

разстояние. Наличието на скалярното произведение позволява да се въведе в H понятието ъгъл между вектори (ако H е реално):

$$\cos(\hat{f}, \hat{g}) = (f, g) / \|f\| \cdot \|g\|.$$

Това понятие на свой ред позволява да наречем два вектора ортогонални, ако сключват ъгъл 90° . С други думи, векторите f и g се наричат ортогонални, ако $(f, g) = 0$.

Ако векторът f е ортогонален на векторите $g_1, g_2, \dots, g_n$, то той е ортогонален и на всяка тяхна линейна комбинация

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i.$$

Ако векторите $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ са ортогонални на вектора f и $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$, то векторът g е ортогонален на вектора f .

От казаното следва, че съвкупността от всички вектори, ортогонални на векторите $f_1, f_2, \dots, f_n$ (n е фиксирано), образуват затворено линейно многообразие, т. е. подпространство—ортонормално допълнение на множеството $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

В хилбертово пространство H може да се въведе важното понятие спрегат оператор.

Определение 10. Операторът A^* се нарича **спрегат** на линейния ограничени оператор A , ако за всеки два елемента $x, y \in H$ е изпълнено равенството $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Ограничен линейн оператор A , действащ в хилбертовото пространство H , се нарича **самоспрегат**, ако $(Ax, y) = (x, Ay)$ за всички $x, y \in H$.

Примери:

1. В n -мерното пространство E^n , елементи на което са наредените n -орки от числа $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, може да се въведе скалярно произведение с формулата

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i.$$

Понеже крайномерното пространство E^n е пълно, то е хилбертово пространство. Аксиомите за скалярно произведение са очевидно изпълнени.

2. Операторите E (единичен) и O (нулев) са примери за самоспрегнати оператори, действащи в хилбертовото пространство. За тях винаги са изпълнени съотношенията

$$(Ex, y) = (x, y) = (x, Ey), \quad (Ox, y) = (o, y) = 0 = (x, o) = (x, Oy).$$

13. Функции на няколко променливи

Много въпроси от естествознанието водят до разглеждане на зависимости между няколко променливи величини, при което стойността на една от тях напълно се определя от стойностите на останалите. Така например при разглеждане на която и да е физическа характеристика на тяло (например плътността ρ или температурата T) трябва да отчитаме изменението на тази характеристика при прехода от една точка на тялото към друга. Понеже всяка точка на тялото се определя с трите ѝ декартови координати x, y и z , то разглежданата характеристика (плътност ρ или температура T) се определя от стойностите на трите променливи x, y и z .

При разглеждане на физически процеси, изменящи се във времето, стойностите на физическите характеристики се определят от стойностите на четири променливи: трите координати на точката x, y и z и времето t . Например при изучаване на звукови трептения в газ плътността ρ и налягането p на този газ се определят от стойностите на четирите променливи x, y, z и t .

За изучаването на такъв вид зависимости в тази глава се въвежда понятието функция на няколко променливи и се развива апарат за изследване на такива функции. Първата част на тази глава е посветена на построяването на диференциалното смятане на функции на няколко променливи.

В случая на функции на няколко променливи ще бъдат обобщени много понятия и твърдения, установени в глави 3—7 за функции на една променлива.

Във втората част на тази глава се изучават елементи на диференциалното смятане за абстрактни функции, т. е. изображения на едно нормирано пространство в друго. Частичен случай на такава изображение е доста често срещаното изображение на m -мерно евклидово пространство в n -мерно евклидово пространство.

13.1. Понятие за функция на m променливи

13.1.1. Понятия за m -мерно координатно и m -мерно евклидово пространство. При излагане на теорията на функции на m променливи е удобно да се използва геометрична терминология, обобщаваща и формализираща нашите представи за равнината и за реалното (тримерно) геометрично пространство.

Ще наричаме m -мерно координатно пространство множеството на всички възможни наредени m -орки $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ от реални числа $x_1, x_2, \dots, x_m$. Ще означаваме m -мерното координатно пространство със символа A^m .

Всяка наредена m -орка $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ще наричаме точка на m -мерното координатно пространство и ще я означаваме с главна буква M . При това числата $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ ще наричаме координати на точката M . Записването $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ означава, че точката M има координати $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Забележка 1. Ако разглеждаме координатното пространство A^m като множество на вектори x с координати $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и определим за **сума** на векторите $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ вектора с координати $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m)$, а **произведение** на вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ с реалното число λ — вектора с координати $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m)$, то координатното пространство се превръща в линейно пространство.

Обобщение на понятията координатна равнина и тримерно координатно пространство е понятието m -мерното координатно пространство A^m . Понятията координатна равнина и тримерно координатно пространство са източници на удобна геометрична терминология, която се употребява при изучаването на m -мерното координатно пространство A^m .

Ще отбележим, че понятието m -мерно координатно пространство A^m се оказва недостатъчно. Не можем да мнем без измерване на разстояние между точките на това пространство. За въвеждане на понятието разстояние между точките на координатното пространство A^m е естествено да тръгнем от понятието разстояние между две точки в координатната равнина и в тримерното координатно пространство.

Определение. Координатното пространство A^m се нарича m -мерно евклидово пространство, ако за всеки две точки $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$

и $M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ на пространството A^m е определено разстояние, което се означава със символа $\rho(M', M'')$, като

$$(13.1) \quad \rho(M', M'') = [(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \dots + (x'_m - x''_m)^2]^{1/2}.$$

Ще означаваме m -мерното евклидово пространство със символа E^m .

Забележка 2. В курса по линейна алгебра се дава общо определение на евклидово пространство като линейно пространство, за което е посочено правило, съпоставящо на всеки два елемента x и y от това пространство едно реално число, наречено скалярно произведение на тези елементи, което се означава със символа (x, y) и удовлетворява четирите аксиоми: 1) $(x, y) = (y, x)$; 2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$; 3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$; 4) $(x, x) \geq 0$, при това $(x, x) = 0$ само за $x = 0$.

Лесно се проверява, че ако в пространството A^m елементите на което се разглеждат като вектори x с координати $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, се определи скалярно произведение на два елемента $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ чрез съотношението

$$(13.2) \quad (x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m,$$

то ще бъдат изпълнени изброените четирите аксиоми и пространството A^m ще бъде евклидово пространство (съгласно общото определение за евклидово пространство).

Ще напомним, че едно линейно пространство се нарича нормирано, ако е дадено правило, съпоставящо на всеки елемент x едно реално число, наречено норма на този елемент, означавано с $\|x\|$, като при това нормата удовлетворява трите аксиоми: 1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$; 2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$; 3) $\|x\| \geq 0$, при това $\|x\| = 0$ само когато $x = 0$.

13.1.2. Множество от точки в m -мерното евклидово пространство. Ако за функцията f на една независима променлива x с дефиниционна област някакво множество от точки $\{x\}$ от едно-мерното евклидово пространство E^1 заменим това множество $\{x\}$ с някакво множество $\{M\}$ от точки на m -мерното евклидово пространство E^m , естествено стигаме до понятието функция на m независими променливи.

Оттук е ясно, че въвеждането на функции на m променливи трябва да се предшества от описването на важни типове множества от точки в m -мерното евклидово пространство E^m .

Минаваме към описването на такива множества.

1^о **Множеството $\{M\}$ на всички точки M на пространството E^m с координати $x_1, x_2, \dots, x_m$ удовлетворяващи неравен-**

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2 < R^2,$$

се нарича **отворено m -мерно кълбо** с радиус R и център в точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

С други думи, отворено m -мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0 е множеството на всички точки M , от които разстоянието до фиксирана точка M_0 удовлетворява неравенството $\rho(M, M_0) < R$.

2°. Множеството $\{M\}$ на всички точки M от пространството E^m , чиито координати $x_1, x_2, \dots, x_m$ удовлетворяват неравенството

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2 \leq R^2,$$

се нарича **затворено m -мерно кълбо** с радиус R и център в точката $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$.

3°. Множеството $\{M\}$ на всички точки M от пространството E^m , чиито координати $x_1, x_2, \dots, x_m$ удовлетворяват равенството

$$(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2 = R^2,$$

се нарича **m -мерна сфера** с радиус R и център в точката $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$.

Забележка 1. Ще отбележим, че ако към отвореното m -мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0 присъединим m -мерната сфера с радиус R и център в точката M_0 , ще се получи затвореното m -мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0 .

4°. Отворено m -мерно кълбо с радиус $\varepsilon > 0$ и център в точката M_0 ще наричаме **ε -околност** на точката M_0 .

5°. Множеството $\{M\}$ на всички точки M с координати $x_1, x_2, \dots, x_m$, удовлетворяващи неравенствата

$$|x_1 - x_1^0| < d_1, |x_2 - x_2^0| < d_2, \dots, |x_m - x_m^0| < d_m,$$

където $d_1, d_2, \dots, d_m$ са някои положителни числа, се нарича **отворен m -мерен координатен паралелепипед с център в точката $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ или правоъгълна околност** на точката M_0 .

В сила е следното елементарно твърдение: Всяка ε -околност на точката M_0 съдържа правоъгълна околност на тази точка; всяка правоъгълна околност на точката M_0 съдържа някоя ε -околност на точката M_0 .

6°. Точката M от множеството $\{M\}$ на пространството E^m се нарича **вътрешна точка** за това множество, ако съществува ε -околност на точката M , всички точки на която принадлежат на множеството $\{M\}$.

7°. Точката M на пространството E^m се нарича **външна точка** за множеството $\{M\}$, ако съществува ε -околност на точката M , всички точки на която не принадлежат на множеството $\{M\}$.

8°. Точката M на пространството E^m се нарича **контурна точка** за множеството $\{M\}$, ако тази точка не е нито вътрешна, нито външна точка за множеството.

Забележка 2. Една контурна точка M за множеството $\{M\}$ може да принадлежи и да не принадлежи на това множество. Така например всяка точка на m -мерната сфера с радиус R и център в точката M_0 е контурна както за отвореното m -мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0 , така и за затвореното m -мерно кълбо с радиус R и център в точката M_0 . Но всяка точка от тази сфера не принадлежи на отвореното m -мерно кълбо с радиус R и център в M_0 и принадлежи на затвореното кълбо с радиус R и център в M_0 .

9°. Едно множество $\{M\}$ от точки на пространството E^m се нарича **отворено**, ако всяка точка на множеството е вътрешна точка.

10°. Произволно отворено множество, съдържащо дадена точка M_0 , се нарича **околност** на точката M_0 .

11°. Едно множество $\{M\}$ от точки на пространството E^m се нарича **затворено**, ако съдържа всичките си контурни точки.

За да дадем друго, еквивалентно определение на затворено множество, ще въведем понятието точка на съгъстяване за произволно множество $\{M\}$ в пространството E^m .

12°. Точката A на пространството E^m се нарича **точка на съгъстяване** за множеството $\{M\}$, ако във всяка ε -околност на точката A се съдържа поне една точка от това множество, различна от A .

Ще се убедим, че множеството $\{M\}$ е затворено тогава и само тогава, когато съдържа всичките си точки на съгъстяване. Наистина, ако множеството $\{M\}$ е затворено, то съдържа всичките точки на пространството E^m с изключение на външните си точки. Но понеже между външните точки на множеството $\{M\}$ няма негови точки на съгъстяване, то множеството $\{M\}$ съдържа всичките си точки на съгъстяване.

Ако множеството $\{M\}$ не съдържа поне една своя точка на съгъстяване M_0 , то не може да бъде затворено, тъй като тази точка M_0 (във всяка ε -околност на която ще се съдържа каквито точки, принадлежащи на множеството, така и точки, принадлежащи на множеството) е контурна точка за множеството $\{M\}$.

Доказаното твърдение позволява да се даде друго, еквивалентно определение на затворено множество: Множеството $\{M\}$ се

нарича затворено, ако съдържа всичките си точки на съставяне.

13°. Множеството $\{M\}$ от точки на пространството E^m се нарича **ограничено**, ако съществува m -мерно кълбо, съдържащо всички точки на това множество.

14°. Ще въведем понятието непрекъсната крива в m -мерното евклидово пространство E^m .

Непрекъсната крива L в пространството E^m ще наричаме множество $\{M\}$ от точки на това пространство, чийто координати $x_1, x_2, \dots, x_m$ са непрекъснати функции на параметъра t :

$$(13.3) \quad x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_m = \varphi_m(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Ще казваме, че точките $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ и $M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ на пространството E^m могат да се съединят с непрекъсната крива L , ако съществува такава непрекъсната крива L , определена с параметричните уравнения (13.3), че

$$x'_1 = \varphi_1(\alpha), \quad x'_2 = \varphi_2(\alpha), \quad \dots, \quad x'_m = \varphi_m(\alpha), \\ x''_1 = \varphi_1(\beta), \quad x''_2 = \varphi_2(\beta), \quad \dots, \quad x''_m = \varphi_m(\beta).$$

Понятието непрекъсната крива в пространството E^m позволява да се въведе понятието свързано множество.

15°. Множеството $\{M\}$ от точки на пространството E^m се нарича **свързано**, ако всеки две точки на това множество могат да се съединят с непрекъсната крива, всички точки на която принадлежат на множеството.

Всяко свързано множество $\{M\}$ от пространството E^m притежава следното свойство: Ако множеството $\{M\}$ е свързано, то не съществуват две непресичащи се отворени множества G' и G'' , за които сеенето на всяко от тях с $\{M\}$ не е празно и множеството $\{M\}$ се съдържа в обединението на G' и G'' .

Доказателството на това свойство ще проведем с допускане на противното. Приемаме, че съществуват две такива множества G' и G'' . Тъй като сеенето на всяко от тези множества с $\{M\}$ не е празно, то има две точки M' и M'' от множеството, първата от които принадлежи на G' , а втората на G'' .

За да получим противоречие, достатъчно е да установим, че точките M' и M'' не могат да се съединят с непрекъсната крива, всичките точки на която принадлежат на множеството $\{M\}$.

Да допуснем противното, че такава крива L съществува. Подреждаме всички точки на кривата L по нарастването на параметъра t , който се изменя в сегмента $\alpha \leq t \leq \beta$. Означаваме с γ точната горна граница на тези стойности на параметъра t , за които съответните точки от кривата L принадлежат на множеството G' , а с N — точката от L , съответстваща на стойността на параметъра $t = \gamma$.

Достатъчно е да се докаже, че точката N не принадлежи на множеството $\{M\}$, а за това е достатъчно да се убедим, че N не принадлежи нито на множеството G' , нито на множеството G'' .

Ако точката N принадлежеше на G' , която е отворено, би съществувала ϵ -околност на точката N , която също ще принадлежи на G' , т. е. ще има точки от кривата L , отговарящи на стойности на параметъра t , по-големи от γ , които принадлежат на G' , а това противоречи на условието, че γ е точна горна граница на стойностите на параметъра t , за които съответните точки от кривата принадлежат на G' .

Аналогично, ако точката N принадлежеше на G'' , то тя би принадлежала на това множество заедно с някоя своя ϵ -околност, т. е. би имало точки от кривата L , отговарящи на стойности на параметъра t , по-малки от γ и принадлежащи на G'' и затова не принадлежащи на G' , което противоречи на условието, че γ е точна горна граница на стойностите на параметъра t , за които съответните точки от кривата L принадлежат на множеството G' . $\square$

16°. Всяко отворено и свързано множество в пространството E^m е прието да се нарича **област**.

17°. Ако множеството $\{M\}$ е област, то множеството $\{\bar{M}\}$, получено, като присъединим към множеството $\{M\}$ всичките му точки на съставяне, се нарича **затворена област**.

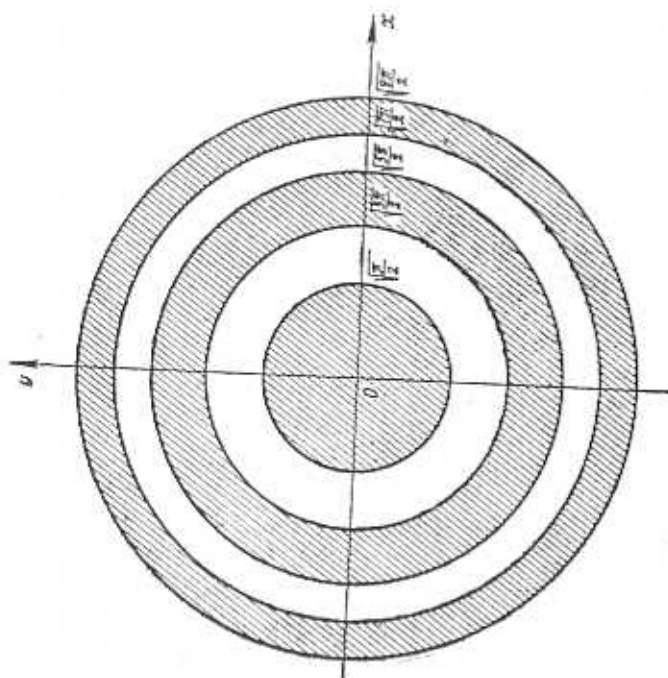
Отвореното m -мерно кълбо и отвореният m -мерен координатен паралелепипед са ограничени, свързани и отворени множества, т. е. те са примери за ограничени области в пространството E^m . m -мерната сфера в пространството E^m е пример за затворено и ограничено множество.

Затвореното m -мерно кълбо е ограничена затворена област в E^m . Допълнението към отвореното m -мерно кълбо е неограничено затворено множество.

Обединението на две непресичащи се области в пространството E^m е пример за несвързано множество.

13.1.3. Понятие за функция на m променливи. Ако на всяка точка M на множеството $\{M\}$ от точки на m -мерното евклидово пространство E^m е съпоставено едно число $f(M)$, казваме, че в множеството $\{M\}$ е дефинирана функцията f . При това множеството $\{M\}$ се нарича дефиниционна област на функцията f .

Числото $f(M)$, съответстващо на дадена точка M от множеството $\{M\}$, ще наричаме частна стойност на функцията в точката M . Съкупността $\{f(M)\}$ от всички частни стойности на функцията f се нарича множество от стойностите на тази функция.



Фиг. 13.1

множество от функционалните стойности). Тъй като точката M се определя с координатите $x_1, x_2, \dots, x_m$, то за частната стойност $f(M)$ на функцията на m променливи се използва още означението $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Примери:

1. $u = (4 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Дефиниционната област на тази функция е кръг с радиус 2 и с център в началото на координатната система. Множеството от функционалните й стойности е сегментът $0 \leq u \leq 2$.
2. $u = (x^2 + y^2 - 4)^{-1/4}$. Дефиниционната област на тази функция е множеството от точки, лежащи вън от кръга с радиус 2 и с център в началото на координатната система, а множеството от функционалните й стойности е полуравнината $u > 0$.
3. $u = (\cos(x^2 + y^2))^{1/4}$. Дефиниционната област на тази функция е множеството $\{M\}$ от точки, чиито координати удовлетворяват неравенството $\cos(x^2 + y^2) \geq 0$. Това неравенство е еквивалентно на равенствата $0 \leq x^2 + y^2 \leq \pi/2, 2k\pi - \pi/2 \leq x^2 + y^2 \leq 2k\pi + \pi/2$ при $k=1, 2, 3, \dots$. По такъв начин $\{M\}$ се състои от кръга с радиус $\sqrt{\pi/2}$ и център в точката $(0, 0)$ и пръстенвидни затворени области (Фиг. 13.1).

4. $u = (1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_m^2)^{1/4}$. Дефиниционната област на тази функция е очевидно m -мерното кълбо с радиус 1 и с център в точката $(0, 0, \dots, 0)$. Множеството на функционалните й стойности е сегментът $[0, 1]$.

5. $u = (1 - x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2 - \dots - x_m^2/a_m^2)^{-1/2}$. Дефиниционната област на тази функция е множеството $\{M\}$ на всички точки от пространството E^m , чиито координати $x_1, x_2, \dots, x_m$ удовлетворяват равенството

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + \dots + x_m^2/a_m^2 < 1$$

(предполагаме, че $a_1, a_2, \dots, a_m$ са положителни числа).

Очевидно това множество $\{M\}$ е област в пространството E^m , всички точки на която лежат вътре в т. нар. m -мерен елипсоид, който от своя страна е множеството от точки с координати, удовлетворяващи уравнението

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + \dots + x_m^2/a_m^2 = 1.$$

Множеството на функционалните стойности на функцията е полуравнината $u \geq 1$.

Дефиниционната област на функция на m променливи е множество от точки на m -мерното евклидово пространство E^m , а множеството на функционалните й стойности е множество в едномерното евклидово пространство E^1 . По такъв начин функция на m променливи може да се разглежда като изображение на някое множество от пространството E^m в някое множество от пространството E^1 .

13.2. Граница на функция на m променливи

13.2.1. Редица от точки в пространството E^m . Ще въведем понятието редица от точки в m -мерното пространство E^m . Нека на всяко цяло положително число n съпоставим точка M_n от евклидовото пространство E^m . Получената редица от точки $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ разглеждани в посочения ред, се нарича редица от точки в евклидовото пространство E^m . Тази редица кратко ще означаваме със символа $\{M_n\}$.

Ще въведем освен това понятията сходяща редица от точки в пространството E^m и граница на сходяща редица.

Редицата $\{M_n\}$ от точки на евклидовото пространство E^m се нарича сходяща, ако съществува такава точка A от E^m , че за всяко положително число ϵ да съществува такъв номер N ,

че при $n \geq N$ да е изпълнено неравенството $\rho(M_n, A) < \epsilon$. Точката A се нарича **граница на редицата** $\{M_n\}$ и се означава с

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A \quad \text{или} \quad M_n \rightarrow A \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Лема 1. Редицата $\{M_n\}$ от точки на m -мерното евклидово пространство E^m е сходяща (клони) към точката A на това пространство тогава и само тогава, когато числовите редици $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ от координатите на точките M_n са сходящи съответно към числата $a_1, a_2, \dots, a_m$, които са координати на точката A .

Доказателство. *Необходимост.* Ако редицата $\{M_n\}$ клони към точката A , то за всяко $\epsilon > 0$ може да се намери такъв номер N , че при $n \geq N$ да е изпълнено неравенството $\rho(M_n, A) < \epsilon$. Нека $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ са координатите на точката M_n , а $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ са координатите на точката A . Тогава неравенството $\rho(M_n, A) < \epsilon$ може да се запише по следния начин:

$$(13.4) \quad ((x_1^{(n)} - a_1)^2 + (x_2^{(n)} - a_2)^2 + \dots + (x_m^{(n)} - a_m)^2)^{1/2} < \epsilon.$$

Оттук следва, че при $n \geq N$ са изпълнени и неравенствата

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \epsilon, \quad |x_2^{(n)} - a_2| < \epsilon, \quad \dots, \quad |x_m^{(n)} - a_m| < \epsilon,$$

т. е. редиците от координатите на точките M_n са сходящи съответно към $a_1, a_2, \dots, a_m$. $\square$

Достатъчност. Нека редиците от координатите на точките M_n са сходящи съответно към $a_1, a_2, \dots, a_m$. Тогава за всяко $\epsilon > 0$ съществуват такива номера $N_1, N_2, \dots, N_m$, че при $n > N_1, n > N_2, \dots, n > N_m$ са изпълнени съответно неравенствата

$$|x_1^{(n)} - a_1| < \epsilon/\sqrt{m}, \quad |x_2^{(n)} - a_2| < \epsilon/\sqrt{m}, \quad \dots, \quad |x_m^{(n)} - a_m| < \epsilon/\sqrt{m}.$$

Оттук следва, че при $n > N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_m\}$ е изпълнено неравенството (13.4). С други думи, при $n \geq N$ е изпълнено неравенството $\rho(M_n, A) < \epsilon$, където A е точка от E^m с координати $a_1, a_2, \dots, a_m$. Следователно редицата $\{M_n\}$ е сходяща към A . $\square$

Ще въведем сега понятието фундаментална редица от точки в пространството E^m . Редицата $\{M_n\}$ от точки на m -мерното евклидово пространство се нарича **фундаментална** или **редица на Коши**, ако за всяко положително число ϵ съществува такъв номер N , че при $n \geq N$ и при всяко цяло $p \geq 0$ да е изпълнено неравенството $\rho(M_{n+p}, M_n) < \epsilon$.

Напълно аналогично на лема 1 може да се докаже следното твърдение:

Лема 2. Редицата $\{M_n\}$ от точки на m -мерното евклидово пространство E^m е фундаментална тогава и само тогава, когато

е фундаментална всяка от числовите редици $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$, съответстващи на координатите на точките M_n .

Доказателство. *Необходимост.* Нека редицата от точки $\{M_n\}$ е фундаментална, т. е. за всяко $\epsilon > 0$ съществува такъв номер N , че при $n \geq N$ и за всяко цяло $p \geq 0$ е изпълнено неравенството $\rho(M_{n+p}, M_n) < \epsilon$, т. е. неравенството

$$(13.4') \quad ((x_1^{(n+p)} - x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n+p)} - x_2^{(n)})^2 + \dots + (x_m^{(n+p)} - x_m^{(n)})^2)^{1/2} < \epsilon.$$

От това неравенство следва, че при $n \geq N$ и за всяко цяло $p \geq 0$ са изпълнени неравенствата

$$|x_1^{(n+p)} - x_1^{(n)}| < \epsilon, \quad |x_2^{(n+p)} - x_2^{(n)}| < \epsilon, \quad \dots, \quad |x_m^{(n+p)} - x_m^{(n)}| < \epsilon,$$

които показват, че всяка от числовите редици, съответстващи на координатите на точките M_n , е фундаментална.

Достатъчност. Нека всяка от числовите редици, съответстващи на координатите на точката M_n , е фундаментална.

Тогава за всяко $\epsilon > 0$ ще съществуват такива номера $N_1, N_2, \dots, N_m$, че при $n \geq N_1, n \geq N_2, \dots, n \geq N_m$ и за всяко цяло $p \geq 0$ ще са изпълнени съответно неравенствата

$$|x_1^{(n+p)} - x_1^{(n)}| < \epsilon/\sqrt{m}, \quad |x_2^{(n+p)} - x_2^{(n)}| < \epsilon/\sqrt{m}, \quad \dots, \quad |x_m^{(n+p)} - x_m^{(n)}| < \epsilon/\sqrt{m}.$$

Оттук следва, че при $n \geq N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_m\}$ и за всяко цяло $p \geq 0$ е изпълнено неравенството (13.4'), което показва, че редицата от точки $\{M_n\}$ е фундаментална. $\square$

С помощта на лемите 1 и 2 лесно се доказва критерият на Коши за сходимост на редица от точки в пространството E^m : За да бъде редицата $\{M_n\}$ от точки на пространството E^m сходяща, е необходимо и достатъчно тя да бъде фундаментална.

Наистина, ако редицата от точки $\{M_n\}$ е фундаментална, то според лема 2 е фундаментална и всяка от числовите редици, съответстващи на координатите на точките $\{M_n\}$. Съгласно критерия на Коши за сходимост на числови редици тези редици са сходящи и клонят съответно към някакви числа $a_1, a_2, \dots, a_m$. Но тогава според лема 1 редицата от точки $\{M_n\}$ е сходяща към точката $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Обратно, ако редицата от точки $\{M_n\}$ е сходяща към някаква точка A на пространството E^m , то според лема 1 всяка от числовите редици, съответстващи на координатите на точките $\{M_n\}$, клони към съответната координата на точката A . Но тогава (съгласно критерия на Коши за сходимост на числови редици) всяка от числовите редици, съответстващи на координатите на точките $\{M_n\}$, е фундаментална и съгласно лема 2 редицата $\{M_n\}$ е също фундаментална.

13.2.2. Свойство на ограничените редици от точки в E^m . Редицата $\{M_n\}$ от точки на m -мерното евклидово пространство се нарича **ограничена**, ако съществува такова число $a > 0$, че за всяко n да е изпълнено неравенството $\rho(O, M_n) \leq a$, където O е точката, всички координати на която са равни на нула.

С други думи, ограничеността на редицата от точки $\{M_n\}$ означава, че всички точки на тази редица принадлежат на затворено кълбо с даден радиус и център началото на координатната система O .

Ако $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ е произволна строго растяща редица от положителни числа, то редицата от точки

$$M_{a_1}, M_{a_2}, \dots, M_{a_k}, \dots$$

ще наричаме **подредица** на редицата от точки $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$.

Теорема 13.1 (теорема на Болцано — Вайерштрас). От всяка ограниченна редица $\{M_n\}$ от точки на m -мерното евклидово пространство E^m може да се избере сходяща подредица.

Доказателство. Ще се убедим най-напред, че редиците $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ от координатите на точките M_n са ограничени. Действително, тъй като редицата $\{M_n\}$ е ограничена, то за всяко n е изпълнено неравенството $\rho(O, M_n) \leq a$. Понее $\rho(O, M_n) = ((x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2 + \dots + (x_m^{(n)})^2)^{1/2}$, то за всяко n са изпълнени и неравенствата $|x_1^{(n)}| \leq a, |x_2^{(n)}| \leq a, \dots, |x_m^{(n)}| \leq a$.

С други думи, редиците $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ от координатите на точките M_n са ограничени. Съгласно теоремата на Болцано — Вайерштрас за числови редици (вж. 3.3.1) от редицата $\{x_1^{(n)}\}$ може да се избере подредица $\{x_1^{(n_k)}\}$, сходяща към някое число a_1 . Разглеждаме съответстващата ѝ подредица $\{x_2^{(n_k)}\}$ на редицата от вторите координати на точките M_n . Съгласно същата теорема от подредицата $\{x_2^{(n_k)}\}$ може да се избере подредица $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$, клоняща към някакво число a_2 . Отбелязваме, че подредицата $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$ на подредицата $\{x_1^{(n_k)}\}$ клони към числото a_1 . И така подредиците $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$ и $\{x_2^{(n_{k_2})}\}$ са сходящи съответно към a_1 и a_2 .

