$\sigma = A \cdot B \neq 0$, така че σ няма граница, когато диаметърът на делението клони към нула.

Този факт е свързан с това, че за функциите $f(x)$ и $u(x)$ точката нула е точка на прекъсване.

в) За интеграла на Стилтес (9.25) е в сила формулата за средните стойности.

Нека функцията $f(x)$ е ограничена в сегмента $[a, b]$, така че $m \leqq f(x) \leqq M$, а функцията $u(x)$ е растяща в този сегмент. Тогава съществува такова число μ, удовлетворяващо неравенствата $m \leqq \mu \leqq M$, че за интеграла на Стилтес е изпълнена формулата за средните стойности:

$$\int_a^b f(x)\, du(x) = \mu (u(b) - u(a)).$$

По-специално, ако поискаме и непрекъснатост на $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, то съществува такава точка $\xi \in [a, b]$, че $\mu = f(\xi)$.

Доказателството на тази формула е съвсем аналогично на доказателството на формулата за средните стойности за интеграла на Риман (вж. 9.4.2).

10. Геометрични приложения на определения интеграл

10.1. Дължина на дъга на крива

10.1.1. Понятие за проста крива. Нека в сегмента $[\alpha, \beta]$ са зададени две непрекъснати функции φ и ψ.

Ще дадем определение за проста равнинна крива.

Определение. *Множеството $\{M\}$ от всички точки M, координатите на които се определят с уравненията*

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t); \; \alpha \leqq t \leqq \beta, \tag{10.1}$$

се нарича ***проста равнинна крива*** *L, ако на различни стойности на параметъра t от $[\alpha, \beta]$ отговарят различни точки от множеството $\{M\}$.*

Всяка точка от множеството $\{M\}$, определящо проста равнинна крива, се нарича точка на тази крива, като точките, отговарящи на стойностите α и β на параметъра t, се наричат краища на простата крива.

При това се казва, че „уравненията (10.1) определят проста равнинна крива L“ или „проста равнинна крива L, параметризирана с уравненията (10.1)“.

Пример за проста крива е графиката на полуокръжност с радиус r, лежаща в горната полуравнина с център началото на координатната система:

$$x = r\cos t, \; y = r\sin t \text{ при } 0 \leqq t \leqq \pi.$$

По-общ пример за проста крива е графиката на непрекъснатата в сегмента $[a, b]$ функция f, която може да се параметризира по правилото

$$x = t, \; y = f(t) \text{ при } t \in [a, b].$$

Ще отбележим, че простите криви не изчерпват цялото множество на кривите, които могат да бъдат определени с уравненията (10.1).

В следващата точка ще разгледаме по-общи криви, които се определят с тези уравнения.

Забележка 1. Една и съща проста крива L може да се параметризира по различни начини. Целесъобразно е да се разглеждат само онези параметризации, които се получават от дадена параметризация чрез представяне на параметъра t като непрекъсната, строго монотонна функция на друг параметър s. При такива преобразувания на параметъра се запазва редът, в който следват точките на кривата L.

Забележка 2. Нека L_1 и L_2 са две прости криви и краищата на L_1 съвпадат с краищата на L_2, а всички останали точки на кривите L_1 и L_2 са различни. Кривата L, получена от обединението на кривите L_1 и L_2, се нарича проста затворена крива.

10.1.2. Понятие за параметризуема крива. В математическия анализ често се налага да се разглеждат криви, които не са прости, например криви, имащи точка на самопресичане или цели участъци на съвпадане. Във връзка с това се въвежда понятието параметризуема крива.

Ще смятаме, че множеството $\{t\}$ е или сегмент, или полусегмент, или интервал, или числовата права, или отворена, или затворена полуправа. *Ще казваме, че крайната или безкрайната система от сегменти* $\{[t_{i-1}, t_i]\}$ ***е деление на множеството*** $\{t\}$, *ако, първо, обединението на тези сегменти дава цялото множество* $\{t\}$ *и, второ, общи точки на два сегмента могат да бъдат само техните краища.*

Примери:

1. Системата от сегменти $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$ е очевидно деление на сегмента $[0, 1]$.

2. Системата от сегменти $\{[n-1, n]\}$, където $n=1, 2, 3, \dots$, е деление на полуправата $[0, +\infty)$.

3. Системата от сегменти $\{[n-1, n]\}$, където n приема всички цели стойности, очевидно дели числовата права.

Нека множеството $\{t\}$ е едно от изброените по-горе множества, а функциите φ и ψ са непрекъснати в това множество. Ще дадем следното определение.

Определение. *Ще казваме, че уравненията*

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t) \tag{10.2}$$

задават ***параметризуемата крива*** L, *ако съществува такава система от сегменти* $\{[t_{i-1}, t_i]\}$, *деляща множеството* $\{t\}$, *че за стойности на* t *от всеки сегмент системата уравнения* (10.2) *да определя проста крива.*

Между точките на кривата L може да се въведе известна наредба. Нека точката M_1 съответствува на стойност на параметъра t_1, а точката M_2 — на стойност t_2.

Казваме, че точката M_1 ***предшествува*** *точката* M_2 (което записваме $M_1 \prec M_2$), *ако* $t_1<t_2$.

Ще отбележим, че точките, отговарящи на различни стойности на параметъра, се считат винаги различни.

По такъв начин параметризуемата крива може да се разглежда като обединение на прости криви, при което тези прости криви се пробягват от точка M, координатите на която се определят с уравненията (10.2), когато параметърът t пробягва множеството $\{t\}$, като расте монотонно.

Забележка 1. Простата крива може да се разглежда като частен случай на параметризуема крива. В този случай системата от сегменти, деляща сегмента $[\alpha, \beta]$, се състои от един сегмент, а именно от сегмента $[\alpha, \beta]$.

Забележка 2. За параметризуема крива, определена с уравненията (10.2), се казва също така, че е параметризирана с помощта на уравненията (10.2). Една и съща крива L може да се параметризира по различни начини. Ще разглеждаме всички възможни параметризации на кривата L, които се получават от произволна дадена параметризация чрез представяне на параметъра t като непрекъсната строго растяща функция на друг параметър s. Само при такива преобразувания на параметъра се запазва наредбата на точките на кривата L.

Забележка 3. Понятието ***пространствена крива*** се въвежда съвсем аналогично. Както при равнинна проста крива, пространствена проста крива е множеството $\{M\}$ от точки на пространството с координати x, y, z, които се определят от уравненията

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\theta(t);\ \alpha \leqq t \leqq \beta, \tag{10.3}$$

при условие, че функциите φ, ψ, θ са непрекъснати в сегмента $[\alpha, \beta]$ и че на различни стойности на параметъра t отговарят различни точки на множеството $\{M\}$.

Като използваме понятието проста пространствена крива и понятието деление на множеството $\{t\}$ на изменение на параметъра, както и в равнинния случай, се дава определение за параметризуема пространствена крива.

Примери:

1. Нека равнинната крива L е зададена с уравненията

$$x=\cos t,\ y=\sin t;\ 0 \leqq t \leqq 3\pi.$$

Очевидно сегментът $[0, 3\pi]$ може да се раздели на сегментите $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, като за стойности на t от всеки от тези сегменти горните уравнения определят проста крива, а именно полуокръжност. В дадения случай кривата L представлява окръжност, в която полуокръжността, лежаща в горната полуравнина, се изминава два пъти.

2. Уравненията

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=t;\ -\infty<t<\infty,$$

задават простата пространствена крива, наречена винтова линия.

10.1.3. Дължина на дъга на крива. Понятие за ректифицируема крива. Ще въведем понятието дължина на дъга на параметризуема крива и ще разгледаме някои свойства на криви, които имат дължина (такива криви се наричат ректифицируеми).

Ще наричаме ***права линия*** *кривата, определена с параметричните уравнения* $x=at+b$, $y=ct+d$. Константите a, b, c, d могат да се изберат така, че правата да минава през две дадени точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Частта от правата, заключена между точките M_1 и M_2, се нарича отсечка, съединяваща тези точки, а съвкупност от краен брой свързани една с друга отсечки се нарича начупена линия.

Нека кривата L се представя с уравненията

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t);\ t\in[\alpha, \beta].$$

Нека освен това T е произволно деление на сегмента $[\alpha, \beta]$ с точките $\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$. Означаваме с $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_n$ съответните точки от кривата L, т. е. точките с координати $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $M_1(\varphi(t_1), \psi(t_1))$, $M_2(\varphi(t_2), \psi(t_2))$, $\cdots$, $M_n(\varphi(t_n), \psi(t_n))$. Начупената линия $l(t_i)=M_0M_1M_2\cdots M_n$ ще наричаме начупена линия, вписана в кривата L и отговаряща на делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$. Дължина $|l_i|$ на отсечката $l_i=M_{i-1}M_i$ от тази начупена линия е разстоянието между точките $M_{i-1}(\varphi(t_{i-1}), \psi(t_{i-1}))$ и $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$. Затова

$$|l_i|=((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)^{1/2},$$

а дължината $|l|$ на цялата начупена линия $l=M_0M_1M_2\cdots M_n$ е

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}|l_i|=\sum_{i=1}^{n}((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)^{1/2}.$$

Определение. *Кривата L се нарича* ***ректифицируема,*** *ако множеството $\{|l|\}$ от дължините на вписаните в кривата L начупени линии $l=l(t_i)$, отговарящи на всички възможни деления T на сегмента $[\alpha, \beta]$, е ограничено. При това точната горна граница на множеството $\{|l|\}$ се нарича* ***дължина на дъгата*** *на кривата L и се означава със символа $|L|$.*

От това определение се вижда, че дължината на кривата L е винаги положително число.

Забележка 1. Съществуват неректифицируеми криви (вж. допълнението към тази глава).

Ще докажем следното помощно твърдение:

Лема. *Нека $|l_0|$ е дължина на начупена линия, вписана в кривата L и отговаряща на делението T_0 на сегмента $[\alpha, \beta]$, а $|l_1|$ е дължина на начупена линия, вписана в кривата L и отговаряща на делението T_1, получено от делението на T_0 посредством добавянето на една или няколко нови точки. Тогава $|l_0|\leq|l_1|$.*

Доказателство. Достатъчно е да разгледаме случая, когато към делението T_0 е добавена само една точка γ. В този случай начупената линия, отговаряща на делението T_0, се различава от начупената линия, отговаряща на делението T_1, само с това, че една отсечка $M_k M_{k+1}$ от начупената линия, отговаряща на делението T_0, се заменя с две отсечки M_kN и NM_{k+1} на начупената линия, отговаряща на делението T_1 (всички останали отсечки в начупените линии, отговарящи на деленията T_0 и T_1, са едни и същи). Тъй като $|M_kM_{k+1}|\leq|M_kN|+|NM_{k+1}|$, то $|l_0|\leq|l_1|$. □

Ще приведем някои свойства на ректифицируемите криви:

1°. *Ако кривата L е ректифицируема, то дължината на дъгата ѝ не зависи от параметризацията на тази крива.*

Наистина нека имаме две параметризации на кривата L, а t и s са съответните параметри, определени съответно на сегментите $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$. Тъй като t е строго монотонна и непрекъсната функция на s, а s е строго монотонна и непрекъсната функция на t, то на всяко деление T на сегмента $[\alpha, \beta]$ съответствува определено деление P на сегмента $[a, b]$ и обратно.

Очевидно е, че вписаните в L начупени линии, отговарящи на съответни деления на сегментите $[\alpha, \beta]$ и $[a, b]$, са тъждествени и затова дължините им са равни. Но тогава и точните им горни граници ще бъдат равни, т. е. дължината на дъгата на кривата L при две различни параметризации ще бъде една и съща.

2°. *Ако ректифицируемата крива L е разделена с помощта на краен брой точки $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_n$ на краен брой криви L_i, като точките $M_0, M_1, M_2, \cdots, M_n$ съответствуват на стойностите $t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n$ на параметъра t и $\alpha=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=\beta$, то всяка от кривите L_i е ректифицируема и сумата от дължините $|L_i|$ на всичките криви L_i е равна на дължината $|L|$ на кривата L.*

Очевидно достатъчно е това свойство да се докаже за случая, когато кривата L е разделена на две криви L_1 и L_2 от точката C. Да означим с γ стойността на параметъра t, на която отговаря точката C. Тогава точките от кривата L_1 съответствуват на стойности на параметъра t от сегмента $[\alpha, \gamma]$, а точките от кривата L_2 съответствуват на стойности на параметъра t от сегмента $[\gamma, \beta]$. Нека

T_1 и T_2 са произволни деления на тези сегменти, а T е деление на сегмента $[\alpha, \beta]$, получено от обединението на деленията T_1 и T_2. Ако $|l_1|, |l_2|, |l|$, са дължини на начупените линии, вписани в кривите L_1, L_2 и L и отговарящи на деленията T_1, T_2 и T на сегментите, то очевидно

$$(10.4) \qquad |l_1|+|l_2|=|l|.$$

Тъй като числата $|l_1|, |l_2|$ и $|l|$ са положителни, то от равенството (10.4) и ректифицируемостта на кривата L следва, че множествата от дължините на вписаните в кривите L_1 и L_2 начупени линии, отговарящи на всички възможни деления на сегментите $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, са ограничени, т. е. кривите L_1 и L_2 са ректифицируеми. От равенството (10.4) и от определението за дължина на дъга на крива следва, че дължините $|L_1|$, $|L_2|$ и $|L|$ на дъгите на кривите L_1, L_2 и L удовлетворяват неравенството

$$(10.5) \qquad |L_1|+|L_2|\leqq|L|.$$

Действително от равенството (10.4) следва, че за произволни деления T_1 и T_2 на сегментите $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$ е изпълнено неравенството $|l_1|+|l_2|\leqq|l|$. От това неравенство и от определението за точна горна граница се получава неравенството (10.5).

Ще покажем, че в неравенството (10.5) знакът за неравенство може да се замени със знак за равенство. Да допуснем противното, т. е. че $|L_1|+|L_2|<|L|$. Тогава числото

$$(10.6) \qquad |L|-(|L_1|+|L_2|)=\varepsilon$$

е положително. От определението за дължината $|L|$ на дъга на кривата L следва, че за положителното число ε може да се намери такова деление T_0 на сегмента $[\alpha, \beta]$, че дължината $|l_0|$ на начупената линия l_0, вписана в кривата L и отговаряща на това деление, да удовлетворява неравенството $|L|-|l_0|<\varepsilon$. Да добавим към делението T_0 точката γ и да означим полученото деление с T. Тогава съгласно доказаната лема дължината $|l|$ на начупената линия, отговаряща на делението T, още повече ще удовлетворява неравенството $|L|-|l|<\varepsilon$. Тъй като делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$ е образувано от обединението на някакви деления T_1 и T_2 на сегментите $[\alpha,\gamma]$ и $[\gamma, \beta]$, то дължините $|l_1|$ и $|l_2|$ на кривите, отговарящи на тези деления, ще удовлетворяват съотношението (10.4). Затова е изпълнено неравенството $|L|-(|l_1|+|l_2|)<\varepsilon$. Тъй като $|l_1|+|l_2|\leqq|L_1|+|L_2|$, то още повече ще бъде в сила неравенството $|L|-(|L_1|+|L_2|)<\varepsilon$. Но това неравенство противоречи на неравенството (10.6). Полученото противоречие доказва, че предположението $|L_1|+|L_2|<|L|$ не е вярно, и следователно $|L_1|+|L_2|=|L|$. □

Забележка 2. Понятието дължина на дъга на пространствена крива, зададена параметрично с уравненията (10.3), се въвежда точно както дължина на дъга на равнинна крива. Както и в равнинния случай, се разглежда дължина $|l|$ на начупена линия, вписана в кривата L; при това

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2+(\theta(t_i)-\theta(t_{i-1}))^2)^{1/2}.$$

Пространствената крива L, определена от уравненията (10.3), *се нарича* ***ректифицируема,*** *ако множеството $\{|l|\}$ на дължините на начупените линии l, вписани в тази крива, е ограничено. Точната горна граница $|L|$ на това множество се нарича дължина на дъгата на L.*

Пространствените ректифицируеми криви притежават свойствата 1° и 2°. Доказателствата на тези свойства са аналогични на доказателствата за равнинни криви.

10.1.4. Критерии за ректифицируемост на крива. Пресмятане дължината на дъга на крива. Ще дадем достатъчно условие за ректифицируемост на крива и формула за пресмятане дължината на дъга.

Ще употребяваме следната терминология:

1°. Ще казваме, че функцията f има в сегмента $[\alpha, \beta]$ непрекъсната първа производна, ако производната ѝ f' съществува и е непрекъсната във всяка вътрешна точка на този сегмент и ако освен това съществуват крайните граници

$$\lim_{t\to\alpha+0} f'(t) \text{ и } \lim_{t\to\beta-0} f'(t).^*$$

При това определение функцията $f'(t)$ ще бъде непрекъсната в сегмента $[\alpha, \beta]$, ако стойностите на тази функция в краищата на сегмента положим равни съответно на границите

$$\lim_{t\to\alpha+0} f'(t) \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\beta-0} f'(t).$$

2°. Ще казваме, че функцията f има в сегмента $[\alpha, \beta]$ ограничена първа производна, ако f' съществува и удовлетворява за всички вътрешни точки на сегмента $[\alpha, \beta]$ неравенството $|f'(t)|\leqq M$, където M е константа.

* Ако в условията на определение 1° се поиска допълнително съществуването на дясна производна $f'(\alpha+0)$ и лява производна $f'(\beta-0)$, то според 6.4.3 може да се твърди, че

$$\lim_{x\to\alpha+0} f'(x)=f'(\alpha+0), \quad \lim_{x\to\beta-0} f'(x)=f'(\beta-0).$$

Теорема 10.1. *Нека функциите φ и ψ са непрекъснати и имат непрекъснати първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$. Тогава кривата L, определена с параметричните уравнения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ при $t\in[\alpha, \beta]$, е ректифицируема и дължината $|L|$ на дъгата ѝ се пресмята по формулата*

$$|L|=\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi'^2(t)+\psi'^2(t))^{1/2}\,dt. \tag{10.7}$$

Доказателство. Най-напред ще докажем, че кривата L е ректифицируема. Да разгледаме формулата за дължината $|l|$ на начупената линия l, вписана в кривата L и отговаряща на произволно деление на сегмента $[\alpha, \beta]$:

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}((\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}))^2+(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1}))^2)^{1/2}.$$

За всяка от функциите φ и ψ са изпълнени всички условия на теорема 6.4 на Лагранж във всеки от частичните сегменти $[t_{i-1}, t_i]$ (при $i=1, 2, 3, \cdots, n$). Според тази теорема между t_{i-1} и t_i съществуват такива точки ξ_i и η_i, че са изпълнени равенствата

$$\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})=\varphi'(\xi_i)\,\Delta t_i,\quad \psi(t_i)-\psi(t_{i-1})=\psi'(\eta_i)\,\Delta t_i,$$

където $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$. Следователно

$$|l|=\sum_{i=1}^{n}(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i))^{1/2}\,\Delta t_i. \tag{10.8}$$

Според условията на теоремата функциите φ и ψ имат в сегмента $[\alpha, \beta]$ непрекъснати и затова ограничени първи производни, т. е. за всяка вътрешна точка t на сегмента $[\alpha, \beta]$ са изпълнени неравенствата $|\varphi'(t)|\leqq M$, $|\psi'(t)|\leqq M$. Затова от формула (10.8) следва

$$0<|l|\leqq\sum_{i=1}^{n}(M^2+M^2)^{1/2}\Delta t_i=\sqrt{2}\,M\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i=\sqrt{2}\,(\beta-\alpha)\,M.$$

По такъв начин множеството $\{|l|\}$ от дължините на вписаните в кривата L начупени линии, отговарящи на всички възможни деления T на сегмента $[\alpha, \beta]$, е ограничено и по определение кривата L е ректифицируема.

Г. С

Ще докажем сега, че дължината $|L|$ на кривата L се пресмята по формулата (10.7).

Ще разгледаме следната интегрална сума:

$$\sigma(t_i, \xi_i)=\sum_{i=1}^{n}(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i))^{1/2}\,\Delta t_i,$$

отговаряща на делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$ и избора на междинните точки ξ_i, определено във формулата (10.8). Нека d е диаметърът на делението T, т. е. $d=\max\{\Delta t_i:\ 1\leq i\leq n\}$. Ще докажем, че за всяко положително число ε може да се намери такова $\delta>0$, че при $d<\delta$ да е изпълнено неравенството

$$||l|-I|<\varepsilon/2, \tag{10.9}$$

където I е границата на интегралните суми $\sigma(t_i, \xi_i)$ при $d\to 0$, т. е. $I=\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi'^2(t)+\psi'^2(t))^{1/2}\,dt$. С други думи, ще покажем, че може да се избере деление T с толкова малък диаметър, че дължината $|l|$ на начупената линия l, вписана в кривата L и отговаряща на това деление T, да се различава от интеграла I с величина, по-малка от някое отнапред зададено число $\varepsilon/2$. Ще отбележим, че*

$$|(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i))^{1/2}-(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i))^{1/2}|\leqq|\psi'(\eta_i)-\psi'(\xi_i)|\leqq M_i-m_i,$$

където M_i и m_i са точните граници на функцията $\psi'(t)$ в частичния сегмент $[t_{i-1}, t_i]$. Затова

$$||l|-\sigma|=\left|\sum_{i=1}^{n}((\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i))^{1/2}-(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i))^{1/2})\Delta t_i\right| \tag{10.10}$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}|(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\eta_i))^{1/2}-(\varphi'^2(\xi_i)+\psi'^2(\xi_i))^{1/2}|\,\Delta t_i$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta t_i=S-s,$$

* Първото от тези неравенства следва от оценката

$$|(a^2+b_1^2)^{1/2}-(a^2+b^2)^{1/2}|=\frac{|b_1^2-b^2|}{(a^2+b_1^2)^{1/2}+(a^2+b^2)^{1/2}}\leq\frac{|b_1-b|\cdot|b_1+b|}{|b_1|+|b|}\leq|b_1-b|,$$

вярна за произволни числа a, b, b_1.

където S и s са съответно голямата и малката сума на функцията ψ' за делението T на сегмента $[\alpha, \beta]$.

Функциите $(\varphi'^2+\psi'^2)^{1/2}$ и ψ' са непрекъснати, а следователно и интегруеми в сегмента $[\alpha, \beta]$, тъй като по условие $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ са непрекъснати в сегмента $[\alpha, \beta]$.

От определението за интегруемост и от основната теорема на 9.3 следва, че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова $\delta>0$, че при диаметър на делението $d<\delta$ да са изпълнени неравенствата

(10.11) $$|\sigma(t_i, \xi_i)-I|<\varepsilon/4, \quad S-s<\varepsilon/4.$$

Затова при $d<\delta$ съгласно (10.10) и (10.11) са в сила неравенствата

$$||l|-I|=||l|-\sigma+\sigma-I|\leq||l|-\sigma|+|\sigma-I|<\varepsilon/4+\varepsilon/4=\varepsilon/2,$$

с което верността на (10.9) е доказана.

Ще докажем сега, че сред всички възможни начупени линии l, чиято дължина $|l|$ удовлетворява неравенството (10.9), има начупени линии, дължината на които се различава от дължината $|L|$ на дъгата на кривата L с по-малко от $\varepsilon/2$.

Действително $|L|$ е точната горна граница на множеството $\{|l|\}$ от дължините на начупените линии l, вписани в кривата L и отговарящи на всички възможни деления на сегмента $[\alpha, \beta]$. Затова съществува такова деление T^*, че дължината $|l^*|$, съответствуваща на начупената линия l^* на това деление, удовлетворява неравенството

(10.12) $$0\leq|L|-|l^*|<\varepsilon/2.$$

Да раздробим делението T^*, като прибавим към него нови точки на деление така, че да се получи ново деление T с диаметър d, по-малък от δ. При това, както показахме, дължината $|l|$ на начупената линия l, отговаряща на това деление T, удовлетворява неравенството (10.9). Тъй като всички върхове на начупената линия, отговаряща на делението T^*, са също върхове и на начупената линия, отговаряща на делението T, то съгласно доказаната в 10.1.3 лема $0<|l^*|\leq|l|\leq|L|$. Затова неравенствата (10.12) ни дават право да твърдим, че

(10.13) $$0\leq|L|-|l|<\varepsilon/2.$$

И така доказахме, че в множеството на начупените линии $\{l\}$, дължината на които удовлетворява неравенството (10.9), има начупени линии, дължините на които удовлетворяват и неравенството (10.12). От неравенствата (10.9) и (10.13) получаваме

$$||L|-I|<\varepsilon.$$

Понеже ε е произволно положително число, то $|L|=I$.□

Забележка 1. Ако функциите φ и ψ са непрекъснати и имат ограничени първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$, то кривата L, определена от уравненията $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, е ректифицируема.

