и равна на нула в останалите точки на R. За $F(x,y)$ са изпълнени в R всички условия на теорема 3.6 и следователно е вярна формула (3.12), която е еквивалентна на формула (3.16) (поради определението на функцията $F(x,y)$). Теоремата е доказана.

Забележка 1. В теорема 3.7 можем да сменим ролите на x и y, т.е. може да се предположи, че са изпълнени следните условия: 1) областта D е такава, че всяка права, успоредна на оста Ox, пресича границата Г или по цяла отсечка $[x_1(y), x_2(y)]$, или в не повече от две точки, абсцисите на които са $x_1(y)$ и $x_2(y)$, където $x_1(y)\le x_2(y)$; 2) функцията $f(x,y)$ е интегруема в областта D и за всяко $y\in[y_1,y_2]$ съществува еднократният интеграл

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

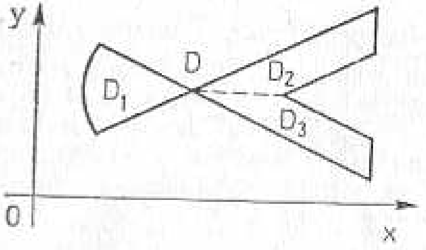
($[y_1,y_2]$ е проекцията на D върху оста Oy).

При изпълняването на тези условия съществува повторният интеграл

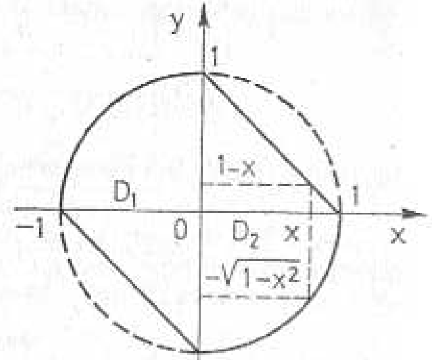
$$\int_{y_1}^{y_2}\Big[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\Big]dy$$

и е в сила равенството

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_{y_1}^{y_2}\Big[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx\Big]dy.$$



Фиг. 3. 4



Фиг. 3. 5

Забележка 2. Ако областта D не удовлетворява условията на теорема 3.7 или забележка 1 към тази теорема, понякога можем да разделим тази област на сума от краен брой области от този тип, които нямат общи вътрешни точки. Тогава интегралът върху областта D поради свойството адитивност е равен на сумата от интегралите по съответните области. Например областта D от фиг. 3.4 се разделя на сума от три области D_1, D_2, D_3, към всяка от които е приложима или теорема 3.7, или забележка 1.

Пример. Нека областта D е сечение на областите $|x+y|\leq 1$ и $x^2+y^2\leq 1$, а $f(x, y)=x.y$ (фиг. 3.5). Всяка права, успоредна на оста Oy, пресича границата на D в не повече от две точки. За удобство при записването на повторните интеграли разделяме областта D на две области D_1 и D_2 (както е показано на фиг. 3.5). Прилагайки за всяка от областите формула (3.16), получаваме

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy=\iint_{D_1} xy\,dx\,dy+\iint_{D_2} xy\,dx\,dy=$$

$$=\int_{-1}^{0} x\,dx\int_{-1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy+\int_{0}^{1} x\,dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} y\,dy=-\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx+$$

$$+\int_{0}^{1}(x^3-x^2)\,dx=-\frac{1}{6}.$$

§ 4. Тройни и n-кратни интеграли

Изложената теория на двойния интеграл без някакви съществени усложнения и нови идеи се пренася за случая на троен или въобще на n-кратен интеграл. Ще се спрем на основните моменти на теорията на n-кратния интеграл.

При определяне на класовете от измерими множества в E^2 или E^3 ние заимствувахме от материала в средното училище понятията лице на многоъгълник и обем на многостен, които притежават свойствата адитивност, инвариантност и монотонност (вж. § 2 и 3, глава 10, част I). В пространствата E^n, $n>3$, положението се усложнява от това, че не ни е известен обемът на множества (тела) в E^n, ограничени от хиперравнини. За да определим класа на измеримите тела в E^n, ще започнем от обема на тяло от специален вид в E^n — n-мерния правоъгълен паралелепипед.

Да припомним (вж. § 1, гл. 13, част I), че множеството $R=[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times\cdots\times[a_n, b_n]$ от всички точки $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в E^n, за които $a_i\leq x_i\leq b_i$, $i=1, 2, \ldots, n$, се нарича n-мерен координатен правоъгълен паралелепипед. Ако $b_i-a_i=h$ за всяко i, то R се нарича n-мерен координатен куб със страна h. Точките $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, където c_i е равно или на a_i, или на b_i, се наричат върхове на R, а сегментите, съединяващи два върха от вида $(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, a_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ и $(c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, b_i, c_{i+1}, \ldots, c_n)$ — ръбове на R. Всички ръбове на R са успоредни на координатните оси.

По аналогия с E^1, E^2 и E^3 е естествено да определим обема на n-мерния правоъгълен паралелепипед R като число, равно на произведението от дължините на всички негови ръбове, излизащи от един връх, т. е. като числото $\mu(R)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$.

Ще наречем елементарно тяло множество от точки в E^n, представляващо обединение на краен брой n-мерни правоъгълни паралелепипеди, нямащи общи вътрешни точки, с ръбове, успоредни на координатните оси. Обемът на всяко елементарно тяло естествено определяме като сумата от обемите на съставящите го паралелепипеди.

Нека сега D е произволна ограничена област (множество) в E^n. Долна мярка на обема на областта D се нарича точната горна граница $\mu_*=\mu_*(D)$ на обемите на всички елементарни тела, съдържащи се в D, а горна мярка на обема на областта D — точната долна граница $\mu^*=\mu^*(D)$ на обемите на всички елементарни тела, съдържащи областта D.

Лесно се вижда, че $\mu_*\leq\mu^*$.

Областта D се нарича измерима, ако $\mu_* = \mu^*$. При това числото $\mu(D)=\mu_*(D)=\mu^*(D)$ се нарича n-мерен обем на областта D.

Както в случая на равнинна област, се доказва следното твърдение.

Една n-мерна област D е измерима тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ съществуват две елементарни тела, едното от които съдържа D, а другото се съдържа в D, разликата от обемите на които по абсолютна стойност не надминава ε.

В частност едно подмножество Γ на E^n има n-мерен обем 0, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува елементарно тяло с обем, по-малък от ε, което съдържа Γ.

От приведеното твърдение получаваме, че n-мерната област D е измерима тогава и само тогава, когато границата на тази област е множество с n-мерен обем нула.

Първо ще определим интеграл от функция на n променливи $f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ върху n-мерен координатен правоъгълен паралелепипед R. За тази цел построяваме деление T на паралелепипеда R на краен брой частични n-мерни паралелепипеди чрез краен брой хиперравнини, успоредни на координатните хиперравнини.

За това деление T аналогично на случая $n=2$ се определя интегрална, голяма и малка сума за всяка ограничена в R функция $f(x)$.

n-кратен интеграл от функцията $f(x)$ върху паралелепипеда R определяме като граница (ако съществува) на интегралните суми, когато диаметърът на делението T на паралелепипеда R клони към нула.

Както в случая $n=2$, теорията на Дарбу дава необходимо и достатъчно условие за интегруемост в следната форма: за интегруемост на функцията $f(x)$ върху паралелепипеда R е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществува деление T на паралелепипеда R, за което разликата между голямата и малката сума е по-малка от ε.

Нека сега D е произволна затворена ограничена n-мерна област, границата на която има n-мерен обем нула. n-кратен интеграл от функцията f върху областта D се определя като интеграл върху n-мерен координатен правоъгълен паралелепипед R, съдържащ областта D, от функция F, съвпадаща с f в D и равна на нула извън D.

Ще означаваме n-кратния интеграл от функцията $f(x)$ върху областта D по един от следните начини:

$$\int_D f(x)dx=\iint_D \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n. \tag{3.17}$$

Ще отбележим, че произведението $dx=dx_1dx_2 \ldots dx_n$ обикновено се нарича **елемент на обема** в пространството E^n.

По същия начин, както в случая $n=2$, се доказва интегруемост върху n-мерна област на всяка непрекъсната функция, а също на функция f, притежаваща I-свойство в областта D (т.е. ограничена в D функция, множеството от точки на прекъсване на която има n-мерен обем нула). Въобще изменение на интегруема функция върху множество от точки с n-мерен обем нула не променя интеграла на тази функция.

За определяне на n-кратен интеграл може да се използува и разделяне на областта D с помощта на краен брой произволни множества с обем нула на краен брой частични области с произволна форма. Напълно аналогично с теорема 3.5 се доказва, че такова общо определение на n-кратен интеграл е еквивалентно на даденото по-горе определение.

За n-кратен интеграл също са верни осемте основни свойства, формулирани в § 2 за двоен интеграл.

Напълно аналогично на теореми 3.6 и 3.7 се доказва формула за повторно интегриране за интеграла (3.17).