Очевидно, ако от подредицата $\{x_1^{(n_{k_2})}\}$ на редицата от третите координати на точките M_n изберем сходяща към числото a_3 подредица $\{x_3^{(n_{k_2})}\}$, то подредиците $\{x_1^{(n_{k_2})}\}, \{x_2^{(n_{k_2})}\}, \{x_3^{(n_{k_2})}\}$ ще клонят съответно към числата a_1, a_2, a_3 . Продължавайки този процес, накрая ще получим сходяща към някое число a_m подредица $\{x_m^{(n_{k_2})}\}$ на редицата от m -тите координати на точките M_n ; при това под-

редиците $\{x_1^{(n_{k_2})}\}, \{x_2^{(n_{k_2})}\}, \dots, \{x_m^{(n_{k_2})}\}$ ще клонят съответно към числата $a_1, a_2, \dots, a_m$.

Но тогава съгласно лема I подредицата $\{M_{n_{k_2}}\}$ на редицата от точки $\{M_n\}$ ще клони към точката A с координати $a_1, a_2, \dots, a_m$. $\square$

Забележка. Границата A на редица $\{M_n\}$ от точки, принадлежащи на затворено множество $\{M\}$, също принадлежи на това множество. За да се убедим в това, е достатъчно да отбележим, че във всяка ϵ -околност на точката A има точки M_n , т. е. точки от множеството $\{M\}$, и затова точката A е или вътрешна, или контурна точка на $\{M\}$ и следователно принадлежи на $\{M\}$.

13.2.3. Граница на функция на m променливи. Да разгледаме функцията f , дефинирана в множеството $\{M\}$ от точки на m -мерното евклидово пространство E^m , и точката A от пространството E^m , която може и да не принадлежи на множеството $\{M\}$, но е точка на съставяне на множеството $\{M\}$.

Определение 1 (граница на функция в точката A по Хайне). Числото b се нарича **граница** (или **границна стойност**) на функцията f в точката A (или при $M \rightarrow A$), ако за всяка сходяща към A редица $\{M_n\}$ от точки, принадлежащи на дефиниционната област на функцията, всички членове M_n на които са различни от A , съответната числова редица $\{f(M_n)\}$ от стойности на функцията f сходяща към числото b .

Определение 1' (граница на функция в точката A по Коши). Числото b се нарича **граница** (или **границна стойност**) на функцията f в точката A (или при $M \rightarrow A$), ако за всяко положително число ϵ съществува такова положително число δ , че за всяка точка M от дефиниционната област на функцията, удовлетворяваща условието $0 < \rho(M, A) < \delta$, да е изпълнено неравенството $|f(M) - b| < \epsilon$.

За означаване на границата на функцията f в точката A се използва:

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = b \text{ или } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ i=1, 2, \dots, m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = b$$

(тук $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$ са координатите на точката A).

Доказателството за еквивалентността на определенията 1' и 1 се провежда точно както за функция на една променлива. Само в разсъжденията на теорема 3.19 (вж. 3.4.2) трябва да се замени редицата $\{x_n\}$ с редицата от точки $\{M_n\}$, точката a с точката $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$, разликите $|x - a|$ и $|x_n - a|$ с разстоянията $\rho(M, A)$ и $\rho(M_n, A)$, а числовата редица $\{f(x_n)\}$ с числовата редица $\{f(M_n)\}$.

Ще въведем сега понятието граница на функция f при $M \rightarrow \infty$. Затова ще предположим, че в множеството $\{M\}$, в което е дефинирана функцията f , за всяко $\delta > 0$ има поне един елемент M , лежащ вън от кълбото с радиус δ и с център в точката $O(0, 0, \dots, 0)$.

Ще се ограничим с определеното, съответстващо на граница на функция по Коши.

Определение 2. Числото b се нарича **граница на функцията** f при $M \rightarrow \infty$, ако за всяко положително число ϵ съществува такова положително число δ , че за всяка точка M от дефиниционната област $\{M\}$ на функцията, удовлетворяваща условието $\rho(O, M) > \delta$, е изпълнено неравенството $|f(M) - b| < \epsilon$.

За означаването на границата на функцията $u = f(M)$ при $M \rightarrow \infty$ се използва символът

$$\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = b.$$

Точно както при функции на една променлива, лесно се убеждаваме, че аритметичните операции над функции на m променливи, имащи граница в дадена точка A (или при $M \rightarrow \infty$), водят до функции, която също има граница в точката A (съответно при $M \rightarrow \infty$).

Ще формулираме съответното твърдение за случая на граница в точката A .

Нека двете функции f и g , дефинирани в едно и също множество $\{M\}$, имат граници в точката A , съответно равни на b и c . Тогава функциите $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ и f/g имат граници в точката A , съответно равни на $b+c$, $b-c$, $b \cdot c$ и b/c (при частно е необходимо допълнително изискване с да бъде различно от нула).

Доказателството на това твърдение е съвършено аналогично на доказателството на теорема 3.21 (вж. 3.4.4), само че вместо определеността за граница на функцията на една променлива по Хайне трябва да се използва определеността за граница на функцията на m променливи по Хайне.

Ще се спрем сега на критерия на Коши за съществуване на граница на функция на m променливи.

Определение 3. Ще казваме, че функцията на m променливи f удовлетворява условието на Коши в точката $M=A$ (съответно при $M \rightarrow \infty$), ако за всяко положително число ϵ съществува такова положително число δ , че за всяки две точки M' и M'' от дефиниционната област на функцията — множество $\{M\}$, удовлетворяващи условията $0 < \rho(M', A) < \delta$, $0 < \rho(M'', A) < \delta$ (съответно условията $\rho(M', 0) > \delta$, $\rho(M'', 0) > \delta$), е изпълнено неравенството $|f(M') - f(M'')| < \epsilon$.

Теорема 13.2 (критерий на Коши за съществуване на граница на функция на m променливи). За да има функцията f крайна граница в точката $M=A$ (при $M \rightarrow \infty$), е необходимо и достатъчно функцията да удовлетворява условието на Коши в точката $M=A$ (при $M \rightarrow \infty$).

Доказателството на тази теорема е напълно идентично с доказателството на теорема 3.20 (вж. 3.4.3) и може да се получи от него с формалната смяна на буквите x и a с буквите M и A и на $|x-a|$ с $\rho(M, A)$.

13.2.4. Безкрайно малки функции на m променливи. Функцията $u=f(M)$ се нарича **безкрайно малка** в точката A (при $M \rightarrow A$), ако $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = 0$.

Лесно е да се убедим, че функцията $f(M) = (x_1 - a_1)^{n_1} + (x_2 - a_2)^{n_2} + \dots + (x_m - a_m)^{n_m}$, където $n_1, n_2, \dots, n_m$ са положителни числа, е безкрайно малка в точката $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Ако граничната стойност на функцията f в точката A е равна на b , то функцията $\alpha(M) = f(M) - b$ е безкрайно малка в точката A .

Действително $\lim_{M \rightarrow A} \alpha(M) = \lim_{M \rightarrow A} (f(M) - b) = \lim_{M \rightarrow A} f(M) - \lim_{M \rightarrow A} b = 0$.

Като използваме този резултат, ще получим специално представяне за функция, границата на която в точката A е равна на b : $f(M) = b + \alpha(M)$, където $\lim_{M \rightarrow A} \alpha(M) = 0$.

Сравняването на безкрайно малки функции на няколко променливи се прави точно както е показано в 3.4.5 за безкрайно малки функции на една променлива. Както и в случая на една променлива, под символа $o(\beta)$ ще разбираме коя да е безкрайно малка в дадена точка функция от по-висок ред от безкрайно малката в дадената точка функция β .

13.2.5. Многократна граница. За функцията $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на няколко променливи може да се определи понятието граница по една от променливите x_k при фиксирани стойности на останалите променливи. Във връзка с това възниква понятието **многократна граница** (двойна, тройна и т. н.). Ще поясним това понятие за функция f на две променливи x и y . Нека функцията f е дефинирана в правоъгълна околност $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$ на точката $M_0(x_0, y_0)$ с изключение евентуално на точката M_0 . Нека за всяко фиксирано y , удовлетворяващо условието $0 < |y - y_0| < d_2$, съществува границата на функцията f на една променлива x в точката $x = x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y), \quad y \text{ — фиксирано,}$$

и нека освен това функцията φ има в точката $y=y_0$ граница, равна на b :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = b.$$

В такъв случай се казва, че съществува **двойна граница** b за функцията f в точката M_0 , която се означава по следния начин:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = b.$$

Аналогично се определя и двойната граница

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

Ще установим достатъчни условия за равенство на въведените двойни граници.

Теорема 13.3. Нека функцията f е дефинирана в няколкото околност $|x-x_0| < d_1$, $|y-y_0| < d_2$ на точката $M_0(x_0, y_0)$ и има в тази точка граница, равна на b . Нека освен това за всяко фиксирано x , $0 < |x-x_0| < d_1$, да съществува границата $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ и за всяко фиксирано y , $0 < |y-y_0| < d_2$, да съществува границата $\psi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$. Тогава двойните граници

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \text{ и } \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \text{ съществуват и са равни на } b.$$

Доказателство. Тъй като f има в точката $M(x_0, y_0)$ граница b , то за всяко $\varepsilon > 0$ може да се намери такова $\delta > 0$, че при $|x-x_0| < \delta$ и $|y-y_0| < \delta$ да бъде изпълнено неравенството $|f(x, y) - b| < \varepsilon$. Така в правоъгълната околност $|x-x_0| < \delta$ и $|y-y_0| < \delta$ на точката M_0 стойностите на функцията f се различават от b най-много с ε . Но тогава границите φ и ψ от формулировката на теоремата при x и y , удовлетворяващи неравенствата $|x-x_0| < \delta$ и $|y-y_0| < \delta$, също ще се различават от b най-много с ε . Следователно и границите на тези функции съответно в точките x_0 и y_0 съществуват и са равни на b . Теоремата е доказана.

Може да се определи и понятието двойна граница за т. нар. двойни редици $\{a_{mn}\}$, членовете a_{mn} на които се определят с два индекса m и n . Символът $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn}$ означава, че най-напред се определя редицата $\{b_n\}$, $b_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{mn}$, а след това се намира границата на тази редица $\{b_n\}$.

Ще разгледаме например двойната редица $\{a_{mn}\}$, където $a_{mn} = \cos^m 2\pi n!x$, x е фиксирано число. Ще докажем, че

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^m 2\pi n!x = \begin{cases} 1, & \text{ако } x \text{ е рационално число,} \\ 0, & \text{ако } x \text{ е иррационално число.} \end{cases}$$

Наистина, ако $x = p/q$, където p и q са цели числа, второто от които е положително, то при $n \geq q$ имаме $\cos 2\pi n!x = 1$ и затова $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^m 2\pi n!x = 1$. С други думи, ако x е рационално число, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^m 2\pi n!x = 1.$$

Ако x е иррационално число, то при всяко n е изпълнено неравенството $|\cos 2\pi n!x| < 1$ и затова $\lim_{m \rightarrow \infty} \cos^m 2\pi n!x = 0$, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^m 2\pi n!x = 0.$$

Забележка. Като използваме получените резултати, можем аналогично да зададем функцията на Дирихле (вж. 3.4.1) с двойната граница $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^m 2\pi n!x$.

13.3. Непрекъснатост на функция на m променливи

13.3.1. Понятието за непрекъснатост на функция на m променливи. Да разгледаме функцията f на m променливи, дефинирана в някакво множество $\{M\}$ от пространството E^m . Нека A принадлежи на $\{M\}$ и е точка на съставяне за множеството $\{M\}$.

Формално определение на непрекъснатост на функция в точка. Функцията f се нарича **непрекъсната** в точката A , ако границата на тази функция в точката A съществува и е равна на частната стойност $f(A)$.

Понеже $A = \lim_{M \rightarrow A} M$, то условието за непрекъснатост на функцията f в точката A може да се запише във вида

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(\lim_{M \rightarrow A} M).$$

По такъв начин за непрекъсната в дадена точка A функция символът $\lim$ за граница и символът f могат да сменят местата си. Точките от пространството E^m , в които функцията f не притежава своето непрекъснатост, се наричат точки на прекъсване на тази функция.

Като използваме определения за граница на функция в точката A по Хайне и по Коши, стигаме до двете еквивалентни определения за непрекъснатост на функция в дадена точка по Хайне и по Коши.

Определение 1 (непрекъснатост на функция в дадена точка по Хайне). Функцията f се нарича **непрекъсната** в точката A ако за всяка сходяща към A редица $\{M_n\}$ от точки, принадлежащи

ици на дефиниционната област на функцията, съответната числова редица $\{f(M_n)\}$ от стойности на функцията е сходяща към числото $f(A)$.

Определение 1' (непрекъснатост на функция в дадена точка по Коши). Функцията f се нарича **непрекъснатата** в точката A , ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ , че за всяка точка M от дефиниционната област на функцията, удовлетворяваща условието $\rho(M, A) < \delta$, е изпълнено неравенството $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$.

Забележка. За разлика от определеното на граница по Хайне в определение 1 не се иска $M_n \neq A$. Това е възможно, защото функцията f е дефинирана в точката A и прибавянето към редицата $\{f(M_n)\}$, сходяща към числото $f(A)$, на произволен брой нови членове, равни на $f(A)$, не нарушава сходимостта на тази редица.

Аналогично за разлика от определеното на граница по Коши в определение 1' не се иска $\rho(M, A) > 0$, което е равносилно на изискването $M \neq A$. Това е така, защото функцията f е дефинирана в точката A и при $M = A$ неравенството $|f(M) - f(A)| < \varepsilon$ е изпълнено за всяко $\varepsilon > 0$.

Нека сега $\{M\}$ е множество от точки на пространството E^m и всяка δ -околност на всяка негова точка съдържа други точки от това множество. Такова множество се нарича **гъсто в себе си**.

Определение 2. Функцията f , дефинирана в множеството $\{M\}$, се нарича **непрекъснатата** в тази точка M .

Ще наречем **нарастване** или **пълно нарастване** на функцията f в точката A функцията Δf , дефинирана с формулата

$$(13.5) \quad \Delta f = f(M) - f(A),$$

където M е точка от дефиниционната област на дадената функция. Нека точките A и M имат съответно координати $a_1, a_2, \dots, a_m$ и $x_1, x_2, \dots, x_m$. Означаваме $x_1 - a_1 = \Delta x_1, x_2 - a_2 = \Delta x_2, \dots, x_m - a_m = \Delta x_m$. Като използваме тези означения, за нарастването на функцията Δf получаваме по отношение на нарастването на аргументите $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ следния израз:

$$(13.6) \quad \Delta f = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

Очевидно за непрекъснатостта на функцията f в точката A е необходимо и достатъчно

$$(13.7) \quad \lim_{M \rightarrow A} \Delta f = \lim_{M \rightarrow A} (f(M) - f(A)) = 0$$

$$\text{или} \quad \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ 1 \leq i \leq m}} \Delta f = 0.$$

условието (13.7) е естествено да се нарича **диференчна форма** на условието за непрекъснатост на функцията f в точката A .

13.3.2. Непрекъснатост на функция на m променливи по една от променливите. За функцията f на няколко променливи може да се определи понятието непрекъснатост по една от променливите й при фиксирани стойности на останалите променливи. За определението на това понятие ще разгледаме т. нар. частни нараствания на функцията f в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ от дефиниционната ѝ област. Фиксираме всички аргументи освен първия, на който даваме такова произволно нарастване Δx_1 , че точката с координати $x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_m$ да принадлежи на дефиниционната област на функцията. Съответното нарастване се нарича **частно нарастване*** на функцията в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, отговарящо на нарастването Δx_1 на аргумента x_1 и се означава с

$$(13.8) \quad \Delta_1 f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Аналогично се определят и частните нараствания на функцията, съответстващи на нараствания на другите й аргументи:

$$(13.9) \quad \Delta_i f = f(x_1, x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

$$\Delta_m f = f(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Функцията f се нарича **непрекъснатата в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ по променливата x_k** , ако частното нарастване $\Delta_k f$ на тази функция в точката M е безкрайно малка функция на Δx_k , т. е. ако

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta_k f = 0.$$

При фиксирани стойности на всичките променливи с изключение на променливата x_k функцията f е функция само на тази една променлива. Ще отбележим, че непрекъснатостта на функцията по променливата x_k означава непрекъснатост на тази функция на една променлива.

Очевидно от условието за непрекъснатост на функцията f в дадена точка M следва непрекъснатостта на тази функция в точката M по всяка от променливите $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$. От непрекъснатостта обаче на функцията в точката M по всяка от променливите $x_1, x_2, \dots, x_m$ не следва в общия случай непрекъснатостта на функцията в тази точка.

* Терминът „частно нарастване“ се употребява, за да се различава това нарастване от пълното нарастване (13.6), съответстващо на произволно нараствания $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ на всичките аргументи $x_1, x_2, \dots, x_m$.

точката $B(b_1, b_2, \dots, b_m)$, където $b_i = \varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_k)$, $i=1, 2, \dots, m$. Тогава сложната функция $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, където $x_1, x_2, \dots, x_m$ са определените по-горе функции на аргументите $t_1, t_2, \dots, t_k$, е непрекъсната в точката $A(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

За доказателството на това твърдение разглеждаме произволна сходяща към A редица от точки $N_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ от множеството $\{N\}$. Ще означим с $\{M_n\}$ съответната редица от точки на пространството E^m , координатите $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}$ на която са равни на $x_i^{(n)} = \varphi_i(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_k^{(n)})$, $i=1, 2, 3, \dots, m$.

От непрекъснатостта на функциите $\varphi_i(N)$ в точката A и от определеното за непрекъснатост по Хайне следва сходимостта на редицата от точки $\{M_n\}$ към точката $B(b_1, b_2, \dots, b_m)$. По-нататък от непрекъснатостта на функцията $u=f(M)$ в точката B и от определеното за непрекъснатост по Хайне следва сходимостта на редицата $\{f(M_n)\}$ към числото $f(A)$. Но това означава, че редицата $\{f(\varphi_1(N_n), \varphi_2(N_n), \dots, \varphi_m(N_n))\}$ от стойности на тази сложна функция е сходяща към частната стойност $f(\varphi_1(A), \varphi_2(A), \dots, \varphi_m(A))$, т. е. означава непрекъснатост на сложната функция в точката A .

3°. Теорема за постоянство на знака на непрекъсната функция.

Теорема 13.4. Ако функцията f е непрекъсната в точката A на евклидовото пространство E^m и ако $f(A) \neq 0$, то съществува еднакъв със знака на $f(A)$.

Верността на тази теорема следва непосредствено от определеното за непрекъснатост на функция f в точката A по Коши. Действително от това определение имаме, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такова $\delta > 0$, че $f(A) - \varepsilon < f(M) < f(A) + \varepsilon$ навсякъде в δ -околността на точката A . Ако при тези разсъждения за положителното число ε вземем $|f(A)|/2$, то ще получим, че и трите числа $f(A) - \varepsilon$, $f(M)$ и $f(A) + \varepsilon$ имат еднакъв знак и затова $f(M)$ има знака на $f(A)$ навсякъде в δ -околността на точката A .

4°. Теорема за приемане на всички междинни стойности от непрекъсната функция.

Теорема 13.5. Нека функцията f е непрекъсната във всички точки на свързаното множество $\{M\}$ от евклидовото пространство E^m и $f(A)$ и $f(B)$ са стойностите ѝ в точките A и B от това множество. Нека C е произволно число, заключено между $f(A)$ и $f(B)$. Тогава върху всяка непрекъсната крива L , свързваща точките A и B и изцяло лежеща в $\{M\}$, съществува такава точка N , че $f(N) = C$.

Доказателство. Нека

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_m = \varphi_m(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

са уравнения на непрекъснатата крива L , свързваща точките A и B от множеството M и изцяло съдържаща се в $\{M\}$ (вж. 13.1.2). В сегмента $[\alpha, \beta]$ е дефинирана сложната функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, където $x_i = \varphi_i(t)$, $i=1, 2, \dots, m$; $\alpha \leq t \leq \beta$. Очевидно стойностите на тази функция в сегмента $[\alpha, \beta]$ съвпадат със стойностите на функцията f върху кривата L . Тази сложна функция на една променлива t според твърдението в 2° от тази точка е непрекъсната в сегмента $[\alpha, \beta]$ и съгласно теорема 4.13 в някоя точка ξ на сегмента $[\alpha, \beta]$ приема стойност C . Затова в точката N от кривата L с координати $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \dots, \varphi_m(\xi)$ получаваме $f(N) = C$. $\square$

5°. Ограниченост на функцията, непрекъсната в затворено и ограничено множество.

Теорема 13.6 (първа теорема на Вайерштрас). Ако функцията f е непрекъсната в затвореното и ограничено множество $\{M\}$, тя е ограничена в това множество.

Доказателство. Да изберем (както и при доказателството на аналогичната теорема 4.14) редица $\{M_n\}$ от точки на множеството $\{M\}$, за които $|f(M_n)| > n$. Съгласно теоремата на Болцао — Вайерштрас (вж. 13.2.2) от $\{M_n\}$ може да се избере сходяща под-редица $\{M_{n_k}\}$, границата M на която според забележката към теоремата на Болцао — Вайерштрас принадлежи на множеството $\{M\}$. Очевидно редицата $\{f(M_{n_k})\}$ е безкрайно голяма. От друга страна, поради непрекъснатостта на функцията в точката M тази редица $\{f(M_{n_k})\}$ трябва да клони към $f(M)$. $\square$

6°. Достигане на точната горна и точната долна граница. Точната горна граница на функцията f в множеството $\{M\}$ се нарича такова число u , което удовлетворява условията: 1) $f(M) \leq u$ за всички точки M на множеството $\{M\}$; 2) за всяко $\varepsilon > 0$ съществува поне една точка M от множеството $\{M\}$, за която $f(M) > u - \varepsilon$.

Аналогично се определя и точна долна граница $\bar{u}$ на функцията f в множеството $\{M\}$.

За означаване на точните граници на функцията f в множеството $\{M\}$ се използват символите

$$\bar{u} = \sup_{\{M\}} f(M), \quad u = \inf_{\{M\}} f(M),$$

или

$$\bar{u} = \sup \{f(M) : M \in \{M\}\},$$

$$u = \inf \{f(M) : M \in \{M\}\}.$$

Теорема 13.7 (втора теорема на Вайерштрас). Ако функцията f е непрекъсната в затвореното и ограничено множество $\{M\}$, тя достига в това множество точките си долна и горна граница.

Доказателството на тази теорема почти дословно повтаря доказателството на теорема 4.15 (т. е. втората теорема на Вайерштрас за функции на една променлива).

7°. Понятието равномерно непрекъснатост на функция на няколко променливи. Функцията f се нарича **равномерно непрекъсната** в множеството $\{M\}$ от евклидовото пространство E^m , ако за всяко положително число δ , съществуват такива положително число ϵ , зависещо само от ϵ , че за всеки две точки M' и M'' от множеството $\{M\}$, удовлетворящи условието $\rho(M', M'') < \delta$, да е изпълнено неравенството $|f(M') - f(M'')| < \epsilon$.

В сила е следната теорема:

Теорема 13.8 (теорема на Кантор за равномерна непрекъснатост). Всяка непрекъсната в ограничено и затворено множество функция е равномерно непрекъсната в това множество.

Доказателството на тази теорема е съвсем аналогично на доказателството на теорема 4.16.

Забележка. Диаметър на ограничено множество $\{M\}$ ще наричаме точната горна граница на числата $\rho(M', M'')$, където M' и M'' пробитват множеството $\{M\}$. Като използваме понятието диаметър на множество, ще изкажем следното свойство на непрекъсната функции върху затворено и ограничено множество:

Нека функцията f е непрекъсната в затвореното и ограничено множество $\{M\}$. Тогава за всяко положително число ϵ може да се намери такова $\delta > 0$, че на всяко, съдържащо се в множеството $\{M\}$ затворено подмножество $\{M'\}$ с диаметър, по-малък от δ , осцилацията ω^* на функцията f да е по-малка от ϵ .

Доказателството на това свойство е свършено аналогично на доказателството на следствието на теорема 4.16.

Забележка. Множеството $\{M\}$ от m -мерното евклидово пространство E^m се нарича компакт, ако от всяка система от отворени множества, покриваща множеството $\{M\}$, може да се избере крайна подсистема, покриваща това множество.

Точно както за пространството на реалните числа (вж. 4.7.3), се доказва, че едно множество от m -мерното евклидово пространство

* Осцилацията ω на функцията f върху множеството $\{M\}$ се нарича разликата между точната горна и точната долна граница на функцията f в това множество.

ство E^m е компакт тогава и само тогава, когато е затворено и ограничено.

Следователно първата и втората теорема на Вайерштрас и теоремата на Кантор са валидни за функции, непрекъснати в компакт.

13.4. Производни и диференциали на функция на няколко променливи

13.4.1. Частни производни на функции на няколко променливи. Нека точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ принадлежи на дефиниционната област на функцията f . Да разгледаме в дадена точка M отношението на частното нарастване $\Delta_{x_k} f$ (вж. (13.8) и (13.9)) и съответното нарастване Δx_k на аргумента x_k :

$$\frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\Delta x_k} \quad (13.12)$$

Отношението (13.12) е функция на Δx_k , дефинирана за всички различни от нула стойности на Δx_k , за които точката $M(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$ принадлежи на дефиниционната област на функцията f .

Определение. Ако съществува границата на отношението (13.12), когато нарастването Δx_k на аргумента x_k клони към нула, то тази граница се нарича **частна производна на функцията f в точката M по аргумента x_k** и се означава с $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ или f'_{x_k} .

Следователно

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} f}{\Delta x_k} \quad (13.13)$$

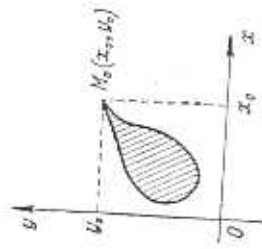
Ще отбележим, че частната производна на функцията f по аргумента x_k представлява обикновена производна на функция на една променлива x_k при фиксирани стойности на останалите променливи. Затова пресмятането на частните производни се извършва по правилата за пресмятане на производни на функция на една променлива.

Примери:

$$1. u = \arctg(xy^2), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y^2/(1+x^2y^4), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy/(1+x^2y^4).$$

$$2. u = e^{(x^2+y^2)z}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2xz e^{(x^2+y^2)z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yz e^{(x^2+y^2)z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -(x^2+y^2)z^{-2} e^{(x^2+y^2)z}; \quad z \neq 0.$$



Фиг. 13.2

Забележка 1. От съществуването на всички частни производни за функцията в дадена точка не следва непрекъснатостта на функцията в тази точка. Вече се убедихме, че функцията (13.10):

$$f(x, y) = \begin{cases} xy/(x^2 + y^2) & \text{при } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

не е непрекъсната в точката $O(0, 0)$ (вж. пример 1 от 13.3.2). Но в тази точка функцията има частни производни по x и y , по-неже $f(x, 0) = 0$ и $f(0, y) = 0$, и затова

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = 0.$$

Забележка 2. Ще подчертаем, че даденото определение за частни производни е приложимо за вътрешните точки на дефиниционната област на функцията, но не винаги може да се използва за контурните точки на тази област.

Това е така, защото в контурните точки на дефиниционната област на функцията не винаги могат да се пресметнат частните нараствания на функцията (такава е например контурната точка M_0 на областта, изобразена на фиг. 13.2).

Във връзка с казаното е прието частните производни в контурна точка да се определят като граници на съответните частни производни на вътрешните точки при клонене към разглежданата контурна точка.

13.4.2. Диференцируемост на функция на няколко променливи. Ще напомним, че нарастване (или пълно нарастване) на функцията f в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, съответстващо на нарастванията $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ на аргументите, се нарича изразът (вж. (13.5) и (13.6))

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Определение. Функцията f се нарича **диференцируема** в дадена точка $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, ако пълното ѝ нарастване в тази точка може да се представи във вида

$$(13.14) \quad \Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m,$$

където $A_1, A_2, \dots, A_m$ са числа, независещи от $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ са безкрайно малки функции при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$.

Отношението (13.14) се нарича условие за диференцируемост на функцията в дадена точка M . Условието (13.14) за диференцируемост на функция може да се запише и в друга форма. За това ще разгледаме безкрайно малката функция $\rho = (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2)^{1/2}$ при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$, която се анулира само при $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$. Ще се убедим, че сумата $\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$ от дясната страна на (13.14) е безкрайно малка функция от по-висок ред в сравнение с ρ . С други думи, тази сума е $o(\rho)$. Наистина при $\rho \neq 0$ е изпълнено неравенството $|\Delta x_i|/\rho \leq 1$ и затова

$$\begin{aligned} & |\alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m| \\ & \leq \{|\alpha_1| \cdot |\Delta x_1| + |\alpha_2| \cdot |\Delta x_2| + \dots + |\alpha_m| \cdot |\Delta x_m|\} / \rho \\ & \leq \{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_m|\} \cdot \rho = o(\rho). \end{aligned}$$

Следователно условието (13.14) за диференцируемост на функция може да се запише във вида

$$(13.15) \quad \Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho),$$

при което величината $o(\rho)$ ще смятаме равна на нула при $\rho = 0$.

За да докажем, че условието (13.15) е еквивалентно на условието (13.14), трябва да се убедим, че от представянето (13.15) следва представянето (13.14). За тази цел да допуснем, че не всички $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ са равни на нула*. Представяме $o(\rho)$ във вида

$$o(\rho) = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \rho = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2)^{1/2} = \left(\frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} \right) \Delta x_1 + \left(\frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_2}{\rho} \right) \Delta x_2 + \dots + \left(\frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_m}{\rho} \right) \Delta x_m.$$

Като положим $\frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_i}{\rho} = \alpha_i$ и отбечем, че α_i са безкрайно малки функции при $\rho \rightarrow 0$ (а следователно и при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$, идваме до представянето (13.14).

* Ако всички Δx_i са равни на нула, то всички членове в дясната страна на формулите (13.14) и (13.15) са равни на нула.

И така условието за диференцируемост на функция може да се запише както във вида (13.14), така и във вида (13.15).

Ако поне едно от числата $A_1, A_2, \dots, A_m$ е различно от нула, то сумата $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m$ представлява главната, линейна относно нарастванията на аргументите част на нарастването на диференцируемата функция. Ще отбележим, че при определеното на понятието диференцируемост на функция не изключихме възможността всички числа $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ да са нули и затова, ако нарастването Δf на функцията може да се представи във вида (13.14) или (13.15) при $A_1=0, A_2=0, \dots, A_m=0$, то функцията е диференцируема в дадената точка.