Действително в хода на доказателството на теорема 10.1 установихме, че ако функциите φ и ψ са непрекъснати в $[\alpha, \beta]$, то при условие, че първите им производни са ограничени в $[\alpha, \beta]$, дължините $|l|$ на начупените линии, вписани в кривата L и отговарящи на възможните деления T на сегмента $[\alpha, \beta]$, са ограничени.

Забележка 2. Формулата (10.7) за пресмятане дължината на дъга е в сила, ако функциите φ и ψ са непрекъснати, а производните им φ' и ψ' са само интегруеми в сегмента $[\alpha, \beta]$. Действително от интегруемостта на тези производни следва тяхната ограниченост и затова съгласно забележка 1 кривата L е ректифицируема. За извеждането на неравенствата (10.10), (10.11), а следователно и на неравенството (10.9) са достатъчни непрекъснатостта на φ и ψ и интегруемостта на φ' и ψ' в сегмента $[\alpha, \beta]$, тъй като от тях съгласно следствието на теорема 9.4 следва интегруемостта на функцията $(\varphi'^2+\psi'^2)^{1/2}$ в сегмента $[\alpha, \beta]$. Останалите разсъждения са същите, както при доказателството на теорема 10.1.

Забележка 3. Ако кривата L е графика на функцията f, която е непрекъсната и има непрекъсната производна f' в сегмента $[a, b]$, то кривата L е ректифицируема и дължината ѝ $|L|$ може да се намери по формулата

(10.14) $$|L|=\int_a^b (1+f'^2(x))^{1/2}\,dx.$$

Действително графиката на разглежданата функция е крива, определена параметрично с уравненията $x=t$, $y=f(t)$; $a\leq t\leq b$. При това всички условия на теорема 10.1 са изпълнени. Като положим във формула (10.7) $\varphi(t)=t$, $\psi(t)=f(t)$ и сменим интеграционната променлива t с x, получаваме формулата (10.14).

Забележка 4. Ако кривата L се определя с полярно уравнение $z=r(\theta)$, $\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$, и функцията r е непрекъсната с непрекъсната производна в сегмента $[\theta_1, \theta_2]$, то кривата L е ректифицируема и

(10.15) $$|L|=\int_{\theta_1}^{\theta_2} (r^2(\theta)+r'^2(\theta))^{1/2}\,d\theta.$$

За доказателството трябва да използваме формулите за преминаване от полярни координати в декартови $x=r(\theta)\cos\theta$, y

$=r(\theta)\sin\theta$. По такъв начин кривата L се определя от параметричните уравнения $\varphi=r(\theta)\cos\theta$, $\psi=r(\theta)\sin\theta$; $\theta\in[\theta_1, \theta_2]$, при което са изпълнени всички условия на теорема 10.1. Прости пресмятания довеждат до формулата (10.15).

Забележка 5. Ако се разглежда пространствена параметризуема крива L, зададена с уравненията $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\theta(t)$, и функциите φ, ψ, θ са непрекъснати и имат непрекъснати производни в $[\alpha, \beta]$, то кривата L е ректифицируема и дължината на дъгата ѝ $|L|$ се пресмята по формулата

(10.16) $$|L|=\int_\alpha^\beta(\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\theta'^2(t))^{1/2}\,dt.$$

Доказателството е аналогично на доказателството на теорема 10.1.

Забележка 6. Ако функциите φ, ψ, θ са непрекъснати и имат ограничени първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$, то кривата L, определена от уравненията (10.3), е ректифицируема. Ако при това производните на тези функции са интегруеми в сегмента $[\alpha, \beta]$, то дължината $|L|$ на дъгата на кривата L може също така да се пресметне по формулата (10.16) (вж. забележки 1 и 2).

10.1.5. Диференциал на дъга. Нека функциите $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ са непрекъснати и имат непрекъснати първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$. В такъв случай променливата дължина на дъгата $L(t)$, отговаряща на стойности на параметъра от сегмента $[\alpha, t]$, съгласно теорема 10.1 се представя във вида

(10.17) $$L(t)=\int_\alpha^t(\varphi'^2(\tau)+\psi'^2(\tau))^{1/2}\,d\tau.$$

Подинтегралната функция в дясната страна на формула (10.17) е непрекъсната, затова функцията L е диференцируема и

$$L'(t)=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}.$$

Като повдигнем това равенство на квадрат и го умножим с $(dt)^2$, ще имаме

(10.18) $$(L'(t)\,dt)^2=(\varphi'(t)\,dt)^2+(\psi'(t)\,dt)^2.$$

Тъй като $L'(t)\,dt=dL$, $\varphi'(t)\,dt=dx$, $\psi'(t)\,dt=dy$, то от формула (10.18) за ***диференциала dL на дъгата*** на равнинната крива L получаваме

(10.19) $$dL^2=dx^2+dy^2.$$

Ако се разглежда пространствена крива, определена с уравненията (10.3), то при условие за непрекъснатост на функциите φ, ψ и θ и на техните първи производни в сегмента $[\alpha, \beta]$ за ***диференциала dL на дъгата*** на пространствената крива L имаме формулата

(10.20) $$dL^2=dx^2+dy^2+dz^2.$$

Примери:

1. Ще намерим дължината $|L|$ на частта от дъгата на астроидата $x=a\cos^3t$, $y=a\sin^3t$, лежаща в първия квадрант. Тази част, както не е трудно да се види, съответствува на изменение на параметъра t от 0 до $\pi/2$. В разглеждания случай $\varphi'(t)=-3a\cos^2t\sin t$, $\psi'(t)=3a\sin^2t\,.\,\cos t$. Затова по формула (10.7)

$$|L|=\int_0^{\pi/2}(9a^2\cos^4t\,.\,\sin^2t+9a^2\sin^4t\cos^2t)^{1/2}\,dt=\frac{3a}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\,dt=3a/2.$$

2. Ще пресметнем дължината $|L|$ на дъга от параболата $y=ax^2$, $0\leq x\leq 1$. Тъй като $y'=2ax$, то по формула (10.14) получаваме

$$|L|=\int_0^1\sqrt{1+4a^2x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{4a}\ln|2a+\sqrt{1+4a^2}|.$$

3. Ще намерим дължината на дъгата на логаритмичната спирала $r=ae^{b\varphi}$ от точката (φ_0, r_0) до точката (φ, r). По формула (10.15) имаме

$$|L|=\int_{\varphi_0}^{\varphi}(a^2e^{2b\varphi}+a^2b^2e^{2b\varphi})^{1/2}\,d\varphi=(1+b^{-2})^{1/2}(r-r_0).$$

4. Ще намерим дължината на дъга от елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>b$, отчитана от точката $M_0(0, b)$. Разглеждаме параметричното уравнение на елипсата $x=a\sin t$, $y=b\cos t$; $t\in[0,2\pi]$. По формула (10.17) получаваме

(10.21) $$L(t)=\int_0^t(a^2\cos^2\tau+b^2\sin^2\tau)^{1/2}\,d\tau$$

$$=a\int_0^t(1-\varepsilon^2\sin^2\tau)^{1/2}\,d\tau=a\,.\,E(\varepsilon, t).$$

Числото $\varepsilon=(1-b^2/a^2)^{1/2}$ се нарича ексцентрицитет на елипсата

Неопределеният интеграл $\int\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt$, който се анулира при $t=0$, се нарича ***елиптичен интеграл от втори род*** (вж. 8.4). Този интеграл се означава със символа $E(\varepsilon, t)$ и не се изразява с елементарни функции.

10.2 Лице на равнинна фигура

Ще изучим въпроса за определяне и съществуване на лице на равнинна фигура, като под равнинна фигура ще разбираме произволно ограничено множество от точки в равнината.

10.2.1. Понятие за контур на множество и равнинна фигура. Да разгледаме множеството на всички точки в равнината и да фиксираме една от тези точки A.

*Ще наричаме **ε-околност на точка** A множеството от онези точки в равнината, които са разположени вътре в кръг с радиус ε и с център точката A.*

Нека сега $\{M\}$ е произволно множество от точки в равнината.

*Точката M от множеството $\{M\}$ ще наричаме **вътрешна точка** на това множество, ако съществува такова $\varepsilon>0$, че ε-околността на точката M да се съдържа в множеството $\{M\}$.*

*Точка M, непринадлежаща на множеството $\{M\}$, наричаме **външна точка** за множеството $\{M\}$, ако съществува такова $\varepsilon>0$, че ε-околността на точката M да няма обща точка с множеството $\{M\}$.*

*Точката M ще наричаме **контурна точка** на множеството $\{M\}$, ако тази точка не е нито вътрешна, нито външна точка за това множество.*

Ще отбележим, че точката M е контурна точка на множеството $\{M\}$ тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon>0$ в ε-околността на точката M се съдържат както точки от множеството $\{M\}$, така и точки, непринадлежащи на това множество.

Наистина, ако в някоя ε-околност на точката M не се съдържа точка от множеството $\{M\}$ или точка, която не принадлежи на това множество, то точката M ще бъде или външна, или вътрешна точка за множеството $\{M\}$ и няма да бъде контурна за това множество.

*Съвкупността на всички контурни точки на едно множество ще наричаме **контур** на това множество.*

Забележка. За най-простите видове множества $\{M\}$, представляващи част от равнината, заградена с проста затворена крива или с няколко такива криви, въведеното понятие контур на множество съвпада с интуитивната представа за контур. За множества от произволен вид контурът в определения от нас смисъл може да има доста необичаен вид и да не се вмества в интуитивните ни представи за контур. Така за множеството $\{M\}$ от точките на кръга с рационални абсциса и ордината контурът в определения от нас смисъл е целият кръг.

*Ще наричаме множеството $\{M\}$ от точки в равнината **ограничено**, ако съществува кръг, съдържащ всички точки на това множество.*

*Произволно ограничено множество F от точки в равнината ще наричаме **равнинна фигура**.*

Контура на равнинна фигура F ще означаваме със символа ∂F.

10.2.2. Лице на равнинна фигура. За въвеждането на понятието лице на равнинна фигура ще тръгнем от един специален частен вид равнинни фигури — т. нар. многоъгълни фигури.

***Многоъгълна фигура** в равнината ще наричаме множество, съставено от краен брой ограничени многоъгълници, лежащи в тази равнина.*

Известно е понятието ***лице на многоъгълна фигура.*** Лицето на многоъгълна фигура P ще означаваме със символа $\mu(P)$.

Ще напомним, че лицето на многоъгълна фигура е неотрицателно число със следните три свойства:

1° (адитивност). Ако P_1 и P_2 са две многоъгълни фигури без общи вътрешни точки и $P_1\cup P_2$ е обединението на тези фигури, то

$$\mu(P_1\cup P_2)=\mu(P_1)+\mu(P_2). \tag{10.22}$$

2° (инвариантност). Ако многоъгълните фигури P_1 и P_2 са равни помежду си, то

$$\mu(P_1)=\mu(P_2). \tag{10.23}$$

3° (монотонност). Ако многоъгълната фигура P_1 се съдържа в многоъгълната фигура P_2, то $\mu(P_1)\leq\mu(P_2)$.

Свойството монотонност е следствие от свойството адитивност и от това, че лицето е неотрицателно число. Наистина, ако P_1 се съдържа в P_2, то $P_2=P_1\cup(P_2\setminus P_1)$* и тъй като P_1 и $P_2\setminus P_1$ нямат общи вътрешни точки, то съгласно свойството адитивност $\mu(P_2)=\mu(P_1)+\mu(P_2\setminus P_1)$. Остава да отбележим, че $\mu(P_2\setminus P_1)\geqq 0$.

Забележка. Ще подчертаем, че лицето на многоъгълната фигура е естествено да считаме равно на едно и също число независимо от това, дали многоъгълната фигура се разглежда

* При което разликата $P_2\setminus P_1$ на две многоъгълни фигури е също многоъгълна фигура.

със или без контура си. При разглеждане на разликата на две многоъгълни фигури $P_2 \setminus P_1$ може да се условим да считаме, че фигурата P_2 е взета с контура си, а фигурата P_1 — без контура си. При такава договореност разликата ще представлява многоъгълна фигура, взета с контура си.

Ще преминем сега към определението за лице на произволна равнинна фигура F (т. е. на произволно ограничено множество от точки в равнината).

Да разгледаме всички многоъгълни фигури P, съдържащи се в F, и всички многоъгълни фигури Q, съдържащи F.

Фигурите P ще наричаме вписани, а фигурите Q — описани. Числовото множество $\{\mu(P)\}$ от лицата на всички вписани многоъгълни фигури е ограничено отгоре (например от лицето на коя да е описана многоъгълна фигура Q). Числовото множество $\{\mu(Q)\}$ от лицата на всички описани около F многоъгълни фигури Q е ограничено отдолу (например от нулата). Затова съществуват точната горна граница

$$\mu_* = \mu_*(F) = \sup\{\mu(P) \colon P \subset F\} \tag{10.24}$$

на лицата на всички многоъгълни фигури, вписани в F, и точната долна граница

$$\mu^* = \mu^*(F) = \inf\{\mu(Q) \colon Q \supset F\} \tag{10.25}$$

на лицата на всички многоъгълни фигури, описани около F.

Ако в F не може да се впише нито един многоъгълник, то по определение се полага $\mu_* = 0$.

Величината μ_* се нарича ***долна мярка на лицето*** на фигурата F, а μ^* — ***горна мярка на лицето*** на тази фигура. От това, че лицето на всяка вписана фигура е не по-голямо от лицето на всяка описана фигура, следва

$$\mu_*(F) \leqq \mu^*(F).$$

Определение 1. *Равнинната фигура F се нарича **измерима** (или **имаща лице**), ако горната мярка на лицето μ^* на тази фигура съвпада с долната мярка на лицето ѝ μ_*. При това числото $\mu = \mu(F) = \mu^* = \mu_*$ се нарича **лице** на фигурата F.*

Ясно е, че всяка многоъгълна фигура F е измерима в смисъла на даденото определение и лицето ѝ $\mu(F) = \mu^*(F) = \mu_*(F)$.

По такъв начин разширихме понятието лице на многоъгълници върху един по-широк клас от фигури.

Запазването на свойствата адитивност, инвариантност и монотонност ще бъде доказано по-нататък.

Ще започнем с доказателството на следния критерий за измеримост на равнинна фигура:

Теорема 10.2. *За да бъде равнинната фигура F измерима, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да съществуват описана около F многоъгълна фигура Q и вписана в F многоъгълна фигура P, за които*

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon. \tag{10.26}$$

Доказателство. *Необходимост.* Нека фигурата F е измерима, т. е. $\mu^* = \mu_*$. Според определението за точни граници (10.22) и (10.23) за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват вписана многоъгълна фигура P и описана многоъгълна фигура Q, такива, че

$$\mu_* - \varepsilon/2 < \mu(P) \leqq \mu_*, \quad \mu^* \leqq \mu(Q) < \mu^* + \varepsilon/2.$$

От тези неравенства и от $\mu^* = \mu_*$ заключаваме, че $\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon$. □

Достатъчност. Нека за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват многоъгълни фигури Q и P със свойствата, дадени във формулировката на теоремата. Тогава от неравенството (10.26) и от съотношенията $\mu(P) \leqq \mu_* \leqq \mu^* \leqq \mu(Q)$ получаваме, че

$$0 \leqq \mu^* - \mu_* \leqq \mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

Тъй като ε е произволно положително число, от условието $0 \leqq \mu^* - \mu_* < \varepsilon$ следва, че $\mu^* = \mu_*$. □

Теорема 10.2 допуска просто, но важно обобщение: във формулировката ѝ вместо описана и вписана многоъгълна фигура Q и P могат да се вземат произволни описана и вписана измерима равнинна фигура Q и P. В сила е следната теорема:

Теорема 10.2[1]. *За измеримостта на равнинната фигура F е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon > 0$ да съществуват измерима равнинна фигура Q, съдържаща F, и измерима равнинна фигура P, съдържаща се в F, за които*

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon.$$

Не е нужно да се доказва необходимостта, тъй като многоъгълните фигури Q и P са измерими.

Ще докажем достатъчността. Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и построяваме измерими равнинни фигури Q и P, първата от които съдържа F, а втората се съдържа в F, такива, че

$$\mu(Q) - \mu(P) < \varepsilon/2. \tag{10.26'}$$

Тъй като Q и P са измерими равнинни фигури, то съществуват многоъгълна фигура $\hat{Q}$, съдържаща Q, и многоъгълна фигура $\hat{P}$, съдържаща се в P, за които

$$\mu(\hat{Q}) - \mu(Q) < \varepsilon/4, \quad \mu(P) - \mu(\hat{P}) < \varepsilon/4.$$

От двете неравенства и от (10.26′) следва, че $\mu(\hat{Q}) - \mu(\hat{P}) < \varepsilon$. Но понеже многоъгълната фигура $\hat{Q}$ съдържа F, а многоъгълната фигура $\hat{P}$ се съдържа в F, то фигурата F е измерима съгласно теорема 10.2. □

Ще установим още една еквивалентна формулировка на теорема 10.2. Нека F е произволна равнинна фигура, Q е многоъгълна фигура, взета с контура си и съдържаща фигурата F, а P е многоъгълна фигура, взета без контура си и съдържаща се във фигурата F. Тогава разликата $Q\setminus P$ е многоъгълна фигура, взета с контура си и съдържаща всички точки от контура ∂F на фигурата F.*

От адитивността на лицето на многоъгълна фигура следва равенството $\mu(Q\setminus P)=\mu(Q)-\mu(P)$, а от него — че неравенството (10.26) във формулировката на теорема 10.2 може да се запише във вида

$$\mu(Q\setminus P)<\varepsilon. \tag{10.26''}$$

Определение 2. *Множество от точки в равнината ще наричаме* ***множество с мярка нула,*** *ако се съдържа в многоъгълна фигура с произволно малко лице.*

Неравенството (10.26″) и това, че многоъгълната фигура $Q\setminus P$ съдържа всички точки на контура ∂F на равнинната фигура F, дават право да се изкаже теорема 10.2 по следния начин:

Теорема 10.2″. *Равнинната фигура F е измерима тогава и само тогава, когато контурът ѝ ∂F има мярка нула.*

Необходимостта е очевидна.

Ще се спрем на доказателството на достатъчността. Вписваме равнинната фигура F в квадрат E със страни, успоредни на координатните оси, и разделяме квадрата на елементарни квадрати със страна h с помощта на прави, успоредни на координатните оси. Това разделяне на квадрата ще наричаме мрежа със стъпка h.

Ще докажем най-напред, че ако контурът ∂F на фигурата F се съдържа в многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, то при достатъчно малка стъпка h на мрежата контурът ∂F на фигурата F се съдържа в обединението на елементарни квадрати от мрежата с общо лице, ненадминаващо 32ε.

Наистина достатъчно е да отбележим, че всяка многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, е сума от краен брой триъгълници без общи вътрешни точки; всеки триъгълник е равен на обединението на два правоъгълни триъгълника (без общи вътрешни точки); всеки правоъгълен триъгълник се съдържа в два пъти по-голям по лице правоъгълник; всеки правоъгълник се съдържа в обединението на краен брой квадрати, сумата от лицата на които не е по-голяма от два пъти лицето на правоъгълника; всеки квадрат се съдържа в два пъти по-голям по лице квадрат със страни, успоредни на координатните оси.

И така всяка многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, се съдържа в обединението на краен брой квадрати със страни, успоредни на координатните оси, и с общо лице, по-малко от 8ε.

От тези краен брой квадрати избираме квадрата с най-малка страна (ако има няколко такива квадрата, избираме един от тях) и вземаме за стъпка h на мрежата половината от дължината на страната на този квадрат.

При този избор на h всеки от описаните квадрати (със страни, успоредни на координатните оси) ще се съдържа в обединението на елементарни квадрати на мрежата, общото лице на които не надминава учетвореното лице на дадения квадрат.

Затова всяка многоъгълна фигура с лице, по-малко от ε, се съдържа в обединението на елементарни квадрати от мрежата, общото лице на които е по-малко от 32ε.

Следователно, ако контурът ∂F на равнинната фигура F има лице, равно на нула, то за всяко $\varepsilon>0$ при посочения избор на стъпката h на мрежата целият контур ∂F ще се съдържа в обединението от елементарни квадрати на мрежата, общото лице на които е по-малко от 32ε.

За да завършим доказателството, е достатъчно да отбележим, че обединението на всички елементарни квадрати, които съдържат само вътрешни точки на фигурата F, е многоъгълна фигура, съдържаща се в F, а обединението на тази фигура P с всички елементарни квадрати на мрежата, съдържащи точки от контура ∂F на фигурата F, е многоъгълна фигура Q, съдържаща фигурата F, и $\mu(Q)-\mu(P)<32\varepsilon$. □

Като използваме тази теорема, ще установим измеримостта на широк клас равнинни фигури.

Лема. *Всяка ректифицируема крива има лице, равно на нула.*

Доказателство. Нека L е ректифицируема крива, а $|L|$ е дължината ѝ. Разделяме тази крива с помощта на $n+1$ точки на части с дължина $|L|/n$. Вземаме всяка от тези $n+1$ точки за център на квадрат със страна $2|L|/n$. Сумата от тези квадрати е многоъгълна фигура, описана около кривата L, а лицето на тази многоъгълна фигура не надминава сумата от лицата на съставящите я квадрати, т. е. числото $4|L|^2(n+1)n^{-2}$. Тъй като $|L|$ е фиксирано, а n може да се избере произволно голямо, то числото

* Следва от това, че всяка вътрешна точка на многоъгълната фигура P е вътрешна точка на F, а всяка външна точка на многоъгълната фигура Q е външна точка на F. Достатъчно е да вземем пред вид, че разликата $Q\setminus P$ съдържа всички точки от равнината с изключение на външните точки на Q и вътрешните точки на P.

$4|L|^2(n+1)n^{-2}$ може да се направи по-малко от всяко отнапред избрано число $\varepsilon>0$. Следователно кривата L може да се включи в многоъгълна фигура с произволно малко лице. □

От тази лема и от теорема 10.2″ следва теоремата:

Теорема 10.3. *Всяка равнинна фигура, чийто контур се състои от една или няколко ректифицируеми криви, е измерима.*

Ще покажем сега, че въведеното понятие лице на равнинна фигура притежава свойствата адитивност (вж. (10.22)), инвариантност (вж. (10.23)) и монотонност. Ще се убедим най-напред в адитивността на лицето. Нека F_1 и F_2 са измерими фигури без общи вътрешни точки и F е обединението им. Тогава F е измерима и

$$\mu(F)=\mu(F_1)+\mu(F_2). \tag{10.27}$$

Измеримостта на фигурата F следва от теорема 10.2″ и от това, че контурът ѝ ∂F е съставен от множества с лица, равни на нула, тъй като ∂F е част от обединението на контурите ∂F_1 и ∂F_2 на фигурите F_1 и F_2. (Очевидно всяка част на множество с лице, равно на нула, също има лице, равно на нула.)

Ще докажем верността на равенството (10.27). Разглеждаме многоъгълните фигури P_1 и P_2, вписани съответно в F_1 и F_2, и многоъгълните фигури Q_1 и Q_2, описани съответно около F_1 и F_2. Фигурите P_1 и P_2 съставят многоъгълна фигура P и нямат общи вътрешни точки. Затова съгласно (10.24)

$$\mu(P)=\mu(P_1\cup P_2)=\mu(P_1)+\mu(P_2).$$

Многоъгълните фигури Q_1 и Q_2, евентуално пресичащи се, като сума съставят многоъгълната фигура Q, лицето на която не надминава $\mu(Q_1)+\mu(Q_2)$. Затова

$$\mu(P)=\mu(P_1)+\mu(P_2)\leqq\mu(F)\leqq\mu(Q)\leqq\mu(Q_1)+\mu(Q_2).$$

От друга страна, според определението за измеримост за фигурите F_1 и F_2 са верни неравенствата $\mu(P_1)\leqq\mu(F_1)\leqq\mu(Q_1)$ и $\mu(P_2)\leqq\mu(F_2)\leqq\mu(Q_2)$, от които следва, че

$$\mu(P_1)+\mu(P_2)\leqq\mu(F_1)+\mu(F_2)\leqq\mu(Q_1)+\mu(Q_2).$$

По такъв начин двете величини $\mu(F)$ и $\mu(F_1)+\mu(F_2)$ са заключени между числата $(\mu(Q_1)+\mu(Q_2))$ и $(\mu(P_1)+\mu(P_2))$, разликата между които

$$(\mu(Q_1)+\mu(Q_2))-(\mu(P_1)+\mu(P_2))=(\mu(Q_1)-\mu(P_1))$$
$$+(\mu(Q_2)-\mu(P_2))$$

може да бъде направена произволно малка.

Следователно тези две величини са равни, т. е. в сила е равенството (10.27). □

Свойството инвариантност на лице на произволна равнинна фигура непосредствено следва от инвариантността на лицето на многоъгълна фигура (вж. 10.23)) и от начина на определяне на лице на измерима фигура чрез лицата на многоъгълни фигури.

Накрая свойството монотонност на лицето следва непосредствено от определението за измеримост на равнинна фигура.