Нека n-мерната област D_n е такава, че всяка права, успоредна на оста Ox_1, пресича границата ѝ в не повече от две точки (или по цял сегмент, ограничен от две точки), проекциите на които по оста Ox_1 са $a(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, където $a(x_2, x_3, \ldots, x_n) \leq b(x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

Нека функцията $f(x)$ е интегруема в областта D_n и за всяка точка $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ от $(n-1)$-мерната област D_{n-1}, представляваща проекцията на D_n върху координатната хиперравнина $Ox_2x_3\ldots x_n$, съществува еднократният интеграл

$$J(x_2, x_3, \ldots, x_n)=\int_{a(x_2, x_3, \ldots, x_n)}^{b(x_2, x_3, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1.$$

Тогава съществува $(n-1)$-кратният интеграл

$$\iint_{D_{n-1}} \cdots \int J(x_2, x_3, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n=$$

$$=\iint_{D_{n-1}} \cdots \int \left[\int_{a(x_2, \ldots, x_n)}^{b(x_2, \ldots, x_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1 \right] dx_2 \ldots dx_n$$

върху областта D_{n-1} и е вярна формулата за повторно интегриране

$$\iint_{D_n} \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_1dx_2 \ldots dx_n=$$

(3.18)

$$=\iint_{D_{n-1}}\cdots\int\Big[\int_{a(x_2,x_3,\ldots,x_n)}^{b(x_2,x_3,\ldots,x_n)} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1\Big]\,dx_2dx_3\ldots dx_n$$

В горното твърдение ролята на x_1 може да играе всяка от останалите променливи $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Областта D ще наричаме **проста**, ако за всяка от координатните оси всяка права, успоредна на тази ос, или пресича границата на областта в не повече от две точки, или има по тази граница цяла отсечка. Пример за проста област е всеки n-мерен правоъгълен паралелепипед (с ребра не непременно успоредни на координатните оси).

За проста област формулата за повторно интегриране може да се прилага по всяка от променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Нека отбележим накрая, че както и в случая $n=2$, е вярно твърдението:

Нека функцията $f(x)$ е интегруема в ограничената измерима област D. Нека пространството E^n е покрито с мрежа от n-мерни кубове със страна h, $C_1, C_2, \ldots, C_{m(h)}$ са тези кубове от мрежата, които се съдържат в D, $\xi^{(k)}=(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$ е произволна точка от куба C_k, $m_k=\inf\limits_{C_k} f(x)$, $k=1, 2, \ldots, m(h)$. Тогава всяка от сумите

$$\sum_{k=1}^{m(h)} f(\xi^{(k)})h^n \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m(h)} m_k h^n$$

има граница при $h\to 0$, равна на n-кратния интеграл (3.17) от функцията $f(x)$ върху областта D.

Примери. 1) Да се пресметне обемът $T_n(h)$ на n-мерния симплекс

$$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E^n : x_i\geq 0,\ i=1, 2, \ldots, n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i\leq h\}.$$

Прилагайки формулата (3.18) за повторно интегриране последователно по променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получаваме следния израз за обема:

(3.19)
$$T_n(h)=\int_0^h\Big(\int_0^{h-x_1}\Big(\cdots\Big(\int_0^{h-\sum_{i=1}^{n-1}x_i} 1.dx_n\Big)\ldots\Big)dx_2\Big)dx_1.$$

Във всеки от интегралите в дясната част на (3.19) правим смяна на променливите $x_1=h\xi_1$, $x_2=h\xi_2, \ldots, x_n=h\xi_n$. Получаваме

(3.20)
$$T_n(h)=h^n\int_0^1\Big(\int_0^{1-\xi_1}\Big(\cdots\Big(\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i} d\xi_n\Big)\ldots\Big)d\xi_2\Big)d\xi_1.$$

От (3.19) и (3.20) следва, че $T_n(h)=h^nT_n(1)$. За пресмятане на $T_n(1)$ получаваме следната рекурентна формула:

$$T_n(1)=\int_0^1\Big(\int_0^{1-\xi_1}\Big(\cdots\Big(\int_0^{1-\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i} d\xi_n\Big)\ldots\Big)d\xi_2\Big)d\xi_1=\int_0^1 T_{n-1}(1-\xi_1)d\xi_1=$$

$$=\int_0^1(1-\xi_1)^{n-1}T_{n-1}(1)d\xi_1=T_{n-1}(1)\int_0^1(1-\xi_1)^{n-1}d\xi_1=T_{n-1}(1)\cdot\frac{1}{n}.$$

Следователно $T_n(1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2}\cdot T_1(1)$ и тъй като $T_1(1)=1$, то $T_n(h)=\frac{h^n}{n!}$.

2) Пресметнете обема $V_n(R)$ на n-мерното кълбо $B(R)$ с радиус R:

$$B(R)=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in E^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2\leq R^2\}.$$

Използуваме формулата (3.18) и получаваме

$$V_n(R)=\iint_{B(R)}\cdots\int 1\,dx_1dx_2\ldots dx_n=$$

$$=\int_{-R}^{R}\Big(\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}}\Big(\cdots\Big(\int_{-\sqrt{R^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}}^{\sqrt{R^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2}} 1.dx_n\Big)\ldots\Big)dx_2\Big)dx_1.$$

В еднократните интеграли по променливата x_i правим смяна на променливите $x_i=R\xi_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и получаваме

$$V_n(R)=R^n\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-\xi_1^2}}^{\sqrt{1-\xi_1^2}}\left(\cdots\left(\int_{-\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2}}^{\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n-1}\xi_i^2}}d\xi_n\right)\dots\right)d\xi_2\right)d\xi_1=R^nV_n(1).$$

За пресмятане на $V_n(1)$, както и в предишния пример, получаваме рекурентното съотношение

$$V_n(1)=\int_{-1}^{1}V_{n-1}\left(\sqrt{1-\xi_1^2}\right)d\xi_1=\int_{-1}^{1}(1-\xi_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,V_{n-1}(1)d\xi_1=$$

$$=V_{n-1}(1)\cdot\int_{-1}^{1}(1-\xi_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,d\xi_1.$$

В последния интеграл правим смяна на променливите $\xi_1=\cos\theta$, въвеждаме означението $I_k=\int_0^{\pi/2}\sin^k\theta\,d\theta$ и вземаме предвид, че $V_1(1)=2$. Тогава

$$V_n(1)=2V_{n-1}(1)\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta=2V_{n-1}(1)\ I_n=\dots=$$

$$=2^{n-1}I_n\cdot I_{n-1}\dots I_2\cdot V_1(1)=2^nI_n\ I_{n-1}\dots I_2,$$

откъдето обемът $V_n(R)$ на n-мерното кълбо с радиус R се дава от формулата

$$V_n(R)=2^nR^nI_nI_{n-1}\cdots I_2,$$

откъдето, използувайки известните формули за интегралите I_k*, окончателно получаваме

$$V_n(R)=\begin{cases}\dfrac{2^{\frac{n+1}{2}}}{n!!}R^n\pi^{\frac{n-1}{2}}, & \text{ако } n \text{ е нечетно;}\\[2ex] \dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{n!!}R^n\pi^{\frac{n}{2}}, & \text{ако } n \text{ е четно.}\end{cases}$$

* В п. 4, § 5, глава 9, част I е показано, че

$$I_k=\begin{cases}\dfrac{(k-1)!!}{k!!}, & \text{ако } k \text{ е нечетно;}\\[2ex] \dfrac{(k-1)!!}{k!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{ако } k \text{ е четно.}\end{cases}$$

§ 5. Смяна на променливите в n-кратния интеграл

Формулата за смяна на променливите, която ще бъде доказана в този параграф, е едно от най-важните средства за пресмятане на n-кратни интеграли.

Предполагаме, че функцията $f(y)=f(y_1,y_2,\dots,y_n)$ е интегруема в някоя затворена, ограничена измерима област D в пространството E^n. Предполагаме също, че от променливите $y_1,y_2,\dots,y_n$ преминаваме към променливите $x_1,x_2,\dots,x_n$, т. е. извършваме преобразованието

$$\begin{cases}y_1=\psi_1(x_1,x_2,\dots,x_n),\\ y_2=\psi_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\\ \dots\dots\dots\dots\\ y_n=\psi_n(x_1,x_2,\dots,x_n),\end{cases}\tag{3.21}$$

което може кратко да бъде записано като

$$y=\psi(x),\tag{3.21*}$$

разбирайки под y точка от n-мерното пространство $(y_1,y_2,\dots,y_n)$, под x — точка от n-мерното пространство $(x_1,x_2,\dots,x_n)$, а под ψ — съвкупността от n функции $\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_n$.

Означаваме с D' тази област в E^n, която при преобразованието (3.21) или (3.21*) преминава в D, т. е. полагаме $D=\psi(D')$. При това винаги ще предполагаме, че преобразованието (3.21) или (3.21*) допуска обратно преобразование, така че $D'=\psi^{-1}(D)$.

Ще докажем, че ако функциите (3.21) имат в областта D' непрекъснати частни производни от първи ред и ако в тази област якобианът

$$\frac{D(y)}{D(x)}=\frac{D(y_1,y_2,\dots,y_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}\tag{3.22}$$

е различен от нула, то за n-кратния интеграл от функцията $f(y)$ върху областта D е вярна следната формула за смяна на променливите:

$$\int_D f(y)dy=\int_{D'} f[\psi(x)]\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|dx,\tag{3.23}$$

която в подробен запис има следния вид:

$$\int\int_D\dots\int f(y_1,y_2,\dots,y_n)dy_1dy_2\dots dy_n=\tag{3.23*}$$

$$=\int\int_{D'}\cdots\int f[\psi_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n)]\left|\frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}\right|dx_1\ldots dx_n.$$

По-точно ще докажем следната основна теорема:

Теорема 3.8. *Нека преобразованието (3.21) изобразява взаимно еднозначно колността U' на областта D' в околността U на областта D (съответно D' в D). Ако функциите (3.21) имат в областта D' непрекъснати частни производни от първи ред по всички променливи и различен от нула якобиан (3.22), то за всяка интегруема в D функция $f(y)$ е вярна формулата за смяна на променливите (3.23*).*

Нека отбележим, че при условията на теорема 3.8 съществува преобразованието ψ^{-1}, обратно на ψ.

За доказателството на теорема 3.8 са необходими седем леми. Отначало формула (3.23) ще бъде доказана в случая, когато преобразованието (3.21) е линейно (леми 1—4), а след това общото преобразование (3.21) се свежда към този случай (леми 5—7).