В сила е следната теорема:

Теорема 13.9. Ако функцията f е диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, то в тази точка съществуват частните производни по всички й аргументи и $\frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i$, където A_i се определят от условията за диференцируемост на функция (13.14) или (13.15).

Доказателство. От условието (13.14) за диференцируемост на функция в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ следва, че частното й нарастване $\Delta_{x_i} f$ в тази точка е $\Delta_{x_i} f = A_i \Delta x_i + \alpha_i \Delta x_i$. Оттук следва, че $\frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = A_i + \alpha_i$, и понеже $\alpha_i \rightarrow 0$ при $\Delta x_i \rightarrow 0$, имаме

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = A_i.$$

Следствие 1. Условието (13.15) за диференцируемост на функция в дадена точка M може да се запише в следната форма:

$$(13.16) \quad \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho).$$

Следствие 2. Ако функцията f е диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, то представянето на нарастването й Δf във форма (13.14) или (13.15) е единствено.

Действително коефициентите A_i в тези представяния са равни на частните производни $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в дадената точка и затова се определят по единствен начин.

Ще установим едно важно свойство на диференцируемите функции.

Ако функцията f е диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, то тя е непрекъсната в тази точка.

Пакетна от условието (13.14) за диференцируемост в точка следва, че $\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta f = 0$, а това означава, че функцията с непрекъсната в точката M (вж. (13.7)).

13.4.3. Геометричен смисъл на условието за диференцируемост на функция на две променливи. В случай на функция $u=f(x, y)$ на две променливи условието за диференцируемост може да бъде илюстрирано геометрично. Ще въведем понятието допирателна равнина към повърхнината в дадена точка.

Равнината Π , минаваща през дадената точка N_0 на повърхнината, се нарича допирателна равнина в тази точка, ако ъгълът между тази равнина и секущата (права), минаваща през точката N_0 и произволна точка N_1 от повърхнината, клони към нула, когато точката N_1 клони към N_0 (фиг. 13.3).

Ако в точката N_0 съществува допирателна равнина, то очевидно допирателната в тази точка към всяка крива, разположена на повърхнината и минаваща през N_0 , лежи в допирателната равнина.

Ще се убедим, че от условието за диференцируемост на функцията f в дадена точка $M_0(x_0, y_0)$ следва съществуването на допирателна равнина към графиката S на тази функция в точката $N_0(x_0, y_0, u_0)$. Полагаме $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta u = u - u_0$, където $u_0 = f(x_0, y_0)$, $u = f(x, y)$. Очевидно условното (13.14) за диференцируемост в разглеждания случай може да се запише по следния начин:

$$u - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + \alpha \Delta x + \beta \Delta y - A(x - x_0) - B(y - y_0) + o(\rho),$$

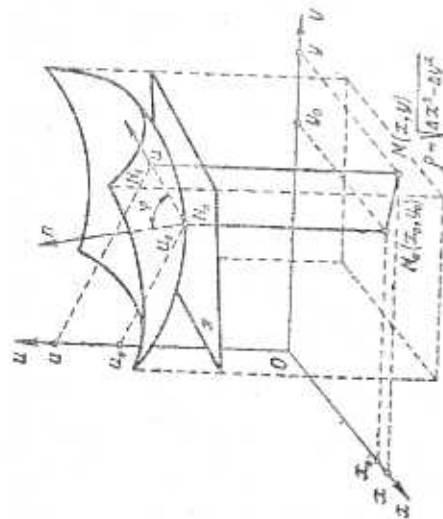
където A и B са константи, равни на частните производни $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точката M_0 , а α и β са безкрайно малки функции при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$ и $\rho = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$.

Да разгледаме следното уравнение:

$$U - u_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Това е уравнение на равнината Π , минаваща през точката $N_0(x_0, y_0, u_0)$ и имаща нормален вектор $\mathbf{n} = \{A, B, -1\}$.

Ще докажем, че тази равнина Π е допирателна в точката N_0 към повърхнината S . Затова е достатъчно да се убедим, че: 1) равнината Π минава през точката N_0 на повърхнината S и 2) ъгълът φ между нормалата $\mathbf{n}$ на тази равнина и произволна секуща $N_0 N_1$ клони към $\pi/2$, когато точката от повърхнината N_1 клони към N_0 . Твърдението 1) е очевидно. Ще преминем към доказателството на твърдението 2). Ще пресметнем косинуса на ъгъла φ , като използваме известната формула за косинус на ъгъл между два вектора. Тъй като векторът $\mathbf{n}$ е с координати $A, B, -1$, а векторът $\overrightarrow{N_0 N_1}$ върху секущата — с координати $x - x_0, y - y_0, u - u_0$ (вж. фиг. 13.3), то



Фиг. 13.3

$$\cos \varphi = \frac{A(x-x_0) + B(y-y_0) - (z-z_0)}{\sqrt{(A^2+B^2+1)^2} \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}$$

От условието за диференцируемост на функцията f следва, че

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) - (z-z_0) = o(\rho).$$

Затога

$$|\cos \varphi| \leq \frac{|o(\rho)|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = \frac{|o(\rho)|}{\rho} \rightarrow 0,$$

когато $\rho \rightarrow 0$, т. е. $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varphi = \pi/2$. Твърдението 2) е доказано.

Така диференцируемостта на функцията f в точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от геометрична гледна точка означава съществуването на допирателна равнина към графиката на функцията f в точката $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

Тъй като коефициентите A и B са равни на частните производни на функцията в точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнението на допирателната равнина може да се запише във вида

$$(13.17) \quad U - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0).$$

Нормалният вектор $n = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right\}$ на допирателната равнина е прието да се нарича нормала към повърхнината $u = f(x, y)$ в точката $N_0(x_0, y_0, z_0)$.

13.4.4. Достатъчни условия за диференцируемост. Ще се заемем с изясняване на достатъчни условия за диференцируемост на функция на n променливи. Ще докажем следната теорема:

Теорема 13.10. Ако функцията f има частни производни по всяките си аргументи в някоя околност на точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и частните ѝ производни са непрекъснати в точката M_0 , то функцията е диференцируема в точката M_0 .

Доказателство. За да не пишем много, ще проведем доказателството за функции f на две променливи. И така нека двете частни производни f'_x и f'_y съществуват в околност на точката $M_0(x_0, y_0)$ и са непрекъснати в тази точка. Даваме на аргументите x и y толкова малки нараствания, че точката $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ да остава в тази околност на точката M_0 . Пълното нарастване $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ може да се запише във вида

$$\Delta f = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

Изразът $[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)]$ може да се разглежда като нарастване на функцията $f(x, y_0 + \Delta y)$ на една променлива x в сегмента $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Понеже функцията f има частни производни, функцията $f(x, y_0 + \Delta y)$ е диференцируема и неината производна по x е частната производна f'_x . Като приложим към посоченото нарастване формулата на Лагранж, ще получим

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x,$$

където $0 < \theta_1 < 1$.

Разсъждавайки съвсем аналогично, получаваме

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \cdot \Delta y, \quad 0 < \theta_2 < 1.$$

Тъй като производните f'_x и f'_y са непрекъснати в точката M_0 , то

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha, \\ f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x_0, y_0) + \beta,$$

където α и β са безкрайно малки функции при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$. Оттук, като имаме пред вид изразите за

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) \text{ и } f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

намираме

$$\Delta f = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y.$$

Следователно функцията f е диференцируема в точката M_0 .

точката M , нарастването Δu на тази функция може да се запише във вида

$$(13.23) \quad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \alpha_2 \Delta x_2 + \dots + \alpha_m \Delta x_m,$$

където частните производни $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ са взети в точката M , а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ са безкрайно малки функции при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$, равни на нула при $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$. Подчертаваме, че в съотношения (13.23) $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ са нараствания на функциите (13.21), отговарящи на избраните нараствания $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_k$ на аргументите на тези функции. Поради диференцируемостта на функциите (13.21) в точката $M(t_1, t_2, \dots, t_k)$ нарастванията Δx_i могат да се запишат в следната форма:

$$(13.24) \quad \Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial x_i}{\partial t_2} \Delta t_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial t_k} \Delta t_k + o(\rho),$$

$$i=1, 2, 3, \dots, m,$$

където частните производни $\frac{\partial x_i}{\partial t_1}, \frac{\partial x_i}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial x_i}{\partial t_k}$ са взети в точката M , а $\rho = ((\Delta t_1)^2 + (\Delta t_2)^2 + \dots + (\Delta t_k)^2)^{1/2}$.

Трябва да се убедим, че след заместването в дясната страна на (13.23) с изразите (13.24) нарастването Δu може да се приведе във вида

$$(13.25) \quad \Delta u = A_1 \Delta t_1 + A_2 \Delta t_2 + \dots + A_k \Delta t_k + o(\rho),$$

където

$$(13.26) \quad A_i = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_i},$$

$$i=1, 2, 3, \dots, k.$$

С това доказателството на теоремата ще бъде завършено, тъй като формулата (13.25) показва, че сложната функция е диференцируема, а изразите (13.26) са частните производни на сложната функция по променливите t_i (вж. теорема 13.9). $\square$

При заместването в дясната страна на (13.23) с изразите (13.24) освен групата събираеми

$$A_1 \Delta t_1 + A_2 \Delta t_2 + \dots + A_k \Delta t_k$$

ще получим и други групи събираеми. Трябва да се убедим, че всички други групи събираеми са величини от вида $o(\rho)$.

Действително, ако заместим изразите (13.24) във формулата (13.23), имаме

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \Delta t_j + o(\rho) \right) \\ &+ \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^k \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \Delta t_j \right. \\ &+ \sum_{j=1}^k \frac{\partial u}{\partial x_i} o(\rho) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta x_i - \sum_{j=1}^k A_j \Delta t_j \\ &\left. + \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} o(\rho) + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta x_i \right\}. \end{aligned}$$

Последните две суми са величини от вида $o(\rho)$. Наистина производните $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ са взети в точката M и затова са константи,

независещи от ρ . Следователно $\sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} o(\rho) = o(\rho)$. Величините Δx_i

за $i=1, 2, 3, \dots, m$ съгласно формулите (13.24) удовлетворяват неравенството $|\Delta x_i| \leq \text{const} \cdot \rho$, а за величините α_i имаме $\alpha_i = o(\rho)$ при $i=1, 2, 3, \dots, m$, тъй като α_i са безкрайно малки функции при $\Delta x_i \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$. Освен това от диференцируемостта и следващата от това непрекъснатост в точката M на функциите (13.21) имаме, че $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ клонят към

нула при $\rho \rightarrow 0$. Затова $\sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta x_i = o(\rho)$. $\square$

Забележка. Ще разгледаме важния частен случай, когато функциите (13.21) зависят само от един аргумент t . Тогава ще имаме сложна функция на една променлива $t: u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$, където $x_i = x_i(t)$. Производната $\frac{du}{dt}$ на тази сложна функция се определя с формулата

$$(13.27) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{dx_m}{dt}.$$

Ще приложим формулата (13.27) при доказателството на теоремата на Ойлер за хомогенните функции.

Функцията u , дефинирана в множеството $\{M\}$, се нарича **хомогенна функция** от степен p в това множество, ако за всяка точка $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ от множеството $\{M\}$ и за всяко число t , за което точката $N(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)$ принадлежи на множеството $\{M\}$, е изпълнено равенството

$$(13.28) \quad u(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^p u(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Теорема 13.12 (теорема на Ойлер за хомогенни функции). Ако u е диференцируема и хомогенна функция от степен p в някоя област $\{M\}$, то във всяка точка $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ на областта $\{M\}$ е изпълнено равенството

$$(13.29) \quad \frac{du}{dx_1} x_1 + \frac{du}{dx_2} x_2 + \dots + \frac{du}{dx_m} x_m = pu.$$

Доказателство. Нека $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ е произволна точка от областта $\{M\}$. Разглеждаме сложната функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$, където $x_i = tx_i^0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$), т. е. функцията $u = u(tx_1, tx_2, \dots, tx_m)$. Тъй като при $t = 1$ функциите $x_i = tx_i^0$ са диференцируеми и функцията u е диференцируема в съответната точка M_0 , то съгласно теорема 13.11 и забележката към нея можем да пресметнем производната $\frac{du}{dt}$ на сложната функция в точката $t = 1$ по формулата (13.27). Тъй като $\frac{dx_i}{dt} = x_i^0$,

$$(13.30) \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=1} = \frac{du}{dx_1} x_1^0 + \frac{du}{dx_2} x_2^0 + \dots + \frac{du}{dx_m} x_m^0,$$

където производните $\frac{du}{dx_i}$ са взети в точката M_0 . От друга страна, според (13.28) разглежданата сложна функция може да се представи и така:

$$(13.31) \quad u = u(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^p u(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

От (13.31) следва, че

$$(13.32) \quad \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=1} = pu.$$

Сравнявайки (13.30) и (13.32), получаваме съотношението (13.29) за точката M_0 .

13.4.7. Инвариантност на формата на първия диференциал. В точка 13.4.3 въведохме понятието първи диференциал du на функция на няколко променливи и установихме, че когато аргументите $x_1, x_2,$

$\dots, x_m$ са независими променливи, диференциалът du може да се представи във вида

$$(13.20) \quad du = \frac{du}{dx_1} dx_1 + \frac{du}{dx_2} dx_2 + \dots + \frac{du}{dx_m} dx_m.$$

В тази точка ще докажем, че формула (13.20) е универсална и вярна и в случая, когато аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ са диференцируеми функции на някои нови променливи $t_1, t_2, \dots, t_k$, които са независими променливи. Това свойство на първия диференциал се нарича обикновено **инвариантност на неговата форма**.

И така нека аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ на функцията u са диференцируеми в точката $A(t_1, t_2, \dots, t_k)$ функции $x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$, а функцията $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ е диференцируема в точката $B(x_1, x_2, \dots, x_m)$, където $x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$. В такъв случай можем да разгледаме u като сложна функция на независимите променливи $t_1, t_2, \dots, t_k$, които според теорема 13.11 е диференцируема в точката A . Затова диференциалът на тази сложна функция може да се представи във вида

$$(13.33) \quad du = \frac{du}{dt_1} dt_1 + \frac{du}{dt_2} dt_2 + \dots + \frac{du}{dt_k} dt_k,$$

където du/dt_i се определят от съотношенията (13.22). Като заместим du/dt_i от (13.22) в (13.33) и съберем коефициентите пред du/dx_i , получаваме

$$du = \frac{du}{dx_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k \right) + \dots + \frac{du}{dx_m} \left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k \right).$$

Остава да отбележим, че в последното съотношение коефициентът пред du/dx_i е равен на диференциала dx_i на функцията $x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$. □

Свойството инвариантност на формата на първия диференциал дава възможност да се установят следните правила за диференциране: Нека u и v са диференцируеми функции на произволен брой променливи. Тогава

$$d(cu) = cdu \quad (c = \text{const}),$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(u \cdot v) = u dv + v du,$$

$$d(u/v) = (v du - u dv) v^{-2}.$$

Ще докажем например верността на третата от изброените формули.

мул. Разглеждаме функцията $\varphi = u \cdot v$ на двете променливи u и v . Диференциалът на тази функция е

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv.$$

Тъй като $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = v$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = u$, то $d\varphi = u dv + v du$. Поради инвариантността на формата на първи диференциал изразът $u dv + v du$ ще бъде диференциал на функцията $u \cdot v$ и в случая, когато u и v са диференцируеми функции на еднакви други променливи.

13.4.8. Производна по посока. Градиент. Ще започнем с функция на три независими променливи $u = u(x, y, z)$. Предполагаме, че тази функция е дефинирана в някоя околност на точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ от пространството E^3 и диференцируема в тази точка.

Ще разгледаме всички лъчи, излизащи от точката M_0 . Всеки такъв лъч се задава с единичен вектор e с координати $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ и определя някаква посока.

Фиксираме някой лъч, излизаш от точката M_0 и определен с единичен вектор e с координати $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

Върху правата, съдържаща този лъч, вземаме произволна различна от M_0 точка M и разглеждаме вектора или насочената отсечка $\vec{M_0M}$, като означаваме с l големината на тази насочена отсечка от оста, определена с единичния вектор $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.*

Ясно е, че векторът $\vec{M_0M}$ има координати $(l \cos \alpha, l \cos \beta, l \cos \gamma)$.

От друга страна, ако координатите на точката M са (x, y, z) , то векторът $\vec{M_0M}$ има координати $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$.

Като съпоставим двете получени съотношения за координатите на вектора $\vec{M_0M}$, имаме до равенствата

$$(13.34) \quad x = x_0 + l \cos \alpha, \quad y = y_0 + l \cos \beta, \quad z = z_0 + l \cos \gamma.$$

Равенствата (13.34) показват, че върху правата, минаваща през точката M_0 и определена с единичния вектор $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, функцията u е сложна функция на една независима променлива l от вида $u = f(x_0 + l \cos \alpha, y_0 + l \cos \beta, z_0 + l \cos \gamma)$.

* Големината l на насочената отсечка $\vec{M_0M}$ от оста, определена от единичния вектор e , се нарича числото, равно на дължината на отсечката $\vec{M_0M}$, взета със знак плюс, ако векторите $\vec{M_0M}$ и e са еднопосочни, и със знак минус, ако тези вектори са разнопосочни.

Определение 1. Производната на посочената сложна функция по променливата l в точката $l=0$ ще наричаме производна на функцията u в точката M_0 по посока, определена от единичния вектор e , и ще я означаваме със символа $\frac{\partial u}{\partial e}$.

И така по определение

$$(13.35) \quad \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Ще въведем понятието градиент на диференцируема в дадена точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функция.

Определение 2. Градиент на функцията u в дадена точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ се нарича векторът с координати

$$\frac{\partial u}{\partial x} (M_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y} (M_0), \quad \frac{\partial u}{\partial z} (M_0).$$

Градиентът на функцията u се означава с

$$(13.36) \quad \text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} (M_0), \frac{\partial u}{\partial y} (M_0), \frac{\partial u}{\partial z} (M_0) \right).$$

Тъй като скалярното произведение на два вектора е равно на сумата от произведения на съответните им координати, то изразът (13.35) за производна по посока, определено от вектора e , може да се разглежда като скалярно произведение на вектора (13.36) и $e = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.

Така получаваме, че

$$(13.37) \quad \frac{\partial u}{\partial e} = e \cdot \text{grad } u.$$

С помощта на равенство (13.37) ще се убедим, че градиентът на функцията u в точката M_0 характеризира посоката и големината на максималното нарастване на тази функция в точката M_0 . По-точно ще докажем двете твърдения:

1) Производната на функцията u в точката M_0 по посоката, определена от градиента на тази функция в дадената точка, има максимална стойност в сравнение с производната в тази точка по коя да е друга посока.

2) Стойността на производната на функцията u по посоката, определена от градиента на тази функция в дадена точка, е равна на $|\text{grad } u|$, т. е. на дължината на вектора $\text{grad } u$ в дадената точка.

Тъй като скалярното произведение на два вектора е равно на произведението от дължините на тези вектори и косинуса на ъгъла между тях, то изразът (13.37) може да се запише във вида

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = |\mathbf{e}| |\operatorname{grad} u| \cdot \cos \varphi,$$

където φ е ъгълът между векторите $\mathbf{e}$ и $\operatorname{grad} u$.
Тъй като $|\mathbf{e}| = 1$, получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = |\operatorname{grad} u| \cdot \cos \varphi.$$

От последното равенство следват и двете твърдения 1) и 2). Наистина максималната стойност на производната $\partial u / \partial \mathbf{e}$ се получава при $\cos \varphi = 1$, т. е. при съвпадане на посоката $\mathbf{e}$ с посоката на $\operatorname{grad} u$, при това производната $\partial u / \partial \mathbf{e}$ по тази посока е равна на $|\operatorname{grad} u|$.

Доказаните две твърдения показват, че градиентът не зависи от избора на координатната система (тъй като посоката и дължината на вектора $\operatorname{grad} u$ във всяка точка са инвариантни относно избора на координатната система).

Повърхнини на ниво на функцията u се наричат повърхнините, върху които тази функция има една и съща стойност, т. е. $u(x, y, z) = C = \text{const}$.

Ако във всяка точка $M_0(x, y, z)$ на повърхнината на ниво $u(x, y, z) = C$ построим допирателната равнина, то лесно можем да се убедим, че нормалният вектор на такава равнина е векторът (13.36), т. е. $\operatorname{grad} u$. Оттук следва, че векторът $\operatorname{grad} u$ във всяка точка M на повърхнината на ниво е ортогонален на тази повърхнина.

Съсем аналогично се определят производна по посока и градиент за диференцируема в дадена точка $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция на m променливи.

За такава функция производната $\partial u / \partial \mathbf{e}$ в дадена точка $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ по посока, определена от единичния вектор $\mathbf{e} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m)$,* се въвежда като обикновена производна по променливата l на сложната функция

$$u = u(x_1 + l \cos \alpha_1, x_2 + l \cos \alpha_2, \dots, x_m + l \cos \alpha_m)$$

в точката $l=0$.

* Тъй като всички координати на единичния вектор по модул не надминават единица, то за всяка от тези координати съществува такъв ъгъл α_i , че съответната i -та координата да е равна на $\cos \alpha_i$ (при това можем да считаме, че $0 \leq \alpha_i \leq \pi$).

Така единичният вектор $\mathbf{e}$ може да се запише във вида $(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m)$. Величините $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m$ е прието да се наричат направляващи косинуси (директорни косинуси).

За всяка диференцируема в дадена точка $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция u производната в тази точка по посоката, определена от вектора $\mathbf{e} = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m)$, е

$$(13.35') \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial u}{\partial x_1} (M_0) \cos \alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} (M_0) \cos \alpha_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} (M_0) \cos \alpha_m.$$

Градиент на диференцируемата в дадена точка $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция u се нарича векторът

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} (M_0), \frac{\partial u}{\partial x_2} (M_0), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m} (M_0) \right).$$

Тъй като скалярното произведение на два вектора на пространството E^m е равно на сумата от произведените на съответните координати на тези вектори, то равенството (13.35') показва, че

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = (\mathbf{e}, \operatorname{grad} u).$$

От неравенството на Коши — Буняковски (вж. 9.6.2) следва, че

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} \right| \leq |\mathbf{e}| \cdot |\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} u|.$$

при което равенство се достига само когато векторите $\operatorname{grad} u$ и $\mathbf{e}$ са колинеарни.

Оттук следва, че векторът $\operatorname{grad} u$ в пространството E^m притежава същите две свойства 1) и 2), както и в пространството E^3 .

Ще отбележим, че в случай на функция u на две променливи x и y единичният вектор $\mathbf{e}$, определящ посока в точката M_0 , има координати $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$. Затова в този случай (13.35) приема вида

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha.$$

13.5. Частни производни и диференциали от по-висок ред

13.5.1. Частни производни от по-висок ред. Нека частната производна $\partial u / \partial x_i$ по аргумента x_i на функцията $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ е дефинирана в областта $\{M\}$, съществува във всяка точка на об-

ластта $\{M\}$. В такъв случай тази частна производна е функция на променливите $x_1, x_2, \dots, x_m$, също така дефинирана в областта $\{M\}$.

Може да се случи тази функция $\partial u / \partial x_i$ да има частна производна по аргумента x_k в някоя точка M на областта $\{M\}$. Тогава тази частна производна по аргумента x_k се нарича **втора частна производна** или **частна производна от втори ред** на функцията u в точката M най-напред по аргумента x_i , а след това по аргумента x_k и се означава с

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \quad \text{или} \quad u_{x_i x_k}^{(2)}.$$

При това, ако $i = k$, частната производна $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ се нарича смесена частна производна от втори ред. След като е въведено понятието втора частна производна, може да се въведе понятието трета частна производна, след това четвърта и т. н.

Ако предположим, че вече е въведено понятието $(n-1)$ -ва частна производна на функцията u по аргументите $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ (явно, а може и всичките индекси могат да съвпадат) и че тази $(n-1)$ -ва частна производна има в точката M частна производна по аргумента x_n , то тази частна производна се нарича **n -та частна производна** (или **частна производна от n -ти ред**) на функцията u в точката M по аргументите $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Така въведохме понятието n -та частна производна чрез индукция от първата частна производна към следващите. Съотношението, определящо n -тата частна производна по аргументите $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, има вида

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1} \partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_{n-1}} \right).$$

Ако не всички индекси $i_1, i_2, \dots, i_n$ съвпадат помежду си, то частна производна $\partial^n u / \partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}$ се нарича смесена частна производна от n -ти ред.

Тъй като частната производна на функция по аргумента x_i се определя като обикновена производна на функция на една променлива x_i при фиксирани стойности на останалите променливи, то методиката за пресмятане на частните производни от по-висок ред предполага само умненето да се пресмятат обикновените производни от първи ред. За пример ще пресметнем частните производни от втори ред на функцията $u = \arcs \operatorname{tg}(x/y)$. Имаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

В разглеждания пример смесените частни производни $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ са равни помежду си. Изобщо стойностите на смесените производни зависят от реда, в който се извършва диференцирането. Ще покажем например, че смесените частни производни $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ на функцията

$$u = \begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2) & \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

в точката $(0, 0)$ съществуват, но не са равни помежду си. Наистина

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^2-y^2+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Затова

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \bigg|_{x=0, y=0} = \lim_{y \rightarrow 0} y^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=0} - \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=0} \right) = -1.$$

С аналогични пресметания получаваме $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \bigg|_{x=0, y=0} = 1$. Следователно в точката $(0, 0)$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Ще дадем достатъчни условия за независимост на стойността на смесената производна от реда на диференцирането.

Определение. Функцията $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ се нарича **n пъти диференцируема** в точката $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, ако всичките n частни производни от ред $n-1$ са диференцируеми функции в тази точка.

От това определение следва, че ако функцията u е n пъти диференцируема в точката M_0 , то при $n > 1$ всяка нейна производна от първи ред е $n-1$ пъти диференцируема в точката M_0 , при $n > 2$ всяка нейна частна производна от втори ред е $n-2$ пъти диференцируема в точката M_0 и т. н.

Ще дадем достатъчно условие за n -кратна диференцируемост на функция в дадена точка.

За да бъде функцията и n пъти диференцируема в точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$, е достатъчно всичките й частни производни от n -ти ред да са непрекъснати в точката M_0 .

Верността на това твърдение следва от определеното за диференцируемост на функция и от теорема 13.10 за достатъчните условия за диференцируемост.

Теорема 13.13. Нека функцията $f=f(x, y)$ е два пъти диференцируема в точката $M_0(x_0, y_0)$. Тогава в тази точка частните й производни $f_{xy}^{(2)}$ и $f_{yx}^{(2)}$ са равни.

Доказателство. Тъй като функцията f е два пъти диференцируема в точката $M_0(x_0, y_0)$, то частните й производни f_x и f_y са дефинирани в някоя δ -околност на точката M_0 и са диференцируеми функции в тази точка. Разглеждаме израз

$$(13.38) \quad \begin{aligned} \Phi &= f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) \\ &\quad - f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

където h е толкова малко число, че точките $M(x_0+h, y_0+h)$, $M_1(x_0+h, y_0)$, $M_2(x_0, y_0+h)$ да принадлежат на δ -околността на точката M_0 . Изразът Φ може да се разглежда като нарастване $\Delta \varphi = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)$ на диференцируемата в сегмента $[x_0, x_0+h]$ функция $\varphi(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$ на една променлива x . Затова по формулата на Лагранж за някое число θ от интервала $0 < \theta < 1$ ще имаме

$$(13.39) \quad \begin{aligned} \Phi &= \Delta \varphi = \varphi'(x_0 + \theta h) h \\ &= \{f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)\} h \end{aligned}$$

$$= \{f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)\} - [f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)]\} h.$$

Тъй като частната производна f'_x е диференцируема функция в точката M , то

$$\begin{aligned} [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)] &= f''_{xx}(x_0, y_0) \theta h \\ &\quad + f''_{xy}(x_0, y_0) \theta h + a_1 \theta h + \beta_1 h, \end{aligned}$$

$$[f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)] = f''_{xx}(x_0, y_0) \theta h + a_2 \theta h,$$

където a_1 , β_1 и a_2 са безкрайно малки функции при $h \rightarrow 0$. За мествайки намерените изрази за $[f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)]$ и $[f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)]$ във формула (13.39), получаваме

$$(13.40) \quad \Phi = [f''_{xy}(x_0, y_0) + a] h^2,$$

където $a = a_1 \theta + \beta_1 - a_2 \theta$ е безкрайно малка функция при $h \rightarrow 0$. От друга страна, изразът Φ , определен от съотношението (13.38), може да се разглежда като нарастване $\Delta \psi = \psi(y_0+h) - \psi(y_0)$ на диференцируемата в сегмента $[y_0, y_0+h]$ функция $\psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$. От формулата на Лагранж и диференцируемостта на частната производна f'_y в точката M_0 ще получим за Φ аналогично на горния израз:

$$(13.41) \quad \Phi = [f''_{xy}(x_0, y_0) + \beta] h^2,$$

където β е безкрайно малка функция при $h \rightarrow 0$. Като приравним десните страни на съотношенията (13.40) и (13.41) и съкратим на h^2 , намираме, че $f''_{xy}(x_0, y_0) + a = f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta$. Тъй като a и β са безкрайно малки функции при $h \rightarrow 0$, от последното равенство следва, че $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. $\square$

Теорема 13.13 показва, че в дадена точка $M(x_0, y_0)$ е изпълнено равенството $f''_{xy} = f''_{yx}$, ако в тази точка са диференцируеми f'_x и f'_y . От диференцируемостта на f'_x и f'_y в точката M_0 следва съществуването в тази точка на всички частни производни от втори ред. Разбира се, равенството $f''_{xy} = f''_{yx}$ е изпълнено и при условие, че само съществуват производните f''_{xy} и f''_{yx} , но при допълнителното изискване за непрекъснатост на тези производни в разглежданата точка. В сила е следната теорема:

Теорема 13.13. Нека в някоя околност на точката $M(x_0, y_0)$ функцията $f=f(x, y)$ има частни производни $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$. Нека освен това производните f''_{xy} и f''_{yx} са непрекъснати в точката M_0 . Тогава в тази точка $f''_{xy} = f''_{yx}$.