Забележка. Сечението на две измерими фигури е измерима фигура.

Действително нека $F=F_1\cap F_2$ и F_1 и F_2 са измерими.

Всяка контурна точка на F е контурна или за F_1, или за F_2. Затова твърдението следва от теорема (10.2″) и от това, че обединението на две множества с лица, равни на нула, има също лице, равно на нула.

Въведеното в тази точка понятие лице се нарича ***лице по Жордан**** или ***мярка на Жордан***.

По-рано се убедихме, че лицето по Жордан притежава свойството адитивност, т. е. ако $F=F_1\cup F_2$, а F_1 и F_2 са измерими фигури без общи вътрешни точки, то F е измерима и $\mu(F)=\mu(F_1)+\mu(F_2)$. Това свойство е очевидно в сила и за обединението на произволен краен брой $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ измерими фигури без общи вътрешни точки. Ако

$$F=\bigcup\{F_i : i=1, 2, \dots, n\},$$

то F е измерима и $\mu(F)=\sum_{i=1}^{n}\mu(F_i)$ (свойство крайна адитивност).

Обаче лицето по Жордан (мярката на Жордан) не притежава свойството изброима адитивност, т. е. обединението на изброима съвкупност от измерими фигури $F_1, F_2, F_3, \dots$, без общи вътрешни точки може да не бъде измерима фигура. Ще илюстрираме това с пример. Разглеждаме в равнината квадрата $D: 0<x<1, 0<y<1$. Вземаме в квадрата D точките с рационални координати. Не е трудно да се покаже, че тези точки са изброимо множество. Разполагаме ги във вид на редица

$$z_1=(x_1, y_1),\ z_2=(x_2, y_2), \dots, z_n=(x_n, y_n), \dots$$

Фиксираме числото $\varepsilon>0$ и построяваме кръг O_1 с център в точката z_1 и радиус $r_1<\varepsilon/2$, изцяло съдържащ се в квадрата D.

Първата от точките $z_2, z_3, z_4, \dots$, която не попада в кръга O_1, означаваме със z_{n_2} и построяваме кръг O_2 с център точката z_{n_2} и радиус $r_2<\varepsilon . 2^{-2}$, който да не пресича кръга O_1 и изцяло да се съдържа в квадрата D.

* Камил Жордан — френски математик (1838—1922).

Продължавайки тези разсъждения, построяваме редица от кръгове $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n, \ldots$ с радиуси $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$, $r_n < \varepsilon . 2^{-n}$, които не се пресичат помежду си и изцяло се съдържат в квадрата D.

Всеки от тези кръгове е измерим и има лице, равно на $\pi . r_n^2$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Ще се убедим, че обединението F на тези изброимо много кръгове $F=O_1 \cup O_2 \cup \ldots$ е фигура, неизмерима по Жордан. Нека Q е произволна многоъгълна фигура, съдържаща фигурата F. Очевидно във всяка ε-околност на всяка точка на квадрата D има точки от редицата $\{z_n\}$, т. е. има точки от фигурата F. Но това означава, че всяка точка на квадрата D е или вътрешна, или контурна точка на фигурата F, т. е. многоъгълната фигура Q съдържа целия квадрат D и следователно

$$\mu(Q) \geq \mu(D) = 1.$$

Нека сега P е произволна многоъгълна фигура, съдържаща се в F. Тогава лицето $\mu(P)$ няма да надминава сумата от лицата на всички кръгове $O_1, O_2, O_3, \ldots$, т. е.

$$\mu(P) \leq \pi(r_1^2 + r_2^2 + \cdots) < \pi\varepsilon^2(2^{-2} + 2^{-4} + \cdots) = \pi\varepsilon^2/3.$$

И така $\mu(Q) \geq 1$ и $\mu(P) \leq \pi\varepsilon^2/3$ за всяка многоъгълна фигура Q, съдържаща F, и всяка многоъгълна фигура P, съдържаща се в F. Но това означава, че при малко ε разликата $\mu(Q)-\mu(P)$ е по-голяма от $1-\pi\varepsilon^2/3$ и не може да бъде направена произволно малка, т. е. фигурата F не е измерима по Жордан.

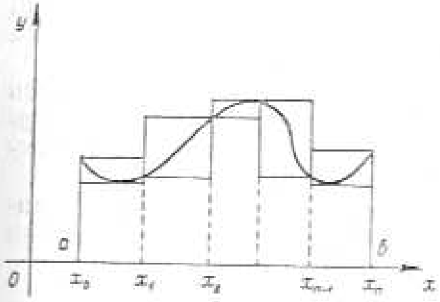
Ще отбележим, че може да се въведе друго, обобщено понятие за лице — т. нар. мярка на Лебег*, която вече притежава и свойството изброима адитивност.

10.2.3. Лице на криволинеен трапец и криволинеен сектор. Криволинеен трапец се нарича фигурата, заградена от графиката на дефинирана върху сегмента $[a, b]$ непрекъсната и неотрицателна функция f, перпендикулярните към оста Ox прави $x=a$ и $x=b$ и отсечката от оста Ox, заключена между точките a и b (фиг. 10.1).

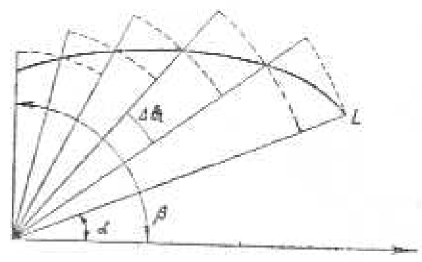
В сила е следното твърдение:

Криволинейният трапец *представлява измерима фигура F, лицето $\mu(F)$ на която се пресмята по формулата*

* Анри Лебег — френски математик (1875—1941).



Фиг. 10.1



Фиг. 10.2

(10.28) $$\mu(F) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказателство. Непрекъснатата в сегмента $[a, b]$ функция f е интегруема, следователно за всяко положително число ε може да се намери деление на сегмента $[a, b]$, за което разликата между голямата сума S и малката сума s да бъде по-малка от ε. Но S и s са равни съответно на $\mu(Q)$ и $\mu(P)$, където $\mu(Q)$ и $\mu(P)$ са лицата на многоъгълни фигури, първата от които съдържа криволинейния трапец, а втората се съдържа в криволинейния трапец (на фиг. 10.1 са изобразени също и тези многоъгълни фигури). По такъв начин $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$ и съгласно теорема 10.2 криволинейният трапец е измерим. Тъй като за всяка интегруема функция границата както на големите суми S, така и на малките суми s е равна на $\int_a^b f(x)\,dx$, когато диаметърът на делението клони към нула, и $s \leq \mu(F) \leq S$, то лицето $\mu(F)$ на криволинейния трапец се намира по формулата (10.28). □

Забележка. Ако функцията f е непрекъсната и неположителна в сегмента $[a, b]$, то стойността на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, взет с отрицателен знак, е равна на лицето на криволинейния трапец, ограничен от графиката на функцията f, ординатите в точките a и b и отсечката от оста Ox между точките a и b. Затова, ако f си сменя знака, то $\int_a^b f(x)\,dx$ е равен на сумата от лицата на криволинейните трапеци, взети със съответния знак, разположени над и под оста Ox, при това лицата на първите са взети със знак плюс, а на вторите — със знак минус.

Ще преминем сега към разглеждане на лицето на криволинеен сектор. Нека кривата L е зададена с уравнения в полярни координати $r=r(\theta)$; $\alpha\leqq\theta\leqq\beta$ (фиг. 10.2), при което функцията r е непрекъсната и неотрицателна в сегмента $[\alpha, \beta]$.

Ще наричаме криволинеен сектор равнинната фигура, ограничена от кривата L и двата лъча, сключващи с полярната ос ъгли α и β.

Ще докажем следното твърдение:

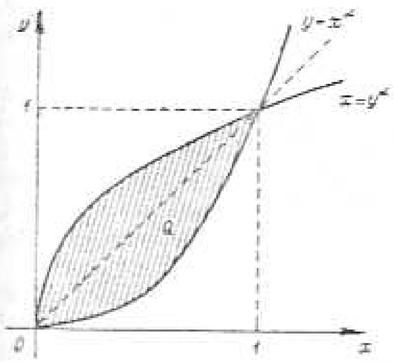
Криволинейният сектор *е измерима фигура F, лицето на която се пресмята по формулата*

$$\mu(F)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\,d\theta. \qquad (10.29)$$

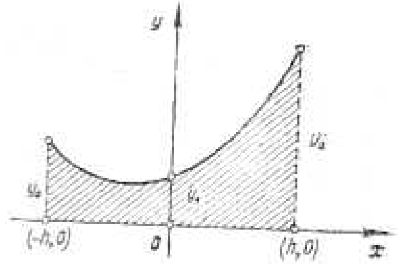
Доказателство. Разглеждаме деление на сегмента $[\alpha, \beta]$ с точките $\alpha=\theta_0<\theta_1<\dots<\theta_n=\beta$ и за всеки частичен сегмент $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ построяваме кръгови сектори с радиуси минималната r_i и максималната R_i стойност на функцията r в сегмента $[\theta_{i-1}, \theta_i]$. В резултат получаваме две измерими фигури, първата фигура A, съдържаща се в криволинейния сектор, а втората B, съдържаща този сектор (вж. фиг. 10.2). Лицата $\mu(A)$ и $\mu(B)$ на тези измерими фигури A и B са съответно равни на $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\theta_{i-1})r_i^2$ и на $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\theta_i-\theta_{i-1})R_i^2$. Обръщаме внимание на това, че първата от тези суми е малката сума s, а втората — голямата сума S на функцията $\frac{1}{2}r^2$ в сегмента $[\alpha, \beta]$ за посоченото деление на този сегмент. Тъй като непрекъснатата в сегмента $[\alpha, \beta]$ функция $\frac{1}{2}r^2$ е интегруема в този сегмент, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува деление, за което разликата $S-s=\mu(B)-\mu(A)$ е по малка от ε.

Тъй като A и B са две измерими фигури, първата от които се съдържа в криволинейния сектор F, а втората съдържа F, то съгласно теорема 10.2' криволинейният сектор е измерим.

Валидността на формулата (10.29) за лицето следва от това, че мярката му $\mu(F)$ е заключена между $s=\mu(A)$ и $S=\mu(B)$, а двете суми s и S клонят към интеграла в дясната страна на (10.29) при клонене на диаметъра на делението към нула. □



Фиг. 10.3



Фиг. 10.4

Примери:

1. Да се намери лицето $\mu(F)$ на фигурата F, ограничена от графиките на функциите $y=x^\alpha$ и $x=y^\alpha$, $\alpha\geqq1$ (фиг. 10.3). Понеже фигурата е симетрична относно бисектрисата на първия квадрант, лицето ѝ може да бъде получено, като от единица (лицето на квадрата) се извади удвоеното лице на криволинейния трапец, зададен с графиката на функцията $y=x^\alpha$, $\alpha\geqq1$, в сегмента $[0, 1]$. Така по формулата (10.28) получихме, че

$$\mu(F)=1-2\int_0^1 x^\alpha\,dx = 1-2x^{\alpha+1}/(\alpha+1)\Big|_0^1=(\alpha-1)/(\alpha+1).$$

2. През три точки с координати $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) минава само една парабола $y=Ax^2+Bx+D$ (или права, ако тези точки лежат на една права).

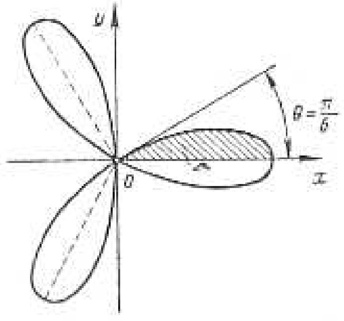
Наистина условието трите точки $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$, (h, y_2) да лежат на параболата ни води до система уравнения относно A, B, D:

$$\left|\begin{array}{l} Ah^2-Bh+D=y_0,\\ D=y_1,\\ Ah^2+Bh+D=y_2. \end{array}\right.$$

Тази система има единствено решение

$$A=(y_0-2y_1+y_2)/2h^2,\ B=(y_2-y_0)/2h,\ D=y_1.$$

Ще намерим лицето $\mu(F)$ на криволинейния трапец F, определен от разгледаната парабола, правите, успоредни на оста Oy и минаващи през точките $(-h, 0)$ и $(h, 0)$, и отсечката от оста Ox, заключена между тези точки (фиг. 10.4).



Фиг. 10.5

По формулата (10.28) имаме

$$\mu(F)=\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+D)\,dx=\frac{1}{3}Ax^3+\frac{1}{2}Bx^2+Dx\Big|_{-h}^{h}$$

$$=2Ah^3/3+2Dh.$$

Като заместим намерените стойности за A и D чрез ординатите y_0, y_1 и y_2 и величината h, получаваме

$$\mu(F)=h(y_0+4y_1+y_2)/3.$$

3. Да се намери лицето $\mu(F)$ на трилистника $r=a\cos 3\theta$ (фиг. 10.5). От чертежа се вижда, че е достатъчно да се пресметне онази част от лицето на трилистника, която отговаря на изменението на θ от 0 до $\pi/6$, и полученият резултат да се умножи на шест. Затова по формула (10.29) получаваме

$$\mu(F)=6\cdot\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/6}\cos^2 3\theta\,d\theta=3a^2\int_0^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\theta}{2}\,d\theta$$

$$=3a^2\left(\pi/12+\frac{1}{12}\sin 6\theta\Big|_0^{\pi/6}\right)=\pi\cdot a^2/4.$$

10.3. Обем на тяло в пространството

Основните определения и твърдения тук са аналогични на съответните определения и твърдения от 10.2. Това ни позволява да се ограничим с основни формулировки.

10.3.1. Обем на тяло. Да разгледаме множеството от всички точки на пространството и да фиксираме една от тези точки A.

ε-околност на точката A ще наричаме множеството от всички точки на пространството, разположени вътре в кълбо с радиус ε и център в точката A.

Точката A ще наричаме ***вътрешна (външна) точка*** на множеството $\{M\}$ от точки на пространството, ако съществува такова $\varepsilon>0$, че ε-околността на точката A изцяло принадлежи (не принадлежи) на множеството $\{M\}$.

Точките на множеството $\{M\}$, които не са нито вътрешни, нито външни, ще наричаме ***контурни точки*** на множеството $\{M\}$, а съвкупността от всички контурни точки ще наричаме ***контур*** на множеството $\{M\}$.

Множеството $\{M\}$ от точки на пространството ще наричаме ***ограничено множество*** или ***тяло***, ако съществува кълбо, съдържащо всички точки на това множество.

Сред всички тела ще отделим т. нар. ***многостенни тела***, представляващи обединение на краен брой ограничени многостени. Понятието обем на многостенно тяло е известно. Ще подчертаем, че този обем (както и лицето на многоъгълна фигура) притежава свойствата адитивност, инвариантност и монотонност.

Да разгледаме произволно тяло F, а също и всички многостенни тела P, съдържащи се в F, и всички многостенни тела Q, съдържащи F.

Ще наречем горна мярка на обема на тялото F точната долна граница на числовото множество $\{\mu(Q)\}$ от обемите на всички многостенни тела Q, съдържащи F, т. е. числото

$$\mu^*=\mu^*(F)=\inf\{\mu(Q):Q\supset F\}.$$

Аналогично ще наречем долна мярка на обема на тялото F точната горна граница на числовото множество $\{\mu(P)\}$ от обемите на всички многостенни тела P, съдържащи се в F, т. е. числото

$$\mu_*=\mu_*(F)=\sup\{\mu(P):P\subset F\}.$$

От тези определения е ясно, че $\mu_*\leqq\mu^*$.

Определение 1. *Тялото F се нарича **измеримо (имащо обем)**, ако $\mu^*=\mu_*$. При това числото $\mu=\mu(F)=\mu^*=\mu_*$ се нарича **обем** на тялото F.*

Напълно аналогично на теорема 10.2 се доказва следното твърдение:

Теорема 10.4. *Необходимото и достатъчно условие тялото F да бъде измеримо е за всяко $\varepsilon>0$ да съществуват многостенно тяло P, съдържащо се в F, и многостенно тяло Q, съдържащо F за които $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon$.*

З а б е л е ж к а. Във формулировката на теорема 10.4 вместо многостенни тела P и Q могат да се вземат произволни измерими тела P и Q, удовлетворяващи всички останали условия на теоремата.

Определение 2. *Множество от точки на пространството ще наричаме* ***множество с нулев обем,*** *ако това множество се съдържа в многостенно тяло с произволно малък обем.*

Теорема 10.4 може да се преформулира така:

Теорема 10.4. *Тялото F е измеримо тогава и само тогава, когато неговият контур има нулев обем.*

Въведеното от нас понятие за обем на тяло има свойствата адитивност, инвариантност и монотонност.

10.3.2. Някои класове измерими тела. ***Цилиндрично тяло*** *ще наричаме тялото, ограничено с цилиндрична повърхност, чиито образуващи са успоредни на дадена ос, и с две равнини, перпендикулярни на тази ос.*

Сеченията на тези равнини с цилиндричната повърхност са равнинни фигури, наречени **основи** на цилиндричното тяло, а разстоянието h между основите се нарича **височина** на цилиндричното тяло (фиг. 10.6).

В сила е следното твърдение:

Ако основата на цилиндричното тяло F е измерима равнинна фигура G, то тялото F е измеримо и обемът му $\mu(F)$ е равен на $\mu(G).h$, където $\mu(G)$ е лицето на основата G, а h е височината на това цилиндрично тяло.

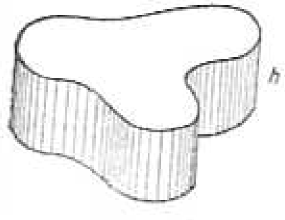
Д о к а з а т е л с т в о. Тъй като равнинната фигура G е измерима, то за всяко $\varepsilon>0$ могат да се намерят описана и вписана в тази фигура многоъгълни фигури Q и P, за които $\mu(Q)-\mu(P)<\varepsilon/h$.

Обемите на многостенните тела F_Q и F_P, за основи на които служат многоъгълните фигури Q и P, а височината им е равна на h, са равни съответно на $\mu(Q).h$ и $\mu(P).h$. Затова

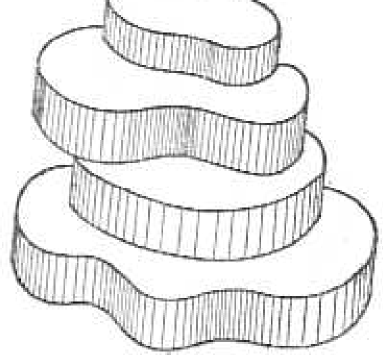
$$\mu(Q).h-\mu(P).h=(\mu(Q)-\mu(P)).h<\frac{\varepsilon}{h}.h=\varepsilon.$$

Тъй като многостенното тяло F_Q съдържа F, а многостенното тяло F_P се съдържа в F, то съгласно теорема 10.4 тялото F е измеримо. Понеже $\mu(Q)h\leq\mu(G)h\leq\mu(Q)h$, обемът на цилиндричното тяло F е равен на $\mu(G).h$. □

От свойството адитивност на обема и доказаното твърдение следва, че стъпаловидните тела са измерими (стъпаловидно тяло се нарича обединението на краен брой цилиндрични тела, разположени така, че горната основа на всяко предишно тяло лежи в една равнина с долната основа на следващото (вж. фиг. 10.7).



Фиг. 10.6



Фиг. 10.7

От предишните разсъждения непосредствено следва твърдението:

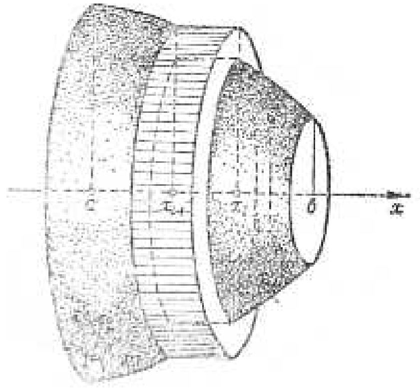
Ако за всяко положително число ε съществуват стъпаловидно тяло F_1, съдържащо F, и стъпаловидно тяло F_2, съдържащо се в F, за които $\mu(F_1)-\mu(F_2)<\varepsilon$, то тялото F е измеримо.

Използвайки това твърдение, ще докажем измеримостта на ротационните тела. В сила е следното твърдение:

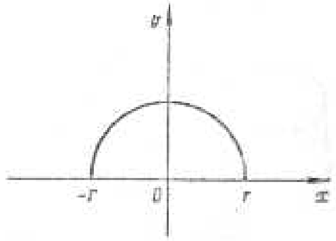
Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Тогава тялото F, образувано от завъртането около оста Ox на криволинейния трапец, ограничен от графиката на функцията f, правите $x=a$ и $x=b$ и отсечката от оста Ox от a до b е измеримо и обемът му $\mu(F)$ се дава с формулата

$$\mu(F)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{10.31}$$

Д о к а з а т е л с т в о. Разделяме сегмента $[a, b]$ на частични сегменти с точките $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Нека m_i и M_i са точните граници на f в частичния сегмент $[x_{i-1}, x_i]$. На всеки такъв сегмент построяваме два правоъгълника с височини m_i и M_i (на фиг. 10.8 тези правоъгълници са изобразени само за един сегмент $[x_{i-1}, x_i]$). В резултат се получават две стъпаловидни фигури, едната от които се съдържа в криволинейния трапец, а другата го съдържа. При завъртането на криволинейния трапец и тези стъпаловидни фигури ще получим тялото F и две стъпаловидни тела, едното от които Q съдържа F, а другото P се съдържа в F. Обемите на тези тела Q и P са съответно



Фиг. 10.8



Фиг. 10.9

$$\mu(Q)=\pi\sum_{i=1}^{n}M_i^2\Delta x_i, \qquad \mu(P)=\pi\sum_{i=1}^{n}m^2\Delta x_i.$$

Очевидно е, че тези изрази са голяма и малка сума за функцията πf^2. Понеже тази функция е интегруема, то разликата между тези суми при подходящо деление на сегмента $[a, b]$ може да се направи по-малка от всяко отнапред избрано положително число ε. Следователно тялото е измеримо. Тъй като границите на тези суми, когато диаметърът на делението на сегмента $[a, b]$ клони към нула е равна на $\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$, то обемът $\mu(F)$ на тялото F се дава с формулата (10.31).

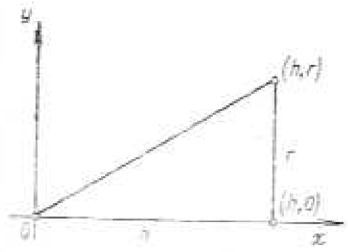
Примери:

1. Да намерим обема $\mu(F)$ на кълбо F с радиус r. Разглеждаме това кълбо като резултат от завъртането на окръжността $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $-r\leq x\leq r$, около оста Ox (вж. фиг. 10.9). С формулата (10.31) получаваме

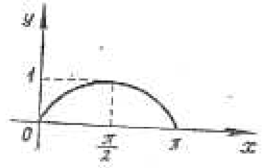
$$\mu(F)=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi r^2x\Big|_{-r}^{r}-\frac{1}{3}\pi x^3\Big|_{-r}^{r}$$

$$=2\pi r^3-\frac{2}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

2. Ще намерим обема $\mu(F)$ на прав кръгов конус с височина h и радиус на основата r. Този конус може да се разглежда като



Фиг. 10.10



Фиг. 10.11

ротационно тяло, получено от завъртането на триъгълника с върхове в точките (0, 0), $(h, 0)$ и (h, r) около оста Ox (фиг. 10.10), и съгласно формула (10.31) имаме за обема му

$$\mu(F)=\pi\,.\,r^2\,.\,h^{-2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{1}{3}\pi r^2h^{-2}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

3. Ще намерим обема на тялото F, получено от завъртането около оста Ox на синусоидата $y=\sin x$ в сегмента $[0, \pi]$. Имаме

$$\mu(F)=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\pi^2/2$$

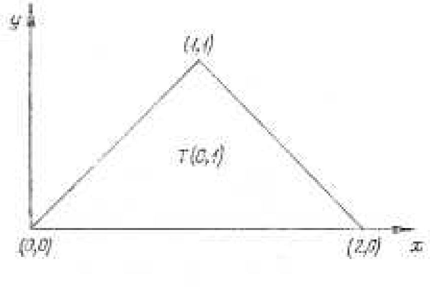
(фиг. 10.11).