Лема 1. *Ако преобразованието $z=\psi(x)$ е суперпозиция на две преобразования $z=\psi_1(y)$ и $y=\psi_2(x)$, т. е. $z=\psi_1[\psi_2(x)]$, като всички участвуващи в тези преобразования функции имат непрекъснати частни производни от първи ред, то якобианът $\frac{D(z)}{D(x)}$, взет в точката $\overset{\circ}{x}=(\overset{\circ}{x}_1,\ldots,\overset{\circ}{x}_n)$, е равен на произведението на якобиана $\frac{D(y)}{D(x)}$, взет в точката $\overset{\circ}{x}$, и якобиана $\frac{D(z)}{D(y)}$, взет в точката $\overset{\circ}{y}=(\overset{\circ}{y}_1,\ldots,\overset{\circ}{y}_n)$, където $\overset{\circ}{y}=\psi_2(\overset{\circ}{x})$, т. е.*

$$\frac{D(z)}{D(x)}=\frac{D(z)}{D(y)}\cdot\frac{D(y)}{D(x)} \tag{3.24}$$

или в подробен запис

$$\frac{D(z_1,\ldots,z_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}=\frac{D(z_1,\ldots,z_n)}{D(y_1,\ldots,y_n)}\cdot\frac{D(y_1,\ldots,y_n)}{D(x_1,\ldots,x_n)}.$$

Доказателство на лема 1. За всеки $i=1,2,\ldots,n$ и $k=1,2,\ldots,n$ елементът $\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(\overset{\circ}{x})$, стоящ в k-тия ред и i-тия стълб на якобиана $\frac{D(z)}{D(x)}$, взет в точката $\overset{\circ}{x}=(\overset{\circ}{x}_1,\ldots,\overset{\circ}{x}_n)$, по правилото за диференциране на сложна функция е равен на

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k}(\overset{\circ}{x})=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial z_i}{\partial y_l}(\overset{\circ}{y})\cdot\frac{\partial y_l}{\partial x_k}(\overset{\circ}{x}), \tag{3.25}$$

където $\overset{\circ}{x}=\psi_2(\overset{\circ}{x})$.

Но по правилото за умножение на детерминанти равенството (3.25) означава, че якобианът $\frac{D(z)}{D(x)}$, взет в точката $\overset{\circ}{x}$, е равен на произведението на якобиана $\frac{D(y)}{D(x)}$, взет в точката $\overset{\circ}{x}$, и якобиана $\frac{D(z)}{D(y)}$, взет в точката $\overset{\circ}{y}$. Лема 1 е доказана.

Нека напомним, че линейно преобразование на координатите се нарича преобразование от вида

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{3.26}$$

където a_{ik} ($i,k=1,2,\ldots,n$) са произволни константи.

За линейното преобразование (3.26) якобианът $\frac{D(y)}{D(x)}$ съвпада с детерминантата на матрицата на това преобразование $T=\|a_{ij}\|$, т. е.

$$\frac{D(y)}{D(x)}=\det T. \tag{3.27}$$

Ако тези детерминанта е различна от нула, то линейното преобразование (3.26) се нарича неизродено. В този случай съществува обратното преобразование, също линейно и неизродено, и уравненията (3.26) могат да бъдат решени относно $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Линейното преобразование (3.26) накратко ще означаваме със символа $y=Tx$, а обратното му преобразование — със символа $x=T^{-1}y$.

Основната цел на следващите три леми е доказателството на факта, че за неизродено линейно преобразование (3.26) и за всяка непрекъсната функция $f(y)$ е вярна формулата за смяна на променливите (3.23), която поради формула (3.27) може да се представи във вида

$$\int_D f(y)dy=\int_{D'} f(Tx)\,|\det T|\,dx=|\det T|\cdot\int_{D'} f(Tx)dx, \tag{3.28}$$

където $D'=T^{-1}D$.

Отначало ще разгледаме две линейни преобразования от специален вид:

1) линейното преобразование T_{ij}, което към i-тата координата прибавя j-тата координата, а всички останали координати се запазват:

$$\begin{aligned} y_k &= x_k \quad \text{при } k=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n, \\ y_i &= x_i + x_j, \end{aligned}$$

накратко записано като $y = T_{ij}x$;

2) линейното преобразование T_i^λ, което умножава i-тата координата с число $\lambda \neq 0$, а всички останали координати се запазват:

$$\begin{cases} y_k = x_k & \text{при } k=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n, \\ y_i = \lambda x_i, \end{cases}$$

накратко записано като $y = T_i^\lambda x$.

Лесно се вижда, че

$$\det T_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 \ldots 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad \det T_i^\lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix} = \lambda$$

и следователно преобразованията T_{ij} и T_i^λ са неизродени.

Лема 2. *За преобразованията T_{ij} и T_i^λ и за всяка непрекъснатата в областта D функция $f(y)$ е вярна формулата за смяна на променливите* (3.28).

Доказателство на лема 2. Нека R е n-мерен правоъгълен паралелепипед, съдържащ D, а функцията $F(y)$ е зададена с

$$F(y) = \begin{cases} f(y) & \text{при } y \in D, \\ 0 & \text{при } y \in R \setminus D. \end{cases}$$

Достатъчно е да докажем, че

$$\int_R F(y)\,dy = \int_{T^{-1}R} F(Tx)\,|\det T|\,dx, \tag{3.28*}$$

където символът T означава едно от преобразованията T_{ij} или T_i^λ.

Ако R е правоъгълният паралелепипед

$$\{(y_1, \ldots, y_n):\ a_k \le y_k \le b_k,\ k=1, 2, \ldots, n\},$$

то $[T_i^\lambda]^{-1} R$ е отново правоъгълен паралелепипед

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n) : a_k \le x_k \le b_k,\ k \neq i,\ \frac{a_i}{\lambda} \le x_i \le \frac{b_i}{\lambda} \right\} \text{ при } \lambda > 0 \text{ или}$$

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n) : a_k \le x_k \le b_k,\ k \neq i,\ \frac{b_i}{\lambda} \le x_i \le \frac{a_i}{\lambda} \right\} \text{ при } \lambda < 0,$$

а $[T_{ij}]^{-1} R$ е измеримата област

$$\{(x_1, \ldots, x_n) : a_k \le x_k \le b_k,\ k \neq i,\ a_i - x_j \le x_i \le b_i - x_j\}.$$

От формулата за повторно интегриране (3.18) получаваме

$$\int_R F(y)\,dy = \tag{3.29}$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{i-1}}^{b_{i-1}} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \left[\int_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i \right] dy_1 \ldots dy_{i-1}\,dy_{i+1} \ldots dy_n.$$

Прилагайки в еднократния интеграл по променливата y_i формулата за смяна на променливите $y_i = \lambda x_i$ за случая на преобразование T_i^λ и $y_i = x_i + x_j$ за случая на преобразование T_{ij} (вж. § 5, глава 9, част I), получаваме:

а) за случая на преобразование T_i^λ

$$\int_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{a_i/\lambda}^{b_i/\lambda} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,\lambda\,dx_i & \text{при } \lambda > 0, \\ \displaystyle\int_{b_i/\lambda}^{a_i/\lambda} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, \lambda x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)(-\lambda)\,dx_i & \text{при } \lambda < 0; \end{cases} \tag{3.30¹}$$

б) за случая на преобразование T_{ij}

$$\int_{a_i}^{b_i} F(y_1, \ldots, y_n)\,dy_i = \int_{a_i - x_j}^{b_i - x_j} F(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i + x_j, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,dx_i. \tag{3.30²}$$

Замествайки (3.30¹) (или (3.30²)) в (3.29), използувайки отново формулата за повторно интегриране (3.18) и отчитайки, че

$$|\det T| = \begin{cases} 1, & \text{ако } T = T_{ij}, \\ |\lambda|, & \text{ако } T = T_i^\lambda, \end{cases}$$

а също полагайки $y_k = x_k$ при $k=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, получаваме равенството (3.28*). Лема 2 е доказана.

Лема 3. *Всяко неизродено линейно преобразование (3.26) може да се представи като суперпозиция на краен брой преобразования от вида T_{ij} или T_i^λ за $\lambda \neq 0$.*

Доказателство на лема 3. Ще разделим доказателството на 3 стъпки.

1 стъпка. Ще покажем, че линейното преобразование T', сменящо местата на i-тата и j-тата координата (при запазване на останалите координати), може да се представи като суперпозиция на шест преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ.

Наистина, запазвайки в записа на $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ само i-тата и j-тата координата (останалите се запазват непроменени), имаме

$$(x_i, x_j) \xrightarrow[T_{ij}]{} (x_i + x_j, x_j) \xrightarrow[T_i^{-1}]{} (-x_i - x_j, x_j) \xrightarrow[T_{ji}]{}$$

$$\longrightarrow (-x_i - x_j, -x_i) \xrightarrow[T_i^{-1}]{} (-x_i - x_j, x_i) \xrightarrow[T_{ij}]{}$$

$$\longrightarrow (-x_j, x_i) \xrightarrow[T_i^{-1}]{} (x_j, x_i),$$

т. е. $T' = T_i^{-1} T_{ij} T_i^{-1} T_{ji} T_i^{-1} T_{ij}$.

2 стъпка. С краен брой смени на местата на два реда или стълба (т. е. с краен брой преобразования от вида T') всяко линейно неизродено преобразование може да се доведе до линейно преобразование с матрица $\|a_{ij}\|$, всички главни миньори на която са различни от нула, т. е.

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

3 стъпка. Остава да се докаже, че линейно преобразование с различни от нула главни миньори може да се представи като суперпозиция на линейни преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ. Това ще докажем по индукция.