При доказателството ще използваме изрази Φ , определен от съотношението (13.38). От (13.39) следва, че Φ е разликата от стойностите на функцията f'_x в точките $(x_0 + \theta h, y_0 + h)$ и $(x_0 + \theta h, y_0)$, умножена с h . От формулата на Лагранж за крайните нараствания по променливата y в сегмента $[y_0, y_0+h]$ получаваме

$$\Phi = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h) h^2,$$

където $0 < \theta_1 < 1$.

Понеже f''_{xy} е непрекъсната в точката $M(x_0, y_0)$, от последното равенство имаме

$$\Phi = [f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha(h)] h^2,$$

където $\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

От друга страна, Φ представлява разлика от стойностите на

функцията f'_y в точките $(x_0+h, y_0+\theta_2 h)$ и $(x_0, y_0+\theta_2 h)$, умножена с h . Като приложим към тази разлика формулата на Лагранж за крайните нараствания по променливата x в сегмента $[x_0, x_0+h]$ и вземем пред вид непрекъснатостта на f''_{yx} в точката $M_0(x_0, y_0)$, получаваме

$$\Phi = [f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta(h)] h^2,$$

където $\beta(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Като приравним последните два израза за Φ и разсъждаваме, както в края на доказателството на теорема 13.13, се убеждаваме във верността на равенството

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Теорема 13.14. Нека функцията $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ е n пъти диференцируема в точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Тогава в тази точка стойността на всяка смесена частна производна от n -ти ред не зависи от реда на диференцирането.

Доказателство. Достатъчно е да докажем независимостта на стойността на коя да е n -та смесена производна от реда на две последователни диференцирания. С други думи, достатъчно е да докажем равенството

$$(13.42) \quad \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Разглеждаме функцията $\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$. Тя е два пъти диференцируема функция на променливите x_{i_k} и $x_{i_{k+1}}$. Затова според теорема 13.13

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \dots \partial x_{i_1}}.$$

Оттук следва и верността на равенство (13.42). Теоремата е доказана.

Ще отбележим, че в случай на n пъти диференцируема в точката M_0 функция $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ всяка нейна частна производна от n -ти ред може да се напише във вида

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}},$$

където $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ са цели числа, удовлетворяващи условията $0 \leq \alpha_i \leq n, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n$.

13.5.2. Диференциали от по-висок ред. По-рано използвахме за означаване на диференциалите на аргументите на функцията $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и за диференциала на самата функция символите $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ и du . Сега ще се наложи да използваме за означаване на диференциалите на аргументите на тази функция и диференциала на самата функция и други символи. По-специално ще означаваме диференциалите на аргументите на функцията u и диференциала на тази функция съответно със символите $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_m$ и δu . В тези означения инвариантният по форма израз за първия диференциал на тази функция (13.20) ще има вида

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \delta x_m.$$

Като се върнем към първоначалните означения, ще разгледаме израза (13.20) за първия диференциал на диференцируемата в дадена точка $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$:

$$(13.20) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m.$$

Ще предпологаме, че величината в дясната страна на (13.20) е функция на аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$, диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$. За това е достатъчно да поискаме функцията u да бъде два пъти диференцируема в точката $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, а аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ да бъдат или независими променливи, или два пъти диференцируеми функции на никакви независими променливи $t_1, t_2, \dots, t_k$.

При тези предположения можем да разгледаме диференциала

$$\delta(du) = \delta \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k \right].$$

Определение 1. Стойността $\delta(du)$ на диференциала на първия диференциал (13.20), взет при $\delta x_1 = dx_1, \delta x_2 = dx_2, \dots, \delta x_m = dx_m$, се нарича **втори диференциал** на функцията u (в дадената точка $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$) и се означава със символа d^2u .

И така по определение

$$d^2u = \delta(du) \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} = \delta \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k \right] \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}}.$$

Диференциала d^2u от произволен ред n ще определим по индукция.

Предполагаме, че вече е въведен диференциалът $d^{n-1}u$ от ред

$n-1$ и че функцията u е n пъти диференцируема в дадената точка $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, а аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ са или независими променливи, или n пъти диференцируеми функции на някакви независими променливи $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Определение 2. Стойността $\delta(d^{n-1}u)$ на диференциала на $(n-1)$ -ия диференциал $d^{n-1}u$ и при $\delta x_1 = dx_1, \delta x_2 = dx_2, \dots, \delta x_m = dx_m$ се нарича **n -ти диференциал на функцията u в дадената точка $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$** и се означава със символа $d^n u$.

И така по определение

$$d^n u = \delta(d^{n-1}u) \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, 3, \dots, m}}$$

При пресмятане на втория и следващите диференциали трябва съществено да се различават двата случая: 1) случаят, когато аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ са независими променливи; 2) случаят, когато аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ са съответният брой пъти диференцируеми функции на някои независими променливи $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Ще разгледаме най-напред първия случай. Ако $x_1, x_2, \dots, x_m$ са независими променливи, имаме право да смятаме, че $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ не зависят от $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Всеки от диференциалите dx_k можем да вземем равен на едно и също нарастване Δx_k за всички точки $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Така ще получим

$$\delta(dx_k) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(dx_k)}{\partial x_i} \delta x_i = 0.$$

Последното съотношение и правилата за диференциране позволяват за два пъти диференцируема в дадена точка M функция u да се напише следната верига от равенства:

$$\begin{aligned} (13.43) \quad d^2 u &= \delta(du) \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} = \delta \left[\sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k \right] \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} \\ &= \sum_{k=1}^m \delta \left[\frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k \right] \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ dx_k \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta(dx_k) \right\} \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^m \left\{ dx_k \sum_{l=1}^m \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \delta x_l \right\} \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} \\ &= \left[\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} \delta x_l dx_k \right] \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} dx_l dx_k. \end{aligned}$$

(Използвахме и това, че за два пъти диференцируема функция смесените производни не зависят от реда на диференцирането.)

И така, когато аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ са независими променливи, за втория диференциал на два пъти диференцируема в дадена точка функция u получихме представянето

$$(13.44) \quad d^2 u = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} dx_l dx_k.$$

Забележка 1. Функция на m променливи $t_1, t_2, \dots, t_m$ от

вида $\phi = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m a_{lk} t_l t_k$, където a_{lk} са реални числа, се нарича

квадратична форма на променливите $t_1, t_2, \dots, t_k$, а числата a_{lk} — нейни коефициенти.

Квадратичната форма се нарича **симетрична**, ако коефициентите ѝ удовлетворяват условието $a_{lk} = a_{kl}$ (за всички $l = 1, 2, \dots, m$; $k = 1, 2, \dots, m$).

Полученият израз (13.44) показва, че когато аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ са независими променливи, вторият диференциал на два пъти диференцируема в дадена точка M функция u е симетрична квадратична форма на променливите $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ с коефициенти, равни съответно на стойностите на частните производни от втори ред на функцията u в точката M .

Изразът за диференциала от втори ред (13.44) може да се запише в друг вид, като се използва формалният символ

$$(13.45) \quad d = dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

С помощта на този символ изразът (13.44) се записва във вида

$$(13.46) \quad d^2 u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 u.$$

По индукция лесно можем да се убедим, че когато аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ на n пъти диференцируема в дадена точка

$M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ са независими променливи, за n -тия диференциал на тази функция с в сила представянето

$$d^n u = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_n}.$$

Това представяне с помощта на формалния символ (13.45) може да се запише във вида

$$(13.47) \quad d^n u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^n u.$$

В съвършено друг вид се представят вторият и следващите диференциали, когато аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ на функцията u са съответният брой пъти диференцируеми функции на някакви независими променливи $t_1, t_2, \dots, t_k$. В този случай ще установим израз за втория диференциал на два пъти диференцируема в дадена точка $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция u на аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$, които са два пъти диференцируеми функции на независимите променливи $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Повтаряйки разсъжденията от веригата (13.43), този път ще получим

$$\begin{aligned} d^2 u &= \delta(du) \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ dx_k \delta \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta(dx_k) \right\} \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ dx_k \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \delta x_i \right\} \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_k} \delta(dx_k) \right\} \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} \end{aligned}$$

Според определеното за втори диференциал на функцията x_k където k е кое да е от числата $1, 2, 3, \dots, m$)

$$\left\{ \delta(dx_k) \right\} \Big|_{\substack{\delta x_i = dx_i \\ i=1, 2, \dots, m}} = d^2 x_k.$$

От тези съотношения стигаме до следното представяне за втория диференциал:

$$d^2 u = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} dx_i dx_k + \sum_{k=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_k} d^2 x_k$$

или (при използване на символа (13.45))

$$(13.48) \quad d^2 u = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + dx_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^2 u + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} d^2 x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} d^2 x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} d^2 x_m \right).$$

Като сравним получените представяния (13.48) и (13.46), се убеждаваме, че (за разлика от първия диференциал) вторият диференциал вече не притежава свойството инвариантност на формата. Още повече това свойство не притежават следващите диференциали.

Забележка 2. Ще посочим важен частен случай, когато вторият и следващите диференциали на функция на m променливи притежават свойството инвариантност на формата и се определят по същата формула (13.47), както в случая на независими променливи.

Казваме, че променливите $x_1, x_2, \dots, x_m$ са линейни функции на независимите променливи $t_1, t_2, \dots, t_k$, ако се определят с равенствата

$$x_i = a_{i0} + a_{i1} t_1 + a_{i2} t_2 + \dots + a_{ik} t_k \quad (i=1, 2, 3, \dots, m),$$

в които $a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ik}$ са константи.

Ще отбележим, че ако функцията u е n -ти диференцируема в дадена точка $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, а аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ са линейни функции на независимите променливи $t_1, t_2, \dots, t_k$, то n -тият диференциал на функцията u се определя по същата формула (13.47), както и в случая на независими променливи $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Понесже $t_1, t_2, \dots, t_k$ са независими променливи, n -тият диференциал на x_i , разглеждан като функция на аргументите $t_1, t_2, \dots, t_k$, се определя с равенство от вида (13.47) или по-точно с равенството

$$d^n x_i = \left(dt_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + dt_2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots + dt_k \frac{\partial}{\partial t_k} \right)^n x_i.$$

По всяка частна производна от ред, по-нисък от първи, на линейната функция x_i е равна на нула.

Следователно $d^2 x_i = 0, d^3 x_i = 0, \dots, d^n x_i = 0$.

Равенството $d^2 x_i = 0$ (за всички $i=1, 2, \dots, m$) и представянето (13.48) показват, че $d^2 u$ се определя от (13.46). Съвсем ана-

логично, като използваме съотношенията $d^3x_i=0$, $d^4x_i=0$, ..., $d^nx_i=0$, се доказва по индукция, че d^3u , d^4u , ..., d^nu се определят от равенството (13.47).

13.53. Формула на Тейлор с остатъчен член във форма на ЛAGRANGE и в интегрална форма. Ще означаваме k -тия диференциал на функция на n променливи u в точката M на пространството E^n със символа $d^ku|_M$.

Ще докажем следната важна теорема:

Теорема 13.15. Нека $n \geq 1$ е цяло число, функцията u е дефинирана в някоя ϵ -околност на точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и е $n+1$ пъти диференцируема в тази околност. Тогава цялото нарастване $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ на тази функция в точката M може да се представи в следната форма:

$$(13.49) \quad \Delta u = du|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2u|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^nu|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}u|_M,$$

където N е някоя точка от разглежданата околност, зависеща от $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а диференциалите d^ku на променливите x_i , взети е изразите $d^ku|_{M_0}$ и $d^{n+1}u|_M$, са равни на $\Delta x_i = x_i - x_{i0}$. Формула (13.49) се нарича **формула на Тейлор** за функцията u с център на разлагането в точката M_0 , а последният член на формулата (13.49) се нарича **остатъчен член, записан във форма на ЛAGRANGE**.

Доказателство. За краткост при записването ще приемем доказателството за функция u на две променливи x и y . Предварително ще запишем в специална форма формулата на Тейлор за $n+1$ пъти диференцируема в някоя околност на точката t_0 функция $u=F(t)$ на една променлива t . Ще напомним, че формулата на Тейлор за разлагане на функцията $u=F(t)$ около точката t_0 има вида

$$(13.50) \quad F(t) = F(t_0) + (t-t_0)F'(t_0) + \frac{1}{2!} (t-t_0)^2 F''(t_0) + \dots + \frac{1}{n!} (t-t_0)^n F^{(n)}(t_0) + \frac{1}{(n+1)!} (t-t_0)^{n+1} F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t-t_0)); \quad 0 < \theta < 1.$$

Тъй като аргументът t е независима променлива, то нарастването $\Delta t = t - t_0$ е диференциалът dt на независимата променлива t . Затова

$$(13.51) \quad \begin{aligned} (t-t_0)^k F^{(k)}(t_0) &= F^{(k)}(t_0) dt^k = d^k F(t_0) = d^ku|_{t_0} \\ (t-t_0)^{n+1} F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t-t_0)) &= d^{n+1}u|_{t_0 + \theta(t-t_0)}. \end{aligned}$$

и

Ако означим разликата $F(t) - F(t_0)$ с Δu , то съгласно (13.51) формулата на Тейлор (13.50) може да се запише в следната специална форма:

$$(13.52) \quad \Delta u = du|_{t_0} + \frac{1}{2!} d^2u|_{t_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^nu|_{t_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}u|_{t_0 + \theta(t-t_0)}.$$

Разглеждаме сега в ϵ -околността на точката $M_0(x_0, y_0)$ произволна точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ и съединяваме точките M_0 и M с права линия. Очевидно координатите x и y на точките от тази права са следните линейни функции на новата променлива t

$$(13.53) \quad x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y,$$

при това координатите на точките от отсечките M_0M съответствуват на стойности на параметъра t от сегмента $[0, 1]$. Отбелязваме, че на стойността $t=0$ отговаря точката M_0 , а на стойността $t=1$ — точката M . Тъй като по условие функцията u на двете променливи x и y в разглежданата околност на точката M_0 е $n+1$ пъти диференцируема, то от формула (13.53) следва, че върху правата M_0M тази функция е сложна функция на променливата t , най-малко $n+1$ пъти диференцируема за всички стойности на t от сегмента $[0, 1]$. Да означим тази сложна функция с $F(t)$ и да напишем за нея формулата на Тейлор с център на разлагане точката $t_0=0$ в специалната форма (13.52) при

$$\Delta u = F(1) - F(0) = f(M) - f(M_0).$$

Участващите във формула (13.52) диференциали от различен ред са диференциали на сложната функция $u=u(x, y)$, където x и y са линейните функции (13.53). Съгласно забележката към предишната точка при тези условия диференциалите от произволен ред на функцията u могат да се запишат във формата (13.47). Затова

$$(13.54) \quad d^ku|_{t_0} = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^k u|_{M_0(x_0, y_0)} = d^ku|_{M_0}.$$

$$d^{n+1}u|_{t_0 + \theta(t-t_0)} = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} u|_{M(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)} = d^{n+1}u|_{M},$$

при което във формулите (13.54) dx и dy се намират от съотношенията (13.53) при $dt = \Delta t = 1 - 0 = 1$, така че във формулите (13.54)

$$(13.55) \quad dx = dt \Delta x = \Delta x \quad \text{и} \quad dy = dt \Delta y = \Delta y.$$

Заместявайки $d^ku|_{t_0}$ и $d^{n+1}u|_{t_0 + \theta(t-t_0)}$ от (13.54) в (13.52) и отчи-

тайки съотношенията (13.55), получаваме формулата на Тейлор (13.49).

Ще дадем формулата на Тейлор в развита форма за функцията u :

$$\begin{aligned}
 (13.56) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_m) &= u(x_1, x_2, \dots, x_m) \\
 &+ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}^k, \quad u(x_1, x_2, \dots, x_m) \\
 &+ \frac{1}{(n+1)!} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2 - x_2^0) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}^{n+1} u(x_1 + \theta(x_1 - x_1^0), x_2 + \theta(x_2 - x_2^0), \dots, \\
 &\quad x_m + \theta(x_m - x_m^0)).
 \end{aligned}$$

Следствие. Ако функцията u удовлетворява условията на теорема 13.15 и освен това всичките ѝ частни производни от $(n+1)$ -ви ред са непрекъснати в разглежданата ϵ -околност на точката M_0 , то остатъчният член, т. е. последният член във формулите (13.49) и (13.56), може да се представи във вида

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \left\{ \sum_{j=1}^m (x_j - x_j^0) \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}^{n+1} u(x_1^0 + t(x_1 - x_1^0), \dots, x_m^0 \\
 &\quad + t(x_m - x_m^0)) dt.
 \end{aligned}$$

Тази форма на остатъчния член е естествено да с. нарича **интегрална форма**. За получаване формулата на Тейлор с остатъчен член в интегрална форма трябва да се използва интегрална форма на остатъчния член във формулата на Тейлор за функцията на една променлива $F(t)$, разглеждана при доказателството на теорема 13.15, т. е. да се използват резултатите от 9.4.4. В разглеждания случай този остатъчен член има вида

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n F^{(n+1)}(t) dt.$$

Оттук се получава написаният по-горе израз за остатъчния член на функцията u .

13.5.4. Формула на Тейлор с остатъчен член във форма на Пеано.

Теорема 13.15'. Нека $n \geq 1$ е цяло число, а функцията u е дефинирана и $n-1$ пъти диференцируема в ϵ -околност на точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и n пъти диференцируема в самата точка M_0 . Тогава за всяка точка M от разглежданата ϵ -околност е в сила следната формула:

$$\begin{aligned}
 (13.57) \quad u(M) &= u(M_0) + \frac{1}{1!} du|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2 u|_{M_0} + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{n!} d^n u|_{M_0} + o(\rho^n),
 \end{aligned}$$

в която с ρ е означено разстоянието $\rho(M, M_0)$.

Формулата (13.57) се нарича **формула на Тейлор** (с център в точката M_0) с **остатъчен член във форма на Пеано**.

Забележка. По-подробно записана, формулата на Тейлор има вида

$$(13.58) \quad u(x_1, x_2, \dots, x_m) = u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}^k u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + o(\rho^n).$$

Отбелязваме, че лявата страна на (13.58) съдържа много-член от n -та степен на m променливи $x_1, x_2, \dots, x_m$ и остатъчен член $o(\rho^n)$. Означаваме с g_n разликата между u и този многочлен, т. е. полагаме

$$\begin{aligned}
 (13.59) \quad g_n(M) &= u(M) - u(M_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} \right. \\
 &\quad \left. + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}^k u(M_0).
 \end{aligned}$$

Теорема 13.15' ще бъде доказана, ако покажем, че когато са изпълнени нейните условия, $g_n(M) = o(\rho^n)$.

Преди да докажем теорема 13.15', ще разгледаме две леми.

Лема 1. Ако функцията u и n пъти диференцируема в точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$, то функцията g_n определена с равенството (13.59), и всичките ѝ частни производни по променливите $x_1, x_2, \dots, x_m$ до n -ти ред включително се анулират в точката M_0 .

Доказателство. При $n=1$ функцията (13.59) приема вида $g_1(M) = u(M) - u(M_0) - (x_1 - x_1^0) \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$ и равенствата $g_1(M_0) = 0$, $\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(M_0) = 0$ за $i=1, 2, 3, \dots, m$ се проверяват елементарно.

За проверка на индукцията предполагаме, че лемата е вярна за някой номер $n \geq 1$, и ще докажем, че тя е вярна и за номер $n+1$. Нека функцията u е $n+1$ пъти диференцируема в точката M_0 и

$$(13.60) \quad g_{n+1}(M) = u(M) - u(M_0) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} u(M_0) \right. \\ \left. + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial^k}{\partial x_m^k} u(M_0) \right\}$$

Равенството $g_{n+1}(M_0) = 0$ се проверява елементарно (достатъчно е да се вземе пред вид, че всеки множител $x_i - x_i^0$ в (13.60) се анулира в точката M_0).

Остава да докажем, че за всяко $i=1, 2, 3, \dots, m$ функцията $\frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_i}$ и всичките ѝ частни производни до n -ти ред включително се анулират в точката M_0 , а за това съгласно направление предположение за верността на лемата за номер n е достатъчно да докажем, че функцията $\frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_i}$ се определя с равенство от вида (13.59) или по-точно с равенството

$$(13.61) \quad \frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_i}(M) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(M) - \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial^k}{\partial x_m^k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_i} u(M_0).$$

Тъй като всички променливи x_i ($i=1, 2, 3, \dots, m$) са равни и участвуват в израза за g_{n+1} симетрично, то е достатъчно да докажем равенството (13.61) за $i=1$, т. е. да докажем равенството

$$(13.62) \quad \frac{\partial g_{n+1}}{\partial x_1}(M) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M) - \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial^k}{\partial x_m^k} \right\} \frac{\partial}{\partial x_1} u(M_0).$$

От (13.60) е очевидно, че за доказателството на (13.62) е достатъчно да се убедим, че за всеки номер $k=1, 2, \dots, m$ при фиксирани $x_2, x_3, \dots, x_m$ имаме

$$(13.63) \quad \frac{d}{dx_1} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m} \right\}^k u(M_0) \\ = k \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial^k}{\partial x_m^k} \right\}^{k-1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0).$$

Тъй като при диференциране по x_1 променливите $x_2, x_3, \dots, x_m$ са фиксирани, то величината

$$D = (x_2 - x_2^0) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + (x_m - x_m^0) \frac{\partial}{\partial x_m}$$

при диференциране по x_1 се разглежда като константа. Към това ще добавим, че понеже символите $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ се използват за означаване на частните производни на функцията u във фиксирана точка M_0 , то при диференциране по x_1 тези символи трябва да се разглеждат като константни величини.

От казаното се вижда, че равенството (13.63) следва от равенството

$$(13.64) \quad \frac{d}{dx_1} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + D \right\}^k = k \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + D \right\}^{k-1},$$

което лесно се получава с помощта на формулата за нитоновия бином

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx_1} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + D \right\}^k &= \frac{d}{dx_1} \left\{ (x_1 - x_1^0)^k \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k!}{1!(k-1)!} (x_1 - x_1^0)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k-1}} D \right. \\ &\quad \left. + \frac{k!}{2!(k-2)!} (x_1 - x_1^0)^{k-2} \frac{\partial^{k-2}}{\partial x_1^{k-2}} D^2 + \dots + \frac{k!}{(k-1)!1!} (x_1 - x_1^0) \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k-1}} D \right. \\ &\quad \left. + D^k \right\} = k (x_1 - x_1^0)^{k-1} \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} + \frac{k!(k-1)}{1!(k-1)!} (x_1 - x_1^0)^{k-2} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k-1}} D \\ &\quad + \frac{k!(k-2)}{2!(k-2)!} (x_1 - x_1^0)^{k-3} \frac{\partial^{k-2}}{\partial x_1^{k-2}} D^2 + \dots + \frac{k!1!}{(k-1)!1!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k-1}} D^{k-1} \\ &= k \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ (x_1 - x_1^0)^{k-1} \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k-1}} + \frac{(k-1)!}{1!(k-2)!} (x_1 - x_1^0)^{k-2} \frac{\partial^{k-2}}{\partial x_1^{k-2}} D \right. \\ &\quad \left. + \dots + D^{k-1} \right\} = k \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ (x_1 - x_1^0) \frac{\partial}{\partial x_1} + D \right\}^{k-1}. \end{aligned}$$

Равенството (13.64) е установено. $\square$

Лема 2. Нека g е произволна функция, удовлетворяваща двете условия: 1) $g(M)$ е n -ти диференцируема в точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$; 2) функцията g и всичките ѝ частни производни по променливите $x_1, x_2, \dots, x_m$ до n -ти ред включително се анулират в точката M_0 . Тогава за функцията g е в сила оценката

$$(13.65) \quad g(M) = o(\rho^n),$$

в която с ρ е означено разстоянието $\rho(M, M_0)$ между точките M и M_0 .

Доказателство. При $n=1$ твърдението на лемата следва от условието за диференцируемост на функцията g в точката M_0 , което има вид

$$g(M) - g(M_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0)(x_i - x_i^0) + o(\rho).$$

От $g(M_0) = 0$ и $\frac{\partial g}{\partial x_i}(M_0) = 0$ за всички $i=1, 2, \dots, m$ получаваме че $g(M) = o(\rho)$.

За провеждане на индукцията предполагаме, че лема 2 е вярна за някой номер $n \geq 1$, и ще докажем, че е вярна за следващия номер $n+1$. Нека функцията g удовлетворява двете условия на лема 2 за номера $n+1$. Тогава очевидно всяка частна производна на тази функция от първи ред $\frac{\partial g}{\partial x_i}$; $i=1, 2, 3, \dots, m$, ще удовлетворява двете условия на лема 2 за номера n и затова съгласно допускането, че лема 2 е вярна за номер n ще бъде в сила оценката

$$(13.66) \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(M) = o(\rho^n).$$

Ще отбележим сега, че понеже $n \geq 1$, то $n+1 \geq 2$ и функцията g , удовлетворяваща двете условия на лема 2 за номера $n+1$, е поне един път диференцируема в околност на точката M_0 . Затова за g са изпълнени условията на теорема 13.15 за номер $n=0$. Съгласно тази теорема за всяка точка M от достатъчно малка ε -околност на точката M_0 на отсечката M_0M има такава точка N , че е в сила формулата

$$(13.67) \quad g(M) = g(M_0) + \frac{1}{1!} \sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0) \frac{\partial g}{\partial x_i}(N).$$

Понеже N лежи между точките M_0 и M , а ρ е разстоянието между M_0 и M , то $\rho(N, M_0) \leq \rho$ и затова от (13.65) следва

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(N) = o(\rho^n).$$

Замествайки последната оценка в (13.67) и отчитайки, че $g(M_0) = 0$, получаваме

$$g(M) = o(\rho^n) \sum_{i=1}^m |x_i - x_i^0|.$$

Тъй като $|x_i - x_i^0| \leq \left(\sum_{i=1}^m (x_i - x_i^0)^2 \right)^{1/2} = \rho$, окончателно имаме $g(M) = o(\rho^{n+1})$. $\square$

Доказателството на теорема 13.15' се провежда лесно с помощта на лемите 1 и 2. Наистина достатъчно е да установим, че ако са изпълнени условията на теоремата, за функцията (13.59) е в сила оценката

$$g_n(M) = o(\rho^n).$$

Според лема 1 функцията (13.59) и всичките ѝ частни производни по променливите $x_1, x_2, \dots, x_m$ до n -ти ред включително се анулират в точката M_0 . Но тогава според лема 2 за функцията (13.59) имаме оценката $g_n(M) = o(\rho^n)$. $\square$

13.6. Локален екстремум на функция на m променливи

13.6.1. Понятие за екстремум на функция на m променливи. Необходими условия за екстремум. Нека функцията на m променливи u е дефинирана в някоя околност на точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ от пространството E^m .

Определение 1. Казваме, че функцията u има в точката M_0 **локален максимум** (**локален минимум**), ако съществуват δ -околност на точката M_0 , в която стойността $u(M_0)$ е най-голяма (най-малка) измежду всички стойности $u(M)$ на тази функция в тази околност.

Определение 2. Казваме, че функцията u има в точката M_0 **локален екстремум**, ако тя има в тази точка или локален максимум, или локален минимум.

Ще установим необходимите условия за локален екстремум на

функция u , имаща в дадената точка M_0 частни производни от първи ред по всички x_i с променливи.

В сила е следното твърдение: Ако функцията u има в точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ частни производни от първи ред по всички променливи $x_1, x_2, \dots, x_m$ и има в тази точка локален екстремум, то всичките ѝ частни производни от първи ред се анулират в точката M_0 , т. е.

$$(13.68) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0) = 0.$$

Доказателство. Ще покажем верността на първото от равенствата (13.68). Фиксираме във функцията u аргументите $x_2, x_3, \dots, x_m$, като ги полагаме равни на съответните координати на точката M_0 , т. е. полагаме $x_2 = x_2^0, x_3 = x_3^0, \dots, x_m = x_m^0$. При това получаваме функцията u на една променлива x_1 . Производната на тази функция на една променлива в точката $x_1 = x_1^0$ съпада с частната производна $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$.

Тъй като функцията на m променливи u има локален екстремум в точката M_0 , то съответната функция на една променлива $u = u(x_1, x_2^0, \dots, x_m^0)$ има локален екстремум в точката $x_1 = x_1^0$ и затова (съгласно 7.1.2) производната на тази функция на една променлива в точката $x = x_1^0$, съвпадаща с частната производна $\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)$, е равна на нула.

Първото равенство от (13.68) е доказано. Останалите се доказват аналогично. Равенствата (13.68) (т. е. анулирането в дадена точка M_0 на всички частни производни от първи ред) са само необходими, но не са достатъчни условия за локален екстремум на функцията u в точката M_0 .

Например за функцията на две променливи $u = x_1 x_2$ двете частни производни $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ се анулират в точката $M_0(0, 0)$, без да има екстремум в тази точка, тъй като функцията $u = x_1 x_2$ е равна на нула в точката $M_0(0, 0)$, а във всяка δ -околност на тази точка тя приема както положителни, така и отрицателни стойности.

Точките, в които се анулират всичките частни производни от първи ред на функцията u , се наричат стационарни точки за тази функция.

Всяка стационарна точка за функцията u е възможно да бъде точка на локален екстремум, но наличието на такъв екстремум може да се установи само с помощта на достатъчни условия за локален екстремум.

От доказаното по-горе твърдение следва и една друга форма на необходимите условия за локален екстремум: Ако функцията u е диференцируема в точката M_0 и има в тази точка локален екстремум, то диференциалът $du|_{M_0}$ на тази функция в точката M_0 е тъждествено равен на нула относно диференциалите на независимите променливи $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$.

Наистина, понеже

$$du|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m}(M_0)dx_m,$$

то от равенствата (13.68) следва, че при всички стойности на $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ е изпълнено равенството $du|_{M_0} = 0$.

13.6.2. Достатъчни условия за локален екстремум на функция на m променливи. При формулирането на достатъчните условия за локален екстремум на функция на m променливи важна роля ще играе вторият диференциал на функцията в изследваната точка.