Допълнение към глава 10*

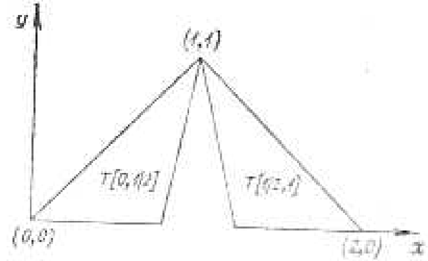
ПРИМЕР ЗА НЕИЗМЕРИМА ФИГУРА, ОГРАНИЧЕНА ОТ НЕРЕКТИФИЦИРУЕМА КРИВА

1. ***Полуотворен триъгълник*** *ще наричаме множеството от точките на триъгълник без точките на две от страните му и двата върха, прилежащи към тях.* Ще разгледаме построяването на крива L, която ще бъде част от контура на неизмерима фигура Q. Това построение се извършва по пътя на последователното отделяне на определени полуотворени триъгълници от даден равнобедрен правоъгълен триъгълник T, който за удобство ще означим с T [0, 1]. Координатите на върховете на този триъгълник са

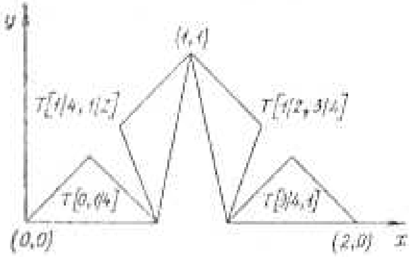
* Това допълнение е заимствувано от книгата на В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, „Основы математического анализа", изд. „Наука", Москва, 1971.



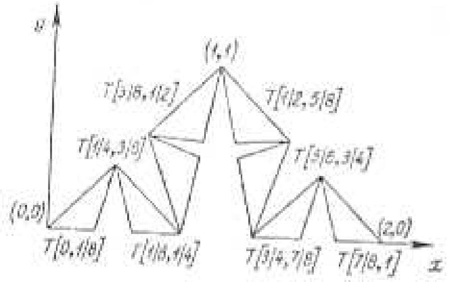
Фиг. 10.12



Фиг. 10.13



Фиг. 10.14



Фиг. 10.15

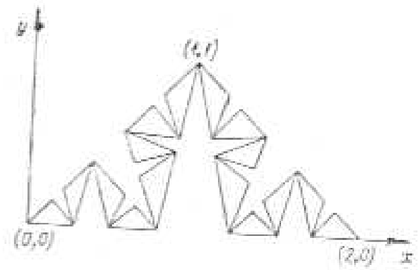
(0, 0), (1, 1) и (2, 0) (фиг. 10.12). Ще опишем сега процеса на последователното отделяне от триъгълника T [0, 1] на определени полуотворени триъгълници:

1) Отделяме полуотворения триъгълник, единият от върховете на който има координати (1, 1), а другите два са разположени на оста Ox. Лицето S_1 на отделения триъгълник е равно на 1/4. Получената в резултат фигура е изобразена на фиг. 10.13. Тя се състои от два триъгълника T [0, 1/2] и T [1/2, 1] с равни лица.

2) От триъгълниците T [0, 1/2] и T [1/2, 1] се отделя по един триъгълник, сумата S_2 от лицата на които е равна на 1/8. Получената фигура е изобразена на фиг. 10.14. Тя се състои от четири триъгълника T [0, 1/4], T [1/4, 1/2], T [1/2, 3/4], T [3/4, 1] с равни лица.

3) От всеки от тези триъгълници отделяме по един триъгълник, сумата S_3 от лицата на които е равна на 1/16. Получената фигура е изобразена на фиг. 10.15. Тя се състои от осемте триъгълника T [0, 1/8], T [1/8, 1/4], T [1/4, 3/8], T [3/8, 1/2], T [1/2, 5/8], T [5/8, 3/4], T [3/4, 7/8], T [7/8, 1] с равни лица.

4) От всеки от тези триъгълници се отделя по един триъгълник, сумата S_4 на лицата на които е равна на 1/32. Получената



Фиг. 10.16

фигура е изобразена на фиг. 10.16. Тя се състои от шестнадесет триъгълника с равни лица. Всеки от тези триъгълници ще означим със символа

$$T[p\,.\,2^{-4},\ (p+1)\,.\,2^{-4}],\ p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 15.$$

По-нататък процесът продължава аналогично. Ще преминем сега към определяне на кривата L. Триъгълниците $T[p\,.\,2^{-n},\ (p+1)\,.\,2^{-n}]$ (p и n са произволни цели числа, удовлетворяващи условието $p<2^n$), получени в описания процес, притежават следното свойство: Нека $T[p_1\,.\,2^{-n_1},\ (p_1+1)\,.\,2^{-n_1}]$ и $T[p_2\,.\,2^{-n_2},\ (p_2+1)\,.\,2^{-n_2}]$ са два такива триъгълника, че $p_1\,.\,2^{-n_1}\leq p_2 2^{-n_2}<(p_2+1)\,.\,2^{-n_2}\leq(p_1+1)\,2^{-n_1}$. Тогава вторият от тези триъгълници се съдържа в първия. Ще отбележим още следното очевидно свойство на триъгълниците $T[p.2^{-n},\ (p+1)\,.\,2^{-n}]$: При $n\to\infty$ диаметърът им* клони към нула.

Нека $\{T[p_k 2^{-n_k},\ (p_k+1)\,.\,2^{-n_k}]\}$, $k=1,\ 2,\ 3,\ldots$, е свиваща се система от триъгълници (това означава, че триъгълникът с индекс k съдържа триъгълника с индекс $k+1$ и при $k\to\infty$ диаметърът на триъгълника клони към нула). Всяка такава свиваща се система от триъгълници има точно една обща точка. Разглеждаме всички свиващи се системи от посочените по-горе триъгълници. Кривата L определяме с множеството $\{M\}$ от общите точки на всички свиващи се системи от триъгълници $T[p\,.\,2^{-n},\ (p+1)\,.\,2^{-n}]$.

На множеството $\{M\}$ (на кривата L) принадлежат върховете на всички триъгълници $T[p\,.\,2^{-n},\ (p+1)\,.\,2^{-n}]$, тъй като върхът на всеки такъв триъгълник принадлежи на свиващата се система от триъгълници $\{T[2^k p\,.\,2^{-(n+k)},\ (2^k\,.\,p+1)\,.\,2^{-(n+k)}]\}$ и на системата $\{T[(2^k\,.\,p-1)\,2^{-(n+k)},\ 2^k\,.\,p\,.\,2^{-(n+k)}]\}$. За да се убедим, че построеното множество $\{M\}$ е проста крива в смисъл на определението, дадено в 10.1.1, трябва да докажем, че всички точки M на мно-

* Диаметър на триъгълник се нарича дължината на най-голямата му страна.

жеството $\{M\}$ се определят с параметрични уравнения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$; $a\leqq t\leqq b$, където φ и ψ са непрекъснати функции.*

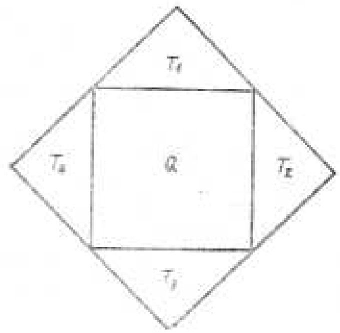
Да разгледаме сегмента $[0, 1]$ на оста t. На всеки сегмент $[p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$, където p и n са произволни неотрицателни цели числа, $p<2^n$, съпоставяме триъгълника $T[p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$. На фиг. 10.17 са изобразени сегментите, които отговарят на триъгълниците $T(p\,.\,2^{-3}, (p+1)\,.\,2^{-3}]$. Всяка точка t от сегмента $[0, 1]$ принадлежи на всички сегменти от някоя свиваща се система $\{[p_k\,.\,2^{-n_k}, (p_k+1)\,.\,2^{-n_k}]\}$ от сегменти. Съпоставяме на тази точка t общата точка M на свиващата се система от триъгълници $\{T[p_k\,.\,2^{-n_k}, (p_k+1)\,.\,2^{-n_k}]\}$. По такъв начин на всяка стойност на t от сегмента $[0, 1]$ се съпоставят две числа x и y — координати на точката M. Следователно x и y са функции на параметъра t. Ще се убедим, че тези функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ са непрекъснати в сегмента $[0, 1]$. Действително нека ε е произволно положително число, t е фиксирана точка от сегмента $[0, 1]$ и M е точката от кривата L, определена от тази стойност на параметъра t. От свиващата се система от триъгълници $\{T[p_k\,.\,2^{-n_k}, (p_k+1)\,.\,2^{-n_k}]\}$, определяща точката M, избираме триъгълник с диаметър, по-малък от ε, и разглеждаме сегмента $[p_k\,.\,2^{-n_k}, (p_k+1)\,.\,2^{-n_k}]$, който отговаря на този триъгълник и съдържа точката t, определяща M (а следователно x и y). Всички точки на кривата L, съответствуващи на стойности на t от този сегмент, са разположени в посочения по-горе триъгълник и затова координатите им ще се различават от координатите на точката M най-много с ε. Но това означава, че функциите φ и ψ са непрекъснати в тази точка.

2. Ще преминем към построяване на неизмерима фигура Q. Разглеждаме квадрат $\underline{Q}$ със страна, равна на 2. На всяка страна на този квадрат построяваме равнобедрени правоъгълни триъгълници T_1, T_2, T_3, T_4, в резултат на което получаваме квадрата $\overline{Q}$ със страната $2\sqrt{2}$ (фиг. 10.18). След това от всеки от тези триъгълници отделяме полуотворени триъгълници така, както това е описано в т. 1. В резултат ще получим фигура Q, ограничена от затворена крива, състояща се от четири криви, конгруентни на кривата L. Ще докажем, че получената фигура Q е неизмерима.

Разглеждаме две специални редици от многоъгълници $\{\underline{Q}_n\}$ и $\{\overline{Q}_n\}$, първата от които се състои от вписани във фигурата Q многоъгълници, а втората — от описани около Q многоъгълници. Редицата $\{\underline{Q}_n\}$ се получава чрез присъединяване към квадрата $\underline{Q}$ на полуотворените триъгълници, отделени от триъгълниците T_1, T_2, T_3,

* Това, че на различни стойности на t отговарят различни точки от множеството $\{M\}$, е очевидно от построението на кривата L.

Фиг. 10.17



Фиг. 10.18

T_4 на всяка нечетна стъпка от процеса, описан в т. 1. Редицата $\{\overline{Q}_n\}$ се получава чрез отделяне от квадрата $\overline{Q}$ на полуотворените триъгълници, отделени от триъгълниците T_1, T_2, T_3, T_4 на всяка четна стъпка от процеса, описан в т. 1. Очевидно е, че всеки вписан във фигурата Q многоъгълник се съдържа в някой многоъгълник $\underline{Q}_n$, а всеки описан около фигурата Q многоъгълник съдържа някой многоъгълник $\overline{Q}_n$. Затова границата на редицата $\{\underline{S}_n\}$ от лицата на многоъгълниците $\underline{Q}_n$ е равна на долната мярка на лицето $\underline{P}$ на фигурата Q, а границата на редицата $\{\overline{S}_n\}$ от лицата на многоъгълниците $\overline{Q}_n$ е равна на горната мярка на лицето $\overline{P}$ на фигурата Q. Лесно се убеждаваме, че $\underline{S}_n=4+\sum\limits_{k=1}^{n}4^{-k+1}$, $\overline{S}_n=8-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}4^{-k+1}$. Затова $\underline{P}=\lim\limits_{n\to\infty}\underline{S}_n=16/3$, а $\overline{P}=\lim\limits_{n\to\infty}\overline{S}_n=22/3$. Тъй като $\underline{P}\neq\overline{P}$, то фигурата Q е неизмерима. Ще отбележим, че $\overline{P}-\underline{P}=2$. Следователно контурът на разглежданата фигура има лице, равно на 2.

3. Ще докажем, че всяка част от кривата L, ограничена от две различни точки, е неректифицируема. Най-напред ще покажем, че такава част L' от кривата L има различно от нула лице, т. е. всеки многоъгълник, покриващ L', има лице, по-голямо от някое положително число. Ще отбележим, че L' съдържа част L'', отговаряща на точките от някой сегмент $[p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$, и затова L'' се съдържа в триъгълника $T[p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$ и може да бъде получена чрез отделяне от този триъгълник на определени полуотворени триъгълници.

Лесно се пресмята, че сумата от лицата на всички отделени полуотворени триъгълници е по-малка от лицето S_T на триъгълника $T[p\,.\,2^{-n}, (p+1)\,.\,2^{-n}]$. Следователно частта L'' има лице, равно на $S_T - S > 0$. В 10.2 при доказателството за измеримост на фигура, ограничена от ректифицируема крива, доказахме, че лицето на ректифицируема крива е равно на нула.

Затова частта L'' на кривата L, а следователно и частта L съдържаща L'', е неректифицируема.

Забележка. Всяка от построените функции φ и ψ няма производна в нито една точка на сегмента $[0, 1]$.

11. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения и определени интеграли

В тази глава се разглеждат приближени методи за намиране корените на алгебрични и трансцендентни уравнения и за пресмятане на определени интеграли.

11.1. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения

Ще се заемем с приближеното пресмятане на един от корените на уравнението $f(x)=0$, където f е непрекъсната функция. Ще считаме, че интересуващият ни корен на това уравнение е отделен в някакъв сегмент $[a, b]$, т. е. че този корен е вътрешна точка за сегмента $[a, b]$, който не съдържа други корени на разглежданото уравнение.

11.1.1. Метод на „вилката“ (метод на разполовяването). Ще започнем с метода, който често се използва за приближено пресмятане на корени с помощта на съвременните бързодействуващи математически машини. За основа на този метод служи едно ново доказателство на теорема 4.12 относно анулирането на непрекъсната функция при смяна на знака ѝ. Ще изложим това доказателство.

Трябва да се докаже следното твърдение:

Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и ако стойностите ѝ $f(a)$ и $f(b)$ в краищата на сегмента $[a, b]$ са числа с различни знаци, то съществува точка c вътре в сегмента $[a, b]$, в която стойността на функцията $f(c)$ е равна на нула, т. е. c е корен на уравнението $f(x)=0$.

Ще наричаме „вилка“ всеки сегмент, в краищата на който функцията f има стойности с различни знаци. По условие сегментът $[a, b]$ е вилка. Нека за определеност $f(a)<0$, $f(b)>0$. Разделяме сегмента $[a, b]$ наполовина. Възможни са два случая: 1) стойността на функцията в средата на сегмента $[a, b]$ е равна на нула (в този случай теоремата е доказана); 2) тази стойност не е равна на нула. В този случай едната от половинките на сегмента $[a, b]$ е „вилка". Означаваме тази половинка с $[a_1, b_1]$. Очевидно $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$. Със сегмента $[a_1, b_1]$ постъпваме така, както със сегмента $[a, b]$, т. е. разделяме сегмента $[a_1, b_1]$ наполовина.

Продължавайки аналогично, ще имаме двете възможности: 1) или описаният процес прекъсва поради това, че в средата на някой от сегментите стойността на функцията е равна на нула (в този случай теоремата е доказана); 2) или описаният процес продължава неограничено, в резултат на което получаваме свиваща се система от сегменти-„вилки" $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$, като за всеки номер n имаме $f(a_n)<0$, $f(b_n)>0$. Съгласно следствието от теорема 3.15 тази свиваща се система от сегменти има една обща точка c, към която клони всяка от редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Ще докажем, че $f(c)=0$. Тъй като функцията f е непрекъсната в точката c, то всяка от редиците $\{f(a_n)\}$ и $\{f(b_n)\}$ клони към $f(c)$. Но от условията $f(a_n)<0$ и $f(b_n)>0$ и от теорема 3.13 получаваме, че едновременно са изпълнени неравенствата $f(c)\leq 0$ и $f(c)\geq 0$, т. е. $f(c)=0$. □

Сега ще предположим, че при условията на доказаното по-горе твърдение сегментът $[a, b]$ съдържа само един корен c на уравнението $f(x)=0$. Тогава за приближена стойност на този корен може да се вземе точката $(a_n+b_n)/2$, т. е. средата на сегмента $[a_n, b_n]$. Понеже дължината на сегмента $[a_n, b_n]$ е равна на $(b-a)\,.\,2^{-n}$, то числото $(a_n+b_n)/2$ се различава от точната стойност на корена с не повече от $(b-a)\,.\,2^{-n-1}$. По такъв начин описаният процес на последователно разполовяване на сегментите-„вилки" позволява да се пресметне търсеният корен c с произволна, отнапред зададена точност. Тъй като описаният процес води до многократно повтаряне на еднотипни пресмятания, той е особено удобен за програмна реализация на автоматични сметачни машини.

11.1.2. Метод на итерациите.* Изложеният тук метод лежи в основата на много други приближени методи. Той се прилага за решаване на уравнението

(11.1) $$x=F(x).$$

Ще въведем понятието итерационна редица.

Редицата $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ще наричаме ***итерационна***, ако за всяко $n\geqq 1$ членът ѝ x_n се изразява чрез x_{n-1} по рекурентната формула $x_n=F(x_{n-1})$, като x_0 е произволно число от дефиниционната област на функцията F.

* Този метод се нарича също така и ***метод на последователните приближения***.

Ще докажем, че при определени условия итерационната редица клони към корена на уравнението (11.1) и следователно нейните членове могат да се вземат за приближени стойности на този корен. В сила е следното твърдение:

Твърдение 1. *Нека функцията F е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и всички членове на итерационната редица $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ принадлежат на този сегмент. Тогава, ако тази редица клони към някое число c, това число е корен на уравнението* (11.1).

Доказателство. Тъй като редицата $\{x_n\}$ клони към c и всичките ѝ членове принадлежат на сегмента $[a, b]$, то и границата c принадлежи на сегмента $[a, b]$ (вж. следствие 2 от теорема 3.13). По условие функцията F е непрекъсната в точката c и затова редицата $\{F(x_n)\}$ клони към $F(c)$. Така от равенството $x_n=F(x_{n-1})$ при граничен преход, когато $n\to\infty$, получаваме равенството $c=F(c)$, т. е. c е корен на уравнението (11.1). □

Ще докажем още едно твърдение, което често се използва за приближено пресмятане на корените на уравнение (11.1) с помощта на итерационна редица.

Твърдение 2. *Нека c е корен на уравнението* (11.1) *и в някой симетричен относно точката c сегмент $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ производната на функцията F удовлетворява условието $|F'(x)|\leqq\alpha<1$. Тогава итерационната редица $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ при произволно x_0 от сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ клони към корена c.*

Доказателство. Най-напред ще докажем, че всички членове на итерационната редица $\{x_n\}$ принадлежат на сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Действително x_0 принадлежи на този сегмент по условие. Затова е достатъчно, като предположим, че x_{n-1} принадлежи на този сегмент, да докажем, че и x_n му принадлежи. За целта ще използваме формулата на Лагранж за разликата $F(x_{n-1})-F(c)$, като ще отчетем, че $F(c)=c$, $x_n=F(x_{n-1})$. Получаваме

(11.2) $$x_n-c=F(x_{n-1})-F(c)=(x_{n-1}-c)\,F'(\xi),$$

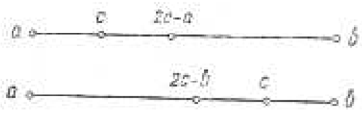
където ξ е някоя точка между x_{n-1} и c и следователно принадлежи на сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$. Тъй като $|F'(\xi)|\leqq\alpha<1$, то от равенството (11.2) следва

(11.3) $$|x_n-c|\leqq\alpha\,|x_{n-1}-c|.$$

Понеже $0<\alpha<1$, от (11.3) на свой ред получаваме

(11.4) $$|x_n-c|<|x_{n-1}-c|.$$

Неравенството (11.4) показва, че всеки следващ елемент x_n е разположен по-близко до c от предидущия елемент x_{n-1} и тъй като x_{n-1} принадлежи на сегмента $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$, който е симетричен от-



Фиг. 11.1

носно точката c, то и x_n принадлежи на този сегмент. Остава да се докаже, че редицата $\{x_n\}$ клони към c. Понеже неравенството (11.3) е изпълнено за всеки номер n, то с помощта на това неравенство получаваме

$$|x_n-c|\leq\alpha^n|x_0-c|, \tag{11.5}$$

откъдето е очевидно, че $x_n\to c$, тъй като $\alpha^n\to 0$. □

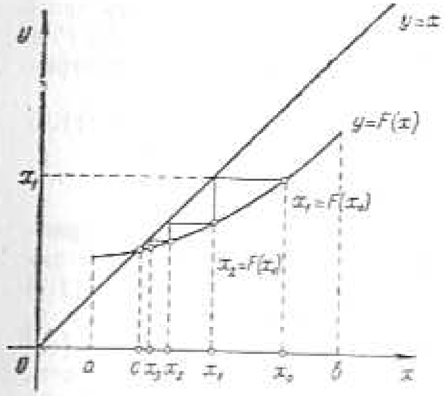
Ще направим една практическа забележка относно току-що доказаното твърдение. Да предположим, че с предварителни пресмятания сме установили, че търсеният корен на уравнението (11.1) е отделен в сегмента $[a, b]$ и производната на функцията F удовлетворява и този сегмент условието $|F'(x)|\leq\alpha<1$. Тъй като сегментът $[a, b]$ в общия случай няма да бъде симетричен относно търсения корен, то естествено възниква въпросът, как да се избере нулевото приближение x_0, за да може да се приложи доказаното твърдение 2.

Ще отбележим, че където и да се намира вътре в сегмента $[a, b]$ търсеният корен c, то поне единият от двата симетрични относно c сегменти $[a, 2c-a]$, $[2c-b, b]$ (вж. фиг. 11.1) изцяло принадлежи на сегмента $[a, b]$. Затова поне една от точките a или b принадлежи на симетричен относно корена c сегмент, навсякъде в който $|F'(x)|\leq\alpha<1$.

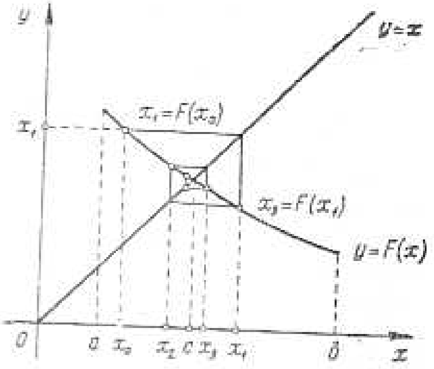
Следователно поне една от точките a или b може да се избере за x_0 съгласно доказаното твърдение 2. Конкретно за x_0 трябва да се избере онази от точките a или b, за която приближението $x_1=F(x_0)$ не излиза извън сегмента $[a, b]$.

На практика често се среща случаят, когато производната F' има постоянен знак в сегмента $[a, b]$. Ако този знак е положителен, от формула (11.2) следва, че редицата $\{x_n\}$ е монотонна. Този случай води до стъпаловидна диаграма, изобразена на фиг. 11.2. Ако производната F' е отрицателна в сегмента $[a, b]$, то от същата формула (11.2) се вижда, че всеки два последователни члена x_{n-1} и x_n лежат от различни страни на корена c. Този случай води до спираловидна диаграма, изобразена на фиг. 11.3.

Забележка. Възниква въпросът за оценка на грешката при метода на итерациите, т. е. за оценка на отклонението на n-тото приближение x_n от точната стойност на корена c. От фор-



Фиг. 11.2



Фиг. 11.3

мула (11.5) непосредствено се получава следната оценка:

$$|x_n-c|\leq\alpha^n(b-a),$$

където α е точната горна граница на функцията $|F'(x)|$ в сегмента $[a, b]$, в който е отделен търсеният корен.

Ако производната F' е отрицателна в сегмента $[a, b]$, то, както е показано по-горе, x_{n-1} и x_n лежат от различни страни на корена c и затова е в сила следната оценка:

$$|x_n-c|\leq|x_n-x_{n-1}|.$$

Ако в разглеждания случай се вземе за приближена стойност на корена полусумата на две последователни приближения

$$x_n^*=(x_n+x_{n-1})/2,$$

получаваме следната оценка за грешката:

$$|x_n^*-c|\leq\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|.$$

11.1.3. Методи на хордите и допирателните. Към широко разпространените методи за приближено решаване на уравнението $f(x)=0$ се отнасят методът на хордите и методът на допирателните, които представляват конкретни варианти на метода на итерациите.

Най-напред ще разгледаме метода на хордите. Нека търсеният корен на уравнението

$$f(x)=0 \tag{11.6}$$

е отделен в сегмента $[a, b]$. Ще предположим, че функцията f има в сегмента $[a, b]$ монотонна и непрекъсната първа производна с постоянен знак.

Възможни са четири случая: 1⁰) f' е ненамаляваща и положителна в $[a, b]$; 2⁰) f' е нерастяща и отрицателна в $[a, b]$; 3⁰) f' е нерастяща и положителна в $[a, b]$; 4⁰) f' е ненамаляваща и отрицателна в $[a, b]$.

Подробно ще разгледаме случая 1⁰. Вместо уравнението (11.6) вземаме уравнение от вида

(11.7) $\quad x=F(x)$, където $F(x)=x-(b-x)f(x)/(f(b)-f(x))$.*

Лесно се вижда, че отделените в сегмента $[a, b]$ корени на уравненията (11.6) и (11.7) съвпадат и затова тези уравнения са еквивалентни в сегмента $[a, b]$. За решаване на уравнението (11.7) използваме метода на итерациите, като за нулево приближение x_0 избираме точката a. Както обикновено, определяме редицата $\{x_n\}$ по рекурентната формула $x_n=F(x_{n-1})$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Ще докажем, че редицата $\{x_n\}$ клони към търсения корен c. Затова съгласно твърдение 1 от 11.1.2 е достатъчно да се докаже, че всички x_n принадлежат на сегмента $[a, b]$ и че редицата $\{x_n\}$ е сходяща.