За $k=1$ разглеждаме преобразование T с матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = a_{11} \neq 0.$$

Преобразованието $T_1^{a_{11}}$ изобразява $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $(a_{11}x_1, x_2, \ldots, x_n) = Tx$, т. е. $T = T_1^{a_{11}}$ и твърдението е вярно.

Разглеждаме сега преобразования T с матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Предполагаме, че такива преобразования T могат да се представят като суперпозиция на преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ, т. е. съществуват краен брой преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ, изобразяващи $x = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ в

$$\{a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k, \ldots, a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\} = Tx. \tag{3.31}$$

Трябва да докажем, че с помощта на суперпозиция на краен брой преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ векторът (3.31) може да се приведе във вида

$$\begin{aligned} &(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1(k+1)}x_{k+1}, \ldots, a_{k1}x_1 + \cdots + a_{k(k+1)}x_{k+1}, \\ &a_{(k+1)1}x_1 + \cdots + a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{3.32}$$

т. е. преобразование T с матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1(k+1)} & & & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k(k+1)} & & & \\ a_{(k+1)1} & \ldots & a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

може да се представи като суперпозиция на краен брой преобразования от вида T_{ij} и T_i^λ.

За да докажем това, отначало за всеки номер $i = 1, 2, \ldots, k$, за който елементът $a_{i(k+1)} \neq 0$, извършваме преобразование, което е суперпозиция на три преобразования:

$$T_{k+1}^{1/a_{i(k+1)}} \; T_{i(k+1)} \; T_{k+1}^{a_{i(k+1)}}$$

(за тези i, за които $a_{i(k+1)} = 0$, такова преобразование не извършваме). Суперпозицията на всички такива тройки от преобразования за $i = 1, 2, \ldots, k$ изобразява вектора (3.31) в

$$[(a_{11}x_1+\dots+a_{1k}x_k+a_{1(k+1)}x_{k+1},\dots,a_{k1}x_1+\dots+a_{kk}x_k+ \tag{3.34}$$
$$+a_{k(k+1)}x_{k+1},\ x_{k+1},\ x_{k+2},\dots,x_n).$$

Тъй като миньорът Δ_k на матрицата (3.33) е различен от нула, то различна от нула е и равната му детерминанта на матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Следователно съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}$ такива, че сумата на редовете на матрицата (3.35), умножени с тези числа, е

$$(a_{(k+1)1},\dots,a_{(k+1)k},\ a_{(k+1)(k+1)}),$$

т. е. е равна на първите $k+1$ елемента на $(k+1)$-вия ред на матрицата (3.33).

Това означава, че ако за всяко $j=1, 2, \dots, k+1$ такова, че $\lambda_j \neq 0$, извършим суперпозицията от трите преобразувания $T_j^{1/\lambda_j} T_{(k+1)j} T_j^{\lambda_j}$ (за тези j, за които $\lambda_j=0$, не извършваме съответната суперпозиция), то суперпозицията на всички тройки преобразувания изобразява вектора (3.34) във вектора (3.32).

С това лема 3 е доказана по индукция.

Лема 4. *За всяко неизродено линейно преобразование* (3.26) *и всяка непрекъсната в областта D функция f е вярна формулата за смяна на променливите* (3.28).

Наистина формула (3.28) е вярна за всяко от преобразованията T_{ij} и T_i^{λ} (лема 2), но всяко неизродено линейно преобразование се представя като суперпозиция на преобразувания (лема 3), като якобианът на тази суперпозиция от преобразования е равен на произведението от якобианите им (лема 1).

Следствие от лема 4. *Ако G е произволна измерима област в E^n, T е произволно линейно неизродено преобразование, то n-мерният обем $V(G)$ на областта G и n-мерният обем $V(TG)$ на образа ѝ TG са свързани с равенството*

$$V(TG)=|\det T|\,.\,V(G). \tag{3.36}$$

За доказателството на това твърдение е достатъчно във формула (3.28) да положим $D=TG$, $D'=T^{-1}D=G$ и $f(y)\equiv 1$ в областта D.

Нека сега е дадено произволно преобразование (3.21) или (3.21*) и са изпълнени условията на теорема 3.8.

При това двата интеграла в (3.23) съществуват, ако $D'=\psi^{-1}(D)$ е измерима област, така че е необходимо да докажем измеримостта на D' и равенството на интегралите в (3.23).

Нека $\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}(x)=J_{ij}(x)$ $(i, j=1, 2, \dots, n)$ са елементите на матрицата на Якоби, взети в точката $x=(x_1,\dots,x_n)$, а самата матрица на Якоби $\|J_{ij}(x)\|$ означаваме с $J_\psi=J_\psi(x)$. Наричаме норма на точката $x=(x_1,\dots,x_n)$ величината $\|x\|=\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|$, а норма на матрицата $A=\|a_{ij}\|$ $(i, j=1,\dots,n)$ числото $\|A\|=\max\limits_{1\le i\le n}\left[\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right]$. Очевидно, че ако $y=Ax$, то

$$\|y\|=\|Ax\|\le\|A\|\,.\,\|x\|. \tag{3.37}$$

Освен това е ясно, че за единичната матрица имаме $\|E\|=1$.

Лема 5. Ако са изпълнени условията на теорема 3.8 и C е n-мерен координатен куб, принадлежащ на областта D', то n-мерният обем на куба C и n-мерният обем на образа му $\psi(C)$ са свързани с неравенството

$$V(\psi(C))\le[\max_{x\in C}\|J_\psi(x)\|]^n\,.\,V(C). \tag{3.38}$$

Доказателство на лема 5. Нека C е n-мерен куб с център в точката $\mathring{x}=(\mathring{x}_1,\dots,\mathring{x}_n)$ и със страна $2s$. Тогава кубът C може да се определи с неравенството

$$\|x-\mathring{x}\|\le s. \tag{3.39}$$

От формулата на Тейлър за функцията на n променливи $\psi_i(x)$ (вж. п. 3, § 5, глава 13, част I) съществува число θ_i в интервала $(0, 1)$ такова, че

$$\psi_i(x)-\psi_i(\mathring{x})=\sum_{j=1}^{n}J_{ij}[\mathring{x}+\theta_i(x-\mathring{x})](x_j-\mathring{x}_j).$$

Оттук и от формула (3.37) следва

$$\|\psi(x)-\psi(\mathring{x})\|\le(\max_{x\in C}\|J_{ij}(x)\|)\,.\,\|x-\mathring{x}\|. \tag{3.40}$$

Полагайки $y=\psi(x)$, $\mathring{y}=\psi(\mathring{x})$, от (3.40) и (3.39) получаваме

$$\|y-\mathring{y}\|\le s\,.\,\max_{x\in C}\|J_\psi(x)\|.$$

По такъв начин, ако точката x принадлежи на куб C със страна $2s$ и с център в точката $\mathring{x}$, то образът $y=\psi(x)$ на точката x принадлежи на куб с център в точката $\overset{0}{y}=\psi(\overset{0}{x})$ и със страна $2s \cdot \max_{x \in C} \|J_\psi(x)\|$. Следователно множеството $\psi(C)$ е измеримо и

$$V(\psi(C)) \leq [\max_{x \in C} \|J_\psi(x)\|]^n \cdot V(C).$$

С това лема 5 е доказана.

Следствие 1 от лема 5. *Ако са изпълнени условията на теорема 3.8 и областта G е измерима, то и нейният образ $\psi(G)$ е измерим. В частност, ако D е измерима, то и $D'=\psi^{-1}(D)$ е измерима.*

Действително границата на всяко измеримо множество G е множество с n-мерен обем нула, а такова множество съгласно лема 5 се преобразува в множество, чийто n-мерен обем също е нула. Измеримостта на областта $D'=\psi^{-1}(D)$ следва от това, че по условието на теорема 3.8 за преобразованието ψ^{-1} са изпълнени същите условия, както и за ψ.

Следствие 2 от лема 5. *Ако функцията $f(y)$ е интегруема в областта D, $D'=\psi^{-1}(D)$ и са изпълнени условията на теорема 3.8, то $f(\psi(x))$, а следователно и $f(\psi(x)) \cdot |\det J_\psi(x)|$ са интегруеми в D'.*

Лема 6. *Нека са изпълнени условията на теорема 3.8 и нека G е произволно измеримо подмножество на D', а $\psi(G)$ е образът му при преобразованието (3.21). Тогава за n-мерния обем на областта $\psi(G)$ е изпълнено неравенството*

$$V(\psi(G)) \leq \int_G |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{3.41}$$

Доказателство на лема 6. Първа стъпка. Ще докажем, че за всяко неизродено линейно преобразование T и за всеки n-мерен куб $C \subset D'$ е изпълнено неравенството

$$V(\psi(C)) \leq |\det T| \cdot [\max_{x \in C} \|T^{-1}J_\psi(x)\|]^n \cdot V(C). \tag{3.42}$$

Следствието от лема 4 гласи, че за всяко измеримо множество G и за всяко линейно преобразование T е изпълнено равенството (3.36)

$$V(TG) = |\det T| \cdot V(G).$$

Полагаме $G=T^{-1}\psi(C)$. Тогава $TG=T(T^{-1}\psi(C))=\psi(C)$ и

$$V(\psi(C)) = |\det T| \cdot V(T^{-1}\psi(C)). \tag{3.43}$$

Дясната страна на (3.43) оценяваме с помощта на неравенството (3.38), в което вместо преобразованието ψ разглеждаме суперпозицията на преобразованията $T^{-1}\psi$. Получаваме

$$V(\psi(C)) \leq |\det T| \cdot [\max_{x \in C} \|J_{T^{-1}\psi}(x)\|]^n \cdot V(C). \tag{3.44}$$

От лема 1 $J_{T^{-1}\psi}=J_{T^{-1}}J_\psi=T^{-1}J_\psi$, защото матрицата на Якоби на линейно преобразование съвпада с матрицата на това преобразование. Но това означава, че неравенството (3.44) може да бъде записано като (3.42). С това неравенството (3.42) е доказано.