В 13.5.2 показваме, че в случая, когато аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ на два пъти диференцируемата функция u са или независими променливи, или линейни функции на няколко независими променливи, вторият диференциал на тази функция в дадената точка представлява квадратична форма относно диференциалите на аргументите $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ от следния вид:

$$(13.69) \quad d^2u|_{M_0} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{i,k} dx_i dx_k,$$

където

$$(13.70) \quad a_{i,k} = a_{k,i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(M_0).$$

За формулирането на достатъчни условия за локален екстремум са необходими някои сведения от теорията на квадратичните форми, които за удобство на читателя ще припомним по-нататък.

Квадратичната форма относно променливите $h_1, h_2, \dots, h_m$

$$(13.71) \quad \Phi(h_1, h_2, \dots, h_m) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{i,k} h_i h_k$$

се нарича **положително дефинитна*** (отрицателно дефинитна), ако за всички стойности на променливите $h_1, h_2, \dots, h_m$, които не са едновременно равни на нула, тази форма приема строго положителни (строго отрицателни) стойности.

* Използва се още названието положително определена (отрицателно определена).

Квадратичната форма (13.71) се нарича **дефинитна**, ако тя е или положително дефинитна, или отрицателно дефинитна.

Квадратичната форма (13.71) се нарича **недефинитна**, ако тя приема както строго положителни, така и строго отрицателни стойности.

Квадратичната форма (13.71) се нарича **полудефинитна**, ако тя приема или само неотрицателни, или само неположителни стойности, но се анулира за някои стойности на $h_1, h_2, \dots, h_m$, които не са едновременно равни на нула.

Ще формулираме **критерия на Силвестър*** за дефинитност на квадратичната форма.

Матрицата

$$(13.72) \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

ще наричаме матрица на квадратичната форма (13.71).

Ако всички елементи на матрицата A удовлетворяват условието $a_{ik} = a_{ki}$ ($i=1, 2, 3, \dots, m$, $k=1, 2, 3, \dots, m$), тя се нарича симетрична.

Главни минори на симетричната матрица (13.77) ще наричаме следните детерминанти:

$$A_1 = a_{11}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\dots, \quad A_m = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Критерия на Силвестър ще формулираме за двата вида дефинитност на квадратичната форма:

1°. За да бъде **квадратичната форма** (13.71) със **симетричната матрица** (13.72) **положително дефинитна**, е необходимо

* Джеймс Силвестър — английски математик (1814—1897).

и достатъчно всички главни минори на матрицата (13.72) да са положителни, т. е. да са изпълнени неравенствата

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad \dots, \quad A_m > 0.$$

2°. За да бъде квадратичната форма (13.71) със **симетрична матрица** (13.72) **отрицателно дефинитна**, е необходимо и достатъчно главните минори на матрицата (13.72) да имат **алтернативно знаци** си, като знакът на A_1 е **отрицателен**, т. е. да са изпълнени неравенствата

$$A_1 < 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 < 0, \quad A_4 > 0, \quad \dots$$

Сега вече сме готови да формулираме и докажем достатъчни условия за локален екстремум.

Теорема 13.16. Нека функцията на m променливи и е един път диференцируема в някоя околност на точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ и два пъти диференцируема в точката M_0 . Нека освен това точката M_0 е стационарна точка за функцията u , т. е. $du|_{M_0} = 0$. Тогава, ако вторият диференциал (13.69) — (13.70) е положително дефинитна (отрицателно дефинитна) квадратична форма на променливите $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$, то функцията u има в точката M_0 локален минимум (локален максимум). Ако вторият диференциал (13.69) — (13.70) е недефинитна квадратична форма, то функцията u няма локален екстремум в точката M_0 .

Доказателство. Ще докажем най-напред първата част на теоремата, като ще предположим за определеност, че вторият диференциал (13.69) — (13.70) е положително дефинитна квадратична форма на променливите $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$. Ще докажем, че в този случай функцията u има в точката M_0 локален минимум.

Разлагаме функцията u в околност на точката M_0 по формулата на Тейлор с остатъчен член във форма на Пеано при $n=2$. Така получаваме

$$(13.73) \quad u(M) = u(M_0) + du|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2u|_{M_0} + o(\rho^2),$$

при това в равенството (13.73) диференциалите dx_i на променливите x_i , влизали в изразите за $du|_{M_0}$ и $d^2u|_{M_0}$, са равни на съответните нараствания $x_i - x_i^0$ на тези променливи, а за величината ρ имаме

$$(13.74) \quad \rho = ((dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_m)^2)^{1/2} = ((x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2)^{1/2}.$$

По условие точката M_0 е стационарна, затова $du|_{M_0} = 0$. От

това равенство и от изразите (13.69) — (13.70) за втория диференциал при $dx_i = x_i - x_i^0$ формулата на Тейлор (13.73) приема вида

$$(13.75) \quad u(M) - u(M_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m u_{ik} (x_i - x_i^0) (x_k - x_k^0) + o(\rho^2).$$

Достатъчно е да докажем, че за всички достатъчно малки ρ дясната страна на (13.75) е положителна.

Полагаме $h_i = (x_i - x_i^0)/\rho$, където $i=1, 2, 3, \dots, m$. Тогава от изр. (13.74) за ρ следват съотношенията

$$(13.76) \quad |h_i| \leq 1, \quad h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_m^2 = 1.$$

С помощта на въведените означения равенството (13.75) може да се запише във вида

$$(13.75') \quad u(M) - u(M_0) = \frac{1}{2} \rho^2 \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i h_k + o(\rho^2).$$

Частното $o(\rho^2)/\rho^2$ е безкрайно малка функция при $\rho \rightarrow 0$ (или при $M \rightarrow M_0$), която ще означим с $\alpha(\rho)$. Въвеждането на тази функция ни дава възможност да напишем равенството $o(\rho^2) = \rho^2 \alpha(\rho)$, с помощта на което ще дадем на съотношението (13.75') вида

$$(13.75'') \quad u(M) - u(M_0) = \rho^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i h_k + \alpha(\rho) \right).$$

Сега вече не е трудно да се докаже, че дясната страна на (13.75'') е положителна за всички достатъчно малки ρ . Квадратичната форма $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i h_k$ е функция, дефинирана и

непрекъсната върху единичната сфера (13.76), която е ограничено и затворено множество. Според втората теорема на Вайерштрас (вж. теорема 13.7) тази функция достига в това множество точната си долна граница μ , при това от положителната дефинитност на квадратичната форма (13.71) и от това, че $h_1, h_2, \dots, h_m$ удовлетворяват съотношението (13.76), не са едновременно равни на нула, следва, че точната долна граница μ е строго положителна.

Тъй като безкрайно малката функция $\alpha(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ при всички достатъчно малки ρ ще удовлетвориравна неравенството $|\alpha(\rho)| < \mu$, то дясната страна на (13.75'') ще бъде положителна за достатъчно малки ρ , т. е. за всички M , достатъчно близки

до M_0 . Това показва, че функцията u има локален минимум в точката M_0 .

Съвсем аналогично се доказва, че когато вторият диференциал (13.69) — (13.70) е отрицателно дефинитна квадратична форма, функцията u има в точката M_0 локален максимум.

Сега ще докажем втората част на теоремата, че когато вторият диференциал (13.69) — (13.70) е недефинитна квадратична форма, функцията u няма локален екстремум в точката M_0 .

Най-напред ще установим едно свойство на недефинитната форма (13.71).

Ако квадратичната форма $\Phi(h_1, h_2, \dots, h_m)$ е недефинитна, то съществуват две такива съвкупности от променливи

$$h_1, h_2, \dots, h_m \text{ и } h_1'', h_2'', \dots, h_m'',$$

$$\text{че}$$

$$(13.77) \quad (h_1')^2 + (h_2')^2 + \dots + (h_m')^2 = 1, \quad (h_1'')^2 + (h_2'')^2 + \dots + (h_m'')^2 = 1,$$

за които

$$(13.78) \quad \Phi(h_1', h_2', \dots, h_m') > 0, \quad \Phi(h_1'', h_2'', \dots, h_m'') < 0.$$

Нанстина според определения на недефинитна квадратична форма съществуват две съвкупности от аргументи $t_1', t_2', \dots, t_m'$ и $t_1'', t_2'', \dots, t_m''$, състоящи се от числа, които не са едновременно равни на нула и такива, че

$$(13.79) \quad \Phi(t_1', t_2', \dots, t_m') > 0, \quad \Phi(t_1'', t_2'', \dots, t_m'') < 0.$$

Като положим

$$(13.80) \quad h_i' = t_i'((t_1')^2 + (t_2')^2 + \dots + (t_m')^2)^{-1/2},$$

$$h_i'' = t_i''((t_1'')^2 + (t_2'')^2 + \dots + (t_m'')^2)^{-1/2}$$

и вземем пред вид, че от определения (13.71) за квадратична форма непосредствено следва

$$\Phi(h_1', h_2', \dots, h_m') = ((t_1')^2 + (t_2')^2 + \dots + (t_m')^2)^{-1} \Phi(t_1', t_2', \dots, t_m'),$$

$$\Phi(h_1'', h_2'', \dots, h_m'') = ((t_1'')^2 + (t_2'')^2 + \dots + (t_m'')^2)^{-1} \Phi(t_1'', t_2'', \dots, t_m''),$$

получаваме (поряди (13.79)) равенствата (13.78), при което от (13.80) веднага следват равенствата (13.77).

Ако $h_1', h_2', \dots, h_m'$ и $h_1'', h_2'', \dots, h_m''$ са две фиксирани съвкупности от стойности за променливите, удовлетворяващи съотношения (13.77) и (13.78), ще докажем, че за всяко $\rho > 0$ съществуват две такива точки $M'(x_1', x_2', \dots, x_m')$ и $M''(x_1'', x_2'', \dots, x_m'')$ от пространството E^m , че $\rho(M', M_0) = \rho(M'', M_0) = \rho$, при което

$$(13.81) \quad (x_i' - x_i^0)/\rho = h_i', \quad (x_i'' - x_i^0)/\rho = h_i'' \quad \text{за } i=1, 2, 3, \dots, m.$$

Панстина, като положим за произволно $\rho > 0$ и за всеки номер i

$$x_i' = x_i + \rho h_i', \quad x_i'' = x_i + \rho h_i'',$$

ще удовлетворим съотношенията (13.81), при което съгласно равенствата (13.77) ще бъдат изпълнени и равенствата

$$\rho(M', M_0) = (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + \dots + (x_m' - x_m)^2)^{1/2} = \rho,$$

$$\rho(M'', M_0) = (x_1'' - x_1)^2 + (x_2'' - x_2)^2 + \dots + (x_m'' - x_m)^2)^{1/2} = \rho.$$

Сега вече е лесно да се убедим, че когато вторият диференциал (13.69) — (13.70) с недефинитна квадратична форма, функцията u няма екстремум в точката M_0 .

Като разложим функцията u в околност на точката M_0 по формулата на Тейлор с остатъчен член във форма на Пеано и заместим M с точките M' и M'' , ще получим вместо (13.75) следните две разлагания:

$$(13.82) \quad u(M') - u(M_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} (x_i' - x_i) (x_k' - x_k) + o(\rho^2),$$

$$(13.83) \quad u(M'') - u(M_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} (x_i'' - x_i) (x_k'' - x_k) + o(\rho^2),$$

валидни за всяко достатъчно малко $\rho > 0$.

Като заместим в тези разлагания $x_i' - x_i$ и $x_k' - x_k$ с изразите, определени от равенствата (13.81), и $o(\rho^2)$ с $\rho^2 \alpha(\rho)$, където $\alpha(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, (13.82) и (13.83) приемат вида

$$u(M') - u(M_0) = \rho^2 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i' h_k' + \alpha(\rho) \right\},$$

$$u(M'') - u(M_0) = \rho^2 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} h_i'' h_k'' + \alpha(\rho) \right\}.$$

Последните две съотношения могат да се запишат също така и във вида

$$(13.82') \quad u(M') - u(M_0) = \rho^2 \{ \Phi(h_1', h_2', \dots, h_m') + \alpha(\rho) \},$$

$$(13.83') \quad u(M'') - u(M_0) = \rho^2 \{ \Phi(h_1'', h_2'', \dots, h_m'') + \alpha(\rho) \}.$$

От равенствата (13.82') и (13.83'), като вземем пред вид съотношенията (13.78) и това, че величините $\Phi(h_1', h_2', \dots, h_m')$ и $\Phi(h_1'', h_2'', \dots, h_m'')$ не зависят от ρ , $\rho = \rho(M', M_0) = \rho(M'', M_0)$, получаваме, че за достатъчно малко ρ са изпълнени неравенствата $u(M') > u(M_0)$ и $u(M'') < u(M_0)$, което показва, че в точката M_0 функцията няма екстремум. $\square$

Забележка 1. Ако вторият диференциал в дадена стационарна точка M_0 на два пъти диференцируема функция u е полуdefинитна квадратична форма в тази точка, то функцията може да има, а може и да няма екстремум в тази точка.

Така например за функциите $u_1 = x^3 + y^3$ и $u_2 = x^4 + y^4$ вторият диференциал в стационарната точка $M_0(0, 0)$ е съответно равен на нула (т. е. е полуdefинитна квадратична форма), но само втората от тези функции има в точката $M_0(0, 0)$ локален екстремум.

За решаване на въпроса за локален екстремум в случая, когато вторият диференциал е полуdefинитна квадратична форма, трябва да се прилежат диференциали от по-висок ред.

Забележка 2. Твърдението на теорема 13.16 заедно с необходимите условия за екстремум дават възможност да се направят следното заключение, към което ще се върнем, когато разгледаме по-общо понятия за диференцируемост в 13.7, а именно:

1) Ако два пъти диференцируемата в точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция f има в тази точка минимум, то $df|_{M_0} = 0$ съществено относно диференциалите $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ на аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ и в някоя околност на точката M_0 имаме $d^2f|_{M_0} \geq 0$, т. е. вторият диференциал е (в тази околност) полуdefинитна квадратична форма. Аналогично, ако в точката M_0 има локален максимум, то $df|_{M_0} = 0$ и $d^2f|_{M_0} \leq 0$ в някоя околност на тази точка.

2) Ако за два пъти диференцируемата в точката M_0 функция f са изпълнени условията $df|_{M_0} = 0$ съществено относно нарастванията на аргументите $x_1, x_2, \dots, x_m$ и в някоя околност на точката M_0 имаме $d^2f > 0$, то в точката M_0 има локален минимум, а ако са изпълнени условията $df|_{M_0} = 0$, $d^2f|_{M_0} < 0$, то функцията f има в точката M_0 локален максимум.

От пояснение се нуждае само твърдението 1), а именно това, че ако в точката M_0 функцията има локален минимум, то $d^2f|_{M_0} \geq 0$ в някоя нейна околност. Допускаме, че съществува вектор $h_0 \neq 0$, за който $d^2f|_{M_0} = \frac{1}{2} \sum a_{ij} h_i^0 h_j^0 < 0$. Полагаме $h = th_0$, където t е някакво число. Тогава, ако имаме минимум в точката M_0 , то съществува такава нейна околност, че за всички точки M от тази околност да е изпълнено

$$f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} d^2 f|_{M_0} + o(\rho^2) = \frac{1}{2} d^2 f|_{M_0} + \rho^2 \alpha(\rho),$$

където $\alpha(\rho) \rightarrow 0$, когато $\rho \rightarrow 0$.

Като оставим t да клони към нула и използваме означението $h = th_0$, последното съотношение може да се напише във вида

$$f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} \rho^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} h_i^0 h_j^0 + d \left((h_1^0)^2 + \dots + (h_m^0)^2 \right) \rho^2 (h_1^0 + \dots + h_m^0) = \rho^2 \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} h_i^0 h_j^0 + \alpha \left((h_1^0 + h_2^0 + \dots + h_m^0) \right) \right\}.$$

Знакът на израза в големите скоби съвпада при малки стойности на t (поради това, че $\alpha(t \cdot (h_1^0 + \dots + (h_m^0)^2)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$) със знака на първия член. Следователно $f(M) - f(M_0)$ за малки t става отрицателна величина, което противоречи на това, че в точката M_0 имаме локален минимум.

Пример:

Да се намерят точките на локални екстремуми за функцията на три променливи

$$(13.84) \quad u = \lambda x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 2z,$$

където λ е реално число, различно от нула.

Тъй като $\frac{\partial u}{\partial x} = 2\lambda x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z + 2$, то единствената

стационарна точка е точката $M_0(0, -1, -1)$.

Очевидно вторият диференциал в тази точка има вида

$$d^2 u|_{M_0} = 2\lambda (dx)^2 + 2(dy)^2 + 2(dz)^2.$$

При $\lambda > 0$ вторият диференциал в точката M_0 е положително дефинитна квадратична форма и затова функцията (13.84) има в точката $M_0(0, -1, -1)$ локален минимум.

При $\lambda < 0$ вторият диференциал е неопределитна квадратична форма и затова функцията (13.84) няма локален екстремум в точката M_0 .

13.6.3. Случай на функции на две променливи. На практика често се срещат задачи за екстремум на функция на две променливи. В тази точка ще приведем резултати, отнасящи се до този случай.

Нека частните производни $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ в някоя точка $M_0(x_0, y_0)$ са означени съответно със символите a_{11} , a_{12} , a_{22} . В сила е следното твърдение:

Нека функцията на две променливи и е един път диференцируема в околност на точката M_0 и два пъти диференцируема в точката M_0 и нека M_0 е стационарна точка. Тогава, ако в точката M_0 е изпълнено условието $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то функцията и има в точката M_0 локален екстремум (максимум при $a_{11} < 0$ и минимум при $a_{11} > 0$). Ако обаче в точката M_0 имаме $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$, функцията и няма в тази точка локален екстремум.

Доказателство. Верността на първата част на формулираното твърдение следва непосредствено от теорема 13.16 и от критерия на Силвестър за дефинитност на квадратичната форма, тъй като $A_1 = a_{11}$, $A_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$.

Ще докажем втората част на твърдението. И така нека в точката M_0 е изпълнено неравенството $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$. Ще докажем, че в този случай вторият диференциал $d^2 u$ в точката M_0 е неопределитна квадратична форма. Ще разгледаме най-напред случая $a_{11} \neq 0$. Като използваме въведените означения

$$\rho = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}, \quad h_1 = (x - x_0)/\rho, \quad h_2 = (y - y_0)/\rho,$$

получаваме следния израз за втория диференциал:

$$d^2 u|_{M_0} = \rho^2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} h_i h_j = \rho^2 (a_{11} h_1^2 + 2a_{12} h_1 h_2 + a_{22} h_2^2) = \frac{1}{a_{11}} \rho^2 \left\{ (a_{11} h_1 + a_{12} h_2)^2 + (a_{12} a_{22} - a_{12}^2) h_2^2 \right\}.$$

Оттук се вижда, че при $h_1 = 1$, $h_2 = 0$ и при $h_1 = a_{12}(a_{11} + a_{22})^{-1/2}$, $h_2 = -a_{11}(a_{11} + a_{22})^{-1/2}$ диференциалът $d^2 u|_{M_0}$ има различни знаци, т. е. е неопределитна квадратична форма, и затова съгласно теорема 13.16 функцията няма локален екстремум в точката M_0 .

Ще разгледаме сега случая $a_{11} = 0$. От условието $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$ следва, че $a_{12} \neq 0$. Тогава, както и по-горе, имаме

$$(13.85) \quad d^2 u|_{M_0} = \rho^2 h_2 (2a_{12} h_1 + a_{22} h_2).$$

Нека $h_1 \neq 0$ и h_2 е толкова малко (от условието $h_1^2 + h_2^2 = 1$ следва, че такъв избор на h_1 и h_2 е възможен), че изразът $2a_{12} h_1 + a_{22} h_2$ да има знак на $2a_{12} h_1$. Тогава от формула (13.85) следва, че $d^2 u|_{M_0}$ има различни знаци при $h_2 > 0$ и $h_2 < 0$, т. е. функцията и няма локален екстремум в точката M_0 . $\square$

Забележка. Изискването $d^2 f(M_0) \geq 0$ (съответно $d^2 f(M_0) \leq 0$) е необходимо условие за локален минимум (максимум) в точката M_0 на два пъти диференцируема в тази точка функция f .

* Случаят $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$ изисква допълнително изследване.

Наистина нека за определеност f има локален минимум в точката M_0 , но условното $d^2 f(M_0) \geq 0$ не е изпълнено. Тогава ще се намерят такива $h_1, h_2, \dots, h_m$, че

$$d^2 f(M_0) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(M_0) h_i h_k < 0.$$

Да разгледаме функцията $F(t) = f(x_1 + th_1, \dots, x_m + th_m)$, която е дефинирана за всички достатъчно малки по абсолютна стойност стойности на t . Функцията F трябва да има локален минимум в точката $t=0$, но това противоречи на условието

$$F''(0) = d^2 f(M_0) < 0.$$

13.7. Диференциално смятане в линейни нормирани пространства

Дотук изучихме диференциалното смятане на числовите функции на една или повече променливи. Тези функции изобразяват дадено множество $\{M\}$ от числовата ос или от m -мерното евклидово пространство в подмножеството на числовата ос.

В глава 12 въведохме понятието функция като изображение на едно абстрактно множество в друго (например изображение на едно метрично пространство в друго метрично пространство, на едно нормирано пространство в друго нормирано пространство и т. н.). Такива функции се наричат *оператори, изобразяващи функции на множества* и т. н.

По-специално може да се разглежда функция, изобразяваща m -мерното евклидово пространство в n -мерно евклидово пространство. Такива функции се наричат векторни функции, тъй като стойностите им не са числа, а вектори в някакво пространство. Например, ако изображението е в n -мерно евклидово пространство, то стойностите на функцията са вектори в n -мерното пространство.

В този параграф ще бъде построено диференциално смятане на функции, дефинирани в нормирано пространство. Като елементарно следствие от тези построения могат да се получат всички факти, отнасящи се до функции, изобразяващи m -мерното евклидово пространство в n -мерно евклидово пространство, като m и n могат да съвпадат или да не съвпадат.

13.7.1. Понятие за диференцируемост. Силна и слаба диференцируемост в линейни нормирани пространства. Нека N_1 и N_2 са две нормирани пространства и F е изображение (функция) на N_1 в N_2 ($F: N_1 \rightarrow N_2$), което е дефинирано в някое отворено множество Σ в пространството N_1 . Понеже N_1 е нормирано пространство, то е и метрично пространство. Следователно всички понятия, въведени в метричните пространства, като отворено множество, затворено множество, ограничено множество, разстояние между точки и т. н., имат смисъл.

Определение. Изображението $F: N_1 \rightarrow N_2$ ще наричаме **диференцируемо***, ако дадена точка x , принадлежаща на отвореното множество $\Sigma \subset N_1$, ако съществува такъв ограничен линеен оператор (вж. 12.5.4) $L_x \in (N_1 \rightarrow N_2)$, че за всяко $\epsilon > 0$ съществува такава $\delta > 0$, че ако $h \in N_1$ и $\|h\|_{N_1} \leq \delta$, то

$$(13.86) \quad \|F(x+h) - F(x) - L_x h\|_{N_2} \leq \epsilon \|h\|_{N_1}$$

или

$$(13.87) \quad \|F(x+h) - F(x) - L_x h\|_{N_2} = o(\|h\|_{N_1}),$$

където $o(h)/\|h\| \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$.

Индексите N_1 или N_2 към знака за норма $\|\cdot\|$ означават, че нормата е взета в пространството N_1 или N_2 . За опростяване на записването ще се уговорим по-нататък да изпускаме тези индекси, когато няма опасност от недоразумения.

Да изберем във формулата (13.86) редница от числа $\epsilon_n \rightarrow 0$. Съгласно формулираното определение на вся отговара редницата от числа $\delta_n > 0$ и за всяка редница от точки h_n , за които $\|h_n\| < \delta_n$, $\|h_n\| \rightarrow 0$, от (13.86) ще получим

$$\|F(x+h_n) - F(x)\| = \|F(x+h_n) - F(x) - L_x h_n + L_x h_n\| \leq \epsilon_n \|h_n\| + \|L_x\| \cdot \|h_n\| \rightarrow 0.$$

$n \rightarrow \infty$ (тъй като $\|h_n\| \rightarrow 0$, $\epsilon_n \rightarrow 0$, а $\|L_x\| \leq C$ поради ограничеността на линейния оператор L_x).

Следователно $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x+h_n) = F(x)$, $\|h_n\| \rightarrow 0$, т. е. ако означим $x+h_n$ с x_n , то $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x)$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = L_x$, така че

* Ако по-специално F е скалярна функция, дефинирана в някъде интервал (α, β) , F изобразява подмножество от числовата ос в подмножество от числовата ос $-F: (\alpha, \beta) \rightarrow E^1$, то когато тя е диференцируема в точката $x_0 \in (\alpha, \beta)$, имаме $F(x_0+h) - F(x_0) - Lh = o(h)$, където h е число — параставяне на аргумента на функцията, $L = L_{x_0}$ е линеен оператор, представляващ производната на изображението F в точката x_0 , който принадлежи в случая на пространството от оператори $(E^1 \rightarrow E^1)$, т. е. просто операторът умножение с число. От друга страна, ако F се разглежда като числова функция, то L е очевидно производната на F в точката x_0 , т. е. $L = F'(x_0)$.

диференцируемо в точката x изображение F е непрекъснато в тази точка.

При всяко $x \in N_1$ елементът $L_x h$ е от пространството N_2 и се нарича **силен диференциал** (или **диференциал на Фреше**) на изображението F в точката x (понякога се означава със символа dF). Линейният оператор L_x се нарича **производна** или **силна производна** на изображението F в точката x . Тази производна ще означаваме със символа F' , така че силният диференциал на изображението F по определение е равен на $L_x h$, т. е. $dF = L_x h$, а силната производна F' е равна на L_x , т. е. $F'(x) = L_x$.

Ако изображението F е диференцируемо в точката x , то съответната производна се определя по единствен начин. Действително нека

$$F(x+h) - F(x) - L_x h = o(h)^*$$

и

$$F(x+h) - F(x) - L_x' h = o(h).$$

Тогата

$$L_x h - L_x' h = o(h).$$

Следователно за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такава $\delta > 0$, че от неравенството $\|h\| < \delta$ следва неравенството

$$\|L_x h - L_x' h\| \leq \varepsilon \|h\|.$$

Разделяме двете части на това неравенство на $\|h\|$ и означаваме $\|h\|^{-1} \cdot h = e$, $\|e\| = 1$.

Поради свойствата на нормата и линейността на операторите L_x и L_x' получаваме

$$\|L_x e - L_x' e\| \leq \varepsilon$$

за всеки вектор e от единичната сфера (т. е. за всеки вектор с норма, равна на единица).

Понеже ε е произволно, операторите L_x и L_x' съвпадат върху единичната сфера. Тъй като операторите L_x и L_x' са линейни, те очевидно съпадат навсякъде, т. е. $L_x = L_x'$.

За да илюстрираме определеното за силна диференцируемост на изображение на едно нормирано пространство в друго с конкретен пример, ще разгледаме изображение $F: E^m \rightarrow E^1$, т. е. изображение на m -мерното евклидово пространство в числовата ос. В този случай^{**} изображението $F = F(x_1, x_2, \dots, x_m)$ е обикновена числова функция на m променливи. Ако означим нарастването

* Това трябва да се разбира така: $\|F(x+h) - F(x) - L_x h\|_{N_2} = o(h)$.

** Като изберем базис в E^m , независимо от естеството на елементите $x \in E^m$ можем да считаме, че те са параметри m -орди от числа.

на аргумента x_1 с h_1 , на аргумента x_2 с h_2 , ..., на аргумента x_m с h_m , то както следва от формула (13.15), за функция F на m променливи, диференцируема в точката $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ от някое отворено множество $\Sigma \subset E^m$, имаме

$$F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_m + h_m) - F(x_1, x_2, \dots, x_m) = F(x + h) - F(x) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_m h_m + o(\rho),$$

където

$$x + h = (x_1 + h_1, \dots, x_m + h_m), \quad A_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, A_m = \frac{\partial F}{\partial x_m},$$

$$\rho = (h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_m^2)^{1/2}.$$

Отбелязваме, че $\rho = \|h\|$, където $\|h\|$ е нормата на h в нормираното пространство E^m .

Следователно, ако една функция на m променливи е диференцируема, то тя е силно диференцируема като изображение на нормираното пространство E^m в нормираното пространство E^1 , при което силната производна L_x се определя от условията

$$L_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Така в случая на изображение на m -мерното евклидово пространство в числовата ос понятието силна диференцируемост на функция поради единствеността на производната съвпада с понятието диференцируемост.

Сега ще установим някои елементарни факти, следващи непосредствено от определеното за производна.

Свойство 1. Ако $F = \text{const}$, то $F'(x) = 0$, където 0 е нулевият оператор.

Доказателството на това свойство е очевидно.

Свойство 2. Производната на непрекъснато (т. е. ограничено) линейно изображение A е равна на самото изображение: $A' = A$.
Наистина

$$A(x+h) - A(x) = A(x) + A(h) - A(x) = A(h).$$

Затова

$$(13.88) \quad A' = A.$$

Свойство 3. Нека F и G са две непрекъснати изображения на N_1 в N_2 . Ако F и G са диференцируеми в точката x , то и

изображенията $F+G$ и aF (a е число) са също диференцируеми в тази точка и

$$(13.89) \quad (F+G)'(x_0) = F'(x_0) + G'(x_0)$$

и

$$(13.90) \quad (aF)'(x_0) = aF'(x_0)^*$$

Наистина от определения за сума на оператори и произведение на оператор с число получаваме

$$(F+G)(x_0+h) = F(x_0+h) + G(x_0+h) = F(x_0) + G(x_0) + F'(x_0)h + G'(x_0)h + o(h),$$

където $\|o(h)\|/\|h\| \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$;

$$(13.91) \quad (aF)(x_0+h) = aF(x_0) + aF'(x_0)h + o(h),$$

където $\|o(h)\|/\|h\| \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$. От тези равенства получаваме съотношенията (13.90) и (13.91).

Ще разгледаме сега още едно понятие за диференцируемост на изображението $F: N_1 \rightarrow N_2$.