По индукция ще докажем, че всички x_n лежат в сегмента $[a, b]$, по-точно в сегмента $[a, c]$, където c е търсеният корен. Тъй като x_0 принадлежи на сегмента $[a, c]$, то за провеждане на индукцията е достатъчно да допуснем, че x_n принадлежи на сегмента, и да докажем, че x_{n+1} също принадлежи на този сегмент. Понеже

(11.8) $$x_{n+1}=F(x_n)=x_n-(b-x_n)f(x_n)/(f(b)-f(x_n)),$$

то като отчетем, че $f(c)=0$, ще имаме**

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}=\frac{(b-x_n)[f(c)-f(x_n)]}{[f(b)-f(c)]+[f(c)-f(x_n)]}.$$

Прилагайки към изразите в средните скоби формулата на Лагранж, получаваме

(11.9) $$x_{n+1}-x_n=\frac{(b-x_n)(c-x_n)f'(\theta_n)}{(b-c)f'(\theta_n^*)+(c-x_n)f'(\theta_n)},$$

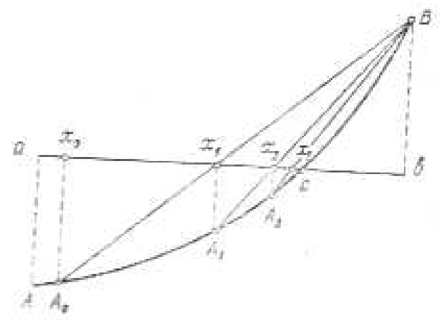
където $x_n<\theta_n<c$, $c<\theta_n^*<b$, т. е. $\theta_n<\theta_n^*$.

Понеже производната f' е ненамаляваща и положителна, можем да запишем $0<f'(\theta_n)\leqq f'(\theta_n^*)$. А оттук, тъй като $b-c>0$ и $c-x_n>0$, ще получим

$$(b-c)f'(\theta_n^*)+(c-x_n)f'(\theta_n)\geqq[(b-c)+(c-x_n)]f'(\theta_n)$$
$$=(b-x_n)f'(\theta_n).$$

* При това считаме, че $F(b)=b-f(b)/f'(b)$. Тогава функцията F е непрекъсната в целия сегмент $[a, b]$.

** По-нататък ще предполагаме, че $x_n<c$, тъй като, ако $x_n=c$, то $f(x_n)=f(c)=0$ и следователно $x_{n+1}=x_n=c$, т. е. x_{n+1} принадлежи на сегмента $[a, c]$.



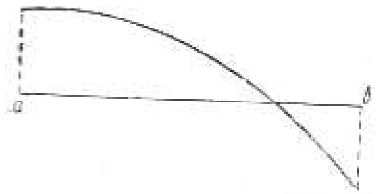
Фиг. 11.4

По такъв начин от равенствата (11.9) намираме $x_{n+1}-x_n<c-x_n$, или $x_{n+1}<c$, т. е. индукцията е завършена.

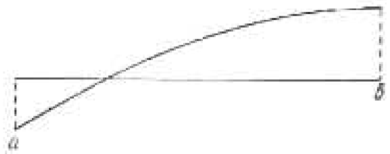
Ще докажем сега, че редицата $\{x_n\}$ е ненамаляваща. За това е достатъчно да покажем, че частното в дясната страна на равенството (11.8) е неположително. Тъй като производната f' е положителна в сегмента $[a, b]$, то функцията f е растяща в този сегмент и от неравенството $x_n\leqq c<b$ следва, че $f(x_n)\leqq f(c)=0$, $f(b)-f(x_n)>0$. Оттук следва и неположителността на разглежданото частно.

И така редицата $\{x_n\}$ е ненамаляваща и ограничена отгоре с числото c. По теорема 3.15 тази редица е сходяща и нейна граница е търсеният корен c.

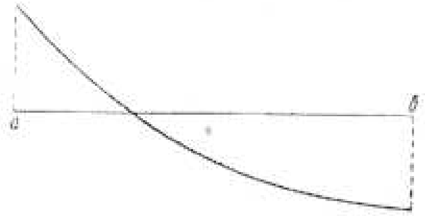
Ще дадем геометрична илюстрация на разгледания случай 1⁰. От формула (11.8) следва, че x_{n+1} е абсциса на точката на пресичане на хордата, съединяваща точките $A_n(x_n, f(x_n))$ и $B(b, f(b))$, от графиката на функцията f (на фиг. 11.4 са изобразени точките A_1 и A_2). Както беше казано, освен разгледания случай 1⁰ възможни са още три случая: 2⁰) производната f' е нерастяща и отрицателна в сегмента $[a, b]$; 3⁰) производната f' е нерастяща и положителна в сегмента $[a, b]$; 4⁰) производната е ненамаляваща и отрицателна в сегмента $[a, b]$. Тези случаи са изобразени съответно на фиг. 11.5, 11.6, 11.7. В случая 2⁰ уравнението (11.6), както по-горе, се заменя с уравнението (11.7) и за нулево приближение се избира точката $x_0=a$ (при това редицата $\{x_n\}$ се оказва също ненамаляваща). В случаите 3⁰ и 4⁰ уравнението (11.6) се заменя не с уравнението (11.7), а със следното уравнение: $x=F(x)$, където $F(x)=x-(a-x)f(x)/(f(a)-f(x))$, и за нулево приближение се взема точката $x_0=b$ (при това редицата $\{x_n\}$ се оказва нерастяща).



Фиг. 11.5



Фиг. 11.6



Фиг. 11.7

Приведената геометрична илюстрация дава названието на ***метода на хордите.***

Ще преминем сега към изложението на метода на допирателните или метода на Нютон.

Нека, както по-горе, търсеният корен c на уравнението (11.6) е отделен в сегмента $[a, b]$, в който f има непрекъсната и монотонна първа производна, запазваща постоянен знак. И тук са възможни същите четири случая, които отбелязахме при метода на хордите.

Ще разгледаме подробно случая 1^0, т. е. предполагаме, че производната f' е ненамаляваща и положителна в сегмента $[a, b]$. Уравнението (11.6) е еквивалентно на уравнението

(11.10) $$x = F(x),$$

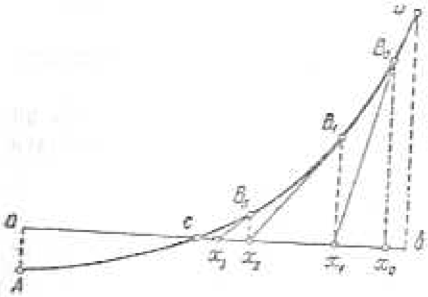
където

$$F(x) = x - f(x)/f'(x),$$

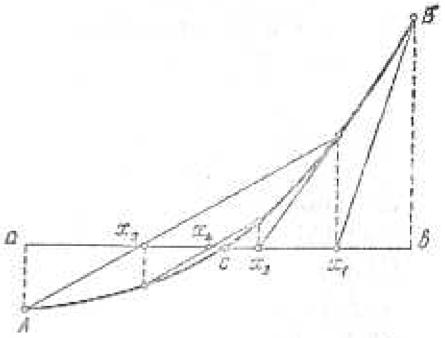
в сегмента $[a, b]$ и ще решаваме последното уравнение по метода на итерациите, като ще вземем за нулево приближение x_0 точката b и ще определим редицата $\{x_n\}$ по рекурентната формула

(11.11) $$x_{n+1} = F(x_n) = x_n - f(x_n)/f'(x_n).$$

За да докажем, че редицата $\{x_n\}$ клони към търсения корен c, е достатъчно съгласно твърдение 1 от 11.1.2 да покажем, че всички x_n лежат в сегмента $[a, b]$ и редицата $\{x_n\}$ е сходяща.



Фиг. 11.8



Фиг. 11.9

С индукция ще докажем, че всички x_n лежат в сегмента $[a, b]$, по-точно в сегмента $[c, b]$, където c е търсеният корен. Тъй като $x_0 = b$ принадлежи на сегмента $[c, b]$, то за провеждане на индукцията е достатъчно, като допуснем, че x_n принадлежи на сегмента $[c, b]$, да докажем, че и x_{n+1} също принадлежи на този сегмент.

Ако $x_n = c$, то $f(x_n) = f(c) = 0$ и от формула (11.11) следва, че $x_{n+1} = x_n = c$, т. е. индукцията е проведена. Нека сега $x_n > c$. Тогава от формула (11.11), отчитайки, че $f(c) = 0$, получаваме

$$x_n - x_{n+1} = (f(x_n) - f(c))/f'(x_n).$$

Като приложим към израза в числителя на дробта формулата на Лагранж, намираме

$$x_n - x_{n+1} = (x_n - c)\, f'(\xi_n)/f'(x_n),$$

където $c < \xi_n < x_n$. Понеже производната е ненамаляваща и положителна, дробта $f'(\xi_n)/f'(x_n)$ е положителна и не надминава единица, т. е. $x_n - x_{n+1} \leqq x_n - c$, или $x_{n+1} \geqq c$.

Индукцията е проведена. От положителността на производната f' следва, че функцията f е растяща, и затова от неравенството $c \leqq x_n$ получаваме $0 = f(c) \leqq f(x_n)$. Тогава $f(x_n)/f'(x) \geqq 0$. Оттук съгласно формула (11.11) $x_{n+1} \leqq x_n$, т. е. редицата $\{x_n\}$ е нерастяща. Понеже тази редица освен това е ограничена отдолу от числото c, то според теорема 3.15 тя е сходяща. Съгласно твърдение 1 от 11.1.2 границата ѝ е търсеният корен c.

Ще дадем геометрична илюстрация на разгледания случай 1^0. От формула (11.11) следва, че x_{n+1} е абсцисата на пресечната точка на оста Ox с допирателната към графиката на функцията f в точката $B_n(x_n, f(x_n))$ (на фиг. 11.8 са изобразени точките B_0, B_1 и B_2).

Приведената геометрична илюстрация оправдава названието — ***метод на допирателните***. Предлагаме на читателя самостоятелно да разгледа метода на допирателните за случаите 2^0, 3^0 и 4^0, посочени при излагането на метода на хордите.

Забележка 1. Възниква въпросът за оценка на грешката при метода на хордите и допирателните.

Като приложим към израза $f(x_n)=f(x_n)-f(c)$ формулата на Лагранж, имаме $f(x_n)=(x_n-c)f'(\xi_n)$. Оттук получаваме следната оценка:

(11.12) $$|x_n-c|\leq|f(x_n)|/m,$$

където m е минималната стойност на $|f'|$ в сегмента $[a, b]$. Формула (11.12) позволява да се оцени отклонението на x_n от точната стойност на корена c чрез стойността на модула на дадената функция f в точката x_n.

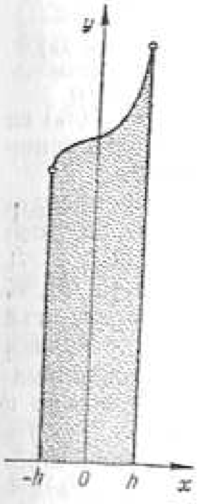
11.2. Приближени методи за пресмятане на определени интеграли

11.2.1. Уводни бележки. Ще се запознаем с три от най-често използваните приближени методи за пресмятане на определени интеграли: метод на правоъгълниците, метод на трапеците и метод на параболите.

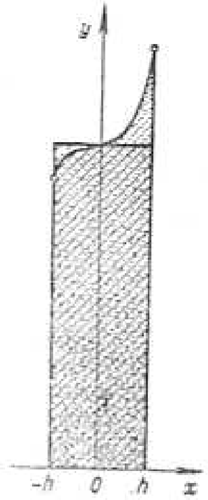
Основната идея на тези методи е да се замени подинтегралната функция с по-проста функция — полином, съвпадащ с f в някои точки. За изясняване на тази идея ще разгледаме при малко h интеграла $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$, представляващ лицето на тесен криволинеен трапец, лежащ под графиката на функцията f в сегмента $[-h, h]$ (вж. фиг. 11.10).

Заменяме функцията f с полином от нулева степен, а именно с константата $f(0)$. При това интегралът $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ приближено се заменя с лицето на правоъгълника, защрихован на фиг. 11.11. По-нататък ще покажем, че при определени условия за f грешката при такава замяна е от порядъка на h^3.

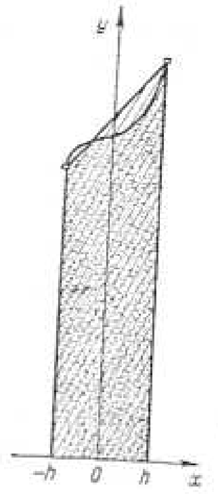
Да заменим сега функцията f с полином от първа степен, а именно с линейна функция $y=kx+b$, съвпадаща с $f(x)$ в точките $-h$ и h. При това интегралът $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ приближено се заменя с лицето на праволинейния трапец, защрихован на фиг. 11.12. По-нататък ще покажем, че грешката, която се прави при тази замяна, е също от порядък h^3.



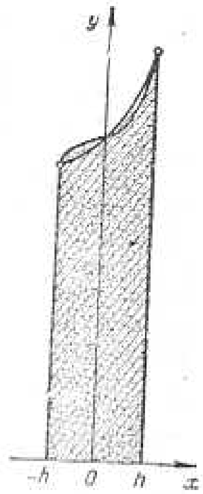
Фиг. 11.10



Фиг. 11.11



Фиг. 11.12



Фиг. 11.13

Заменяме накрая функцията f с полином от втора степен, т. е. с парабола $y=Ax^2+Bx+C$, съвпадаща с f в точките $-h$, 0, h. При това интегралът $\int_{-h}^{h} f(x)\,dx$ се заменя приближено с лицето на лежащата под параболата фигура, защрихована на фиг. 11.13. По-нататък ще покажем, че при определени изисквания за функцията f грешката при такава замяна е от порядъка на h^5.

Ако трябва да се пресметне интегралът $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ за произволен сегмент $[a, b]$, естествено е този сегмент да се раздели на достатъчно голям брой малки сегменти и за всеки от тях да се приложат изложените разсъждения. Така идваме до методите на правоъгълниците, трапеците и параболите в техния общ вид. За да оценим грешката при прилагане на методите на правоъгълниците, трапеците и параболите, ще разгледаме тези методи от друга гледна точка.

Най-напред ще въведем понятието усредняване на n числа.

Нека $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ са произволни положителни числа.

Всяко число c от вида

$$c=(\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n))/(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n) \tag{11.13}$$

се нарича усреднение на n-те числа $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$.

Очевидно е, че ако всички числа $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ са заключени между числата m и M $(m \leqq M)$, то и всяко усреднение c на тези числа удовлетворява неравенството $m \leqq c \leqq M$.

Ще предполагаме по нататък, че функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат на този сегмент. Тогава което и усреднение на n-те числа $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ да вземем, съществува такава точка ξ на сегмента $[a, b]$, че това усреднение да е равно на стойността $f(\xi)$. Наистина, тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то всички нейни стойности в този сегмент са заключени между най-голямата ѝ стойност M и най-малката ѝ стойност m. Следователно и всяко усреднение c на числата $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$ е заключено между m и M. Но каквато и да е тази междинна стойност на c, съгласно теорема 4.12 съществува такава точка ξ в сегмента $[a, b]$, че $c=f(\xi)$.

По такъв начин за непрекъснатата функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ формула (11.13) може да се напише във вида

$$(\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n (x_n))/(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)=f(\xi) \tag{11.14}$$

или във вида

$$(b-a)\frac{\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\cdots+\lambda_n f(x_n)}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}=(b-a)f(\xi). \tag{11.15}$$

От друга страна, за непрекъснатата функция в сегмента $[a, b]$ съгласно 9.4.2 съществува точка ξ' от сегмента $[a, b]$, за която е в сила формулата за средните стойности

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi'). \tag{11.16}$$

Съпоставянето на формули (11.15) и (11.16) позволява да се направи предположението, че при някой разумен избор на числата $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ и точките $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ пресмятането на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с голяма точност може да се замени с пресмятането на сумата от лявата страна на формула (11.15). Именно на тази идея за разумен избор на числата $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ и точките $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ са основани приближените методи за пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

11.2.2. Метод на правоъгълниците. Ще смятаме, че интегруемата функция f има непрекъсната втора производна в разглеждания сегмент.

Ще започнем с разглеждането на интеграл със симетрични граници $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$. За пресмятане на този интеграл ще тръгнем от формулите (11.15) и (11.16), в които полагаме $n=1$, $a=-c$, $b=c$, $x_1=0$, $\lambda_1=1$. Тогава очевидно и дясната страна на (11.15) е равна на $2c\,.\,f(0)$, така че

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx=2c\,.\,f(0)+R, \tag{11.17}$$

където R е остатъчният член (т. е. отклонението на числото $2c\,.\,f(0)$ от точната стойност на интеграла). За да оценим остатъчния член R, означаваме с F примитивна функция на f. Тъй като е в сила формулата на Нютон — Лайбниц $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx=F(c)-F(-c)$, то

$$R=F(c)-F(-c)-2c\,.\,f(0). \tag{11.18}$$

Разлагаме по формулата на Маклорен функцията $\Psi(x)=F(x)-F(-x)$. Като вземем остатъчния член във форма на Лагранж и означим с ξ' междинна променлива в интервала $(0, c)$, имаме

$$\Psi(c)=F(c)-F(-c)=\Psi(0)+\frac{1}{1!}c\,\Psi'(0)+\frac{1}{2!}c^2\,\Psi''(0)+\frac{1}{3!}c^3\,\Psi'''(\xi'). \tag{11.19}$$

Пресмятаме влизащите в тази формула стойности на $\Psi(0)$, $\Psi'(0)$, $\Psi''(0)$ и $\Psi'''(\xi')$:

$$\Psi(x)=F(x)-F(-x); \qquad \Psi(0)=F(0)-F(0)=0;$$
$$\Psi'(x)=F'(x)+F'(-x)=f(x)+f(-x); \qquad \Psi'(0)=f(0)+f(0)=2f(0);$$
$$\Psi''(x)=f'(x)-f'(-x); \qquad \Psi''(0)=f'(0)-f'(0)=0;$$
$$\Psi'''(x)=f''(x)+f''(-x); \qquad \Psi'''(\xi')=f''(\xi')+f''(-\xi')=2f''(\xi).$$

(В последното равенство използвахме формула (11.14) при $n=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$, $x_1=\xi'$, $x_2=-\xi'$ и сме означили с ξ някоя точка от интервала $(-c, c)$, в който по условие f'' е непрекъсната функция.)

Замествайки пресметнатите стойности във формула (11.19), ще имаме

$$\Psi(c)=F(c)-F(-c)=2c\,.\,f(0)+\frac{2}{3!}c^3 f''(\xi). \tag{11.20}$$

От (11.20) и (11.18) окончателно получаваме

(11.21) $$R = \frac{1}{3} c^3 f''(\xi) = \frac{1}{24}(2c)^3 f''(\xi).$$

От тази оценка за остатъчния член се вижда, че формула (11.17) е толкова по-точна, колкото е по-малка величината $2c$. Затова за пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ е удобно да се раздели сегментът $[a, b]$ на достатъчно голям брой части и към всяка от тези части да се приложи формулата за приближено интегриране (11.17). Като предполагаме, че функцията има в сегмента $[a, b]$ непрекъсната втора производна, ще разделим този сегмент на n равни части с помощта на точките $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{2n} = b$. Означаваме с x_{2k+1} средната точка на сегмента $[x_{2k}, x_{2k+2}]$. Тогава

(11.22) $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})] + R,$$

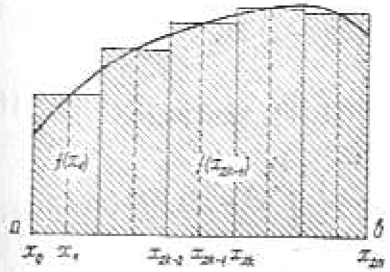
където

(11.23) $$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \frac{1}{24}\frac{(b-a)^3}{n^3}[f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + \cdots + f''(\xi_n)]$$
$$= \frac{(b-a)^3}{24 n^2} f''(\xi), \quad a < \xi < b.$$

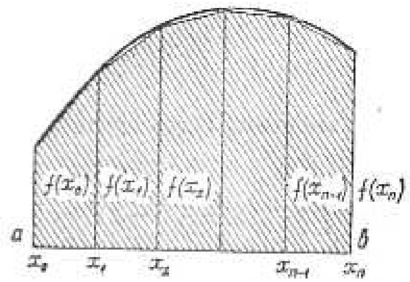
(Тук сме използвали формулата за усредняване (11.14) при $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$ и сме означили с ξ някоя междинна стойност на аргумента в интервала (a, b).)

Формула (11.22) се нарича ***формула на правоъгълниците.*** Геометричният ѝ смисъл е ясен от фиг. 11.14: Лицето на криволинейния трапец под графиката на f в сегмента $[a, b]$ приближено се замеся със сумата от лицата на означените на този чертеж правоъгълници.

11.2.3. Метод на трапеците. Нека, както и по-горе, функцията f има непрекъсната втора производна в разглеждания сегмент. Отново ще пресметнем интеграла $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$, но този път ще изхождаме от формулите (11.15) и (11.16), като ще считаме, че $n = 2$, $a = -c$, $b = c$, $x_1 = -c$, $x_2 = c$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.



Фиг. 11.14



Фиг. 11.15

Тогава

(11.24) $$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(-c) + f(c)]\,2c + R,$$

където R е остатъчният член, подлежащ на оценка.

Означаваме с F примитивна на функцията f и от $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx = F(c) - F(-c)$ получаваме

(11.25) $$R = F(c) - F(-c) - \frac{1}{2}[f(-c) + f(c)]\,.\,2c.$$

Нека, както в метода на правоъгълниците, $\Psi(x) = F(x) - F(-x)$. Като разложим функциите Ψ и Ψ' по формулата на Маклорен с остатъчен член в интегрална форма (вж. 9.5.4) и положим $x = c$, ще имаме

$$\Psi(c) = F(c) - F(-c) = \Psi(0) + \frac{1}{1!}c\Psi'(0) + \frac{1}{2!}c^2\Psi''(0) + \frac{1}{2!}\int_0^c (c-x)^2\Psi'''(x)\,dx,$$

$$\Psi'(c) = f(c) + f(-c) = \Psi'(0) + \frac{1}{1!}c\Psi''(0) + \frac{1}{1!}\int_0^c (c-x)\Psi'''(x)\,dx.$$

Замествайки в тези формули стойностите на $\Psi(0)$, $\Psi'(0)$, $\Psi''(0)$, пресметнати в 11.2.2, получаваме

$$F(c) - F(-c) = 2cf(0) + \frac{1}{2}\int_0^c \Psi'''(x)(c-x)^2\,dx,$$

$$f(c)+f(-c)=2f(0)+\int_0^c \Psi'''(x)(c-x)\,dx.$$

Като заместим последните два израза в (11.25), намираме

$$R=\int_0^c \Psi'''(x)\left[\frac{1}{2}(c-x)^2-c(c-x)\right]dx=-\frac{1}{2}\int_0^c (c^2-x^2)\,\Psi'''(x)\,dx.$$

Поради това, че функцията c^2-x^2 е неотрицателна в сегмента $[0, c]$, ще приложим към последния интеграл първата формула за средните стойности (гж. 9.4.2). Като вземем пред вид, че $\Psi'''(x)=f''(x)+f''(-x)$, и означим с ξ' подходяща стойност на аргумента от сегмента $[0, c]$, получаваме

$$R=-\frac{1}{2}[f''(\xi')+f''(-\xi'')]\int_0^c (c^2-x^2)\,dx=-\frac{1}{3}c^3[f''(\xi')+f''(-\xi')].$$

Като приложим към израза в средните скоби формулата за усредняване (11.14) при $n=2$, $\lambda_1=\lambda_2=1$ и означим с ξ подходяща стойност на аргумента от сегмента $[-c, c]$, намираме окончателно

$$R=-\frac{2}{3}c^3 f''(\xi)=-\frac{1}{12}(2c)^3 f''(\xi).$$

За пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, както и при метода на правоъгълниците, разделяме сегмента $[a, b]$ на n равни части с помощта на точките $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ и прилагаме формула (11.14) за всеки от частичните сегменти. Получаваме

(11.26)
$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})(f(x_{k-1})+f(x_k))+R_k\right\}$$

$$=\frac{b-a}{2n}\{[f(x_0)+f(x_1)]+[f(x_1)+f(x_2)]+\cdots+[f(x_{n-1})+f(x_n)]\}+R$$

$$=\frac{b-a}{2n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right\}+R,$$

където

$$R=R_0+R_1+\cdots+R_n=-\frac{(b-a)^3}{12n^3}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)+\cdots+f''(\xi_n)]$$

(11.27)
$$=-\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi), \qquad a\leq\xi\leq b.$$

(Използвали сме формулата за усредняване (11.14)). Формула (11.26) се нарича ***формула на трапеците.*** Геометричният смисъл на тази формула е ясен от фиг. 11.15: Лицето на криволинейния трапец, лежащ под графиката на функцията f в сегмента $[a, b]$, се заменя приближено със сумата от лицата на посочените на този чертеж праволинейни трапеци. Сравняването на остатъчния член (11.27) с остатъчния член (11.23) показва, че методът на трапеците не дава по-голяма точност в сравнение с метода на правоъгълниците.