Втора стъпка. Сега ще докажем неравенството (3.41). Покриваме пространството E^n с мрежа от n-мерни кубове със страна h. Нека $C_1, C_2, \dots, C_{m(h)}$ са тези кубове, които изцяло се съдържат в G, и нека $G_h=\bigcup_{1\leq k\leq m(h)} C_k$.

Във всеки от кубовете C_k фиксираме произволна точка x_k и записваме за всеки такъв куб C_k неравенството (3.42), като полагаме $T=J_\psi(x_k)$. Получаваме

$$V(\psi(C_k)) \leq |\det J_\psi(x_k)| \cdot \{\max_{x \in C_k} \|[J_\psi(x_k)]^{-1} \cdot J_\psi(x)\|\}^n \cdot V(C_k). \tag{3.45}$$

Тъй като елементите на матрицата на Якоби са непрекъснати функции на променливата x в областта D', то функцията $\varphi(x,\xi)=\|[J_\psi(\xi)]^{-1}J_\psi(x)\|$ е непрекъсната (следователно и равномерно непрекъсната) функция на променливите x и ξ в областта $D'\times D'$. Поради това за всяко $\varepsilon>0$ можем да изберем такова $\delta>0$, че щом $\rho(\xi,\bar{\xi})<\delta$, $\rho(x,\bar{x})<\delta$, да имаме $|\varphi(x,\xi)-\varphi(\bar{x},\bar{\xi})|<\varepsilon$. Тъй като $\varphi(\xi,\xi)=1$, полагайки $\bar{x}=\bar{\xi}=\xi$, получаваме, че при $\rho(x,\xi)<\delta$ е изпълнено $\varphi(x,\xi)<\varepsilon$. По такъв начин, ако изберем $h<\delta$, то $\max\|[J_\psi(x_k)]^{-1}J_\psi(x)\|^n<1+\varepsilon$ (за всички k) и оценката (3.45) може да се запише във вида

$$V(\psi(C_k)) \leq (1+\varepsilon) \cdot |\det J_\psi(x_k)| \cdot V(C_k).$$

Сумирайки последното неравенство по всички $k=1,2,\dots,m(h)$, получаваме

$$V(\psi(G_h)) \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m(h)} |\det J_\psi(x_k)| \cdot V(C_k). \tag{3.46}$$

От твърдението, формулирано в края на § 4 на тази глава, следва, че границата при $h\to 0$ на дясната част на (3.46) съществува и е равна на $(1+\varepsilon)\int_G |\det J_\psi(x)|\, dx$ (ε е произволно положително число). Освен това $\lim_{h\to 0} G_h=G$, така че при $h\to 0$ от неравенството (3.46) получаваме неравенството (3.41). Лема 6 е доказана.

Лема 7. *Ако са изпълнени условията на теорема 3.8 и освен* *това предполагаме, че функцията $f(y)$ е неотрицателна в D, то е вярна формулата за смяна на променливите* (3.23).

Доказателство на лема 7. Покриваме пространството E^n с мрежа от n-мерни кубове със страна h и означаваме с $C_1, C_2, \ldots, C_{m(h)}$ тези от кубовете, които изцяло се съдържат в D. Нека $G_k = \psi^{-1}(C_k)$. За всяка от областите G_k записваме неравенството (3.41)

$$V(C_k) \leq \int_{G_k} |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{3.47}$$

Умножаваме двете страни на (3.47) с m_k, където

$$m_k = \inf_{C_k} f(y) = \inf_{G_k} f[\psi(x)],$$

и сумираме получените неравенства по k от 1 до $m(h)$:

$$\sum_{k=1}^{m(h)} m_k V(C_k) \leq \sum_{k=1}^{m(h)} m_k \int_{G_k} |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{3.48}$$

По формулата за средните стойности имаме

$$\int_{G_k} f[\psi(x)]\, |\det J_\psi(x)|\, dx = \mu_k \int_{G_k} |\det J_\psi(x)|\, dx,$$

където $\mu_k \in [m_k, M_k]$, $M_k = \sup_{G_k} f[\psi(x)]$. Следователно

$$m_k \int_{G_k} |\det J_\psi(x)|\, dx \leq \mu_k \int_{G_k} |\det J_\psi(x)|\, dx = \int_{G_k} f[\psi(x)]\, |\det J_\psi(x)|\, dx$$

и неравенството (3.48) може да се усили:

$$\sum_{k=1}^{m(h)} m_k V(C_k) \leq \sum_{k=1}^{m(h)} \int_{G_k} f[\psi(x)] \,.\, |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{3.49}$$

От твърдението, формулирано в края на § 4 на тази глава, получаваме, че лявата страна на (3.49) при $h \to 0$ има граница, равна на $\int_D f(y)dy$, и тъй като $\lim_{h\to 0} \sum_{k=1}^{m(h)} G_k = D' = \psi^{-1}(D)$, то при $h \to 0$ от (3.49) получаваме

$$\int_D f(y)\, dy \leq \int_{D'} f[\psi(x)] \,.\, |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{3.50}$$

Сменяйки в горните разсъждения ролята на D и D', разглеждайки в D' функцията $g(x) = f[\psi(x)]\, |\det J_\psi(x)|$, и използвайки лема 1 и

теоремата за детерминантата на произведение на две матрици, получаваме обратното неравенство

$$\int_{D'} f[\psi(x)] \,.\, |\det J_\psi(x)|\, dx \leq \int_D f(y)\, dy. \tag{3.51}$$

От (3.50) и (3.51) следва формулата за смяна на променливите, с което лема 7 е доказана.

Доказателство на теорема 3.8. Нека $f(y)$ е произволна интегруема върху областта D функция и са изпълнени условията на теорема 3.8. От интегруемостта на функцията $f(y)$ в областта D следва, че съществува константа $M>0$ такава, че $|f(y)| \leq M$ в D. За всяка от неотрицателните функции $f_1(y) \equiv M$ и $f_2(y) = M - f(y)$ теорема 3.8 е вярна поради лема 7. Тогава от линейното свойство на интеграла следва верността на формулата (3.23) и за разликата $f_1(y) - f_2(y) = f(y)$. С това теорема 3.8 е доказана.

Забележка 1. В условията на теорема 3.8 може да се допуска анулирането на якобиана (3.22) върху някое подмножество S' на D' с n-мерен обем нула. Наистина множеството S може да се вложи в елементарна фигура C с произволно малък обем, като съгласно доказания вариант на теорема 3.8 имаме

$$\int_{\psi(D' \setminus C)} f(y)\, dy = \int_{D' \setminus C} f[\psi(x)]\, |\det J_\psi(x)|\, dx. \tag{3.52}$$

Извършваме във формулата (3.52) граничен преход по редица от елементарни фигури $\{C_k\}$, $S \subset C_k$, n-мерният обем $V(C_k)$ на които клони към нула, и получаваме, че формула (3.23) е валидна и в разглеждания случай.

Забележка 2. Както се вижда от примера, приведен по-долу, изискването за взаимноеднозначност на преобразованието ψ е съществено дори в случая на свързана област, в която е изпълнено условието $\det J_\psi(x) \neq 0$ за всички $x \in E^n$.

Пример. Нека $D' = \{(x_1, x_2) \in E^2\colon\ x_1 \in [0,1],\ x_2 \in [-2\pi, 2\pi]\}$, а $y = \psi(x)$ е зададено с равенствата

$$y_1 = e^{x_1} \cos x_2,$$
$$y_2 = e^{x_1} \sin x_2 .$$

Тогава $D = \psi(D') = \{(y_1, y_2) \in E^2\colon\ 1 \leq (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \leq e\}$.

Лесно се вижда, че якобианът на преобразованието ψ е $\det J_\psi(x) = e^{2x_1} \neq 0$ за всички $x \in E^2$. Освен това

$$\iint_D dy_1 dy_2 = \pi(e^2 - 1);$$

$$\iint_{D'} |\det J_{\psi}(x_1, x_2)|\, dx_1\, dx_2 = \int_{-2\pi}^{2\pi} \Big[\int_0^1 e^{2x_1} dx_1 \Big] dx_2 = 2\pi (e^2 - 1),$$

т. е. формулата за смяна на променливите не е валидна.

§ 6. Пресмятане на обеми на n-мерни тела

В § 4 на тази глава отбелязахме, че интегралът

$$I = \iint_D \dots \int 1\, dy_1\, dy_2 \dots dy_n \tag{3.53}$$

е равен на n-мерния обем $V(D)$ на областта D. Затова е естествено да наричаме величината $dy_1\, dy_2 \dots dy_n$ **елементарен обем** в разглежданата декартова координатна система $Oy_1 y_2 \dots y_n$.

С помощта на преобразованието (3.21) преминаваме от декартовите координати $y_1, y_2, \dots, y_n$ към нови, изобщо казано, криволинейни координати $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тъй като при такава смяна (съгласно формулата за смяна на променливите (3.23)) интегралът (3.53) се преобразува в

$$I = \iint_{D'} \dots \int \left| \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| dx_1\, dx_2 \dots dx_n,$$

то е естествено да наричаме величината

$$\left| \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

елементарен обем в криволинейната координатна система $x_1, x_2, \dots, x_n$.

И така модулът на якобиана характеризира «разтягането» (или «свиването») на обема при прехода от декартови координати $y_1, y_2, \dots, y_n$ към криволинейни координати $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Да пресметнем елементарния обем в сферични и цилиндрични координати.