Определение. Слаб диференциал (или диференциал на Гато) се нарича границата

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t} = \frac{d}{dt} F(x+th) \Big|_{t=0},$$

където сходимостта е по норма в пространството N_2 . Слабият диференциал се нарича още приращна вариация на изображението F в точката x и се означава със символа $Df(x, h)$.

Слабият диференциал $Df(x, h)$ може да не бъде линейен по h . Ако операторът $Df(x, h)$ се окаже линейен по h , т. е. ако

$$Df(x, h) = F'_c(x)h,$$

където $F'_c(x)$ е ограничен линейен оператор, то този оператор се нарича **слаба производна (или производна на Гато)**.

13.7.2. Формула на Лагранж за крайните нараствания. При изучаването на диференцируемите числови функции важна роля играе формулата на Лагранж за крайните нараствания. Ще изведем такава формула и в случая на диференцируемо изображение $F: N_1 \rightarrow N_2$. Нека Σ е отворено множество в N_1 , съдържащо точката x_0 и нека множеството от точки $x_0 + t(x - x_0)^{**}$ се съдържа изцяло в Σ при $0 \leq t \leq 1$.

* Със символите $(F+G)'$ (x_0) и $(aF)'$ (x_0) са означени стойностите на операторите $(F+G)'$ и $(aF)'$ в точката x_0 .

** Множеството от точки $x_0 + t(x - x_0)$, $0 \leq t \leq 1$, се нарича сегмент $[x_0, x]$ в N_1 . При $t=0$ получаваме точката x_0 , а при $t=1$ — точката x ; ако $0 < t < 1$, т. е. множеството от точки $x_0 + t(x - x_0)$ се нарича интервал (x_0, x) .

Теорема 13.17. Нека $F: N_1 \rightarrow N_2$ е изображение, дефинирано в отвореното множество $\Sigma \subset N_1$, което има силна производна F' във всяка точка на интервала (x_0, x) . Тогава

$$(13.93) \quad \|F(x) - F(x_0)\| \leq \sup_{x_0 < \theta < 1} \|F'(\theta)\| \cdot \|x - x_0\|$$

Доказателство. Ще разгледаме най-напред непрекъснатото изображение $f(t)$, образяващо сегмента $[0, 1]$ в пространството N_2 , $f: [0, 1] \rightarrow N_2$, и непрекъснатата функция g , дефинирана в сегмента $[0, 1]$ и приемаща числови стойности. Ще покажем, че ако f и g са силно диференцируеми в интервала $(0, 1)$ (където изображението на едно нормирано пространство, а именно на интервала $[0, 1]$, в друго нормирано пространство N_2 , а g като числова функция, дефинирана в интервала $(0, 1)$), и ако

$$\|f'(t)\| \leq g'(t), \quad 0 < t < 1,$$

то

$$(13.94) \quad \|f(1) - f(0)\| \leq g(1) - g(0).$$

От формула (13.94) вече лесно следва твърдението на теоремата.

Ще докажем формулата (13.94). При всяко фиксирано $\varepsilon > 0$ означаваме с A_ε множеството от точки на сегмента $[0, 1]$, в които е изпълнено неравенството

$$(13.95) \quad \|f(t) - f(0)\| \leq g(t) - g(0) + \varepsilon t + \varepsilon.$$

Ще покажем, че при всяко $\varepsilon > 0$ числото 1 принадлежи на множеството A_ε . Тогава от (13.95) при $t=1$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ получаваме (13.94).

Поради непрекъснатостта на изображението f и функцията g множеството A_ε е затворено в сегмента $[0, 1]$. Действително, ако $t_n \in A_\varepsilon$ и $t_n \rightarrow t_0$, то в неравенството

$$\|f(t_n) - f(0)\| \leq g(t_n) - g(0) + \varepsilon t_n + \varepsilon,$$

като използваме непрекъснатостта на функцията норма (или, което е същото, непрекъснатостта на функцията разстояние: $\|x\| = \rho(x, 0)$), непрекъснатостта на изображението f и непрекъснатостта на функцията $g(t)$, можем да минем към граница при $t_n \rightarrow t_0$ и да заключим, че

$$\|f(t_0) - f(0)\| \leq g(t_0) - g(0) + \varepsilon t_0 + \varepsilon,$$

т. е. $t_0 \in A_\varepsilon$, и следователно множеството A_ε е затворено.

Множеството A_ε не е празно, тъй като (13.95) е очевидно изпълнено при достатъчно малки t (лявата страна на неравенството (13.95) пр. малки t поради непрекъснатостта на f с малка,

докато дясната страна съдържа положителния член ϵ като събиращо и той не зависи от t .

Нека $a = \sup A_\epsilon$. Понеже множеството $A_\epsilon \subset [0, 1]$ е затворено, то $a \in A_\epsilon$. Ще покажем, че a не може да бъде по-малко от 1. Да допуснем противното: $a < 1$, т. е. $0 < a < 1$. Понеже f и g са диференцируеми в точката a , за достатъчно малки положителни h ще имаме

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a)\| &= \|f'(a)h + o(h)\| \leq \|f'(a)h\| + \|o(h)\| \\ &\leq \|f'(a)\| \cdot h + \epsilon \cdot h/2 \end{aligned}$$

(в дадения случай $\|h\| = |h| = h$, понеже h е положително число, а нормата на елемента h от сегмента $[0, 1]$ съвпада с модула на h). По-нататък

$$g(a+h) - g(a) = |g(a+h) - g(a)|, \quad h > 0,$$

понеже функцията g не намалява в интервала $(0, 1)$. Това следва от обстоятелството, че $g(t) \geq 0$, $0 < t < 1$, което на свой ред следва от неравенството $0 \leq \|f'(t)\| \leq g'(t)$, $0 < t < 1$. Но

$$\begin{aligned} |g(a+h) - g(a)| &= |g'(a)h + o(h)| \leq |g'(a)h| + \|o(h)\| \\ &\geq g'(a) \cdot h - \epsilon \cdot h/2 \end{aligned}$$

за достатъчно малки h .

От горните оценки имаме

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(a)\| &\leq \|f'(a)\| \cdot h + (\epsilon/2) \cdot h \\ &\leq g'(a)h + \epsilon h/2 \leq g(a+h) - g(a) + \epsilon h. \end{aligned}$$

Понеже

$$\|f(a) - f(0)\| \leq g(a) - g(0) + \epsilon \cdot a + \epsilon,$$

то

$$\begin{aligned} \|f(a+h) - f(0)\| &= \|f(a+h) - f(a) + f(a) - f(0)\| \\ &\leq \|f(a+h) - f(a)\| + \|f(a) - f(0)\| \leq g(a+h) - g(a) \\ &\quad + \epsilon h + g(a) - g(0) + \epsilon a + \epsilon = g(a+h) - g(0) + \epsilon(a+h) + \epsilon. \end{aligned}$$

Виждаме, че $a+h \in A_\epsilon$, но това противоречи на избора на числото a , т. е. числото a не може да бъде по-малко от единица. Следователно $a=1$ и $1 \in A_\epsilon$. Формула (13.94) е доказана.

Ще завършим сега доказателството на теоремата. Полагаме

$$f(t) = F(x_0 + t \cdot \Delta x), \quad g(t) = M \cdot \|\Delta x\| \cdot t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

където

$$M = \sup \{\|f'(\xi)\| : \xi \in (x_0, x)\}.$$

Изображението f и функцията g очевидно удовлетворяват всички условия на помощното твърдение, доказано по-горе. Затова, като заместим тези изрази за f и g във формула (13.94), получаваме (13.93). $\square$

Следствие. Ако $A \in (N_1 \rightarrow N_2)$ е линейно непрекъснато изображение на нормираното пространство N_1 в нормираното пространство N_2 , зависящо от x , а F е изображение на отвореното множество $\Sigma \subset N_1$ в N_2 , което удовлетворява условията на теоремата, то

$$\|F(x) - F(x_0) - A \Delta x\| \leq \sup \{\|F'(\xi) - A\| \cdot \|\Delta x\| : \xi \in (x_0, x)\}.$$

Наистина, като приложим теоремата към изображението

$$F(x) - A \cdot \Delta x, \quad \Delta x = x - x_0,$$

получаваме $\|F(x) - A \Delta x - F(x_0)\| \leq \sup \{\|F'(\xi) - A(x - x_0)\|_{x=\xi}\} \cdot \|\Delta x\| = \sup \{\|F'(\xi) - A\| \cdot \|\Delta x\| : \xi \in (x_0, x)\} \cdot \|\Delta x\|$. $\square$

Може да се покаже, че теоремата 13.17 и следствието от нея са верни, ако навсякъде вместо силна производна F' разгледаме слаба производна $F'_c(x)$.

13.7.3. Връзка между слаба и силна диференцируемост. Силната и слабата диференцируемост са различни понятия даже в случай на m -мерно евклидово пространство при $m \geq 2$.

За пример ще разгледаме функцията на две променливи

$$f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1^3 \cdot x_2}{x_1^4 + x_2^4}, & x_1^2 + x_2^2 > 0, \\ 0, & x = (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases}$$

Лесно се проверява, че тази функция е непрекъснатая навсякъде в равнината, включително и в точката $(0, 0)$. В точката $(0, 0)$ имаме

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0+th) - f(0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 h_1^3 h_2}{t^4 h_1^4 + t^4 h_2^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 h_1^3 h_2}{h_1^4 + h_2^4} = 0, \end{aligned}$$

където $h = (h_1, h_2)$ е някакво нарастване на аргумента на функцията f в точката $(0, 0)$.

Следователно в точката $(0, 0)$ слабият диференциал на f съществува и е равен на нула.

От друга страна, в началото имаме

$$f'_x(0, 0) = f'_x(0, 0) = 0;$$

това непосредствено следва от определеното на частни производни и от това, че $f(x_1, 0) = 0$, $f(0, x_2) = 0$. Затова, като запишем

нарастването на функцията в точката $(0, 0)$ във вида

$$f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_1} \cdot h_1 + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x_2} \cdot h_2 + o(h),$$

където $h = (h_1, h_2)$ е нарастването на аргумента, $o(h)/\|h\| \rightarrow 0$ при $\|h\| = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2} \rightarrow 0$, получаваме

$$f(h_1, h_2) - f(0, 0) = o(h) = \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Избирайки $h_2 = h_1^2$, имаме $o(h) \big|_{h_2=h_1^2} = h_1^3/2$, което води до противоречие. Наистина величината $h_1/2$, разделена на нормата на h при $h_2 = h_1^2$, клони към $1/2$ при $\|h\| \rightarrow 0$, а величината $o(h)$, разделена на $\|h\|$ при всяко h_1 и всяко h_2 , клони към нула при $\|h\| \rightarrow 0$, което следва от определенето на $o(h)$.

Следователно функцията f е недиференцируема в точката $(0, 0)$ в силен смисъл.

Разбира се, ако изображението F има силна производна, то има и слаба производна и двете производни съвпадат. Наистина за силно диференцируемо изображение имаме

$$F(x+th) - F(x) = F'(x)(th) + o(th) = t \cdot F'(x)h + o(th)$$

и следователно

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(F(x+th) - F(x)) = \lim_{t \rightarrow 0} (F'(x)h + t^{-1}o(th)) = F'(x)h. \quad \square$$

13.7.4. Диференцируемост на функционали. В предишната точка въведохме понятието диференцируемо изображение $F: N_1 \rightarrow N_2$, изобразяващо нормираното пространство N_1 в нормираното пространство N_2 . Вече отбелязахме, че производната $F'(x)$ на такова изображение е линеен оператор при всяко x , действащ от N_1 в N_2 , т. е. елемент на пространството на операторите $(N_1 \rightarrow N_2)$. По-специално при $N_2 = R$, където R е числовата права или комплексната равнина, изображението F има числови стойности в N_1 и се нарича функционал. При това производната на функционала F в точката x_0 е линеен функционал, зависещ от x_0 .

За пример ще намерим главната линейна част на нарастването на функционала $F(x) = \|x\|^2$, дефиниран в реалното хилбертово пространство H . Имаме

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \|x+h\|^2 - \|x\|^2 = (x+h, x+h) - (x, x) \\ &= (x, x) + 2(x, h) + (h, h) - (x, x) = 2(x, h) + \|h\|^2. \end{aligned}$$

Може да се покаже, че $F'(x) = \frac{d}{dx} \|x\|^2 = 2x$.

13.7.5. Производни от втори ред. Да разгледаме диференцируемост на изображение $F: N_1 \rightarrow N_2$. Вече отбелязахме, че производната на това изображение при всяко фиксирано $x \in N_1$ е елемент на пространството $(N_1 \rightarrow N_2)$ — пространството на линейните ограничени оператори от N_1 , действащи в N_2 . Да допуснем, че изображението $F'(x)$ на свой ред е диференцируемо. Производната на изображението $F'(x)$ се нарича **втора производна** на изображението $F(x)$ и се означава с $F''(x)$. При всяко фиксирано x изображението $F''(x)$ е очевидно елемент на пространството $(N_1 \rightarrow (N_1 \rightarrow N_2))$ — пространството на линейните ограничени оператори, действащи от N_1 в $(N_1 \rightarrow N_2)$.

13.8. Изследване на екстремуми на функционали в нормирани пространства

Редица задачи с важно практическо приложение водят до намиране на екстремуми на функционали, определени в нормирани пространства. Така например още през 1696 г. Й. Бернули* публикува писмо, в което предлага на вниманието на математиките задачата за линията на най-бързото спускане — брахистохоната. В тази задача трябва да се намери линията, съединяваща две точки A_1 и A_2 (нележащи на една вертикална права), със следното свойство: спускането на материална точка от A_1 до A_2 по тази линия да става за най-кратко време. Тази задача води до изследване за екстремум на функционал F , определен в нормираното пространство $C_1[a, b]$ на непрекъснато диференцируемите функции (12.1.1) от вида

$$F(x) = \int_a^b \Phi(x(t), x'(t)) dt,$$

където x е елемент на пространството $C_1[a, b]$. Оказало се, че линията на най-бързото спускане е циклоида

$$\begin{aligned} t &= A(\tau - \sin \tau), \\ x &= A(1 - \cos \tau). \end{aligned}$$

Основният принцип в механиката е принципът на стационарното действие на Остроградски — Хамилтон, в който се твърди, че

* Йохан Бернули — швейцарски математик (1667—1748).

от възможните, т. е. съвместимите с връзките, движения на система от материални точки се осъществяват точно тези движения, които могат да се определят чрез изследване на екстремума на функционала $F = \int_a^b (T - U) dt$, където T е кинетичната, а U — потенциалната енергия на системата.

Изучаването на такива задачи, в които трябва да се изследват екстремуми на дадени функционали, съставлява съдържанието на т. нар. вариационно смятане. В тази точка само бегло ще засегнем някои основни факти на тази дисциплина.

13.8.1. Необходимо условие за екстремум. Нека F е реален функционал, определен в банаховото пространство B , т. е. F е изображение на пълното нормирано пространство B върху реалната права.

Определение. Функционалът F достига в точката x_0 **локален минимум (максимум)**, ако за всички x , от достатъчно малка околност на точката x_0 (т. е. за всички x , за които нормата на разликата $x - x_0$ е достатъчно малка) е изпълнено неравенството $F(x) - F(x_0) \geq 0$ ($F(x) - F(x_0) \leq 0$).

Локалният минимум и локалният максимум се обединяват в общото наименование локален екстремум.

За функция на m променливи в 13.6 дадохме следното необходимо условие за екстремум: Ако функцията f е диференцируема в точката $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m)$ и има в тази точка екстремум, то в тази точка или $df = 0$, или, което е същото,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m} = 0.$$

За функционали в произволно нормирано пространство е в сила аналогична теорема.

Теорема 13.18. *Необходимо условие диференцируемият в нормирано пространство функционал F да има в точката x_0 екстремум е диференциалът му в тази точка да е тъждествено равен на нула относно h :*

$$F'(x_0)h \equiv 0,$$

т. е. необходимо е $F'(x_0) = 0$.

Доказателство. Тъй като функционалът F е диференцируем, то по определението за диференцируемост имаме

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = F'(x_0)h + o(h).$$

Ако $F'(x_0)h \neq 0$ за някой елемент h , то за достатъчно малки реални числа λ знакът на израза $F'(x_0)(\lambda h) + o(\lambda h)$ съвпада със

знака на главния му член $F'(x_0)(\lambda h)$, понеже ако λ е малко, величината $\|\lambda h\|$ е също малка, и то от по-висок ред в сравнение с $F'(x_0)(\lambda h)$. Функционалът $F'(x_0)$ е линеен, затова $F'(x_0)(\lambda h) = \lambda F'(x_0)h$; следователно, ако $F'(x_0)h \neq 0$, то нарастването

$$F(x_0 + \lambda h) - F(x_0) = F'(x_0)(\lambda h) + o(\lambda h)$$

(при даденото h , за което $F'(x_0)h \neq 0$) може да приема при произволно малки елементи λh както положителни, така и отрицателни стойности, т. е. екстремум в точката x_0 не може да има. $\square$

Пример:

Ще разгледаме функционала

$$(13.95) \quad F(x) = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt,$$

зададен в пространството $C_1[a, b]$ на непрекъснато диференцируемите функции в сегмента $[a, b]$. Тук $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$, а f е два пъти диференцируема функция на аргументите си в множеството $a \leq t \leq b$, $-\infty < x < \infty$. Този функционал играе важна роля във вариационното смятане.

Съгласно теорема 13.18, за да намерим точките, в които е възможен екстремум, т. е. стационарните точки, трябва да намерим силния диференциал на този функционал и да го положим равен на нула. По формулата на Тейлор с остатъчен член във форма на Пеано за функцията $f(t, x, x')$ имаме

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b (f(t, x+h, x'+h') - f(t, x, x')) dt$$

$$= \int_a^b (f'_x(t, x, x')h(t) + f'_{x'}(t, x, x')h'(t) + o(\rho)) dt,$$

където $\rho = (h^2 + h'^2)^{1/2}$. Ще напомним, че нормата на елемента h в пространството $C_1[a, b]$ се определя така:

$$\|h\|_{C_1[a, b]} = \max_{a \leq t \leq b} |h(t)|, \quad \max_{a \leq t \leq b} |h'(t)|.$$

Затова $\left| \int_a^b o(\rho) dt \right| \leq (b-a) o(\|h\|_{C_1[a, b]}) = o(\|h\|_{C_1[a, b]})$. И така необходимо условие за екстремум на дадения функционал F има вида

$$dF = \int_a^b (f'_x(t, x, x')h(t) + f'_{x'}(t, x, x')h'(t)) dt = 0.$$

Можем да се убедим, че това условие е еквивалентно на следните условия:

$$\dot{f}_x - \frac{d}{dt} \dot{f}_x' = 0, \quad \dot{f}_x' \big|_{t=a} = 0, \quad \dot{f}_x' \big|_{t=b} = 0.$$

Тази т. нар. гранична задача за функцията x определя някаква крива $y = x(t)$, за която е възможно функционалът да достигне екстремум. Тази гранична задача е едно диференциално уравнение за функцията x (уравнение, съдържащо функцията x и нейните производни) от вида $f'(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} f_x'(t, x(t), x'(t)) = 0$, което се нарича уравнение на Ойлер за функционала (13.95) с гранични условия от вида $f_x'(t, x(t), x'(t)) \big|_{t=a} = 0, f_x'(t, x(t), x'(t)) \big|_{t=b} = 0$.

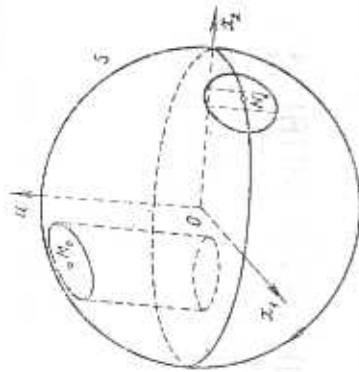
14. Неявни функции

Често се стига до ситуация, когато една променлива u се задава като функция на променливите $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ посредством функционалното уравнение $F(u, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = 0$. В този случай се казва, че u е *зададена неявно* като функция на аргументите $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$. Естествено възниква въпросът, при какви условия функционалното уравнение $F(u, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) = 0$ е еднозначно решимо относно u , т. е. еднозначно се определя явната функция $x = \varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$, и още по-тънкият въпрос, при какви условия тази функция е непрекъсната и диференцируема.

Да се даде отговор на тези въпроси не е никак просто. За пример ще разгледаме функционалното уравнение $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$, определящо в пространството на променливите (u, x_1, x_2) сфера S с радиус 1 и център в началото на координатната система (вж. фиг. 14.1). Очевидно това функционално уравнение определя безбройно много явни функции в кръга $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Такава са функциите $u = +\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$, $u = -\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ и всяка функция, равна на $+\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ за едни от точките на кръга $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ и равна на $-\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ за другите точки от този кръг.

При какви условия съществува единствена явна функция, удовлетворяваща уравнението $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$?

Фиксираме върху посочената по-горе сфера S произволна точка $M_0(u, x_1, x_2)$, нележаща в равнината Ox_1x_2 , т. е. такава, че $u \neq 0$. Очевидно е, че част от сферата S , лежаща в достатъчно малка околност на точката M_0 , се проектира еднозначно върху равнината Ox_1x_2 (фиг. 14.1). Аналитично това означава, че ако разгледаме функцията $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$ само в тази достатъчно малка околност на точката M_0 , то уравнението $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ е еднозначно решимо относно u и определя



Фиг. 14.1

единствената явна функция $u = +\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ при $u > 0$ и съответно $u = -\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$ при $u < 0$.

Ако върху сферата S вземем точка $M_1(0, x_1, x_2)$, лежаща в равнината Ox_1x_2 (фиг. 14.1), то очевидно част от сферата, лежаща в произволна околност на точката M_1 , се проектира върху равнината Ox_1x_2 нееднозначно. Аналитично това означава, че ако разгледаме функцията $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$ в произволна околност на точката M_1 , то уравнението $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$ не е еднозначно решимо относно u . Обръщаме внимание на това, че частната производна $\frac{\partial F}{\partial u} = 2u$ на функцията $F(u, x_1, x_2) = u^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1$ не се анулира в точката M_0 и се анулира в точката M_1 . По-нататък ще установим, че за еднозначната решимост на функционалното уравнение $F(u, x_1, x_2, \dots) = 0$ в околност на точката M_0 относно основния роля играе неанулирането в точката M_0 на частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}$. Между другото ще установим и условия, при които явната функция, представляваща единственото решение на това уравнение, е непрекъсната и диференцируема.

Получените резултати ще бъдат пренесени за случая на неявни функции, определени със система функционални уравнения.

14.1. Съществуване и диференцируемост на неявно зададена функция

14.1.1. Теорема за съществуване и диференцируемост на неявна функция. Ще се уговорим да означаваме пространството на променливите $(u, x_1, x_2, \dots)$ със символа R , а пространството на променливите $(x_1, x_2, \dots)$ със символа R' . За краткост на записването и за удобство при геометричното илюстриране ще разгледаме случая на две променливи x_1 и x_2 .

Теорема 14.1. Нека функцията F е диференцируема в някоя околност на точката $M_0(u, x_1, x_2)$ от пространството R и частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}$ е непрекъсната в точката M_0 . Тогава, ако в точката M_0 функцията F се анулира, а частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}$ не се анулира, то за всяко достатъчно малко положително число ϵ съществува околност на точката $M'_0(x_1, x_2)$ от пространството R' , в която има единствена функция $u = u(x_1, x_2)$, удовлетворяваща условието $|u - u_0| < \epsilon$ и която е решение на уравнението

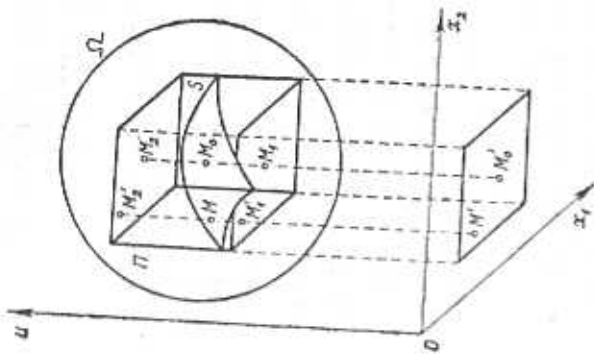
$$(14.1) \quad F(u, x_1, x_2) = 0;$$

при това тази функция $u = u(x_1, x_2)$ е непрекъсната и диференцируема в посочената околност на точката M'_0 .

Доказателство на теорема 14.1. 1. Най-напред ще докажем, че за достатъчно малко $\epsilon > 0$ в околност на точката $M'_0(x_1, x_2)$ съществува единствена функция $u = u(x_1, x_2)$, която удовлетворява условието $|u - u_0| < \epsilon$ и е решение на уравнението (14.1). За да направим доказателството по-нагледно, ще го придружим с геометрична илюстрация.

Известно е, че уравнението (14.1) определя в пространството R някаква повърхнина S (фиг. 14.2) и понеже $F(M_0) = 0$, точката M_0 лежи на тази повърхнина. От геометрична гледна точка еднозначната решимост на уравнението (14.1) относно u означава, че частта от повърхнината S , която лежи в непосредствена близост до точката M_0 , се проектира еднозначно върху координатната равнина Ox_1x_2 .

За определеност ще смятаме, че частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}$ е положителна в точката M_0 . Тогава от непрекъснатостта на производната в точката M_0 и от теоремата за постоянството на зна-



Фиг. 14.2

ка на непрекъснатите функции следва, че съществува околност на точката M_0 , в която $\frac{\partial F}{\partial u}$ е положителна. За такава околност можем да вземем кръго Ω с достатъчно малък радиус и с център в точката M_0 . Избираме по-нататък положителното число $\epsilon > 0$ толкова малко, че всяка от точките $M_1(u-\epsilon, x_1, x_2)$ и $M_2(u+\epsilon, x_1, x_2)$ да лежи вътре в кръгът Ω (за това е достатъчно да изберем ϵ по-малко от радиуса на кръгът Ω). Ще подчертаем, че ϵ е ограничено отдолу само от нулата и може да бъде избрано произволно малко. Това ще бъде използвано по-нататък.

Разглеждаме функцията $F(u, x_1, x_2)$ на една променлива в сегмента $u - \epsilon \leq u \leq u + \epsilon$. От геометрична гледна точка това означава, че разглеждаме функцията на три променливи $F(u, x_1, x_2)$ по отсечката $M_1 M_2$ (вж. фиг. 14.2). Тъй като производната $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x_1, x_2)$ е положителна в сегмента $u - \epsilon \leq u \leq u + \epsilon$, то функцията $F(u, x_1, x_2)$ е растяща в този сегмент. Но тогава, понеже тази функция е равна на нула в средата на сегмента (т. е. при $u = u$), то $F(u, x_1, x_2)$ има отрицателна стойност в левия край и положителна стойност в десния край на този сегмент, т. е.

$$F(M_1) < 0, F(M_2) > 0.$$

По-нататък разглеждаме функциите $F(u-\epsilon, x_1, x_2)$ и $F(u+\epsilon, x_1, x_2)$ на двете променливи x_1 и x_2 , които на геометричен език означава, че разглеждаме функцията $F(u, x_1, x_2)$ върху две равнини, успоредни на координатната равнина $Ox_1 x_2$, първата от които минава през точката M_1 , а втората — през точката M_2 . Понеже $F(M_1) < 0$, $F(M_2) > 0$ и функцията $F(u, x_1, x_2)$ е непрекъсната навсякъде в кръгът Ω , то според теоремата за постоянство на знака на непрекъснатите функции в посочените равнини съществуват такива околности на точките M_1 и M_2 , в които функцията F за-

пазва този знак, който има съответно в точките M_1 и M_2 . Тези околности могат да се вземат като отворени квадрати с центрове съответно в точките M_1 и M_2 и с достатъчно малка дължина на страната 2δ .

Аналогично фактът, че функцията $F(u, x_1, x_2)$ запазва постоянен знак в тези квадрати, се изразява с неравенствата

$$(14.2) \quad F(u+\epsilon, x_1, x_2) > 0, F(u-\epsilon, x_1, x_2) < 0$$

при $|x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta$.

Избора на дължината на страната на тези квадрати ще подчиним на още едно условие: избираме δ така малко, че и двата квадрата да лежат вътре в кръгът Ω (това очевидно е възможно, защото центровете на квадратите — точките M_1 и M_2 , са вътрешни точки за кръгът Ω). При този избор на δ всяка точка от пространството (u, x_1, x_2) , координатите на която удовлетворяват неравенствата

$$(14.3) \quad |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta, |u - u^0| < \epsilon,$$

ще лежи вътре в кръгът Ω . От геометрична гледна точка неравенствата (14.3) определят отворен правоъгълен паралелепипед с център в точката M_0 и със страни, успоредни на координатните оси u, x_1, x_2 , и с дължини, съответно равни на $2\epsilon, 2\delta$ и 2δ . Този паралелепипед ще означим със символа Π . Тъй като паралелепипедът Π лежи вътре в кръгът Ω , то навсякъде в паралелепипеда Π^* производната $\frac{\partial F}{\partial u}$ е положителна. Освен това според неравенствата (14.2) функцията F е отрицателна върху долната основа и положителна върху горната основа на Π .

Ще докажем сега, че уравнението (14.1) е еднозначно решимо относно u , ако разглеждаме функцията F само за стойности на u, x_1, x_2 , лежащи вътре в паралелепипеда Π . Нека $M'(x_1, x_2)$ е произволна точка от пространството R^n , координатите на която удовлетворяват неравенствата

$$(14.4) \quad |x_1 - x_1^0| < \delta, |x_2 - x_2^0| < \delta.$$

С други думи, нека $M'(x_1, x_2)$ е произволна точка от равнината $Ox_1 x_2$, лежаща вътре в квадрата с център в точката $M_0(x_1^0, x_2^0)$ и дължини на страните, равни на 2δ . Трябва да се докаже, че за координатите x_1, x_2 на точката M' съществува и при това единствено число u от интервала $u - \epsilon < u < u + \epsilon$, такова, че

* Включително отворените квадрати, лежащи върху неговите основи.

$F(u, x_1, x_2) = 0$. (От геометрична гледна точка това означава, че всяка права, успоредна на оста Ou и пресичаща паралелепипеда π , пресича повърхнината S вътре в паралелепипеда π в една и само в една точка.)