11.2.4. Метод на параболите. Този път ще предполагаме, че функцията f има в разглеждания сегмент непрекъсната четвърта производна и отново ще пресметнем интеграла $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx$.

Както и по-горе, ще изходим от формулите (11.15) и (11.16), но този път при $n=3$, $a=-c$, $b=c$, $\lambda_1=\lambda_3=1$, $\lambda_2=\lambda$ (числото λ ще определим по-нататък), $x_1=-c$, $x_2=0$, $x_3=c$. Тогава

$$\int_{-c}^{c} f(x)\,dx=\frac{f(-c)+\lambda f(0)+f(c)}{2+\lambda}\,2c+R,$$

където R е остатъчният член, който трябва да определим. За оценка на остатъчния член ще означим, както и по-горе, с F примитивна функция на f и като отчетем, че $\int_{-c}^{c} f(x)\,dx=F(c)-F(-c)$, получаваме

(11.28)
$$R=F(c)-F(-c)-\frac{f(-c)+\lambda f(0)+f(c)}{2+\lambda}\,.\,2c.$$

Нека, както и по-горе, $\Psi(x)=F(x)-F(-x)$. Разлагаме функциите $\Psi(x)$ и $\Psi'(x)$ по формулата на Маклорен с остатъчен член в интегрална форма. Като заместим в тези разлагания $\Psi(0)$, $\Psi'(0)$, $\Psi''(0)$, пресметнати в 11.2.2, и като отчетем, че $\Psi^{(4)}(0)=0$, имаме

(11.29)
$$\Psi(c)=F(c)-F(-c)=2c\,f(0)+\frac{2}{3!}c^3 f''(0)+\frac{1}{4!}\int_0^c (c-x)^4\,\Psi^{(5)}(x)\,dx,$$

$$\Psi'(c)=f(c)+f(-c)=2\,.\,f(0)+\frac{2}{2!}c^2 f''(0)+\frac{1}{3!}\int_0^c (c-x)^3\,\Psi^{(5)}(x)\,dx.$$

От тези формули следва

(11.30)
$$\frac{f(-c)+\lambda f(0)+f(c)}{2+\lambda}\,.\,2c=2c\,.\,f(0)+2\frac{c^3}{2+\lambda}f''(0)+\frac{2}{3!\,(2+\lambda)}\,c\int_0^c (c-x)^3\,\Psi^{(5)}(x)\,dx.$$

От формула (11.28) се вижда, че остатъчният член R е равен на разликата на изразите (11.29) и (11.30). За да направим остатъчния член безкрайно малка величина от по-висок ред относно c, избираме λ така, че вторите членове в дясната страна на формулите (11.29) и (11.30) да съвпадат, т. е. полагаме $\frac{2}{3!}=\frac{2}{2+\lambda}$, или $\lambda=4$. При тази стойност на λ разликата на формулите (11.29) и (11.30) дава

$$R=\int_0^c\left[\frac{1}{24}(c-x)^4-\frac{c}{18}(c-x)^3\right]\Psi^{(5)}(x)\,dx$$
$$=-\frac{1}{24}\int_0^c\left[(c-x)^3\left(\frac{c}{3}+x\right)\right]\Psi^{(5)}(x)\,dx.$$

Като вземем пред вид, че функцията $[(c-x)^3(c/3+x)]$ е неотрицателна в сегмента $[0, c]$, ще приложим към последния интеграл първата формула за средните стойности. Отчитайки, че $\Psi^{(5)}(x)=f^{(4)}(x)+f^{(4)}(-x)$, и като означим с ξ' подходяща стойност на аргумента от сегмента $[0, c]$, получаваме

$$R=-\frac{1}{24}[f^{(4)}(\xi')+f^{(4)}(-\xi')]\int_0^c (c-x)^3(c/3+x)\,dx$$
$$=\frac{-(2c)^5}{2.2880}[f^{(4)}(\xi')+f^{(4)}(-\xi')].$$

Като приложим към израза в средните скоби формулата за усредняване (11.14) при $n=2$ и $\lambda_1=\lambda_2=1$ и като означим с ξ подходяща стойност на аргумента от сегмента $[-c, c]$, получаваме окончателно

$$R=-\frac{1}{2880}(2c)^5 f^{(4)}(\xi).$$

За пресмятане на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ разделяме сегмента $[a, b]$ на n равни части с точките $a=x_0<x_2<x_4<\dots x_{2n}=b$ и полагаме $x_{2k+1}=\frac{1}{2}(x_{2k}+x_{2k+2})$. Получаваме

(11.31)
$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\,dx$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{(x_{2k}-x_{2k-2})\frac{f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})}{6}+R_k\right\}$$
$$=\frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{2k+1})\right]+R,$$

където

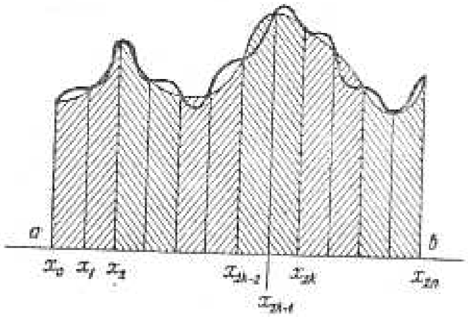
(11.32)
$$R=-\frac{(b-a)^5}{2880\,n^5}(f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)+\dots+f^{(4)}(\xi_n))$$
$$=-\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\xi),$$
$$a<\xi<b.$$

(Тук използвахме формулата за усредняване (11.14).)

Формулата (11.31) се нарича ***формула на Симпсън**** или ***формула на параболите.*** Геометричният ѝ смисъл е ясен от фиг. 11.16: Лицето на криволинейния трапец под графиката на функцията $f(x)$ в сегмента $[a, b]$ се заменя приближено със сумата от лицата на фигурите, защриховани на фиг. 11.16, лежащи под параболите. За да се убедим в това, е достатъчно да отбележим, че изразът в големите скоби на формула (11.31) дава лицето на фигурата, лежаща в сегмента $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ под параболата $y=Ax^2+Bx+C$, съвпадаща с f в точките x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+2}.

Формулата на Симпсън дава по-голяма точност от формулите на правоъгълниците и трапеците.

* Томас Симпсън — английски математик (1710 — 1761).



Фиг. 11.16

За да илюстрираме използването на формулата на Симпсън, ще пресметнем интеграла $J(x_0)=\int\limits_0^{x_0} e^{-x^2}\,dx$. Ще се ограничим за простота със стойности за x_0 от сегмента $0\leqq x_0\leqq 1$. Като положим $f(x)=e^{-x^2}$ и пресметнем производната $f^{(4)}(x)=4(4x^4-12x^2+3)e^{-x^2}$, лесно се вижда, че за всяко x от сегмента $0\leqq x\leqq x_0\leqq 1$ имаме $|f^{(4)}(x)|\leqq 20$. Оценката (11.32) ни дава, че $R<\frac{1}{144n^4}$. Следователно, като разделим сегмента $[0,\ x_0]$ на 5 равни части и заменим разглеждания интеграл със сумата от дясната страна на формулата на Симпсън, ще пресметнем този интеграл с точност $\frac{1}{144.5^4}<\frac{1}{90\,000}$.

12. Метрични, топологични, нормирани пространства

В тази глава ще бъдат изложени важни понятия и факти от общата топология, които се използват в различни области на математиката. Читателят без труд ще забележи, че тези понятия и факти са естествено обобщение на редица определения и твърдения, съдържащи се в предишните глави. Материалът от тази глава ще бъде използван също и в изложението по-нататък.

12.1. Метрични пространства

12.1.1. Определение на метрично пространство. Вече подчертахме, че фундаментална роля в анализа играе понятието граница. В основата на това понятие е определението за разстояние между числата, т. е. абсолютната стойност от разликата на тези числа. Затова е естествено да се въведе понятието разстояние вече не между две числа, а между два произволни елемента на някое абстрактно множество X. Това разстояние трябва да обобщава свойствата на разстоянието между числата от числовата ос. Във връзка с казаното ще дадем следното определение:

Определение 1. *В множеството X е определена* ***структура на метрично пространство,*** *ако е зададена реална функция ρ на две променливи x и y, $x, y\in X$, удовлетворяваща аксиомите:*

1) $\rho(x,\ y)=0$ *тогава и само тогава, когато* $x=y$;
2) $\rho(x,\ y)=\rho(y,\ x)$ *(аксиома за симетрията)*;
3) $\rho(x,\ y)\leqq\rho(x,\ z)+\rho(z,\ y)$ *(неравенство на триъгълника).*

Функцията ρ се нарича ***метрика*** *или* ***функция на разстоянието,*** *а числото $\rho(x,\ y)$ се нарича* ***разстояние*** *между точките x и y на множеството X.*

По такъв начин ***метричното пространство*** *се образува от множеството X и от функцията разстояние ρ.* Затова обикновено метричното пространство R се означава така: $R=(X,\ \rho)$.

Ако в аксиома 3) положим $x=y$ и вземем пред вид 1) и 2), получаваме $0\leqq\rho(y, z)$, т. е. функцията разстояние е неотрицателна функция на аргументите си.

Ще приведем за пример най-често срещащите се метрични пространства.

Примери:

1. Множеството на реалните числа се превръща в метрично пространство, ако за всеки две числа x, y положим $\rho(x, y)=|x-y|$. Това метрично пространство се означава обикновено с E^1.

2. Аритметичното n-мерно пространство $X=A^n$, точките на което (или елементите на множеството X) са наредените n-торки от числа $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, е очевидно метрично пространство, ако положим

$$\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2},$$

където $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, и се означава с $E^n=(X, \rho)$. Аксиомите 1) и 2) от определението на метрично пространство, както лесно се вижда, са изпълнени. Верността на аксиома 3) следва от неравенството на Коши—Буняковски за сума (вж. 9.5). Действително

$$\rho^2(x, y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2=\sum_{i=1}^{n}[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i)+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i||z_i-y_i|+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

$$\leqq\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^2\right)^{1/2}+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2$$

$$=\rho^2(x, z)+2\rho(x, z)\cdot\rho(z, y)+\rho^2(z, y)=[\rho(x, z)+\rho(z, y)]^2.$$

По такъв начин $\rho(x, y)\leqq\rho(x, z)+\rho(z, y)$ и неравенството на триъгълника е доказано. Ще отбележим, че по-горе приложихме неравенството на Коши — Буняковски към сумата

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|\cdot|z_i-y_i|=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\quad \text{където } a_i=|x_i-z_i|,\ b_i=|z_i-y_i|.$$

В множеството X, елементи на което са наредените n-орки от числа $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, може да се въведат и други функции разстояние, например: a) $\rho_0=\frac{\rho(x, y)}{1+\rho(x, y)}$, x, $y\in X$, където функцията ρ е въведената в пример 2; b) $\rho_1(x, y)=\max\{|x_i-y_i|: 1\leqq i\leqq n\}$, x, $y\in X$; c) $\rho_2(x, y)=\sum^{n}|x_i-y_i|$, x, $y\in X$; d) $\rho_3(x, y)$

$$=\begin{cases}1, & \text{ако } x\neq y,\\ 0, & \text{ако } x=y;\end{cases}\qquad \text{e) } \rho_4(x, y)=\begin{cases}\rho(x, y), & \text{ако } \rho(x, y)<1,\\ 1, & \text{ако } \rho(x, y)\geqq 1,\end{cases}\quad \text{където}$$

функцията ρ е определена го-рано в пример 2.

Естествено при това едно и също множество X се превръща в различни метрични пространства $R_i=(X, \rho_i)$, където $i=1, 2, 3, 4$.

3. Нека Y е множеството на непрекъснатите функции, дефинирани в сегмента $[a, b]$. Въвеждаме метрика, като полагаме $\rho(x, y)=\max\{|x(t)-y(t)|: t\in[a, b]\}$. Полученото пространство е метрично пространство. То се означава с

$$C_{[a, b]}=(Y, \rho).$$

По същия начин множеството Z на n пъти непрекъснато диференцируемите функции в сегмента $[a, b]$, $n\geqq 1$, става метрично пространство, ако въведем метрика по правилото:

$$\rho(x, y)=\max\{|x^{(i)}(t)-y^{(i)}(t)|: i=0, 1, \dots, n,\ t\in[a, b]\},$$

$$x^{(0)}(t)\equiv x(t),\ y^{(0)}(t)\equiv y(t).$$

Това пространство се означава обикновено така:

$$C^n_{[a, b]}=(Z, \rho),\ n\geqq 1.$$

Пространството $C_{[a, b]}$ ще означаваме понякога и със символа $C^0_{[a, b]}$.

4. Нека V е множеството на всички ограничени редици $x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ от реални числа. Полагаме $\rho(x, y)=\sup_i|x_i-y_i|$. Очевидно аксиомите 1) — 3) са изпълнени. Това пространство се означава с $m=(V, \rho)$.

Ще отбележим, че всяко подмножество X_0 на метричното пространство $R(X, \rho)$ е също на свой ред метрично пространство със същата функция разстояние ρ. Наистина, ако аксиомите, определящи метриката ρ, са изпълнени за всяко x, y, $z\in X$, те са изпълнени и за x, y, z, принадлежащи на X_0. Така всяко подмножество на E^n е метрично пространство с функция $\rho(x, y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$. Също така всяко подмножество на $C^n[a, b]$ е метрично пространство, $n=0, 1, 2, \dots$

Двойката $(X_0, \rho)=R_0$ се нарича подпространство на $R=(X, \rho)$.

Ще отбележим също, че ако ρ е функция разстояние в някое метрично пространство, то по формулите а) или е) от пример 2 могат да се получат нови функции разстояния.

12.1.2. Отворени и затворени множества. Кълбо $O(a, r)$ в метричното пространство R (затворено кълбо $K(a, r)$) с център точката a и радиус r се нарича съвкупността от точките $x \in X$, за които $\rho(x, a)<r$ $(\rho(x, a)\leq r)$.

Определение 2. *Множеството* $\Sigma \subset X$ *се нарича* ***отворено*** *в* $R(X, \rho)$, *ако заедно с всяка своя точка съдържа и някое кълбо* $O(x, r)$.

Определение 3. ***Околност*** *на точката* $x \in X$ *се нарича всяко отворено множество, съдържащо* x. *Околност на някое подмножество на* X *(може да бъде и самото* X*) се нарича всяко отворено множество, съдържащо даденото подмножество. Околност на точка* x *ще означаваме със* Σ_x.

Определение 4. *Нека* $Y \subset X$, *тогава точката* $x \in X$ *се нарича* ***точка на сгъстяване*** *на множеството* Y, *ако всяка околност на точката* x *съдържа поне една точка* $y \in Y$, *различна от* x.

Точката $y \in Y$ *се нарича* ***изолирана точка*** *за множеството* Y, *ако съществува околност на точката* y, *в която няма нито една точка от* Y, *различна от* y.

Определение 5. *Точката* y, *принадлежаща на множеството* Y *— подмножество на* X, *се нарича* ***вътрешна,*** *ако се съдържа в* Y *заедно с някоя своя околност. Точките, вътрешни за допълнението на* Y *в* X, *се наричат* ***външни*** *по отношение на* Y. *Ако точката не е нито вътрешна, нито външна по отношение на* Y, *тя се нарича* ***контурна точка*** *за* Y. *Множеството от контурните точки на* Y *се означава с* ∂Y.

Определение 6. *Едно множество в метрично пространство се нарича* ***затворено,*** *ако допълнението му е отворено.*

В сила е следното твърдение:

Лема 1. *Обединението на произволен брой отворени множества и сечението на краен брой отворени множества са отворени множества,* $\emptyset$ *и* X *са отворени.*

Сечението на произволен брой затворени множества и обединението на краен брой затворени множества са затворени множества, $\emptyset$ *и* X *са затворени.*

Доказателство. Нека $\{\Sigma_\alpha\}$ е семейство от отворени множества в X. Ако $x \in \bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$, то съществува такова α_0, че $x \in \Sigma_{\alpha_0}$, следователно съществува такова число $r>0$, че $O(x, r) \subset \Sigma_{\alpha_0}$, т. е. $O(x, r) \subset \bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$. Следователно $\bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$ е отворено множество.

По-нататък, ако $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ са отворени в X, то от това, че $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \Sigma_i$, следва, че за всяко $i=1, 2, 3, \dots, n$ имаме $x \in \Sigma_i$, т. е. за всяко $i=1, 2, 3, \dots, n$ съществуват такива $r_i>0$, че $O(x, r_i) \subset \Sigma_i$. Като изберем $r=\min_{1\leq i\leq n} r_i$, за всяко $i=1, 2, 3, \dots, n$ получаваме

$$O(x, r) \subset O(x, r_i), \text{ т. е. } O(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Sigma_i,$$

т. е. сечението на множествата Σ_i, $i=1, 2, \dots, n$, е отворено множество.

Второто твърдение непосредствено следва от първото, като използваме принципа на двойнственост за множества. Например нека $\{F\}$ е семейство от затворени множества в X. За всяко α ще разгледаме отвореното множество $\Sigma_\alpha = F'_\alpha$.* Тогава $\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)' = \bigcup_\alpha F'_\alpha = \bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$, т. е. $\left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)'$ е отворено множество; следователно $\bigcap_\alpha F_\alpha$ е затворено. Това, че $\emptyset$ и X са едновременно отворени и затворени, е очевидно.

Определение 7. ***Затворена обвивка*** $\bar{Y}$ *на множеството* Y *се нарича сечението на всички затворени множества, съдържащи* Y.

В сила е следната лема:

Лема 2. *Затворената обвивка на множество в метрично пространство има следните свойства:*

1) $\bar{A} \supset A$; 2) $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$; 3) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$; 4) $\bar{\emptyset}=\emptyset$, $\bar{X}=X$.

Доказателство. Свойство 1) е очевидно: ако $x \in A$, то x принадлежи на всяко затворено множество, съдържащо A, и според лема 1 $x \in \bar{A}$. Свойство 2) следва от това, че $\bar{A}$ е затворен (лема 1). Ще докажем свойство 3). Тъй като $\bar{A}\cup\bar{B} \supset \bar{A}$, а $\overline{\bar{A}\cup\bar{B}} \supset \overline{A\cup B}$, то $\overline{A\cup B} \supset \bar{A}$. Понеже $\overline{A\cup B}$ е затворено множество, то $\overline{A\cup B} \supset \bar{A}$. Аналогично $\overline{A\cup B} \supset \bar{B}$. По такъв начин $\overline{A\cup B} \supset \bar{A}\cup\bar{B}$. Обратно, $\bar{A}\cup\bar{B}$ е според лема 1 затворено множество и следователно $\bar{A}\cup\bar{B} \supset \overline{A\cup B}$. Твърдение 4) означава, че $\emptyset$ и X са затворени множества. □

* Ще напомним, че A' означава допълнението на множеството A.

Очевидно, ако $C \subset D$, то $\bar{C} \subset \bar{D}$.

Ще дадем следното определение:

Определение 8. *Нека $R=(X, \rho)$ е метрично пространство, а $R_0=(Y, \rho)$ $(Y \subset X)$ е негово подпространство. Множество Σ_Y от подпространството $R_0(\Sigma_Y \subset Y)$ се нарича* ***отворено относно*** R_0, *ако съществува такова отворено в R множество Σ_X, че $\Sigma_Y = Y \cap \Sigma_X$. Аналогично множество F_Y от подпространството $R_0(F_Y \subset Y)$ се нарича* ***затворено относно*** R_0, *ако съществува такова затворено в R множество F_X, че $F_Y = Y \cap F_X$.*

Множество, което е отворено относно R_0, ще наричаме ***„относително отворено"***.

Лесно се вижда, че едно отворено (затворено) относно R_0 множество $\Sigma_Y(F_Y)$ е отворено (затворено) в R_0 (разглеждано като подпространство на R). Вярно е и обратното: ако множеството е отворено (затворено) в R_0, то е отворено (затворено) относно R_0.

Ще подчертаем, че когато се говори за относително отворено (затворено) множество, наред с основното пространство се посочва и подпространството R_0, относно което се дава определението.* Аналогично на определението на относително отворени и относително затворени множества се определя и относително затворена обвивка. Относително затворена обвивка $\tilde{A}$ на множеството A в R_0 се определя чрез съотношението $\tilde{A}=\bar{A} \cap Y$, където $R_0=(Y, \rho)$, $\bar{A}$ е затворената обвивка на A в R.

Определение 9. *Пространството $R=(X, \rho)$ се нарича* ***свързано***, *ако не може да се представи като обединение на две непразни отворени непресичащи се множества.*

Очевидно пространството е свързано тогава и само тогава, когато не може да се представи като обединение на две непразни затворени непресичащи се множества.

Множеството Y, принадлежащо на метричното пространство R, е свързано, ако Y е свързано като подпространство в R.

12.1.3. Декартово произведение на метрични пространства. Ако $R_1(X_1, \rho_1)$, $R_2(X_2, \rho_2)$ са две метрични пространства, то може да се определи декартово произведение на тези метрични пространства. Нека $X=X_1 \times X_2$ е декартовото произведение на множествата X_1 и X_2, т. е. множеството от всевъзможните двойки (x_1, x_2),

* Например интервалът $\Sigma=(0,2)$ е отворен относно пространството E^1 и не е отворено множество относно пространството E^2. Действително, тъй като $\Sigma \subset E^1 \subset E^2$, то $\Sigma = E^1 \cap O(a, 1)$, където $O(a, 1)$ е отворен кръг в E^2 с център в точката $(1, 0)$ и радиус 1, т. е. интервалът е отворен в E^1 относно пространството E^2. Ако се разглежда интервалът $\Sigma=(0,2)$ в E^2, то той не е отворено множество, понеже не съдържа нито един кръг.

където $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Метрика ρ в множеството X може да се въведе например по следното правило:

$$\rho(x, y)=(\rho_1^2(x_1, y_1)+\rho_2^2(x_2, y_2))^{1/2},$$

където $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, $x_i \in X_i$, $y_i \in X_i$, $i=1, 2$. Двойката $R(X, \rho)$, където $X=X_1 \times X_2$, ρ е функцията разстояние, въведена по-горе, е метрично пространство и се нарича ***декартово произведение*** на метричните пространства R_1 и R_2: $R=R_1 \times R_2$.

Ако е зададена изброима редица от метрични пространства $R_1(X_1, \rho_1)$, $R_2(X_2, \rho_2)$, $R_3(X_3, \rho_3)$, ... и с X е означено декартовото произведение на множествата X_i, $i=1, 2, 3, \ldots$, $X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, т. е. X се състои от елементи $x=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $x_i \in X_i$, то може да се даде следното определение:

Определение 10. ***Декартово произведение*** *R на метричните пространства R_1, R_2, R_3, ... се нарича двойката (X, ρ), където*

$$X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i, \qquad \rho(x, y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\rho(x_k, y_k)/(1+\rho(x_k, y_k)),$$

$$x, y \in X, \; x_k, y_k \in X_k, \; x=(x_1, x_2, x_3, \ldots), \; y=(y_1, y_2, y_3, \ldots).$$

То се означава така: $R=\prod_{i=1}^{\infty} R_i$.

12.1.4. Навсякъде гъсти и съвършени множества

Определение 11. *Нека A и B са две множества от метричното пространство $R=(X, \rho)$. Множеството A се нарича* ***гъсто*** *в B, ако $\bar{A} \supset B$. Множеството A се нарича* ***навсякъде гъсто*** *в пространството R, ако $\bar{A}=R$.*

Пространства, в които има изброими, навсякъде гъсти множества, се наричат ***сепарабелни***.

Разгледаните примери на метрични пространства E^1, E^n, $C^n[a, b]$ са примери на сепарабелни метрични пространства. Така в E^n изброимо, навсякъде гъсто множество е множеството на точките с рационални координати. В пространствата $C^n[a, b]$, $n \geq 0$, такова множество е множеството на полиномите с рационални коефициенти.

Пространството m е пример за несепарабелно пространство.*

За да се убедим в това, можем да постъпим така:

* Вж. пример 4 от 12.1.1.

Подмножеството E_0 на m от редиците, състоящи се само от нули и единици, е с мощността на континуума.