1°. За сферичните координати в пространството E^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (r \geqq 0,\ \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi))$$

якобианът е

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = -r^2\sin\theta.$$

Следователно елементарният обем е $r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

2°. За цилиндричните координати в пространството E^3

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z \end{cases} \qquad (r \geqq 0,\ \varphi \in [0, 2\pi),\ z \in R)$$

якобианът е

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Следователно елементарният обем е $r\, dr\, d\varphi\, dz$. В частност за полярните координати в равнината елементарното лице е $r dr d\varphi$.

3°. В пространството E^n сферичните координати се определят с

$$\begin{cases} x_1 = r\sin\theta_1 \sin\theta_2 \dots \sin\theta_{n-1}, \\ x_m = r\cos\theta_{m-1} \prod\limits_{k=m}^{n-1} \sin\theta_k, \qquad m = 2, 3, \dots, n-1, \\ x_n = r\cos\theta_{n-1} \qquad (r \geqq 0,\ \theta_1 \in [0, 2\pi),\ \theta_m \in [0, \pi],\ m = 2, 3, \dots, n-1). \end{cases}$$

Якобианът е

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})} = r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k.$$

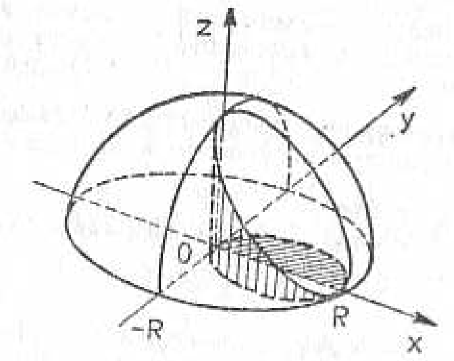
Следователно елементарният обем в n-мерни сферични координати е $r^{n-1} \prod\limits_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k\, d\theta_k\, dr$.

Примери. 1. Да се пресметне обемът V на тялото, което цилиндърът $x^2 + y^2 = Rx$ изрязва от кълбото $x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$ (фиг. 3.6)*.

Тялото е симетрично относно координатните равнини Oxy и Oxz и е разположено вдясно от равнината Oyz. Затова е достатъчно да се изчисли обемът на четвъртинката от тялото, лежаща в първи октант, т. е.

$$V = 4 \iiint_D dx\, dy\, dz,$$

* Тази фигура се нарича «тяло на Вивиани» по името на италиански математик от XVII в.



Фиг. 3. 6

$$D=\{(x,y,z)\in E^3 : x\in[0,R],\ y\in[0,\sqrt{Rx-x^2}],\ z\in[0,\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}]\}.$$

Преминаваме към цилиндрични координати. Областта D' се задава с

$$D'=\{(\varphi,r,z)\in E^3 : \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ r\in[0,\ R\cos\varphi],\ z\in[0,\sqrt{R^2-r^2}]\}.$$

От формулата за смяна на променливите получаваме

$$V=4\iiint\limits_{D'} r\,dr\,d\varphi\,dz=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{R\cos\varphi} r\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} 1.\,dz\,dr\,d\varphi=$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\int_0^{R\cos\varphi} r\sqrt{R^2-r^2}\,dr\,d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} R^3(1-\sin^3\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Получихме

$$V=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

Като запишем резултата във вида $V=\frac{2}{3}\pi R^3-\frac{8}{9}R^3$, забелязваме, че полученият обем е с $\frac{8}{9}R^3$ по-малък от обема на полукълбото, от което е изрязано тялото.

2. Да се пресметне интегралът

$$I=\iiint\limits_D \frac{xyz}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

където D е тялото, ограничено отгоре от повърхността

(3.54) $$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy,$$

а отдолу от равнината $z=0$.

Преминаваме към сферични координати. Уравнението на повърхността (3.54) приема вида

$$r^2=a^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi.$$

Забелязваме, че $z\geq 0$ за точките от повърхността на D и отчитайки симетричността на тялото относно оста Oz, след смяна на променливите получаваме

$$I=2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{a\sin\theta\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} r^3\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^3\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi\,.\int_0^{\pi/2}\sin^5\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{a^4}{144}.$$

3. Да се пресметне интегралът

$$I=\iint\limits_D\dots\int\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}\,dx_1\,dx_2\dots dx_n,$$

където D е n-мерното кълбо с радиус R и с център в началото на координатите $D=\{(x_1,\dots,x_n)\in E^n : \sum_{k=1}^n x_k^2\leq R^2\}$, $n\geq 2$.

Преминаваме към сферични координати в E^n. Областта е паралелепипедът

$$D'=\{(r,\theta_1,\dots,\theta_{n-1})\in E^n : r\in[0,R],\ \theta_1\in[0,2\pi],\ \theta_k\in[0,\pi],\ k=2,3,\dots,n-1\}.$$

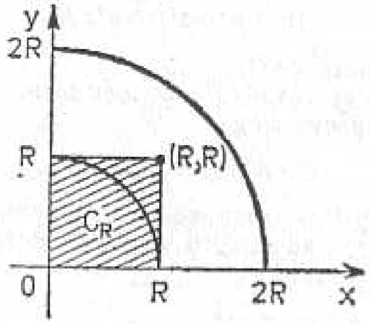
Формулите за смяна на променливите (3.23) и повторно интегриране (3.18) свеждат пресмятането на интеграла до

$$I=\int_0^R r^n dr\,.\int_0^{2\pi}d\theta_1\,.\int_0^{\pi}\sin\theta_2\,d\theta_2\dots\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta_{n-1}\,d\theta_{n-1}.$$

Използувайки формулата за пресмятане на интеграл от степените на синуса (вж. п. 4, § 5, глава 9, част I), получаваме

$$I=2\pi\frac{R^{n+1}}{n+1}A(n),$$

където



Фиг. 3. 7

$$A(n)=\begin{cases} \dfrac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(n-2)!!}\,\pi^{\frac{n}{2}}, & \text{ако } n \text{ е четно,}\\[2ex] \dfrac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!}\,\pi^{\frac{n-1}{2}}, & \text{ако } n \text{ е нечетно.}\end{cases}$$

4. Да се пресметне интегралът на Поасон

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx.$$

Разглеждаме в равнината областите

$$C_R=\{(x,y)\in E^2 : x^2+y^2\leq R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0\},$$
$$K_R=\{(x,y)\in E^2 : 0\leq x\leq R,\ 0\leq y\leq R\}$$

и неотрицателната функция на две променливи $e^{-(x^2+y^2)}$. На фиг. 3.7 са показани областите C_R, C_{2R} — четвъртинки от кръгове с радиуси R и $2R$ в първи квадрант — и областта K_R — защрихованият квадрат.

Тъй като $C_R\subset K_R\subset C_{2R}$, то

$$(3.55)\qquad \iint\limits_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\leq\iint\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\leq\iint\limits_{C_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

За средния интеграл в (3.55) получаваме

$$\iint\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\int_0^R e^{-x^2}\,dx\,.\int_0^R e^{-y^2}\,dy=\left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2.$$

За да пресметнем оставащите два интеграла, правим полярна смяна на координатите. Областта, която при това преобразование преминава в C_R, е

$$C'_R=\{(r,\varphi)\in E^2 : r\in[0,R],\ \varphi\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]\}.$$

Прилагаме формулата за смяна на променливите и получаваме

$$\iint\limits_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\iint\limits_{C'_R} e^{-r^2}r\,dr\,d\varphi=\int_0^{\pi/2} d\varphi\,.\int_0^R e^{-r^2}r\,dr=\frac{\pi}{4}\,(1-e^{-R^2}),$$

$$\iint\limits_{C_{2R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\frac{\pi}{4}\,(1-e^{-4R^2}).$$

Замествайки получените изрази в (3.55), получаваме

$$(3.56)\qquad \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-R^2}}\leq\int_0^R e^{-x^2}\,dx\leq\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{1-e^{-4R^2}}.$$

Преминавайки към граница в (3.56) при $R\to\infty$, получаваме

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Този елегантен начин за пресмятане принадлежи на Поасон.

§ 7. Теорема за почленно интегриране на редици и редове от функции

В § 4, глава 2 беше доказана теорема 2.8 за почленно интегриране на редица от функции $\{f_n(x)\}$ върху сегмент $[a, b]$ от реалната права. Аналогична теорема е вярна и в случая, когато редицата от функции е зададена и интегруема в някоя област в пространството E^m $(m\geq 1)$.

Теорема 3.9. Нека D е затворена ограничена измерима област в E^m. Ако редицата от функции $\{f_n(x)\}$ клони равномерно в D към функцията $f(x)$ и ако всяка от функциите $f_n(x)$ е интегруема в областта D, то и граничната функция е интегруема в тази област, като редицата може да се интегрира почленно в областта D, т.е.

$$\int\limits_D f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int\limits_D f_n(x)\,dx.$$

Доказателство. Фиксираме произволно $\varepsilon>0$. Както при доказателството на теорема 2.8, за доказателството на интегруемостта на f в областта D е достатъчно да се докаже, че съществува цяло число n такова, че за всяко деление на областта D голямата сума S и малката сума s на граничната функция $f(x)$ и голямата сума S_n и малката сума s_n на интегруемата в D функция $f_n(x)$ са свързани с неравенството

$$S-s\leqq(S_n-s_n)+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.57}$$

Разглеждаме произволно деление на областта D на краен брой частични области D_i $(i=1, 2, \dots, r)$ с произволна форма без общи вътрешни точки. Означаваме със символа $\omega_i(f_n)$ осцилацията на функцията $f_n(x)$ в областта D_i $(\omega_i(f_n)=\sup_{D_i} f_n(x)-\inf_{D_i} f_n(x))$, а със символа $\omega_i(f)$ — осцилацията в D_i на граничната функция $f(x)$.