Фиксираме стойности за x_1 и x_2 , удовлетворяващи неравенствата (14.4), и разглеждаме функцията $F(u, x_1, x_2)$ на аргумента u в сегмента $u - \varepsilon \leq u \leq u + \varepsilon$, т. е. разглеждаме функцията F върху отсечката $M_1'M_2'$, където M_1' и M_2' са точки на пресичане на правата, минаваща през точката $M'(x_1, x_2)$ и успоредна на оста Ou , с основите на паралелепипеда π (вж. фиг. 14.2). Тъй като производната $\frac{\partial F}{\partial u}(u, x_1, x_2)$ е положителна в сегмента $u - \varepsilon \leq u \leq u + \varepsilon$, то функцията $F(u, x_1, x_2)$ расте в този сегмент (т. е. расте върху отсечката $M_1'M_2'$). Но тогава от условието $F(M_1') < 0$, $F(M_2') > 0$ следва, че вътре в сегмента $u - \varepsilon \leq u \leq u + \varepsilon$ съществува една единствена стойност на u , такава, че $F(u, x_1, x_2) = 0$ (или геометрично вътре в отсечката $M_1'M_2'$ съществува единствена точка M , лежаща върху повърхнината S).

Нека сега функцията u се дефинира чрез правилото, посредством което на всяка точка $M'(x_1, x_2)$ от околността (14.4) се съпоставя единственото число u от интервала $u - \varepsilon < u < u + \varepsilon$, за което $F(u, x_1, x_2) = 0$. Така докажем, че в околността (14.4) съществува единствена функция $u = u(x_1, x_2)$, която удовлетворява условието $|u - u_0| < \varepsilon$ и е решение на уравнението (14.1).

2. Ще докажем сега, че функцията u е непрекъсната във всяка точка $M'(x_1, x_2)$ от околността (14.4). Тъй като за всяка точка $M'(x_1, x_2)$ от околността (14.4) са изпълнени същите условия*, както и за точката $M'_0(x_1, x_2)$, то достатъчно е да докажем непрекъснатостта на функцията u само в точката $M'_0(x_1, x_2)$. Трябва да докажем, че за всяко достатъчно малко положително ε съществува такова положително число δ , че за произволни x_1 и x_2 , удовлетворяващи неравенствата $|x_1 - x_1^0| < \delta$, $|x_2 - x_2^0| < \delta$, да е изпълнено неравенството $|u - u^0| < \varepsilon$, където $u = u(x_1, x_2)$, $u^0 = u(x_1^0, x_2^0)$. Ако изберем за ε това число, което избрахме по-горе при разглежданата в т. 1, то съществуването на δ се гарантира от неравенствата (14.3). Остава да отбележим, че при разсъжденията в

* Именно условията на всяка точка $M'(x_1, x_2)$ от околността (14.4) да съответствуват такава точка $M(u, x_1, x_2)$ от пространството R , че функцията $F(u, x_1, x_2)$ да се анулира в точката M , да е диференцируема в някоя околност на точката M и в тази околност да има различна от нула частна производна $\frac{\partial F}{\partial u}$.

т. 1 положителното число ε може да бъде избрано произволно малко (това беше отбелязано в т. 1).

С това непрекъснатостта на функцията u е доказана. Ще запишем условието за непрекъснатост на функцията u в точката $M'_0(x_1, x_2)$ в диференциална форма. Като означим с Δu пълното нарастване на функцията u в точката $M'_0(x_1, x_2)$, а съответните нараствания на аргументите с Δx_1 и Δx_2 , ще получим, че $\Delta u \rightarrow 0$ при $\begin{cases} \Delta x_1 \rightarrow 0, \\ \Delta x_2 \rightarrow 0. \end{cases}$

3. Остава да се докаже диференцируемостта на функцията u във всяка точка $M'(x_1, x_2)$ от околността (14.4). Съгласно забележките, направени в т. 2, достатъчно е да се докаже диференцируемост на функцията u в точката $M'_0(x_1, x_2)$. За да направим това, ще пресметнем пълното нарастване Δu на функцията u в точката $M'_0(x_1, x_2)$, съответстващо на нарастването на аргументите Δx_1 и Δx_2 . Понеже $F(u, x_1, x_2) = 0$ и $F(u + \Delta u, x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2) = 0$, то пълното нарастване ΔF на функцията F в точката $M'_0(x_1, x_2)$ е равно на нула. Но поради условията за диференцируемост на функцията F в точката $M'_0(x_1, x_2)$ това пълно нарастване има вида

$$(14.5) \quad \Delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma \right) \Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha \right) \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} + \beta \right) \Delta x_2.$$

Тук всички частни производни $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}$ са взети в точката $M'_0(x_1, x_2)$; α, β и γ клонят към 0 при $\Delta u \rightarrow 0, \Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$. От съотношението (14.5) поради това, че $\Delta F = 0$, получаваме

$$(14.6) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma \right) \Delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha \right) \Delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} + \beta \right) \Delta x_2 = 0.$$

Съгласно диференциална форма на условието за непрекъснатост на функцията u в точката $M'_0(x_1, x_2)$, $\Delta u \rightarrow 0$ при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$. Следователно можем да твърдим, че α, β и γ клонят към 0 само при условието $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$.

Според условието на теоремата частната производна $\frac{\partial F}{\partial u}$ е различна от нула в точката M'_0 . Тъй като $\gamma \rightarrow 0$, при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0$, то при достатъчно малки Δx_1 и Δx_2 изразът $\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma$ не

се анулира. В такъв случай можем да разделим на $\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma$ изразът във формула (14.6) и да получим

$$(14.7) \quad \Delta u = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma} \right) \Delta x_1 + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2} + \beta}{\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma} \right) \Delta x_2.$$

От теоремата за граница на частно на две функции можем да твърдим, че

$$(14.8) \quad -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1} + \alpha}{\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}} + \mu, \quad -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2} + \beta}{\frac{\partial F}{\partial u} + \gamma} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial u}} + \nu,$$

където μ и ν клонят към 0 при $\Delta x_1 \rightarrow 0$, $\Delta x_2 \rightarrow 0$.

Като съставим формулите (14.7) и (14.8), окончателно получаваме

$$(14.9) \quad \Delta u = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \right) \Delta x_1 + \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \right) \Delta x_2 + \mu \Delta x_1 + \nu \Delta x_2.$$

Формула (14.9) доказва диференцируемостта на функцията u в точката $M'_0(x_1, x_2)$. $\square$

Забележка 1. В условието на теорема 14.1 може да се изпусне изискването за непрекъснатост на частната производна $\frac{\partial F}{\partial x}$ в точката M_0 , но тогава трябва да се поиска производната да не се анулира не само в точката M_0 , но и в някаква околност на тази точка и да запазва един и същ знак в тази околност.

Забележка 2. Приведеното доказателство се пренася без никакви затруднения за случая на неявни функции, зависещи от произволен краен брой аргументи $x_1, x_2, \dots, x_n$. Случаят на два аргумента x_1 и x_2 има само това предимство, че допуска нагледна геометрична интерпретация в пространството (u, x_1, x_2) .

14.1.2. Пресмятане на частните производни на функция, зададена неявно. Ще се спрем върху пресмятането на частните производни на неявна функция, зададена чрез уравнението (14.1). Нека са изпълнени условията на теорема 14.1. Тогава за пълното нарастване на функцията $u = u(x_1, x_2)$ с явно представянето (14.9). Това представяне и теорема 13.9 ни дават право да твърдим, че частните производни на функцията u се определят по формулите

* И по-специално от един аргумент.

$$(14.10) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Аналогични формули са в сила и за случая, когато неявно зададената функция зависи не от два, а от произволен краен брой аргументи $x_1, x_2, \dots, x_m$. В този случай

$$(14.11) \quad \frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \quad (k=1, 2, 3, \dots, m).$$

Ако искаме да осигурим съществуването на частни производни от втори ред за неявно зададената функция u , естествено трябва да засилим изискванията, наложени на функцията F в теорема 14.1, а именно трябва да искаме функцията F да бъде два пъти диференцируема в разглежданата точка. При тези предположения ще се спрем на пресмятането на производни от втори ред.

Ще въведем полезното понятие за пълна частна производна на функция. Да предположим, че е дадена диференцируема функция на три аргумента $\Phi(u, x_1, x_2)$, като единият от тези аргументи u сам е диференцируема функция на другите два аргумента x_1 и x_2 . Тогава функцията $\Phi(u, x_1, x_2)$ може да се разглежда като сложна функция на двата аргумента x_1 и x_2 . Частните производни на тази сложна функция по x_1 и x_2 ще наричаме пълни частни производни на функцията $\Phi(u, x_1, x_2)$ по x_1 и x_2 и ще ги означаваме със символите $\frac{D\Phi}{Dx_1}$ и $\frac{D\Phi}{Dx_2}$. По правилото за диференциране на сложна функция получаваме следните формули за тези пълни частни производни:

$$\frac{D\Phi}{Dx_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \frac{D\Phi}{Dx_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}.$$

Ще применим към пресмятане на частните производни от втори ред на неявно зададена функция. За определеност да пресметнем производната $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$. Като диференцираме първата от формулите (14.10) по x_2 и вземем пред вид, че всяка от частните производни $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial F}{\partial x_2}$ зависи от три аргумента u, x_1, x_2 , първият от които сам е функция на x_1 и x_2 , ще имаме

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{D \left(-\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)}{Dx_2} = -\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{D \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)}{Dx_2} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{D \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)}{Dx_2} \\ &= -\frac{\partial F}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} \right) + \frac{\partial F}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial u} \right) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} \end{aligned}$$

Като заместим в получаваната формула израза $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, определен от втората от формулите (14.10), получаваме окончателно

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial u}}{\left(\frac{\partial F}{\partial u} \right)^2} \quad (14.12)$$

Съвсем аналогично пресмятаме частните производни $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$. Също така могат да се пресметнат и частните производни от трети и по-висок ред.

Пример:

Ще пресметнем частната производна $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ на функцията, зададена неявно с уравнението

$$u^2 + x_1^4 + x_2^4 - 1 = 0.$$

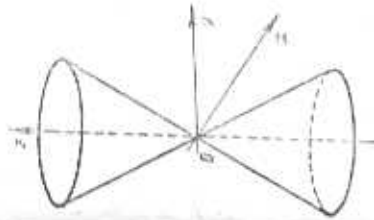
Като използваме равенството (14.10), получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{2x_1^3}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{2x_2^3}{u}.$$

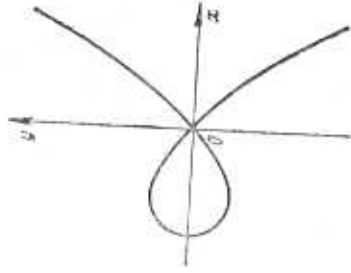
По-нататък получаваме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{D \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)}{Dx_2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(-\frac{2x_1^3}{u} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{2x_1^3}{u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{-4x_1^3 x_2^3}{u^3}.$$

14.1.3. Особени точки на повърхнината и равнинна крива. Ще разгледаме повърхнината S (равнинна крива L), определена в дадена правоъгълна декартова координатна система с уравнението $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$). За функцията F ще предположим, че тя има непрекъснати частни производни от първи ред по всичките си аргументи навсякъде в някоя околност на произволна точка от повърхнината S (кривата L). Дадена точка от повърхнината S (кривата L) ще наричаме **особена**, ако в тази точка се аннули-



Фиг. 14.3



Фиг. 14.4

рат всички частни производни от първи ред на функцията F . В околност на особена точка не може да се приложи теорема 14.1 към уравнението $F(x, y, z) = 0$ ($F(x, y) = 0$), т. е. не може да се твърди, че това уравнение е решимо дори относно една от променливите x, y, z (x, y). По такъв начин частта от повърхнината S (кривата L) около особена точка може и да не допуска едноточно проектиране върху нито една от координатните равнини (координатните оси). Структурата на повърхнината S (кривата L) в околност на особена точка може да бъде много сложна и изследва допълнително изследване.

Точките от повърхнината S (кривата L), които не са особени, е прието да се наричат **обикновени**. В околност на обикновена точка е в сила теорема 14.1, така че участък от повърхнината S (кривата L) от околност на обикновена точка допуска еднозначно проектиране поне върху една от координатните равнини (от координатните оси), което съществено улеснява изследването в такъв участък.

Примери:

1. Да се намерят особените точки на кръговия конус $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

$$\text{Понеже } F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, \text{ то } \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -2z.$$

Единствена особена точка е началото на координатната система. Добре е известно, че в околност на тази точка повърхнината на конуса не може еднозначно да се проектира нито върху една от координатните равнини (вж. фиг. 14.3).

2. Ще намерим особените точки на равнинната крива $x^2 - y^2 + x^3 = 0$.

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\partial \Phi_k}{\partial u_m} \left[\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_k} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_k} + \dots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial u_k} \right] + \left(\Delta_1 \frac{\partial F_1}{\partial u_m} + \Delta_2 \frac{\partial F_2}{\partial u_m} + \dots + \Delta_m \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \right) = \Delta_m \frac{\partial \psi}{\partial u_m}.$$

Тъй като сумата от произведениата на елементите на даден стълб на детерминанта със съответните адюгирани количества на елементите на този (на друг) стълб е равна на стойността на детерминанта (на нула), то изразите в средните скоби са равни на нула, а изразът в малките скоби е равен на якобиана (14.17).

Така получаваме, че

$$(14.22) \quad \Delta = \Delta_m \frac{\partial \psi}{\partial u_m}.$$

Тук символът Δ означава якобиана (14.17), а Δ_m — адюгираното количество на последния елемент от последния стълб, което съпада с минора, ограден с пунктир и по предположение различен от нула в точката M_0 . Като разделим равенството (14.22) на Δ_m , намираме окончателно

$$(14.23) \quad \frac{\partial \psi}{\partial u_m} = \frac{\Delta}{\Delta_m}.$$

Равенството (14.23), изписано в точката M_0'' , доказва непрекъснатостта на частната производна $\frac{\partial \psi}{\partial u_m}$ в точката M_0'' (тъй като Δ и Δ_m са съставени от частни производни на функциите (14.16) по $u_1, u_2, \dots, u_m$, които са непрекъснати в точката M_0). Освен това от формулата (14.23) следва, че $\frac{\partial \psi}{\partial u_m}$ е различна от нула в точката M_0 (понеже якобианът Δ е различен от нула в точката M_0). С това доказваме, че към уравнението (14.20) може да се приложи теорема 14.1. Съгласно тази теорема за достатъчно малко положително число ϵ_m може да се намери такава околност на точката $M_0'(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от пространството R' , че навсякъде в тази околност да е дефинирана функцията

$$(14.24) \quad u_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

която удовлетворява условието $|u_m - u_m^0| < \epsilon_m$ и при наличие на това условие е единственото непрекъснато и диференцируемо решение на уравнението (14.20). Тъй като функциите (14.20) са решение на първите $m-1$ уравнения (14.14) при произволни u_m ,

$x_1, x_2, \dots, x_n$ от околност на точката M_0'' , то като заместим намерената функция (14.24) в (14.18), получаваме функции, зависещи само от променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad u_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ u_{m-1} = \varphi_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad u_m = \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

(Тези функции означаваме със символите $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}$.) Теоремата за диференцируемост на сложна функция дава право да се твърди, че всяка от функциите $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}$ е диференцируема в околност на точката $M_0'(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Така доказваме, че m -те функции

$$(14.25) \quad \begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

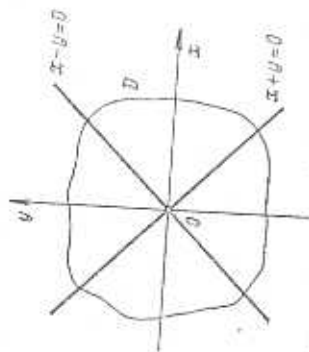
удовлетворяват в околност на точката M_0' условията $|u_1 - u_1^0| < \epsilon_1, \dots, |u_m - u_m^0| < \epsilon_m$ и при наличието на тези условия са непрекъснато и диференцируемо в някоя околност на точката $M_0'(x_1, x_2, \dots, x_n)$ решение на системата (14.14). Остава да се докаже, че функциите (14.25) са единствено решение на системата (14.14), удовлетворяващо условията $|u_1 - u_1^0| < \epsilon_1, \dots, |u_m - u_m^0| < \epsilon_m$ (при достатъчно малки положителни $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$).

Допускаме, че освен функциите (14.25) съществуват още функции

$$(14.25') \quad \begin{aligned} \hat{u}_1 &= \hat{\varphi}_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \hat{u}_2 &= \hat{\varphi}_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \hat{u}_m &= \hat{\varphi}_m(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

които са също решение на системата (14.14) и удовлетворяват условията $|\hat{u}_1 - u_1^0| < \epsilon_1, \dots, |\hat{u}_m - u_m^0| < \epsilon_m$.

Тогава съгласно индуктивното предположение първите $m-1$ функции (14.25) ще представляват при даденото $u_m = \hat{u}_m$ единственото диференцируемо решение на системата от първите $m-1$ уравнения на (14.14). Но при дадено u_m единственото решение на тази система се дава с равенствата (14.18), така че са изпълнени съотношенията



Фиг. 14.5

$\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k-1}}, \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k+1}}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial u_m}$. Но в такъв случай

якобиант (14.30) е равен на нула в точката M_0 , а това противоречи на условията на теоремата.

Пример:

Разглеждаме по-рано две функции $u_1 = x+y$ и $u_2 = x-y$ са независими в околност на всяка точка $M(x, y)$, тъй като якобиант $\frac{D(u_1, u_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ навсякъде.

14.3.2. Функционални матрици и тяхното приложение. Отново разглеждаме m -те функции на n променливи (14.28):

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (14.28)$$

Този път ще предполагаме, че функциите (14.23) са дефинирани и диференцируеми в някоя околност на точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и частните им производни от n -ви ред са непрекъснати в самата точка M_0 .

Образуваме следната функционална матрица от частните производни на функциите (14.28):

$$(14.32) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

съдържаща m реда и n стълба.

В сила е следното твърдение:

Теорема 14.4. Нека за функционалната матрица (14.32) имаме: 1) някой минор от r -ти ред е различен от нула в точката $M_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$; 2) всички минори от $(r+1)$ -ви ред са равни на нула в някоя околност на точката M_0 . Тогава r -те функции, съответстващи на този минор от r -ти ред, са независими в околност на точката M_0 , а всяка от останалите функции зависи от тези r функции в разглежданата околност на точката M_0 .

Доказателство. Без да ограничаваме общостта, можем да считаме, че е различен от нула в точката M_0 минорът в левия горен ъгъл на матрицата (14.32), т. е. различна от нула е детерминантата

$$(14.33) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Тогава независимостта на функциите $u_1, u_2, \dots, u_r$ в околност на точката M_0 следва веднага от теорема 14.3. Остава да докажем, че всяка от функциите $u_{r+1}, \dots, u_m$ в околност на точката M_0 зависи от функциите $u_1, u_2, \dots, u_r$. Ще докажем например, че функцията u_{r+1} зависи в околност на точката M_0 от $u_1, u_2, \dots, u_r$. Разглеждаме първите r функции от (14.28). Ако означим с $u_1, u_2, \dots, u_r$ числата $u_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, u_r = \varphi_r(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то навсякъде в някоя околност на точката $N_0(u_1, u_2, \dots, u_r, x_1, x_2, \dots, x_n)$ на $(n+r)$ -мерного пространство на променливите $(u_1, u_2, \dots, u_r, x_1, x_2, \dots, x_n)$ първите r

* Когато $r = \min(m, n)$, условиято 2) отпада.

** Предполага се, че $m > r$.

В равенството (14.39) със символа Δ е означен минорът (14.38), който е равен на нула навсякъде в околност на точката M_0 , а адюнгираното количество Δ_{+1} , съвпадащо с минора (14.33), е различно от нула в точката M_0 и следователно и в някоя околност на тази точка.* От равенството (14.39) заключаваме, че навсякъде в някоя околност на точката M_0 е в сила неравенството (14.37). $\square$

Пример:

Ще се върнем към изследване на зависимостта на функциите

$$u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

$$u_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,$$

$$u_3 = 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4).$$

Функционалната матрица (14.32) има вида

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2(x_2 + x_3 + x_4) & 2(x_1 + x_3 + x_4) & 2(x_1 + x_2 + x_4) & 2(x_1 + x_2 + x_3) \end{vmatrix}.$$

Лесно се вижда, че всички детерминанти от 3-ти ред са тъждествено равни на нула, а във всяка точка на пространството (x_1, x_2, x_3, x_4) , чито четири координати x_1, x_2, x_3, x_4 не съвпадат, поне една от детерминантите от втори ред

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \\ 2x_3 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_3 \\ 1 & 1 \\ 2x_2 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \\ 2x_3 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2x_2 & 2x_3 \\ 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

е различна от нула. Следователно в околност на всяка такава точка u_1 и u_2 са независими, а u_3 зависи от u_1 и u_2 .

14.4. Условен екстремум

14.4.1. Понятие за условен екстремум. В 13.6 се занимахме с намирането на локални екстремуми на функции, аргументите на които не са подчинени на никакви допълнителни условия.

Често се срещат задачи за намиране на екстремум на функции при условие, че аргументите удовлетворяват някои допълнителни връзки. Екстремуми от този вид ще наричаме **условни** за разлика от (безусловните) екстремуми, изучени в 13.6.

* Понякога всички частни производни, вземани в минора (14.33), са непрекъснати в точката M_0 , то и минорът (14.33) е непрекъснат в точката M_0 . Но тогава съгласно теоремата за постоянството на знака на непрекъснатата функция този минор е различен от нула не само в точката M_0 , но и в някоя нейна околност.

Ще дадем пример на задача за търсене на условен екстремум: Да се намери екстремумът на функцията $u = x^2 + y^2$ при условие, че аргументите на тази функция удовлетворяват връзката $x + y - 1 = 0$. Следователно екстремумът на функцията $u = x^2 + y^2$ се търси не върху цялата равнина Oxy , а само върху правата $x + y - 1 = 0$. За решаването на поставената задача заместяме в израза на функцията $u = x^2 + y^2$ променливата y , определена от връзката $x + y - 1 = 0$. По такъв начин свеждаме поставената задача към задача за търсене на безусловен екстремум на функцията $u = 2x^2 - 2x + 1$.

Този екстремум се намира лесно: тъй като $u' = 4(x - 1/2)$, $u'' = 4$, то функцията $u = 2x^2 - 2x + 1$ има минимум $u = 1/2$ при $x = 1/2$, така че функцията $u = x^2 + y^2$ при условие $x + y - 1 = 0$ има условен минимум $u = 1/2$ в точката $(1/2, 1/2)$. Ще отбележим, че безусловният минимум на функцията $u = x^2 + y^2$ се достига в точката $(0, 0)$ и е $u = 0$. Впрочем даже и от нагледни съображения (фиг. 14.6) е очевидно, че минимумът на функцията $u = x^2 + y^2$ (графиката на която е ротационен параболоид) върху цялата равнина Oxy не съвпада с нейния минимум върху правата $x + y - 1 = 0$.

Ще минем към общата постановка на задачата за намиране на условен екстремум. Нека се търси екстремумът на функцията на $m + n$ променливи

$$(14.40) \quad u = f(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m)$$

при наличие на m ограничения от вида

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0,$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0,$$

(14.41)

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = 0.$$

Най-напред ще уточним понятието условен екстремум на функцията (14.40) при наличие на връзките (на ограниченията) (14.41). Ще казваме, че функцията (14.40) при наличие на връзките (14.41) има условен максимум (минимум) в точката $M_0(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, координатите на която удовлетворяват връзките (14.41), ако съществува такава околност на точката M_0 , че стойността на функцията (14.40) в точката M_0 е най-голяма (най-малка) измежду стойностите ѝ във всички точки от околността, координатите на които удовлетворяват връзките (14.41).

За намиране на условния екстремум на функцията (14.40) при ограниченията (14.41) ще предположим, че функциите от лявата страна на равенствата на (14.41) са диференцируеми в някоя околност на разглежданата точка M_0 , като в самата точка M_0 частните производни на функцията по $y_1, y_2, \dots, y_m$ са непрекъснати и якобианът

Тъй като в равенството (14.48) фигурират само диференциали на независимите променливи, заключаваме, че $A_1=0$, $A_2=0$, ..., $A_n=0$. Като присъединим към тези равенства m -те ограничения (14.41), получаваме необходимото условие за съществуване на условен екстремум на функцията (14.40) при ограниченията (14.41) във вида

$$(14.49) \quad A_1=0, \dots, A_n=0, F_1=0, \dots, F_m=0.$$

Равенствата (14.49) представляват система от $m+n$ уравнения за определяне на $(m+n)$ -те координати на точката на възможния екстремум.

14.4.2. Метод на неопределените множители на Лагранж. При изложение по-рано метод за намиране на точката на възможен условен екстремум нарушихме симетрията по отношение на променливите $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$. Част от променливите $x_1, x_2, \dots, x_n$ разглеждаме като независими, а останалите — като функции на тези независими променливи. Това в редица случаи усложнява пресмятанята. От Лагранж е предложен метод, симетризиращ ролята на променливите. На изложението на този метод е посветена настоящата точка.

Умножаваме равенствата (14.47) съответно с произволни (все още неопределени) константни множители $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Получените след умножението равенства събираме почленно с равенството (14.46). В резултат стигаме до следното равенство:

$$(14.50) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} dy_m = 0,$$

където със символа $\Psi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ е означена функцията

$$(14.51) \quad \Psi = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \dots + \lambda_m F_m.$$

Тази функция по-нататък ще наричаме функция на Лагранж. Ще смятаме, че за функциите (14.41) са изпълнени условията, формулирани в предишната точка, и че функцията (14.40) е диференцируема. Избираме множителите $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ така, че да са изпълнени равенствата

$$(14.52) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0.$$

Това очевидно може да се направи, тъй като равенствата (14.52) водят до линейната система

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_1} &= 0, \\ \dots &\dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_m} + \dots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_m} &= 0. \end{aligned}$$

детерминантата на която (якобианът (14.42)) е различна от нула. Съгласно (14.52) равенството (14.50) приема вида

$$(14.53) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Понеже при направените предположения $x_1, x_2, \dots, x_n$ са независими, то от равенството (14.53) заключаваме, че

$$(14.54) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0.$$

Като присъединим към уравненията (14.52) и (14.54) връзките на ограниченията (14.41), получаваме система от $n+2m$ уравнения

$$(14.55) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial y_m} = 0,$$

$$F_1 = 0, \dots, F_m = 0$$

за определяне на $(n+m)$ -те координати на точката на възможния условен екстремум и m -те множителя $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Практически при реализация на този метод се постъпва по следния начин: Съставяме функцията на Лагранж (14.51) и за тази функция се намира точката на възможния безусловен екстремум. За изключване на множителите $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ се използват връзките на ограниченията (14.41). Този начин за намирането на точката на възможен условен екстремум е законен, тъй като той води веднага до системата от $n+2m$ уравнения (14.55). Пример за прилагане на метода на множителите на Лагранж ще бъде разгледан в края на 14.4.3.

14.4.3. Достатъчни условия. В тази точка ще разгледаме един от начините за допълнително изследване на точката на възможен условен екстремум. Предполагаме, че в точката M_0 са изпълнени необходимите условия за условен екстремум (14.55). Освен това ще искаме допълнително двукратна диференцируемост на функциите (14.40) и (14.41) в околност на точката M_0 и непрекъснатост на всичките частни производни от втори ред в самата точка M_0 . От конструкцията на функцията на Лагранж (14.51) е очевидно, че при наличието на ограниченията (14.41) екстремумите на функ-

циите (14.40) и на функцията на Лагранж съвпадат.* Но тогава от резултатите на 13.6 следва, че за да получим достатъчно условие за екстремум в точката M_0 на функцията (14.40) при наличие на ограничения (14.41), към условията (14.55) трябва да прибавим изискването за дефинитност в тази точка на $d^2\psi$. При това при наличие на ограничения (14.41) можем да констатираме минимум в точката M_0 , ако $d^2\psi|_{M_0} > 0$, и максимум, ако $d^2\psi|_{M_0} < 0$. Ще направим още няколко забележки от практически характер. Най-напред ще отбележим, че вторият диференциал $d^2\psi$ в точката M_0 на възможен екстремум може да се пресметне, като се счита, че всичките променливи $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ са независими. Наистина в общия случай вторият диференциал $d^2\psi$ на функцията ψ не притежава свойството инвариантност на формата и трябва да се отчита зависимостта на $y_1, y_2, \dots, y_m$ от $x_1, x_2, \dots, x_n$, така че

$$d^2\psi = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + dy_m \frac{\partial}{\partial y_m} \right)^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} d^2y_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_m} d^2y_m.$$

Но в точката на възможен екстремум M_0 са изпълнени равенствата

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1} = 0, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial y_m} = 0,$$

така че $d^2\psi$ се определя от същата формула

$$(14.56) \quad d^2\psi = \left(dx_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + dy_m \frac{\partial}{\partial y_m} \right)^2 \psi,$$

както и в случая, когато всичките променливи $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ са независими. По-нататък ще отбележим, че понеже искаме да установим дефинитността на $d^2\psi$ само при наличие на връзките (14.41), при провеждане на пресмятанията във формулата (14.56) за $d^2\psi$ трябва да заместим $dy_1, dy_2, \dots, dy_m$ със стойностите им, определени от системата (14.47). След това трябва да изучим въпроса за дефинитност на $d^2\psi$ в дадената точка M_0 .

Пример:

Ще измерим екстремалните стойности на функцията на m променливи

$$(14.57) \quad u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$$

* Поради това, че при падането на връзките (14.41) разликата $f(M) - f(M_0)$ съвпада с разликата $\psi(M) - \psi(M_0)$.

при ограничението

$$(14.58) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_m + 1 = 0.$$

Съставяме функцията на Лагранж

$$(14.59) \quad \psi = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 + \dots + x_m + 1)$$

и за нея изучаваме въпроса за точките на безусловен екстремум

Тъй като за всяко $i, i=1, 2, 3, \dots, m$, имаме $\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 2x_i + \lambda_i$,

то единствената стационарна точка с точката M_0 с координати

$$M_0(-\lambda/2, -\lambda/2, \dots, -\lambda/2).$$

За определяне на λ използваме връзката на ограничението (14.58), откъдето получаваме, че $(-\lambda/2)m + 1 = 0$. Така $\lambda = 2/m$ и единствената стационарна точка M_0 има координати $M_0(-1/m, -1/m, \dots, -1/m)$.