Взаимните разстояния в пространството m между два различни елемента a и b от множеството E_0 са равни на единица. Следователно е невъзможно да се приближи с произволна точност всеки от тези вектори с елементите на изброимо множество, тъй като кълбата с центрове в точките на множеството E_0 и радиуси 1/3 не се пресичат, а образуват множество с мощността на континуума. Тъй като $E_0 \subset m$, $m=(V, \rho)$, то пространството m е несепарабелно.

Множеството A се нарича ***навсякъде негъсто*** *в метричното пространство R, ако във всяко отворено множество на това пространство има отворено множество, несъдържащо нито една точка от множеството A.*

Например в пространството $C[0, 1]$ множеството A на функциите на вида $y=nx^2$ (n цяло число) е навсякъде негъсто. Друг пример за навсякъде негъсто множество в сегмента $[0, 1]$ (разглеждан като метрично пространство) е т. нар. канторово съвършено множество.

Множеството A, съдържащо се в метрично пространство, се нарича ***съвършено,*** *ако е затворено и всяка точка на множеството A е негова точка на сгъстяване.*

Канторовото съвършено множество в сегмента $I=[0, 1]$ се построява по следния начин: От сегмента $[0, 1]$ отделяме интервала $(1/3, 2/3)$ и останалото множество — обединението на двата сегмента $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$, означаваме с I_1. От тези два сегмента на свой ред се отделя по една трета — интервалите $(1/9, 2/9)$, $(7/9, 8/9)$. Обединението на останалите сегменти означаваме с I_2. Продължаваме този процес неограничено. Очевидно $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ и I_n е обединение на 2^n сегмента, всеки от които има дължина 3^{-n}.

Множеството $K=\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ се нарича канторово множество.

Ще покажем, че K е съвършено. Това, че то е затворено, следва от построението и от лема 1; остава да се покаже, че не съдържа изолирани точки. Нека $x \in K$ и нека Σ_x е произволна околност на точката x, т. е. отворено множество. Тогава според определението на отворено множество съществува интервал σ_x (кълбо с център в точката x), съдържащ точката x и $\sigma_x \subset \Sigma_x$. Нека A_n е тази отсечка от множеството I_n, която съдържа точката x. Ако n е достатъчно голямо, то $A_n \subset \sigma_x$. Означаваме с a_n този край на отсечката A_n, който не съвпада с точката x. Очевидно от построението на множеството K имаме $a_n \in K$. Следователно произволната околност на точката x — множеството Σ_x, съдържа точката $a_n \neq x : a_n \in A_n \subset \sigma_x \subset \Sigma_x$, т. е. точката x е точка на сгъстяване за множеството K и K е съвършено.

Ще докажем сега, че K е навсякъде негъсто множество в сегмента $[0, 1]$, разглеждан като метрично пространство с обикновено евклидово разстояние. Тъй като всяко отворено множество в сегмент съдържа в себе си интервал, достатъчно е да покажем, че всеки интервал (кълбо) съдържа вътре в себе си друг интервал, в който няма точки, принадлежащи на K. Нека σ е произволен интервал от сегмента $[0, 1]$. Ако той не съдържа точки на K, построението е завършено. Ако съдържа точка $x \in K$ и $x \in \sigma$, то можем да изберем толкова голямо m, че $x \in A_m \subset I_m$ и $A_m \subset \sigma$, m е естествено число. Намираме интервала с дължина 3^{-m-1} и с център в средата на A_m. Този интервал не съдържа точки от K, а се съдържа в σ. □

12.1.5. Сходимост. Непрекъснати изображения

Определение 12. *Редицата $\{a_n\}$ от точки на метрично пространство се нарича* ***сходяща*** *към точката a от това пространство, ако всяка околност на точката a съдържа всички точки на редицата с изключение на краен брой. Ако редицата $\{a_n\}$ е сходяща към (клони към) a, това се записва $a_n \to a$, $n \to \infty$, или $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.*

Непосредствено от определението следва, че ако $a_n \to a$, то $\rho(a_k, a) \to 0$, $n \to \infty$.

В сила е твърдението:

Лема 3. *Точката $a \in R$ принадлежи на затворената обвивка $\bar{A}$ на дадено множество A тогава и само тогава, когато съществува редица $\{a_n\}$ от точки на множеството A, сходяща към a.*

Доказателство. Нека $a \in \bar{A}$, тогава a принадлежи на всяко затворено множество, съдържащо A. Да вземем за околност на точката a кълбото $O(a, n^{-1})$, където n е естествено число, по-голямо от някое фиксирано число. В това кълбо има поне една точка $a_n \in A$. Ако това не е така, то $a \notin A$ и съществува околност на точката a, в която няма точки на A. Допълнението на тази околност е затворено множество, съдържащо множеството A, и точката a не може да принадлежи на това затворено множество. Така стигаме до противоречие и следователно $a_n \to a$ при $n \to \infty$, $a_n \in A$.

Вярно е и обратното: ако $a_n \to a$ и $a_n \in A$, то $a \in \bar{A}$.

Ако всяка околност на точката a се пресича с A, то $a \in \bar{A}$. Действително, ако $a \in A$, то $a \in \bar{A}$. Ако $a \notin A$, то ако допуснем, че $a \notin \bar{A}$ и вземем допълнението $\bar{A}'$, ще получим околност на точката

a — множеството $\bar{A}'$, която не се пресича с A, а това противоречи на условието, че всяка околност на точката a се пресича с A.

От $a_n \to a$ и $a_n \in A$ следва, че всяка околност на точката a съдържа точка a_n от множеството A, т. е. се пресича с A. □

Едновременно доказахме и следното твърдение:

Твърдение 1. *Точката $a \in \bar{A}$ тогава и само тогава, когато всяка околност Σ_a на точката a се пресича с A.*

Понятието непрекъснатост на функция на числов аргумент допуска естествено обобщение в случая, когато имаме изображение на едно метрично пространство в друго. Ще дадем следното определение:

Определение 13. *Изображението g на едно метрично пространство $R(X, \rho)$ в друго $R_0(Y, \rho_0)$ се нарича* ***непрекъснато*** *в точката x, ако за всяка околност $\Sigma_{g(x)}$ на точката $g(x)$ съществува такава околност Σ_x на точката x, че $g(\Sigma_x) \subset \Sigma_{g(x)}$. Ако g е непрекъснато във всяка точка на пространството R, то g се нарича непрекъснато изображение в R.*

В сила е следната лема:

Лема 4. *Изображението $g: R \to R_0$ на едно метрично пространство R в друго R_0 е непрекъснато в R тогава и само тогава, когато прообразът на всяко отворено множество е отворено множество.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека $g: R \to R_0$ е непрекъснато изображение на R в R_0 и Σ_0 е отворено множество в R_0. Ако $g^{-1}(\Sigma_0) = \{x : x \in R,\ g(x) \in \Sigma_0\} = \varnothing$, то $g^{-1}(\Sigma_0)$ е очевидно отворено, тъй като $\varnothing$ е отворено.

Нека $g^{-1}(\Sigma_0) \neq \varnothing$ и $x \in \Sigma = g^{-1}(\Sigma_0)$. Тъй като $x \in g^{-1}(\Sigma_0)$, то $g(x) \in \Sigma_0$; следователно Σ_0 може да се разглежда като околност на точката $g(x)$. Поради непрекъснатостта на g в R (а следователно и в точката x) съществува такава околност Σ_x на точката x, че $g(\Sigma_x) \subset \Sigma_0$, т. е. $\Sigma_x \subset g^{-1}(\Sigma_0)$. И така за произволна точка $x \in g^{-1}(\Sigma_0)$ съществува такава околност Σ_x, че $\Sigma_x \subset g^{-1}(\Sigma_0)$. Понеже $\Sigma = \bigcup_{x \in \Sigma} \Sigma_x$, то множеството Σ е отворено като обединение на отворените множества Σ_x. Така че прообразът на всяко отворено множество е отворено.

Достатъчност. Нека е дадено, че при изображението $g: R \to R_0$ прообразът на всяко отворено множество е отворено. Вземаме произволна точка $x \in X$, $R = (X, \rho)$, и произволна околност $\Sigma_{g(x)}$ на образа ѝ в R_0. Тогава $\Sigma_x = g^{-1}(\Sigma_{g(x)})$ по условие е отворено множество в R и е околност на точката x, като при това образът на Σ_x при изображението g се съдържа в $\Sigma_{g(x)}$. Следователно изображението g според определението е непрекъснато в точката x.

Тъй като тези разсъждения са приложими за всяка точка $x \in R$, то изображението g е непрекъснато в R. □

Определение 13 за непрекъснатост на изображение $g: R \to R_0$ в точка $x \in R$ очевидно може да се изкаже и по следния начин:

Определение 13′. *Изображението g на едно метрично пространство $R(X, \rho)$ в друго $R_0(Y, \rho_0)$ се нарича* ***непрекъснато*** *в точката x, ако за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува такова число $\delta > 0$, че ако точката y принадлежи на отвореното кълбо $O(x, \delta)$ с център в точката x и радиус δ, то точката $g(y)$ принадлежи на отвореното кълбо $O_0(g(x), \varepsilon)$ с център в точката $g(x)$ и радиус ε, лежащо в пространството R_0.*

Последното определение може да се изкаже и по следния начин: Изображението $g: R \to R_0$ е непрекъснато в точката x, ако $\lim_{y \to x} g(y) = g(x)$.

От неравенството на триъгълника лесно се получава, че функцията разстояние ρ е непрекъсната в точката x при фиксирано y. В действителност тя е непрекъсната функция и по двете променливи.

В случая, когато метричното пространство R е числовата ос с обичайното разстояние между числата, т. е. пространството E^1, а изображението g е реална функция в E^1, даденото определение 13 за непрекъснатост очевидно съвпада с определенията от гл. 4.

Ще дадем още следното определение:

Определение 14. *Изображението $g: R \to R_0$ на метричното пространство R в метричното пространство R_0 се нарича* ***хомеоморфизъм,*** *ако g изобразява R в R_0 взаимно еднозначно и g е непрекъснато заедно с обратното си изображение g^{-1}.*

12.1.6. Компактност. ***Покритие*** *на множество A в метрично пространство се нарича всяко семейство от отворени множества, обединението на които съдържа A.*

Определение 15. *Метричното пространство $R = (X, \rho)$ се нарича* ***компактно*** *или* ***компакт,*** *ако всяко покритие съдържа крайно подпокритие, т. е. от всяко покритие от отворени множества на пространството R може да се избере крайна система (подпокритие), съдържаща цялото пространство.*

Всеки сегмент $[a, b]$ от числовата права е компакт, което следва от това, че от всяко покритие на този сегмент с отворени множества може да се избере крайно подпокритие.

Може да се покаже, че едно метрично пространство е компактно тогава и само тогава, когато от всяка редица от точки може да се избере подредица, сходяща към точка от това пространство.

Лема 5. *Затворено подмножество на компактно метрично пространство е компактно.*

Доказателство. Нека F е затворено подмножество на компактното метрично пространство $R(X, \rho)$ и $\{\Sigma_\alpha\}$ е система от отворени подмножества, покриваща F. Към системата $\{\Sigma_\alpha\}$ присъединяваме отвореното множество $G = X \setminus F$ и полученото покритие на цялото пространство означаваме със $\{\Sigma'_\alpha\} = \{\Sigma_\alpha\} \cup G$. Поради компактността на R от системата $\{\Sigma'_\alpha\}$ можем да изберем крайно подпокритие на цялото пространство — системата $\{\Sigma'_\alpha\}_{i=1}^N$. Премахвайки, ако е необходимо, от системата $\{\Sigma'_i\}_{i=1}^N$ множеството G, получаваме крайно покритие на множеството F, избрано от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. □

Лема 6. *Образът на компактно пространство $R = (X, \rho)$ при непрекъснато изображение е компактно пространство.*

Доказателство. Нека g е непрекъснато изображение на R в R_0. Нека $\{\Sigma_\alpha\}$ е покритие на R_0 с отворени множества, а $\Psi_\alpha = g^{-1}(\Sigma_\alpha)$. Множествата Ψ_α са отворени (вж. лема 4) и $\{\Psi_\alpha\}$ е покритие на R. Поради компактността на R можем да изберем от това покритие крайно подпокритие: $\{\Psi_i\}_{i=1}^m$; тогава $\{\Sigma_i\}_{i=1}^m$, $m < \infty$, е покритие на R_0, като $\Sigma_i = g(\Psi_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. □

Лема 7. *Всяко компактно подмножество на метрично пространство $R(X, \rho)$ е затворено.*

Доказателство. Нека F е компактно подмножество на $R(X, \rho)$ и нека $a \notin X \setminus F$; за всяко $x \notin F$ съществуват съответно околности Σ_a и Σ_x на точките a и x, за които $\Sigma_a \cap \Sigma_x = \varnothing$. За такива околности могат да бъдат избрани например кълбата $O(a, r)$ и $O(x, r)$, $r = \frac{1}{3}\rho(a, x)$. Поради компактността на F можем да изберем от това покритие крайно подпокритие $\{\Sigma_{x_i}\}_{i=1}^m$. Да разгледаме съответствуващите на Σ_{x_i} околности Σ^i_a, които по построение не се пресичат със Σ_{x_i}, и $\bigcap_{i=1}^{m} \Sigma^i_a = \Sigma$ е околност на точката a. Очевидно $\Sigma \cap \Sigma_{x_i} = \varnothing$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и затова $\Sigma \cap F = \varnothing$. Следователно $\Sigma \subset X \setminus F$, т. е. множеството $X \setminus F$ е отворено, а F е затворено. □

Лема 8. *Нека $g: R(X, \rho) \to E^1$, където E^1 е реалната числова ос. Ако g е непрекъснато изображение, R е компакт, то g е ограничено и достига точните си горна и долна граница.*

Доказателство. Според лема 6 подмножеството $g(R)$ на метричното пространство E^1 е компактно, а по лема 7 то е затворено. Тогава очевидно съществува такова неотрицателно число T, че $|g(R)| \le T$, и $g(R)$ съдържа точните си горна и долна граница, тъй като всяко компактно множество от числовата ос е ограничено. □

По-рано бяха дадени (вж. определение 8) понятията относително отворени и относително затворени множества. Ще поясним още веднъж, че понятията отвореност и затвореност на множество са относителни. Едно и също множество може да бъде отворено в едно пространство и да не бъде отворено в друго метрично пространство, съдържащо първото. Например сегментът $[0, 1]$ е отворено множество в метричното пространство $R = (Y, \rho)$, където $Y = [0, 1]$, а ρ е обичайната евклидова метрика в сегмента. От друга страна, същият сегмент $[0, 1]$ е затворено, но не е отворено множество в метричното пространство $E^1 = (X, \rho)$, където $X = (-\infty, \infty)$, а ρ е същата функция. Обаче компакт е абсолютно понятие, т. е. не зависи от съдържащото го пространство. В сила е твърдението:

Твърдение 2. *Нека $R_F = (F, \rho)$, $R_Y = (Y, \rho)$, $R_X = (X, \rho)$ са метрични пространства, при това $F \subset Y \subset X$. Тогава множеството F е компакт относно R_Y* тогава и само тогава, когато е компактно относно R_X.*

Да предположим, че F е компактно относно R_X. Нека $\{\Sigma_\alpha\}$ е семейство от множества, отворени относно R_Y, и $F \subset \bigcup_\alpha \Sigma_\alpha$. Съгласно определение 8 за всяко α съществува такова множество G_α, отворено относно R_X, че $\Sigma_\alpha = Y \cap G_\alpha$. Тъй като F е компактно относно R_X, имаме $F \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$ при някой избор на краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тъй като $F \subset Y$, то от последното включване следва, че $F \subset \Sigma_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \Sigma_{\alpha_n}$. С това е доказано, че множеството F е компактно относно $R_Y(Y, \rho)$.

Нека сега F е компактно относно R_Y. Нека $\{G_\alpha\}$ е отворено в R_X покритие на F и $\Sigma_\alpha = Y \cap G_\alpha$. Тогава съществуват краен брой индекси $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, такива, че $F \subset \Sigma_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \Sigma_{\alpha_n}$. Понеже $\Sigma_\alpha \subset G_\alpha$, то е изпълнено и включването $F \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$. С това е доказано, че F е компактно относно R_X. □

12.1.7. Базис на пространство

Определение 16. *Системата от отворени множества $\{\Sigma_\alpha\}$ на метричното пространство $R = (X, \rho)$ се нарича* ***базис*** *на това пространство, ако всяко непразно отворено множество в пространството R може да се представи като обединение на множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$.*

В сила е следната лема:

Лема 9. *За да бъде системата $\{\Sigma_\alpha\}$ от отворени множества базис на пространството $R = (X, \rho)$, е необходимо и достатъчно*

* Множеството F е компактно относно R_Y, ако от всяко негово покритие с отворени относно R_Y множества може да се избере крайно подпокритие.

за всяко отворено множество G и всяка точка $a\in G$ да съществува такова множество Σ_{a_0} от тази система, че $a\in\Sigma_{a_0}\subset G$.

Доказателство. Нека системата $\{\Sigma_\alpha\}$ е базис на пространството. Тогава всяко отворено множество G е обединение на множества от $\{\Sigma_\alpha\}$. Затова за всяка точка $a\in G$ съществува такова множество Σ_{a_0}, че $a\in\Sigma_{a_0}\subset G$ и Σ_{a_0} принадлежи на дадената система $\{\Sigma_\alpha\}$.

Обратно, нека са изпълнени условията, формулирани в лемата. Тогава всяко отворено множество G може да се представи във вида

$$G=\bigcup_{a\in G}\Sigma_{a_0},$$

т. е. системата $\{\Sigma_\alpha\}$ е базис на пространството. Лемата е доказана. □

Определение 17. *Метричното пространство $R=(X,\rho)$ се нарича* ***пространство с изброим базис,*** *ако в него съществува поне един базис, състоящ се от не повече от изброим брой множества. Пространства с изброим базис се наричат* ***пространства с втора аксиома за изброимост.***

Лема 10. *Метричното пространство $R=(X,\rho)$ е пространство с изброим базис тогава и само тогава, когато в него има изброимо, навсякъде гъсто множество.*

Доказателство. Нека $A=\{a_n\}_1^\infty$ е изброимо, навсякъде гъсто множество в R. Всевъзможните кълба $O(a_n, m^{-1})$, където n, m са всевъзможните естествени числа, образуват изброим базис на пространството.

Обратно, ако в R има изброим базис $\{\Sigma_n\}_1^\infty$, то като изберем по точка $a_n\in\Sigma_n$, получаваме множеството $A=\{a_n\}_1^\infty$, което е навсякъде гъсто. Действително, ако $A\neq X$, то отвореното множество $G=X\setminus A$ би било непразно и не би съдържало нито една точка от $A=\{a_n\}_1^\infty$, което е невъзможно, защото G е отворено множество и е обединение на някои от множествата на системата $\{\Sigma_n\}$, а $a_n\in\Sigma_n$. □

Примери:

1. Лесно е да се построят метрично пространство $R=(X,\rho)$ и затворени кълба $K_1(x_1, r_1)$ и $K_2(x_2, r_2)$, за които $K_1\subset K_2$, а $r_1>r_2$.

Действително нека $R(X,\rho)$ е метрично пространство, състоящо се от всички точки (x, y) на затворения кръг в равнината xy: $X=\{(x, y): x^2+y^2\leq 9\}$ с обичайната евклидова метрика ρ. Кълбото K_2 ще определим така: $K_2\equiv R=(X,\rho)$. Нека $K_1=K_2\cap\{(x, y): (x-2)^2+y^2\leq 16\}$. Тогава $K_1\subset K_2$, $r_1=4$, $r_2=3$.

2. Множеството A от метрично пространство е затворено тогава и само тогава, когато съвпада със затворената си обвивка $\bar{A}$, т. е. $A=\bar{A}$.

Действително, ако $A=\bar{A}$, то понеже затворената обвивка на всяко множество е затворена (като сечение на затворени множества), A е затворено. Обратно, ако A е затворено, то $\bar{A}\subset A$. От друга страна, от определението на затворена обвивка следва $A\subset\bar{A}$, т. е. ако A е затворено, то $A=\bar{A}$.

3. Кълбо $O(x_0, r)$ в метричното пространство R е отворено множество. Ако $x\in O(x_0, r)$, т. е. $\rho(x, x_0)<r$, то кълбото $O(x,\varepsilon)$ при $0<\varepsilon<r-\rho(x_0, x)$ ще принадлежи на изходното множество: $O(x,\varepsilon)\subset O(x_0, r)$. Действително, ако $y\in O(x,\varepsilon)$, т. е. $\rho(x, y)<\varepsilon$, то

$$\rho(x_0, y)\leq\rho(x_0, x)+\rho(x, y)<\rho(x_0, x)+r-\rho(x_0, x)=r.$$

Затвореното кълбо — множеството $K(x, r)=\{y:\rho(x, y)\leq r\}$, е затворено множество в R, понеже допълнението му е отворено множество.

4. Затворената обвивка $\bar{A}$ на множеството A от метрично пространство се състои от всички точки, които са точки на сгъстяване за множеството A или са елементи на A. Действително цялото множество се съдържа в затворената си обвивка $A\subset\bar{A}$. Ще докажем, че затворената обвивка на A съдържа и точките на сгъстяване на A. Но затворената обвивка на множеството е затворено множество, а ако едно множество е затворено, то съдържа всички свои точки на сгъстяване: ако една точка не принадлежи на затворено множество, то тя принадлежи на допълнението му, което е околност на тази точка, несъдържаща точки от затвореното множество, т. е. точката не е точка на сгъстяване за затвореното множество. По такъв начин затворената обвивка на A съдържа точките на множеството A и точките на сгъстяване на A. Обратно, нека $x\in\bar{A}$, тогава или x е точка на сгъстяване на A, или $x\in A$. Ако $x\in\bar{A}$ и $x\in A$, то всичко е доказано. Ако $x\in\bar{A}$, но $x\bar{\in}A$, то x е точка на сгъстяване за A. Ако допуснем противното, тогава ще съществува околност Σ_x на точката x, несъдържаща точки от множеството A. Нейното допълнение е затворено множество, съдържащо A и несъдържащо x, т. е. точката $x\bar{\in}\bar{A}$, което е невъзможно.

5. В някои метрични пространства $R=(X,\rho)$ могат да се построят отворено кълбо $O(x, r)=\{y:\rho(x, y)<r\}$ и затворено кълбо $K(x, r)=\{y:\rho(x, y)\leq r\}$ с общ център и равни радиуси, за които $\overline{O}(x, r)\neq K(x, r)$. Действително нека X е множество, съдържащо повече от една точка, и нека

$$\rho(x,\ y)=\begin{cases}1, & \text{ако } x\neq y,\\ 0, & \text{ако } x=y;\end{cases}$$

тогава

$$K(x,\ 1)=X,\ O(x,\ 1)=x,\ O(x,\ 1)=x+K(x,\ 1).$$

12.2. Свойства на метричните пространства

В предишния параграф бяха дадени основните свойства на метричните пространства въз основа на понятията отворено и затворено множество. Фактически всички те използват само свойствата на отворените множества, а именно че сума на произволен брой и сечение на краен брой отворени множества са отворени множества, цялото пространство и празното множество са отворени, и не използват понятия като кълбо и разстояние. Всичко това навежда на мисълта, че може да се построят пространства, в които отворено (затворено) множество се определя аксиоматично така, че да се запазват свойствата, формулирани в лема 1. Тогава необходимостта от определения 1 и 2 отпада, а твърдението на лема 1 става аксиома. Именно така и ще постъпим в следващия параграф при изучаването на топологични пространства. Ясно е, че така ще се стигне до пълно еднообразие при изучаване на основните свойства на метричните и топологичните пространства.

Такъв подход към изучаване свойствата на метричните пространства (формулировки и доказателства, използващи само свойствата на отворените (затворените) множества) притежава редица предимства — допуска например обобщение в по-общи пространства. Заедно с това, понеже в структурата на метричните пространства е въведена функция разстояние, тези пространства трябва да притежават и свойства, присъщи само на тях. Често именно тези свойства се изучават при разглеждане на метрични пространства.

В този параграф ще изложим тези фундаментални свойства на метричните пространства. Всички те използват понятието пълнота на пространство.

Определение 1. *Редицата* $\{x_n\}$ *от елементи на метричното пространство* $R=(X,\rho)$ *се нарича* ***фундаментална,*** *ако* $\rho(x_n, x_m)\to 0$ *когато* $n,\ m\to\infty$; $n,\ m$ *са естествени числа.*

Определение 2. *Метричното пространство* $R=(X,\ \rho)$ *се нарича* ***пълно,*** *ако всяка фундаментална редица е сходяща към елемент на това пространство.*

Както вече говорихме, ако редицата $\{x_n\}$ е сходяща към елемента x $(x_n\to x)$, то $\rho(x_n,\ x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема 12.1 (принцип на вложените кълба). *За да бъде едно метрично пространство пълно, е необходимо и достатъчно всяка редица от затворени, вложени едно в друго кълба, радиусите на които клонят към нула, да има непразно сечение.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека $R=(X,\ \rho)$ е пълно метрично пространство, а $K_1(x_1,\ r_1)\supset K_2(x_2,\ r_2)\supset K_3(x_3,\ r_3)\supset\cdots$ са вложени едно в друго затворени кълба. Редицата от центровете им е фундаментална, тъй като $\rho(x_n,\ x_m)<r_n,\ m>n$, а $r_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Понеже пространството R е пълно, то съществува $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $x\in R$. Очевидно $x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n$. Действително x е точка на сгъстяване за всяко K_n (вж. определение 4, 12.1.2), понеже при $m>n$ имаме $x_m\in K_m\subset K_n$, а тъй като K_n е затворено множество, то $x\in K_n$.