Ще докажем, че за всяко достатъчно голямо n е изпълнено неравенството

$$\omega_i(f)\leqq\omega_i(f_n)+\frac{\varepsilon}{2\Delta D}, \quad i=1, 2, \dots, r, \tag{3.58}$$

където ΔD означава n-мерния обем на областта D (можем да считаме $\Delta D_i\neq 0$). Като умножим (3.58) с обемите ΔD_i на частичните области D_i и сумирайки получените неравенства по i, получаваме (3.57).

За всяко цяло n и за всеки две точки x' и x'' от областта D_i е в сила тъждеството

$$f(x')-f(x'')=[f(x')-f_n(x')]+[f_n(x')-f_n(x'')]+[f_n(x'')-f(x'')]. \tag{3.59}$$

Поради равномерната сходимост на редицата $\{f_n(x)\}$ към функцията $f(x)$ в D за всяко фиксирано $\varepsilon>0$ съществува n_0 такова, че за всяко $n>n_0$ и всяка точка $x\in D$ е изпълнено

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4\Delta D}. \tag{3.60}$$

Прилагайки в дясната страна на (3.59) неравенството (3.60) за точките $x=x'$ и $x=x''$ съответно, получаваме

$$|f(x')-f(x'')|\leqq|f_n(x')-f_n(x'')|+\frac{\varepsilon}{2\Delta D} \tag{3.61}$$

за всяко $n>n_0$ и за всеки две точки $x', x''\in D_i$.

От неравенството (3.61) следва

$$|f(x')-f(x'')|\leqq\omega_i(f_n)+\frac{\varepsilon}{2\Delta D},$$

от където получаваме неравенството (3.58).

С това доказателството на интегруемостта на граничната функция е завършено.

Възможността на почленно интегриране на редицата $\{f_n(x)\}$ следва от неравенството (3.60), изпълнено за всяко $x\in D$, и от отбелязания в § 4 факт: стойността на интеграла $\int_D 1\,dx$ е равна на n-мерния обем ΔD на областта D. С това теорема 3.9 е доказана.

Ще приведем формулировката на теорема 3.9 на езика на редове от функции.

Ако редът от функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \qquad (x=(x_1, x_2, \dots, x_m)\in E^m)$$

е сходящ равномерно към сумата си $S(x)$ в някоя ограничена затворена измерима област $D\subset E^m$ и ако всеки член на реда $u_k(x)$ е интегруема в областта D функция, то и сумата $S(x)$ е интегруема в областта D, като редът може да се интегрира почленно в областта D, т. е.

$$\int_D S(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_D u_k(x)dx.$$

§ 8. n-кратни несобствени интеграли

В този параграф понятието n-кратен интеграл се обобщава за случаите на неограничена област и неограничена подинтегрална функция. Понятието несобствен n-кратен интеграл е формулирано така, че да обхваща и двата отбелязани случая.

1. Понятие за n-кратни несобствени интеграли.

Нека D е отворено свързано множество в пространството E^m. Със символа $\overline{D}$ означаваме затворената обвивка на D, която се получава, като прибавим към множеството D неговата граница.

Определение 1. *Ще казваме, че редицата $\{D_n\}$ от отворени свързани множества* м о н о т о н н о з а п ъ л в а м н о ж е с т в о т о *D, ако: 1) за всяко цяло n е изпълнено $\overline{D}_n\subset D_{n+1}$; 2) обединението на всички множества D_n съвпада с D.*

Нека върху множеството D е дефинирана функция $f(x)$, интегруема по Риман върху всяко затворено измеримо подмножество на множеството D. Ще разглеждаме всевъзможни редици $\{D_n\}$ от отворени множества, монотонно запълващи множеството D, и такива, че затворената обвивка $\overline{D}_n$ на всяко множество D_n е измеримо множество (оттук в частност следва, че всяко от множествата D_n е ограничено).

Определение 2. *Ако за всяка такава редица $\{D_n\}$ съществува границата на числовата редица*

$$a_n = \int_{D_n} f(x)dx \tag{3.63}$$

и тази граница не зависи от избора на редицата $\{D_n\}$, то тази граница се нарича несобствен интеграл от функцията $f(x)$ върху областта D и се означава с един от следните символи:

$$\int_D f(x)dx \text{ или } \int\!\dots\!\int_D f(x_1, x_2, \dots, x_m)dx_1dx_2\dots dx_m. \tag{3.64}$$

При това несобственият интеграл (3.64) се нарича сходящ.

Нека отбележим, че символите (3.64) се използуват и в случая, когато границата на редицата (3.63) не съществува. В този случай интегралът (3.64) се нарича разходящ.

2. Два признака за сходимост на несобствени интеграли от неотрицателни функции

Теорема 3.10. *За сходимостта на несобствения интеграл (3.64) от неотрицателната в областта D функция $f(x)$ е необходимо и достатъчно да съществува редица от измерими области $\{D_n\}$, монотонно запълващи D, за която числовата редица (3.63) е ограничена.*

Доказателство. Необходимост. Сходимостта на несобствения интеграл (3.64) по определение означава, че редицата $\{a_n\}$, зададена с равенството (3.63), е сходяща за всяка редица от области $\{D_n\}$, монотонно запълващи D, и следователно редицата $\{a_n\}$ е ограничена за всяка такава редица $\{D_n\}$.

Достатъчност. Нека редицата (3.36) е ограничена. Следователно тя е сходяща, защото е ненамаляваща ($\overline{D}_n \subset \overline{D}_{n+1}$ и $f(x) \geq 0$). Означаваме границата ѝ с I. Остава да се докаже, че ако изберем друга редица от измерими области $\{D_n'\}$, монотонно запълващи D, то редицата

$$a_n' = \int_{D_n'} f(x)dx$$

има за граница същото число I. Нека n_0 е фиксирано. Разглеждаме множеството $\overline{D}_{n_0}'$. Ще докажем, че съществува такова n_1, че $\overline{D}_{n_0}' \subset D_{n_1}$. Ако допуснем противното, то за всяко k съществува

точка $M_k \in \overline{D}_{n_0}'$ такава че $M_k \notin D_k$. Поради затвореността и ограничеността на множеството $\overline{D}_{n_0}'$ от редицата $\{M_k\}$ може да се избере подредица, сходяща към някоя точка M, принадлежаща на $\overline{D}_{n_0}'$. Точката M заедно с някоя своя околност принадлежи на някое множество D_{k_1}. Но тогава на това множество D_{k_1} (и на всички множества D_k с $k > k_1$) ще принадлежат точки от редицата $\{M_k\}$ с произволно големи индекси. А това противоречи на избора на точките M_k.

И така съществува индекс n_1 такъв, че $\overline{D}_{n_0}' \subset D_{n_1}$. Следователно

$$a_{n_0}' \leq a_{n_1} \leq I,$$

откъдето следва, че редицата $\{a_n'\}$ има за граница някое число $I' \leq I$. Сменяйки в горните разсъждения местата на редиците $\{a_n'\}$ и $\{a_n\}$, достигаме до неравенството $I \leq I'$. Следователно $I' = I$ и теоремата е доказана.

В края на § 6 на тази глава бе даден пример (пример 4) за пресмятане на несобствения интеграл

$$I = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{C_n} e^{-x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{4},$$

където
$$C_n = \{(x, y) \in E^2,\ x^2+y^2 \leq n^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\},$$
$$n = 1, 2, \dots, \quad D = \{(x, y) \in E^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

(в пример 4, § 6 трябва само да се смени означението R с n).

Теорема 3.11 (общ признак за сравнение). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ навсякъде в отвореното множество D удовлетворяват условието

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Тогава от сходимостта на несобствения интеграл $\int_D g(x)dx$ следва сходимостта на несобствения интеграл $\int_D f(x)dx$, а от разходимостта на $\int_D f(x)dx$ следва разходимостта на $\int_D g(x)dx$.

Доказателство. Нека $\{D_n\}$ е редица от измерими области, монотонно запълващи областта D. Поради очевидните неравенства

$$a_n = \int_{D_n} f(x)dx \leq \int_{D_n} g(x)dx = b_n$$

от ограничеността на $\{b_n\}$ следва ограничеността на $\{a_n\}$ и от неограничеността на $\{a_n\}$ следва неограничеността на $\{b_n\}$ (за всяка редица от области $\{D_n\}$). Оттук и от теорема 3.10 получаваме теорема 3.11.

Обикновено за проверка на сходимостта на несобствени интеграли се използуват стандартни (еталонни) функции за сравнение. Най-често употребяваните такива функции са $g(x)=|x|^{-p}$, $p>0$, $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2}$. Лесно проверяваме, че ако областта D е кълбо с радиус R ($R>0$) и с център в началото на координатната система, то несобственият интеграл от функцията $|x|^{-p}$ върху областта D е сходящ при $p<m$ и разходящ при $p\geq m$. Ако D е външността на горното кълбо, то несобственият интеграл от функцията $|x|^{-p}$ върху областта D е сходящ при $p>m$ и разходящ при $p\leq m$.

3. Несобствени интеграли от знакопроменливи функции

В тази подточка изучаваме връзките между сходимост и абсолютна сходимост на m-кратни несобствени интеграли. Както и в едномерния случай, несобственият интеграл $\int\limits_D f(x)dx$ се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ интегралът $\int\limits_D |f(x)|dx$. За разлика от едномерния случай от сходимостта на един m-кратен интеграл ($m\geqq 2$) следва неговата абсолютна сходимост.

Теорема 3.12. За несобствените m-кратни интеграли понятията сходимост и абсолютна сходимост са еквивалентни при $m\geqq 2$, при условие че собствените интеграли, чиято граница търсим, са добре дефинирани.