Понеже вторият диференциал на функцията на Лагранж (14.59), равен на

$$d^2\psi = 2((dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_m)^2),$$

е винаги положително дефинитен, то функцията (14.57) при ограничението (14.58) има в точката $M_0(-1/m, -1/m, \dots, -1/m)$ условен минимум.

Като заместим координатите на точката M_0 в (14.57), получаваме, че минималната стойност на функцията (14.57) при ограничението (14.58) е $u_{\min} = 1/m$.

14.4.4. Кривина на равнинна крива. Еволута и еволвента. Ако равнинната крива L се определя с уравнение от вида $F(x, y) = 0$, при което функцията F е диференцируема в някоя околност на точката $M_0 = (x_0, y_0)$ (или $M_0(x_0, y_0)$) от тази крива и има в тази точка непрекъснати частни производни по x и y , то точката M съгласно определеното в 14.1.3 е особена, когато и двете частни производни $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ в точката (x_0, y_0) са равни на нула.

Ако поне една от тези частни производни на функцията F е различна от нула, точката (x_0, y_0) е обикновена.

Ако параметризуемата равнинна крива L е зададена с уравнението

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

и функциите x, y имат при $t = t_0$ непрекъснати производни, то точката $M_0 = (x_0, y_0)$ (или $M_0(x_0, y_0)$) на кривата L , координатите x_0 и y_0 на която са съответно равни на $\varphi(t_0)$ и $\psi(t_0)$, ще наричаме особена, ако едновременно са изпълнени съотношенията $\varphi'(t_0) = 0$ и $\psi'(t_0) = 0$. Ако поне една от производните $\varphi'(t_0)$ и $\psi'(t_0)$ е различна от нула, точката M_0 се нарича обикновена.

Лесно се убеждаваме, че ако точката M_0 от кривата L е обикновена, то в някоя околност на тази точка кривата L е или графика на някоя диференцируема функция $y=f(x)$, или графика на някоя диференцируема функция $x=g(y)$.

Наистина, ако кривата е зададена с уравнението $F(x, y)=0$, този факт е следствие от теорема 14.1 за неявни функции. Ако кривата L е зададена чрез уравнението $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то от това, че една от производните $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ не е равна на нула в точката t_0 , например $\varphi'(t_0) \neq 0$, и тази производна е непрекъсната в точката t_0 , следва, че в някоя околност на точката t_0 производната φ' не е равна на нула. Тогава функцията $x=\varphi(t)$ е строго монотонна в тази околност. Затова съществува диференцируемата и монотонна обратна функция $t=\varphi^{-1}(x)$. Следователно кривата L е графика на диференцируемата функция $y=\psi(\varphi^{-1}(x))$ в някоя околност на точката M_0 .

Нека уравнението $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ задават параметрично кривата L . Ще предположим, че L няма точки на самопресичане и сливащи се участъци. В този случай във всяка точка M на кривата L може да се избере положителна посока. Ще считаме за положителна посока в точка M на кривата L тази посока, в която ще се премества точката M при растежа на параметъра t .

Да изберем върху кривата произволна точка M_0 , отговаряща на стойност на параметъра t_0 , и да предположим, че тази точка е обикновена точка на кривата. Съгласно предишните разсъждения в околност на точката M_0 кривата L е графика или на функцията $y=f(x)$, или на $x=g(y)$, при което функциите f и g са диференцируеми в тази околност на точката M_0 , и следователно съществува допирателна към кривата L в точката M_0 .

Ще се договорим да наричаме положителна посока на допирателната посоката, в която ще се премества при нарастване на параметъра проекцията върху допирателната на точка от кривата L .

Да предположим сега, че всички точки на кривата L , разположени в околност на точката M_0 , са обикновени, а върху допирателната към кривата L в точката M_0 е определена положителна посока. Нека M е някоя точка от околността на точката M_0 , отговаряща на по-голяма стойност на параметъра, отколкото точката M_0 .

Определение. Прилежащ ъгъл на участъка M_0M на кривата L се нарича ъгълът между положително насочените допирателни към кривата L в точките M и M_0 , взет със знак плюс, когато допирателната в точката M_0 при налягане по най-късия път върху допирателната в точката M трябва да се завърти в посока, обратна на часовниковата стрелка, и със знак минус в противния случай.

Определение. Средна кривина в участъка M_0M на кривата L се нарича отношението на прилежащия ъгъл на този участък към дължината на участъка M_0M .

Тъй като точката M_0 е фиксирана, то средната кривина на участъка M_0M е функция на точката M или функция на параметъра t . Означаваме средната кривина в участъка M_0M на кривата L с $k_{\text{ср.}}(M_0M)$ (или $k_{\text{ср.}}(t)$).

Естествено възниква въпросът за границата на функцията $k_{\text{ср.}}(M_0M)$, когато точката M клони по кривата L към точката M_0 (или, което е същото, когато параметърът t клони към t_0).

Определение. Кривина на кривата L в дадена точка M_0 се нарича границата на средната кривина в участъка M_0M от кривата, когато точката M клони по кривата L към точката M_0 . Кривината на кривата L в точката M_0 се означава със символа

$$k(M_0) = \lim_{M \rightarrow M_0} k_{\text{ср.}}(M_0M) = \lim_{t \rightarrow t_0} k_{\text{ср.}}(t).$$

Не е трудно да се получат формули, по които да се намира кривината на кривата L , зададена с уравнението $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ или с уравнението $y=f(x)$.

Ще разгледаме случая, когато кривата е зададена с уравнението $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и функциите φ и ψ имат в точката t_0 втори производни.

Нека x и y са стойностите на първата и втора производна на функцията x в точката t_0 , а $x'+\Delta x$ е стойността на първата производна на тази функция в точката $t_0+\Delta t$, където Δt е някакво нарастване на параметъра t . Така Δx е нарастването на първата производна на функцията x . Нека y , y' и $y'+\Delta y$ са съответните стойности за функцията y .

Точката M_0 е фиксирана и отговаря на стойността на параметъра t_0 , а точката M отговаря на стойност на параметъра t . За това прилежащият ъгъл на участъка M_0M и дължината на този участък могат да се разглеждат като функции на аргумента Δt . Означаваме дължината на участъка M_0M с $l(\Delta t)$, а прилежащият ъгъл на този участък с $\alpha(\Delta t)$. Трябва да пресметнем величината

$$k(M_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{l(\Delta t)}.$$

Ако означим с θ_0 и θ ъглите, които допирателните към кривата L , прекарани съответно през точките M_0 и M , сключват с оста Ox , то очевидно $\alpha(\Delta t) = \theta - \theta_0$, а също $\tan \alpha(\Delta t) = \tan(\theta - \theta_0) = \frac{\tan \theta - \tan \theta_0}{1 + \tan \theta \tan \theta_0}$. Тъй като $\tan \theta_0 = y'/x'$, $\tan \theta = (y'+\Delta y)/(x'+\Delta x)$, след не-сложни преобразувания не е трудно да се заключи, че

$$\operatorname{tg} \alpha(\Delta t) = \frac{x \Delta y - y \Delta x}{x(x + \Delta x) + y(y + \Delta y)}.$$

Тъй като функциите x, y имат в точката t_0 втори производни, то първите производни на тези функции са непрекъснати в точката t_0 и затова $\Delta y \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$ ($\Delta t \rightarrow 0$). Но тогава $\operatorname{tg} \alpha(\Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$ и $\alpha(\Delta t) \rightarrow 0$, ако $\Delta t \rightarrow 0$. Следователно

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{\operatorname{tg} \alpha(\Delta t)} = 1.$$

Затова

$$k(M_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta t)}{t(\Delta t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha(\Delta t)}{t(\Delta t)}.$$

Понеже

$$t(\Delta t) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} (\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau))^{1/2} d\tau,$$

то по формулата за средните стойности

$$t(\Delta t) = \Delta t (\dot{x}^2(t') + \dot{y}^2(t'))^{1/2}, \quad t_0 \leq t' \leq t_0 + \Delta t.$$

Следователно

$$k(M_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x \Delta y / \Delta t - y \Delta x / \Delta t}{x(x + \Delta x) + y(y + \Delta y)} (\dot{x}^2(t') + \dot{y}^2(t'))^{1/2}.$$

Тъй като функциите x, y имат в точката t_0 втори производни, то $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \dot{y}$. От непрекъснатостта на първите производни на функциите x, y следва, че при $\Delta t \rightarrow 0$ имаме

$$\Delta x \rightarrow 0, \quad \Delta y \rightarrow 0, \quad (\dot{x}^2(t') + \dot{y}^2(t'))^{1/2} \rightarrow (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}.$$

Затова

$$(14.60) \quad k(M_0) = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Ако кривата L е графика на два пъти диференцируемата функция $y = f(x)$, като положим $x = t, y = f(x)$, получаваме за кривината следната формула:

$$k(M_0) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Радиус на кривината R на кривата L се нарича величината $1/k$, където k е кривината, а център на кривината се нарича точката върху нормалата към кривата L , която е на разстояние R от дадената точка на кривата в посоката на вдлъбнатост на L .

Ако разглежданата крива L е дъга от окръжност с радиус r , лесно се вижда, че кривината k е равна на $1/r$, а радиусът на кривината на тази крива L е равен на радиуса на окръжността r . В заключение ще въведем още две понятия.

Определение. Геометричното място на центрoвете на кривината на дадена крива L се нарича **еволута** на кривата L .

Кривата L по отношение на своята еволута се нарича **еволвента**.

Ясно е, че еволутата на окръжност е множество, състоящо се от една точка — център на окръжността. Окръжността по отношение на свой център е еволвента.

14.4.5. Смяна на променливите. Задачата за решимост на система от функционални уравнения е тясно свързана със задачата за смяна на променливите.

Нека е даден изразът

$$(14.61) \quad F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), \dots, z_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z_k}{\partial x_m}, \frac{\partial z_k}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z_k}{\partial y_n}),$$

съдържащ независимите променливи $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$, функциите $z_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), \dots, z_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$ и частните им производни по всички независими променливи.

Вместо независимите променливи $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ и функциите $z_1, \dots, z_k$ се въвеждат нови независими променливи $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ и нови функции $w_1, \dots, w_k$, където $w_1 = w_1(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n), \dots, w_k = w_k(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$, при това са дадени съотношенията, с помощта на които се прави тази смяна:

$$(14.62) \quad \begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k), \\ u_m &= \varphi_m(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k), \\ v_1 &= \psi_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k), \\ v_n &= \psi_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k), \\ w_1 &= \theta_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k), \\ w_k &= \theta_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_k). \end{aligned}$$

Иска се да се преобразува изразът (14.61) по отношение на новите променливи $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_k$. Ще пред-

Азбучен указател

- Абел, Н. Х. 343
— лева на 343
абсолютно сходящ 373
теграл 373
абсолютна стойност 45
аксиома на Архимед 40
аксиоми на реалните числа 66
алгебричен полином 120, 299
аргумент 19, 108
— диференциал на 193
Архимед, аксиома на 40
асимптота 273
— вертикална 271
— наклонена 272
база 124
— граница на функция по 125
базис на пространство 457
— филтър 124
— пространство с избором 458
банахово пространство 477
безкрайно голяма редица 79
— функция отгласно на точка 121
— — отляво на точка 121
— малка от по-висок ред функция 122
— редица 80
— функция в точка 121, 499
— малки функции, еквивалентно 122
Бер, Р. 183
— горна функция на 184
— долна функция на 184
биективно съответствие 71
биекция 71
бином, диференциален 315
Болцано, В. 101
— Вайерштрас, теорема на 101, 496
Борел, Е. 180
Буняковский, В. Я. 356
Вайерштрас, К. 101
— втора теорема на 172, 508
— първа теорема на 196, 507
вектор, дължина на 477
— модул на 477
векторно пространство 475
величина, математическа променлива 108
вертикална асимптота 271
взаимно еднозначно съответствие 62
втора забележителна граница 24, 158
— производна 209
— — на изображение 556
— субституция на Ойлер 314
— формула за средните стойности 312
— частна производна 526
втори диференциал 214
вътрешна точка 61, 402, 415, 488
външна точка 402, 415, 488
Гато, диференциал на 558
— произходна на 558
главна стойност в смисъл на Коши 380, 382
голяма сума на Дарбу 324
— — — — — Стилтес 383
горен интеграл на Дарбу 326
горна граница 49
— — — — — на интегрирането 320
— — — — — редица 79
— — — — — функция 165
— мярка на лице 404
— точка на състояние 98
— функция на Бер 183
граница, втора забележителна 158, 24
— горна 49
— — — — — на редица 79
— — — — — функция 165
— двойна 500
— долна на редица 79
— — — — — функция 165
— дясна на функция 115
— лява на функция 115
— многократно 499
Абел, Н. Х. 343
— лева на 343
абсолютно сходящ 373
теграл 373
абсолютна стойност 45
аксиома на Архимед 40
аксиоми на реалните числа 66
алгебричен полином 120, 299
аргумент 19, 108
— диференциал на 193
Архимед, аксиома на 40
асимптота 273
— вертикална 271
— наклонена 272
база 124
— граница на функция по 125
базис на пространство 457
— филтър 124
— пространство с избором 458
банахово пространство 477
безкрайно голяма редица 79
— функция отгласно на точка 121
— — отляво на точка 121
— малка от по-висок ред функция 122
— редица 80
— функция в точка 121, 499
— малки функции, еквивалентно 122
Бер, Р. 183
— горна функция на 184
— долна функция на 184
биективно съответствие 71
биекция 71
бином, диференциален 315
Болцано, В. 101
— Вайерштрас, теорема на 101, 496
Борел, Е. 180
Буняковский, В. Я. 356
Вайерштрас, К. 101
— втора теорема на 172, 508
— първа теорема на 196, 507
вектор, дължина на 477
— модул на 477
векторно пространство 475
величина, математическа променлива 108
вертикална асимптота 271
взаимно еднозначно съответствие 62
втора забележителна граница 24, 158
— производна 209
— — на изображение 556
— субституция на Ойлер 314
— формула за средните стойности 312
— частна производна 526
втори диференциал 214
вътрешна точка 61, 402, 415, 488
външна точка 402, 415, 488
Гато, диференциал на 558
— произходна на 558
главна стойност в смисъл на Коши 380, 382
голяма сума на Дарбу 324
— — — — — Стилтес 383
горен интеграл на Дарбу 326
горна граница 49
— — — — — на интегрирането 320
— — — — — редица 79
— — — — — функция 165
— мярка на лице 404
— точка на състояние 98
— функция на Бер 183
граница, втора забележителна 158, 24
— горна 49
— — — — — на редица 79
— — — — — функция 165
— двойна 500
— долна на редица 79
— — — — — функция 165
— дясна на функция 115
— лява на функция 115
— многократно 499
долна граница на интегрирането 320
— — — — — редица 79
— — — — — функция 165
— мярка на лице 404
— точка на състояние 98
— долна функция на Бер 184
допирателна 189
дроб, рационална 120, 303
дробно-линейна рационалност 312
дясна граница на функция 115
— производна на функция 188
дължина на вектор 476
— дъга 392
дъга, диференциал на 400
Геклидово пространство 486
свойства 603
еволюта 603
еднакво ред на нарастване 122
еднократен корен 301
елемент, максимален 75
— на редица 77
элементарна функция 25
элементарен интеграл 317
— — — — — във формата на Лъжандър 318
— — — — — от втори род 402
— — — — — 1-ви, 2-ри и 3-ти род 318
еквивалентни множества 71
еквивалентно безкрайно малки функции 122
екстремум, граничен 278
— контурен 278
— локален 217, 255, 543
— условен 592
Жордан, К. 409
— лице по 409
— мярка на 409
жорданова мярка нула 360, 406
затворен интервал 51
затворена област 449
— област 491
затворено множество 448, 489
— относително 450
— т-мерно к-дбо 488
избривност, пространство с игора аксиома за 458
избривно множество 71
измерима фигура 404
измеримо тяло 415
изображение, диференцируемо 555
— липейно 478
непрерывното 454, 455

- производна на 556
- свивашо 462
- хомеоморфно 585
- изображения, комутиращи 463
- изолирана точка 448
- изоморфизъм 66
- изоморфни линейни пространства 476
- множества 62
- изпълняват 263
- насочена нагоре 263
- надолу 263
- имагинерна част 296
- интеграл, елипсичен 317
- от втори род 318, 402
- каноничен 318
- линейни свойства на 286
- на грешките 288
- Дарбу, горен 326
- долен 326
- Поассон 288
- Риман—Стилтес 382
- Стилтес 382
- Френел 288
- неопределен 26, 27, 283
- собствен от втори род 377
- първи род 368
- определен 30
- псевдоединичен 317
- разходящ 378
- сходящ 368, 377
- интегрален косинус 288
- логаритъм 288
- синус 288
- интегрална сума 29, 319
- на Стилтес 382
- интеградно смятане 29
- интегриране по части 292
- интегриране чрез смяна на променливите 289
- интегрираща функция 382
- интегрируема по Коши функция 380, 381
- Риман функция 320
- интеграл 61
- затворен 61
- отворен 61
- полузатворен отгоре 61
- отдолу 61
- отляво 61
- инфлексия 265
- точка на 265
- инфлексна точка 265
- и рационалност, дробно-линейна 312
- квадратична 313
- итерационна редица 426
- на равнинна крива 601
- средна 601
- каноничен интеграл 318
- Кантор, Г. 175
- теорема на 175
- квадратична ирационалност 313
- форма, недефинитна 546
- отрицателно дефинитна 545
- положително дефинитна 545
- полуdefинитна 546
- компакт 182, 455
- компактно множество 182
- пространство 455
- комплексно линейно пространство 475
- число 296
- спрятано 298
- комутиращи изображения 463
- континуум, множество с мощност на 73
- мощност на 73
- контур на множество 402, 415
- контурен екстремум 278
- максимум 278
- минимум 278
- контурна точка 61, 402, 415, 488
- корен, еднократен 301
- кратен 301
- многократен 301
- на полином 299
- прост 301
- косинус 149
- интегрален 288
- Коши, Л. О. 104
- Буняковски, неравенство за интеграла на 357
- — — — суми на 356
- — — — на 483
- главна стойност в смисъл на 380, 382
- интегрируема функция по 380, 381
- критерий за сходимост на несобствен интеграл 371, 378
- непрекъсната функция по 129
- остатъчен елемент във форма на 240
- редица на 104, 460
- теорема на 227
- формула на 227
- кратен корен 391
- крива, кривина на 601
- непрекъсната 490
- параметризуема 390
- проста равнинна 389
- пространствена 391
- ректифицируема 392
- кривина 601
- на равнинна крива 601
- средна 601
- каноничен сектор 412
- транс 30, 410
- критерий за интегрируемост на Лебег 364
- на Дирихле—Абел 373
- Силвестър 546
- кълбо, *m*-мерно, затворено 488
- отворено 488
- Лагранж, Ж. Л. 211
- метод на неопределените множители на 596
- остатъчен елемент във форма на 240
- теорема на 221
- формула на 221
- Лайбниц, формула на 212
- Ланглас, П. С. 605
- Лебег, А. 352
- критерий за интегрируемост на 358, 364
- лека на Абел 343
- Дарбу 327
- Хайне—Борел 181
- Урисон 472
- Цори 75
- лимес инфериор 98
- супериор 98
- лимес оператор 479
- ограничен 480
- спрятат 484
- линейни пространства, изоморфни 476
- свойства на интеграла 286
- линейно изображение 478
- нормирано пространство 477
- пространство 475
- комплексно 475
- реално 475
- Липшиц, условие на 334
- Лиувил, Ж. 318
- лине, горна мярка на 404
- долна мярка на 404
- по Жордан 409
- логаритмична производна 208
- функция 146
- логаритъм, интегрален 288
- локален екстремум 217, 255
- максимум 217, 255, 564
- минимум 217, 255, 564
- Лопитал, Г. Ф. 223
- правило на 228
- люва граница на функция 115
- производна на функция 188
- Любжандр, А. М. 318

- Маклорен, К. 242
- формула на 242
- максимален елемент 75
- максимум, граничен 278
- контурен 278
- локален 217, 255, 543, 564
- мажоранта на Дарбу 324
- — — — Стилтес 383
- математическа променлива величина 109
- метод на „вилката“ 426
- лопиталовите 34, 42, 434
- неопределените коефициенти 307
- — — — множители на Лагранж 596
- Нютон 34
- последователните приближения 426
- правоъгълниците 33
- хорите 429, 432
- метрика 445
- метрично пространство 445
- пълно 460
- структура на 445
- минимум, граничен 278
- контурен 278
- локален 217, 235, 543, 564
- Минковский, Х. 356
- неравенство за интеграла на 357
- — — — суми на 356
- многократен корен 301
- многократна граница 499
- многостенно тяло 415
- многостъпна фигура 403
- множества, еквивалентни 71
- изоморфни 62
- равномощни 74
- множество, гъсто в себе си 502
- затворено 448, 489
- изоморфно 71
- компактно 182
- контур на 402
- навсякъде гъсто 62, 451, 452
- напълно наредено 75
- наредено 75
- непразно 49
- ограничено 403, 415, 489
- — — — отгоре 49
- — — — отдолу 49
- от втора категория 462
- първа категория 462
- отворено 448, 469, 489
- относително отворено 449
- пълно в себе си 62
- покритие на 455

— с жорданова мярка нула 360, 406
 — лебегова мярка нула 358
 — мощност на континуума 73
 — мярка нула 406
 — нулев обем 415
 — съвпадение 490
 — сепарабельно 151
 — свършено 452
 — топология на 468
 — филтър на 127
 — модул 45
 — на вектор 476
 — непрекъснатост на функция 177

монотонна редица 90
 — мощност на континуум 73
 — мярка на Жордан 409
 — нула, множество с 406
 — навсякъде гъсто множество 451
 — навсякъде нито множество 452
 — наклонена асимптота 272
 — намаляваща редица 90
 — функция 133, 217

напълно регулярно топологично пространство 471

наращаване, единичен ред на 122
 — на функция 217
 — по-висок ред на 122
 — наредена двойка 296
 — наредено множество 75
 — недефинитна квадратична форма 546
 — независими променливи 108
 — — диференциал на 516
 — намаляваща редица 89
 — функция 133
 — неограничена редица 79
 — неопределен интеграл 26, 27, 283
 — неправилна рационална дроб 303
 — непразно множество 49
 — непрекъсната в множество функция 131

— сегмент функция 131
 — точка функция 128, 129
 — крива 490
 — по Коши 129
 — — Хайне 129, 130
 — отясно функция 129, 130
 — отясно функция 129, 130
 — функция 22, 129, 130
 — в множество 131, 502
 — — точка 129, 130, 501
 — — равномерно 173, 508
 — непрекъснато изображение 454, 455
 — непрекъснатост, модул на 177

неравенство на Коши—Буняковски 483
 — — — за интеграл 357
 — — — суми 356
 — Минковски за интеграл 357
 — — суми 356
 — Хьолдер за интеграл 356
 — — за суми 355
 — Юнг 354
 — нарастваща редица 89
 — функция 133
 — несобствен интеграл, абсолютно сходен 373
 — критерий на Коши за сходеност 370, 378
 — от втори ред 377
 — първи ред 368
 — условно сходен 373
 — невяна функция 567
 — норма 476
 — оператор 481
 — нормално топологично пространство 472

Нютон метод на 34

обинка, затворена 449
 — обем на тяло 415
 — обикновена точка 577
 — област 491
 — дефиниционна 108
 — — затворена 491
 — на изменение на функция 108
 — обобщена формула за крайните нараствания 227
 — обратна функция 134
 — обратни тригонометрични функции 154
 — оклоност на точка 61, 448, 469
 — — — правозълна 488
 — оператор, линейен 478
 — норма на 480
 — определен интеграл 30
 — — по Риман 320

основна элементарна функция 24, 201
 — особена точка 377, 576
 — остатъчен член 237
 — — в интегрална форма 352, 538
 — — обща форма 237
 — — във форма на Коши 240
 — — — Лагранж 240, 536
 — — — Пеано 241, 539
 — осцилираща на функция 176
 — отворен интервал 61
 — отворена полуоткрита 61
 — отворено множество 448, 469, 489

— относително 450
 — — мерно кълбо 458
 — относително отворено множество 450
 — отсидателно дефинитна квадратична форма 545

отсидателно прекъсване 161
 — отсидателно прекъсване 600
 — примитивна функция 26, 283
 — производна δ -околоност 111
 — производение, декартено 451
 — производна 21, 187
 — втора 209
 — — частна 526
 — дясна 188
 — логаритмична 208
 — лява 188
 — — Гато 558
 — — изображение 556
 — — втора 563
 — — сила 556
 — — функция 187
 — от n -ти ред 209
 — — — частна 527
 — — 2-ри ред 209
 — — слаба 558
 — — частна 509

променлива величина, математическа 108
 — независима 19, 108
 — прост корен 301
 — проста равнинна крива 389
 — пространствена крива 391
 — пространство, базис на 457
 — — банахово 477
 — — секторно 475
 — — еклиптово 486
 — — компактно 455
 — — линейно 475
 — — нормирано 477
 — — метрично 445
 — — напълно регулярно топологично 471

— нормално топологично 472
 — — пълно метрично 460
 — — регулярно топологично 471
 — — с втора аксиома за изброимост 458, 469
 — — — изброим базис 458, 469
 — — — парна аксиома за изброимост 469
 — — структура на топологично 467
 — — топологично 468
 — — хаусдорфово топологично 468
 — — хилбертово 482
 — — псевдоединичен интеграл 317
 — — пълно метрично пространство 460

— относително 450
 — — мерно кълбо 458
 — относително отворено множество 450
 — отсидателно дефинитна квадратична форма 545
 — отсидателно прекъсване 161
 — отсидателно прекъсване 600
 — примитивна функция 26, 283
 — производна δ -околоност 111
 — производение, декартено 451
 — производна 21, 187
 — втора 209
 — — частна 526
 — дясна 188
 — логаритмична 208
 — лява 188
 — — Гато 558
 — — изображение 556
 — — втора 563
 — — сила 556
 — — функция 187
 — от n -ти ред 209
 — — — частна 527
 — — 2-ри ред 209
 — — слаба 558
 — — частна 509

— нарастване на функция 502
 първа забележителна граница 23, 157
 — субституция на Ойлер 313
 — формула за средните стойности 341

равнина крива, кривина на 401
 — фигура 403
 равномерно непрекъсната функция 173, 508

равномощни множества 74

разстояние 445

— функция на 445

разход на интеграл 378

разходна редица 84

растваща функция 133

рационална дроб 120, 303

— неправилна 303

— правилна 303

— функция на два аргумента 310

рационално число 38

реална част 296

реални числа, аксиоми на 66

реално линейно пространство 475

— число 43

регулярно топологично пространство 471

редица 77

— безкрайно голяма 79

— малка 80

— горна граница на 78

— граница на 83, 194

— долна граница на 78

— елемент на 77

— интервална 426

— монотонна 90

— на Коши 104, 450

— намаляваща 89

— неограничена 79

— нарастваща 89

— ограничена 78, 496

— отгоре 78

— отдолу 78

— разходна 84

— растяща 90

— скъпаща 83, 84, 453

— фундаментална 104, 460, 494

— член на 77

— числен 77

ректифицируема крива 392

Риман, определител интеграл на 320

— функция интегрируема по 320

— Стилес интеграл на 382

— риманова сума 29

— Кантор 175, 508

— Коши 227

— Лагранж 221

— Ойлер 520

— Тейлор 236

— Тихонов 520

— Цермело 75

Тихонов, А. Н. 473

— теорема на 473

топология на множество 468

топологично пространство 468

— напълно регулярно 471

— нормално 472

— регулярно 471

— структура на 467

— хаусдорфово 468

точка, външна 448, 402, 415, 488

— вътрешна 61, 443, 402, 415, 488

— граница 61

— изолирана 448

— инфлексна 265

— контурна 61, 448, 102, 415, 488

— на инфлексия 265

— отсгранично прекъсване 161

— прекъсване 130

— — от втори род 162

— — първи род 161

— съставяне 96, 448, 489

— горна 98

— долна 98

— обикновена 577

— околност на 469

— особена 576

— правотогълна околност на 488

— стационарна 255

— ε -околност на 402

точка горна граница 49

— на функция 170

— долна граница 49

— на функция 170

транс, криволинейн 30, 410

тригонометрична функция 146

— тяло 415

— измъримо 415

— вмащо обем 415

— многостепенно 415

— цилиндрично 416

условен екстремум 592

— условие за ограниченост 79

— на Коши за функция 117

— Лаплас 334

— условно сходящ несобствен интеграл 373

Урисон, П. С. 472

— лека на 472

фигура, измерима 404
 — многогълна 403
 — равнинна 403
 Филгър, базис на 124
 — на множество 127
 формула за крайните нараствания 221, 222

— — — общена 227

— — — средните стойности 342

— — — втора 343

— — — първа 341

— на Коши 227

— Лабиниц 212

— Лагранж 221

— Маклорен 242

— Нютон-Лабиниц 32, 347

— параболите 443

— паралелограмните 438

— Симпсон 443

— Тейлор 237, 536, 539

— трапеците 441

Френел, интеграл на 288

Френе, диференциал на 556

фундаментална редица 104, 460

функции, еквивалентно безкрайно малки 122

— обратни тригонометрични 154

— тригонометрични 148

— хиперболични 156

функционал 479

функции 19

— безкрайно голяма отдалечност на точката 121

— — отдалечност на точката 121

— малка в точката 121

— — от по-висок ред 122

— горна граница на 165

— градиент на 523

— граница на 111, 112, 116, 117

— граница стойност на 111, 112, 116, 117

— делна 480

— дефиниционна област на 108, 20

— диференциал на 193

— диференцируема 190, 511

— в точката 190

— долна граница на 165

— дясна граница на 115

— производна на 187

— елементарна 25

— интегрална 382

— интегрална по Коши 380, 381

— — Риман 320

— логаритмична 146

— лява граница на 115