Доказателство. 1. Ще докажем, че от абсолютната сходимост на m-кратния несобствен интеграл в областта D следва неговата обикновена сходимост в тази област. Разглеждаме двете неотрицателни функции

$$f_+(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2},\quad f_-(x)=\frac{|f(x)|-f(x)}{2} \tag{3.65}$$

и ги представяме в следния вид:

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{ако } f(x)\geqq 0;\\ 0, & \text{ако } f(x)<0;\end{cases}\qquad f_-(x)=\begin{cases} -f(x), & \text{ако } f(x)\leqq 0;\\ 0, & \text{ако } f(x)>0.\end{cases} \tag{3.66}$$

Следните съотношения се получават непосредствено от определението на функциите f_+ и f_-:

$$0\leqq f_+(x)\leqq|f(x)|,\quad 0\leqq f_-(x)\leqq|f(x)|, \tag{3.67}$$

$$f(x)=f_+(x)-f_-(x),\quad |f(x)|=f_+(x)+f_-(x). \tag{3.68}$$

От интегруемостта в собствен смисъл на функцията $f(x)$ върху всяка измерима подобласт на областта D следва интегруемостта върху всяка такава подобласт и на функцията $|f(x)|$, а следователно и на функциите $f_+(x)$ и $f_-(x)$ (чрез формулите (3.65)). От сходимостта на интеграла $\int\limits_D |f(x)|\,dx$, току-що показаното свойство на функциите $f_+(x)$ и $f_-(x)$, неравенствата (3.67) и теорема 3.11 получаваме, че несобствените интеграли $\int\limits_D f_+(x)dx$ и $\int\limits_D f_-(x)dx$ са сходящи в несобствен смисъл. От определението за несобствен интеграл следва, че ако са сходящи несобствените интеграли от функциите $f_+(x)$ и $f_-(x)$ върху областта D, то върху тази област са сходящи сумата и разликата на тези функции. От първото равенство в (3.68) следва сходимостта на интеграла $\int\limits_D f(x)dx$. Първата част на теоремата е доказана.

2. Нека многократният несобствен интеграл $\int\limits_D f(x)dx$ е сходящ. Ще покажем, че той е абсолютно сходящ. Допускаме, че това не е вярно. Тогава от теорема 3.10 следва, че редицата от интеграли от функцията $|f(x)|$ върху всяка редица от измерими множества $\{D_n\}$, монотонно запълващи D, е монотонно растяща към безкрайност редица. В частност редицата $\{D_n\}$ може да бъде избрана така, че за всяко $n=1, 2, \ldots$ е изпълнено неравенството

$$\int\limits_{D_{n+1}} |f(x)|dx>3\int\limits_{D_n} |f(x)|\,dx+2n+4 \tag{3.69}$$

(достатъчно е да се вземе коя да е редица $\{D_n\}$ и да се «разреди» така, че неравенството (3.69) да е изпълнено за получената подредица). Означаваме с p_n множеството $D_{n+1}\setminus D_n$. Тогава от (3.69) получаваме, че за всяко n е в сила

$$\int\limits_{\bar{P}_n} |f(x)|\,dx>2\int\limits_{\bar{D}_n} |f(x)|+2n+4. \tag{3.70}$$

От второто равенство в (3.68) следва, че

$$\int\limits_{\bar{P}_n} |f(x)|\,dx=\int\limits_{\bar{P}_n} f_+(x)dx+\int\limits_{P_n} f_-(x)dx. \tag{3.71}$$

Фиксираме произволно цяло n. Нека за това n първият интеграл в дясната част на (3.71) е по-голям от втория. Тогава от (3.70) и (3.71) получаваме

$$\int_{P_n} f_+(x)dx > \int_{\widetilde{D}_n} |f(x)|dx + n + 2. \tag{3.72}$$

Разделяме областта P_n на краен брой области P_n^i така, че малката сума $\sum_i m_i \Delta P_n^i$ на функцията $f_+(x)$ (тук $m_i = \inf_{P_n^i} f_+(x)$ и ΔP_n^i е m-мерният обем на P_n^i) за това деление да удовлетворява неравенството

$$0 \leq \int_{P_n} f_+(x)dx - \sum_i m_i \Delta P_n^i < 1.$$

Тогава, заменяйки в лявата част на (3.72) интеграла с малката сума, получаваме неравенството

$$\sum_i m_i \Delta P_n^i > \int_{\widetilde{D}_n} |f(x)|dx + n + 1. \tag{3.73}$$

Тъй като $m_i \geq 0$, то в сумата $\sum_i m_i \Delta P_n^i$ можем да оставим само тези членове, за които $m_i > 0$, като неравенството (3.73) продължава да е в сила. Означаваме с $\widetilde{P}_n$ обединението на областите P_n^i, съответствуващи на останалите в сумата събираеми.

В областта $\widetilde{P}_n$ функцията $f_+(x)$ е положителна и затова $f_+(x) = f(x)$ в тази област (вж. (3.66)). Следователно от (3.73) получаваме неравенството

$$\int_{\widetilde{P}_n} f(x)dx > \int_{\widetilde{D}_n} |f(x)|dx + n + 1. \tag{3.74}$$

Означаваме с D_n^* обединението на D_n и $\widetilde{P}_n$. Тогава, събирайки неравенството (3.74) и тривиалното неравенство

$$\int_{\widetilde{D}_n} f(x)dx \geq -\int_{\widetilde{D}_n} |f(x)|dx,$$

получаваме

$$\int_{D_n^*} f(x)dx > n + 1. \tag{3.75}$$

Ако за фиксираното n от двата интеграла в дясната страна на (3.71) по-голям беше вторият, провеждайки подобни разсъждения и отчитайки, че в областта $\widetilde{P}_n$ е вярно $f_-(x) = -f(x)$, получаваме

$$\int_{D_n^*} f(x)dx < -n - 1. \tag{3.76}$$

От неравенствата (3.75) и (3.76) следва, че за всяко $n = 1, 2, \ldots$ е в сила

$$\left| \int_{D_n^*} f(x)dx \right| > n + 1. \tag{3.77}$$

Редицата от области $\{D_n^*\}$ удовлетворява всички условия в определение 1 освен може би условието за свързаност на областите D_n^* (свързаността на областта D_n^* може да бъде нарушена, когато от областта P_n изваждаме тези области P_n^i, в които $m_i = 0$). *С малка деформация ще направим тези области свързани**.

Съединяваме всяка от областите P_n^i от $\widetilde{P}_n$ с областта D_n с m-мерна измерима свързана област K_n^i (която ще наричаме **канал**) така, че полученото множество да бъде свързано. Тъй като броят на областите P_n^i в $\widetilde{P}_n$ е краен, то и броят на каналите е краен. Означаваме обединението на всички канали с K_n. Ще наложим ограничение на m-мерния обем на каналите $V(K_n)$.

Тъй като функцията $f(x)$ е интегруема, а следователно и ограничена в P_n, то

$$\left| \int_{K_n} f(x)dx \right| \leq \int_{K_n} |f(x)|dx \leq M \cdot V(K_n),$$

където $M = \sup_{\widetilde{P}_n} |f(x)|$. Ще искаме m-мерният обем на каналите $V(K_n)$ да удовлетворява условието $V(K_n) < \frac{1}{M}$. Тогава

$$\left| \int_{K_n} f(x)\, dx \right| < 1. \tag{3.78}$$

От неравенствата (3.77) и (3.78) получаваме, че за всяко n е в сила неравенството

* Именно в този момент от доказателството съществено се използува, че $m \geq 2$. При $m = 1$ горните разсъждения не могат да бъдат проведени.

$$(3.79)\qquad \left|\int\limits_{D_n^* \cup K_n} f(x)dx\right| > n.$$

Ако $K_n \subset P_n$, което винаги може да бъде удовлетворено, то редицата от свързани измерими области $\{D_{2n}^* \cup K_{2n}\}$ монотонно запълва областта D, защото

$$\overline{D_{2n}^* \cup K_{2n}} \subset D_{2n+1} \subset D_{2(n+1)} \subset D_{2(n+1)}^* \cup K_{2(n+1)}.$$

От неравенствата (3.79) следва, че редицата от интеграли в лявата част на това неравенство е разходяща, т. е. несобственият интеграл $\int\limits_D f(x)\,dx$ е разходящ. Но по условие този интеграл е сходящ. Полученото противоречие доказва нашето твърдение. Теоремата е доказана напълно.

4. Главна стойност на n-кратен несобствен интеграл

Означаваме с $B(R, x_0)$ m-мерното кълбо с радиус R и с център в точката x_0 и нека началото на координатната система е точката $0 \in E^m$.

Определение. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко $x \in E^m$ и интегруема върху всяко кълбо $B(R, 0)$, $R>0$. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е интегруема по Коши в E^m, ако съществува границата*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(R,\,0)} f(x)dx.$$

Тази граница ще наричаме главна стойност в смисъл на Коши на несобствения интеграл от функцията $f(x)$ и ще означаваме с

$$V.p \int\limits_{E^m} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{B(R,\,0)} f(x)dx.$$

Пример. Не е трудно да се пресметне, че за функцията $f(x, y)=x$ в E^2 имаме

$$\int\limits_{B(R,\,0)} x\,dx\,dy = 0$$

и следователно функцията $f(x, y)=x$ е интегруема по Коши в E^2 и

$$V.p \int\limits_{E^2} x dx\,dy = 0.$$

Трябва да се отбележи, че несобственият интеграл $\int\limits_{E^2} xdxdy$ е разходящ.

В случай че функцията $f(x)$ има особеност в някоя точка x_0 в областта $D \subset E^m$ и $f(x)$ е интегруема във всяка област $D_R = D \setminus B(R, x_0)$, където $B(R, x_0) \subset D$ и $R>0$, то главна стойност на интеграл в смисъл на Коши се въвежда като

$$V.p \int\limits_D f(x)dx = \lim_{R\to 0} \int\limits_{D_R} f(x)dx.$$