Достатъчност. Трябва да покажем, че ако $\{x_n\}$ е фундаментална редица, тя има граница $x\in R$. Избираме такава точка x_{n_1}, че $\rho(x_n,\ x_{n_1})<2^{-1}$, $n>n_1$. Приемаме x_{n_1} за център на затворено кълбо с радиус единица, което означаваме с $K(x_{n_1},\ 1)$. Избираме след това точка x_{n_2} от редицата $\{x_n\}$, удовлетворяваща следните условия: $\rho(x_n,\ x_{n_2})<2^{-2}$ за всяко $n>n_2$, $n_2>n_1$. Приемаме точката x_{n_2} за център на кълбо с радиус $1/2$: $K(x_{n_2},\ 2^{-1})$. Нека $x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k}$ $(n_1<n_2<\cdots<n_k)$ са вече избрани. Тогава $x_{n_{k+1}}$ избираме така, че да бъде изпълнено условието: $\rho(x_n,\ x_{n_{k+1}})<2^{-k-1}$ за всяко $n>n_{k+1}$, $n_{k+1}>n_k$. Както и по горе, приемаме $x_{n_{k+1}}$ за център на затворено кълбо с радиус 2^{-k}: $K(x_{n_{k+1}},\ 2^{-k})$, и т. н. Така получаваме редица от вложени едно в друго затворени кълба с радиуси, които клонят към нула. По предположение съществува точка x, обща за всички кълба. Ясно е, че $\rho(x_{n_k},\ x)\to 0$, $n_k\to\infty$. Следователно фундаменталната редица $\{x_n\}$ съдържа подредица $\{x_{n_k}\}$, клоняща към точка x от пространството. Тогава и самата редица ще клони към същата граница. □

Забележка. Всички условия, изброени в теоремата, са съществени: пълнота на пространството, затвореност на кълбата, условието, че са вложени едно в друго и радиусите им клонят към нула. Най-малко е очевидна необходимостта на последното условие — да имат непразно сечение.

Ето например пълно метрично пространство и редица от вложени едно в друго кълба, имащи празно сечение.

Нека $R=(N,\ \rho)$, където N е множеството на естествените числа, а

$$\rho(m,\ n)=\begin{cases}1+1/(m+n), & \text{ако } n\neq m,\\ 0, & \text{ако } n=m.\end{cases}$$

Нека

$$K(n,\ 1+1/2n)=\{m:\rho(m,\ n)\leq 1+1/2n\},\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots$$

Тогава е очевидно, че $K(n,\ 1+1/2n)$ са затворени и вложени едно в друго, а пространството е пълно, защото всяка фундаментална редица е сходяща в пространството. Но сечението на тези кълба е очевидно празно.

Определение 3. *Множеството M в метрично пространство R се нарича* ***множество от първа категория,*** *ако може да се представи като обединение на изброимо много навсякъде негъсти в R множества.*

Всички останали множества се наричат ***множества от втора категория.***

Теорема 12.2 (теорема за категориите). *Нека $R=(X,\ \rho)$ е непразно пълно метрично пространство. Тогава X е множество от втора категория, т. е. X не може да се представи като обединение на изброимо много навсякъде негъсти множества.*

Доказателство. Ще допуснем противното, че $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ и всяко от множествата A_n, $n=1,\ 2,\ 3,\ldots$, е навсякъде негъсто в R. Нека K_0 е затворено кълбо с радиус единица. Понеже множеството A_1 е навсякъде негъсто, то съществува такова затворено кълбо K_1 с радиус, по-малък от 1/2, че $K_1\subset K_0$ и $K_1\cap A_1=\varnothing$. Тъй като множеството A_2 е навсякъде негъсто, то по същия начин съществува затворено кълбо с радиус, по-малък от $1/2^2$, за което $K_2\cap A_2=\varnothing$, $K_2\subset K_1$ и т. н. В резултат получаваме редица от вложени едно в друго затворени кълба $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, радиусите на които клонят към нула. Според теорема 12.1 съществува $x\in K_n$ за всяко n, $x\in X$. Тъй като по построение $K_n\cap A_n=\varnothing$, то $x\notin A_n$ за всяко n. Следователно $x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=X$. Това противоречи на допускането, че $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. □

Определение 4. *Изображението g на метричното пространство R в себе си се нарича* ***свиващо,*** *ако съществува такова число α, $0<\alpha<1$, че*

$$\rho(g(x),\ g(y))\leq\alpha\rho(x,\ y).$$

Теорема 12.3 (принцип на свиващите изображения). *Всяко свиващо изображение на пълно метрично пространство $R=(X,\ \rho)$ в себе си има, и то само една, неподвижна точка x, т. е. такава точка $x\in X$, че $g(x)=x$.*

Доказателство. Нека x_0 е точка от X. Определяме редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по правилото: $x_1=g(x_0)$, $x_2=g(x_1)$, $x_3=g(x_2),\ldots$. Редицата $\{x_n\}$ е фундаментална в R. Действително, ако $m>n$, то

$$\begin{aligned}\rho(x_n,\ x_m)&=\rho(g(x_{n-1}),\ g(x_{m-1}))\leq\alpha\rho(x_{n-1},\ x_{m-1})\\&\leq\cdots\leq\alpha^n\rho(x_0,\ x_{m-n})\leq\alpha^n\{\rho(x_0,\ x_1)+\rho(x_1,\ x_2)\\&+\cdots+\rho(x_{m-n-1},\ x_{m-n})\}\leq\alpha^n\rho(x_0,\ x_1)(1+\alpha+\cdots+\alpha^{m-n-1})\\&\leq\alpha^n\rho(x_0,\ x_1)/(1-\alpha),\end{aligned}$$

където $\alpha<1$.

По такъв начин $\rho(x_n,\ x_m)\to 0$, $m>n\to\infty$. Понеже пространството R е пълно, съществува $\lim_{n\to\infty}x_n$. Нека $x=\lim_{n\to\infty}x_n$. Тогава от непрекъснатостта* на изображението g имаме

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x.$$

Следователно съществува неподвижна точка. Ще докажем, че тя е единствена. Ако $g(x)=x$ и $g(y)=y$, то $\rho(x,\ y)\leq\alpha\rho(x,\ y)$, т. е. $c\rho(x,\ y)=0$; следователно $x=y$. □

Забележка. Ако изображението g на метричното пространство R в себе си притежава само свойството, че $\rho(g(x),\ g(y))<\rho(x,\ y)$, $x,\ y\in R$, $x\neq y$, то може и да няма неподвижна точка. Ето и пример: нека $R=(X,\ \rho)$, където $X=[1,\ \infty)$, а ρ е обичайната евклидова метрика. Нека $g(x)=x+1/x$. Тогава $\rho(g(x),\ g(y))=|x+1/x-y-1/y|<|x-y|$. Неподвижна точка няма, тъй като $g(x)=x+1/x\neq x$ за всяко $x\in X$.

Определение 5. *Ще казваме, че две изображения g и g_1 на метричното пространство $R=(X,\ \rho)$* ***комутират,*** *ако за всяко $x\in X$ е изпълнено равенството $g(g_1(x))=g_1(g(x))$.*

Теорема 12.4 (обобщение на принципа на свиващите изображения). *Нека g и g_1 са изображения на метричното пространство $R(X,\ \rho)$ в себе си. Тогава, ако изображението g_1 е свиващо и изображенията g и g_1 комутират, то уравнението $g(x)=x$* ***има*** *решение $x\in R$.*

Доказателство. Според предишната теорема (теорема 12.3) съществува и при това само една такава точка $x\in R$, че $g_1(x)=x$. Прилагаме към двете страни на равенството изображението g. Като използваме, че изображенията комутират, получаваме

$$g(g_1(x))=g(x),\ g_1(g(x))=g(x),\ g_1(y)=y,$$

където $y=g(x)$. Като вземем пред вид, че изображението g_1 е свиващо и има единствена неподвижна точка, получаваме, че $x=y=g(x)$. Следователно и за изображението g съществува неподвижна точка.

* Непрекъснатостта следва от това, че g е свиващо изображение.

Забележка. Степен n на изображението g се нарича изображението g^n, получено в резултат на n последователни прилагания на изображението g:

$$g^n(x)=\underbrace{g(g(\cdots(g}_{n}(x)\cdots), \quad x\in X.$$

От теорема 12.4 следва, че ако изображенията g и g^n комутират и g е такова изображение, че някоя негова степен е свиващо изображение, то уравнението $g(x)=x$ има едно и само едно решение. Единствеността на решението следва от това, че всяка точка, неподвижна за изображението g, ще бъде неподвижна и за изображението g^n.

Примери:

1. Намиране на корени (нули) на функции. Нека $\varphi(t)$, $a\leqq t\leqq b$, е реална функция, удовлетворяваща условието на Липшиц:

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leqq\theta|t_1-t_2| \quad \text{и} \quad 0<\theta<1$$

и изобразяваща сегмента $[a, b]$ в себе си. Ако въведем метричното пространство $R=(X, \rho)$, където $X=[a, b]$ а ρ е обичайната евклидова метрика на сегмента, то изображението φ е свиващо и следователно числовата редица t_0, $t_1=\varphi(t_0)$, $t_2=\varphi(t_1), \ldots$ е сходяща към единствения корен на уравнението $t=\varphi(t)$ за всяко $t_0\in[a, b]$. Изображението φ е свиващо, ако например $|\varphi'(t)|\leqq\theta<1$, $t\in[a, b]$.

Нека имаме да решаваме уравнение от вида $F(t)=0$, като при това $F(t)$ е реална функция, дефинирана в $[a, b]$ и $F(a)<0$, $F(b)>0$, $0<\theta_1\leqq F'(t)\leqq\theta_2$, $t\in[a, b]$. Тогава, ако разгледаме функцията $\varphi(t)=t-\lambda F(t)$, $\lambda\in E^1$, и намерим корена на уравнението $\varphi(t)=t$, то ще решим и изходната задача. Към последното уравнение можем да приложим предишните разсъждения, ако например $|\varphi'(t)|\leqq\theta<1$. Имаме $1-\lambda\theta_2\leqq\varphi'(t)\leqq1-\lambda\theta_1$. Не е трудно да се избере реалното число $\lambda>0$ така, че да е изпълнено условието: $0\leqq\varphi'(t)\leqq\theta<1$. Тогава, както не е трудно да се убедим, функцията φ ще изобразява сегмента $[a, b]$ в себе си. Наистина, тъй като $\varphi'(t)\geqq0$, то φ не намалява; следователно $\varphi(a)\leqq\varphi(t)\leqq\varphi(b)$ за $t\in[a, b]$. Но $\varphi(a)=a-\lambda F(a)>a$, $\varphi(b)=b-\lambda F(b)<b$, т. е. $a<\varphi(t)<b$, $t\in[a, b]$.

2. Намиране решения на система уравнения от вида $\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$. Нека $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ е изображение на n-мерното пространство X в себе си: наредената n-орка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in X$ преминава в наредената n-орка $(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in X$, т. е. изображението $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$ привежда наредена n-орка от числа в наредена n-орка от числа. Тук $\mathbf{x}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ са вектори, $\mathbf{A}$ е матрица, $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$.

Ако изображението $\mathbf{g}$ е в някое пълно метрично пространство и при някакви условия е свиващо, то векторното уравнение $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ ще има едно и само едно решение. Ще намерим такива условия за изображението $\mathbf{g}$ и ще въведем метрика в множеството X, т. е. ще образуваме съответни метрични пространства:

а) Нека

$$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\max\{|x_i-y_i|: 1\leqq i\leqq n\} \text{ и } R^1=(X, \rho_1);$$

тогава

$$\rho_1(\mathbf{y}', \mathbf{y}'')\leqq\max_{1\leqq i\leqq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\rho_1(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \ \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{y}', \mathbf{y}''\in X,$$

и условието $\mathbf{g}$ да бъде свиващо ще е изпълнено, ако

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\leqq\alpha<1, \quad i=1, 2, 3, \ldots, n.$$

в) Ако въведем метрика в X по правилото

$$\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

не е трудно да се види, че изображението е свиващо, ако

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\leqq\alpha<1, \quad j=1, 2, 3, \ldots, n.$$

с) Накрая, ако метриката е зададена така:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2},$$

то изображението $\mathbf{g}$ е свиващо, ако

$$\sum_{i,j=1}^{n}|a_{i,j}|^2\leqq\alpha<1.$$

Изброените условия са достатъчни, за да има уравнението $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ и при това единствено решение, т. е. системата $x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j+b_i$, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, да има, и то единствено решение.

3. Съществуване и единственост на решението на обикновено диференциално уравнение от първи ред. Ще разгледаме т. нар. задача на Коши. Трябва да се намери функция y, която удовлетворява уравнението $y'=f(t, y)$ и $y(t_0)=y_0$ при $t=t_0$, където y_0 е някакво число; при това трябва да докажем, че това решение y е само едно.

Ще предположим, че функцията $f(t, y)$ е непрекъсната в множеството: $a\leqq t\leqq b$, $-\infty<y<+\infty$, удовлетворява условието на Липшиц по y, т. е.

$$|f(t, y_1)-f(t, y_2)|\leqq K|y_1-y_2|,$$

и точката t_0 е вътрешна за сегмента $[a, b]$. Понеже решаването на задачата на Коши е еквивалентно на решаването на интегралното уравнение: $y(t)=y_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\,d\xi$, то имаме дадено изображение на множеството от функции $\{y\}$ по правилото: $g(y(t))=y_0+\int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\,d\xi$. Въвеждаме пространството $C_{[a, b]}$. Тогава изображението g, определено в това пространство, го изобразяваме в себе си, а задачата за намиране решение на интегралното уравнение се свежда до намиране на неподвижната точка на изображението g, т. е. до намиране на такава функция y, че $g(y)=y$. За да съществува такава точка и за да бъде единствена, достатъчно е изображението g да бъде свиващо.

Понеже от условието на Липшиц следва, че

$$|f(t, y_1)-f(t, y_2)|\leqq K|y_1-y_2|\leqq K\rho(y_1, y_2),$$

то

$$\rho(g(y), g(z))\leqq \max_{a\leqq t\leqq b}\int\limits_{t_0}^{t} K\rho(y, z)\,dt\leqq K(b-a)\rho(y, z).$$

Тук ρ е метриката в $C[a, b]$, $\rho(y, z)=\max\limits_{a\leqq t\leqq b}|y(t)-z(t)|$. Следователно изображението е свиващо, ако сегментът $[a, b]$ е достатъчно малък, така че

$$K(b-a)=\theta<1.$$

При тези условия получаваме теоремата за съществуване и единственост на задачата на Коши.

4. Оператор на Волтера и свойства на неговата

n-та степен. Ще покажем, че някоя степен на изображението, зададено с интегралния оператор на Волтера:

$$g(f(t))=\lambda\int\limits_{a}^{t} K(t, \xi)f(\xi)\,d\xi+\varphi(t),$$

където λ е число, $K(t, \xi)$, $\varphi(t)$ са непрекъснати функции на аргументите си, е свиващо изображение в $C_{[a, b]}$, $a\leqq t\leqq b$.

Нека

$$M=\max\{|K(t, \xi)|: t, \xi\in[a, b]\},\ \rho(f_1, f_2)=\max_{a\leqq t\leqq b}|f_1(t)-f_2(t)|.$$

Тогава

$$|g(f_1)-g(f_2)|=|\lambda|\left|\int\limits_{a}^{t} K(t, \xi)(f_1(\xi)-f_2(\xi))\,d\xi\right|$$
$$\leqq|\lambda|M(b-a)\rho(f_1, f_2).$$

Оттук

$$|g^n(f_1)-g^n(f_2)|\leqq|\lambda|^n M^n(b-a)^n\rho(f_1, f_2)/n!.$$

Винаги може да се избере такова n, че $|\lambda|^n M^n(b-a)^n/n!<1$, и следователно при това n изображението g^n ще бъде свиващо. Съгласно забележката след теорема 12.4 интегрално уравнение от вида $g(f)=f$ има при всяко λ решение и то е единствено.

12.3. Топологични пространства. Отворени и затворени множества

В този параграф ще изложим основните определения и факти, отнасящи се до топологични пространства.

12.3.1. Определение на топологично пространство. Понятието топологично пространство е естествено обобщение на понятието метрично пространство. При определението на метрично пространство постъпихме по следния начин: с помощта на функцията разстояние въведохме отворени и затворени множества и доказахме редица техни свойства, а след това, като използвахме тези свойства, изучихме метричните пространства. Ако искаме да намерим пошупок клас пространства от метричните пространства, е естествено да определим отворените (или затворените) множества аксиоматично. Във връзка с това ще дадем следното определение:

Определение 1. *В множеството X е определена* ***структура на топологично пространство,*** *ако е дадена система $\{\Sigma\}$ от негови подмножества, притежаваща свойствата:*

1) Множеството X и празното множество $\varnothing$ принадлежат на $\{\Sigma\}$.

2) Обединението на произволен брой множества от системата $\{\Sigma\}$ и сечението на краен брой множества от системата $\{\Sigma\}$ принадлежат на $\{\Sigma\}$.

3) За всеки две точки $x, y \in X$, $x \neq y$, съществуват такива множества Σ_x, Σ_y от системата $\{\Sigma\}$, че $\Sigma_x \cap \Sigma_y = \varnothing$ *и* $x \in \Sigma_x$, $y \in \Sigma_y$.

Системата $\{\Sigma\}$, удовлетворяваща условията 1) и 2), се нарича ***топология на множеството** X*.

По такъв начин двойката: множеството X и топологията $\{\Sigma\}$, образуват ***топологично пространство***; то се означава с $T=(X, \Sigma)$; топологични пространства, за които е изпълнено и условие 3), се наричат ***хаусдорфови топологични пространства.***

Примери:

1. Да разгледаме произволно метрично пространство $R=(X, \rho)$. Отворените множества според лема 1 от 12.1.2 притежават свойствата 1) и 2) от определение 1 на топологично пространство. Аксиома 3) от определение 1 е също така изпълнена в метрично пространство — ако $x \neq y$, то $\rho(x, y)=a>0$ и за кълбата $O(x, a/3)$, $O(y, a/3)$, които са отворени множества в R, имаме $O(x, a/3) \cap O(y, a/3)=\varnothing$.

Така всяко метрично пространство R е и топологично пространство $T=(X, \Sigma)$, където $\{\Sigma\}$ е системата от отворени множества в $R=(X, \rho)$.

2. Да разгледаме множеството $X=[0, 1]$. Ще зададем в това множество топология, т. е. система $\{\Sigma\}$. Причисляваме към $\{\Sigma\}$ множествата $\varnothing$ и X и всички възможни интервали от вида (α, β), където $0<\alpha<\beta<1$; полуинтервалите $(\alpha, 1]$, където $0<\alpha<1$; полуинтервалите $[0, \alpha)$, където $0<\alpha<1$, от които са изключени точките от вида $1/n$, n — естествено число и всички техни обединения. Всички аксиоми 1)—3) от определение 1 са изпълнени.

3. Ще разгледаме множеството X от произволно естество. Ще причислим към системата $\{\Sigma\}$ само цялото множество X и празното множество $\varnothing$. Аксиомите 1) и 2) са очевидно изпълнени, обаче аксиома 3) не е изпълнена. Следователно системата $\{\Sigma\}$ не задава хаусдорфова топология.

4. Нека $X=E^1$ е съвкупността на реалните числа. Ще причислим към системата $\{\Sigma\}$ всички възможни обединения на интервали от X и празното множество $\varnothing$. Тогава $T=(X, \Sigma)$ е топологично пространство.

5. Нека $X=C$ е съвкупността на всички комплексни числа. Към системата $\{\Sigma\}$ причисляваме съвкупността на всички множества от вида $|z-z_0|<\varepsilon$ при всички възможни $z_0 \in C$ и $\varepsilon>0$, техните обединения, $\varnothing$ и X. Двойката $T=(X, \Sigma)$ е топологично пространство.

12.3.2. Отворени и затворени множества

Определение 2. *Множеството $\Sigma_a \subset X$ се нарича **отворено в** $T=(X, \Sigma)$, ако $\Sigma_a \in \{\Sigma\}$.*

Определение 3. ***Околност на точката** $x \in X$ се нарича всяко отворено множество, съдържащо x. **Околност на някое подмножество на** X (както и на самото X) се нарича всяко отворено множество, съдържащо даденото подмножество (или X). Околност на точката x ще означаваме със Σ_x.*

След като са определени отворените множества, в топологичните пространства могат да се въведат всички понятия за метрични пространства. Така дословно се запазват определенията 4—9, 11—17 от 12.1, твърденията на лемите 1, 2, 4—9 и твърдението 2, които се доказват по същия начин.

*Едно топологично пространство ще наричаме **пространство с първа аксиома за изброимост,** ако за всяка точка a съществува такава изброима система от околности $\{\Sigma_a^n\}$, че за всяко отворено множество Σ_a, съдържащо точката a, съществува околност $\Sigma_a^{n_0}$ със свойство: $\Sigma_a^{n_0} \subset \Sigma_a$.* В метрично пространство първата аксиома за изброимост, както вече казахме, е изпълнена.

В сила е твърдението. *Точката **a** от топологично пространство T с **първа аксиома за изброимост** принадлежи на затворената обвивка $\bar{A}$ на дадено множество A тогава и само тогава, когато съществува редица $\{a_n\}$ от точки на множеството A, сходяща към a.*

Доказателство (вж. лема 3 от 12.1). Редицата от кълба $O(a, n^{-1})$ трябва да се замени с околности от системата $\{\Sigma_a^n\}$. При това винаги може да смятаме, че $\Sigma_a^{n+1} \subset \Sigma_a^n$, иначе Σ_a^n ще заменим с $\bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_a^k$. □

Едновременно доказахме и следното твърдение:

Твърдение 1. *В топологично пространство с първа аксиома за изброимост точката $a \in \bar{A}$ тогава и само тогава, когато всяка околност Σ_a на точката a се пресича с A.*

*Топологичното пространство $T=(X, \Sigma)$ се нарича **пространство с изброим базис,** ако в него съществува поне един базис, съдържащ не повече от изброим брой множества. Пространство с изброим базис се нарича още **пространство с втора аксиома за изброимост.***

Топологичното пространство $T=(X, \Sigma)$ е пространство с изброим базис тогава, когато то е пространство с първа аксиома за изброимост и в него има изброимо навсякъде гъсто множество. Обратно, ако в пространството T, което не е задължително с първа аксиома за изброимост, има изброим базис, то в него има и изброимо навсякъде гъсто множество.

(За доказателството вж. лема 10 от 12.1; редицата от кълбата $O(a, m^{-1})$ на метричното пространство, където m и n са естествени числа, трябва да се замени с редицата от околности $\{\Sigma^m_{a_n}\}$, $\Sigma^{m+1}_{a_n} \subset \Sigma^m_{a_n}$. Тези околности винаги съществуват за точката a_n, понеже $T=(X, \Sigma)$ е пространство с първа аксиома за изброимост.)

Примери и забележки:

1. При задаване на топология на множеството X можем да се ограничим само с аксиомите 1) и 2) от определение 1. Полученото определение за топологично пространство е най-общо. От този клас пространства може да се отдели по-тесен клас, за който аксиома 3) трябва да се замени с аксиома 3'): За всеки две точки x и y на пространството T, $x \neq y$, съществуват такава околност Σ_x на точката x, че $y \notin \Sigma_x$, и такава околност Σ_y на точката y, че $x \notin \Sigma_y$. Не за всяко пространство с топология, определена от аксиоми 1) и 2), е изпълнена аксиома 3). Ето един традиционен пример. Множеството $X=\{a, b\}$ се състои от две точки. Топологията ще зададем с отворените множества X, $\varnothing$ и точката b. Аксиомите 1) и 2) са изпълнени, а 3) не е изпълнена. Накрая ще отбележим, че не всяко пространство T, в което топологията се задава с аксиомите 1), 2) и 3'), удовлетворява определение 1. Например, ако $X=[0, 1]$ и към системата, определяща топологията, отнесем X, $\varnothing$ и $\Sigma_{a_n}=[0, 1] \setminus \{a_n\}$, където $\{a_n\}$ е произволно изброимо множество от сегмента $[0, 1]$, то аксиомите 1), 2), 3') са изпълнени, но пространството не е топологично в смисъл на определение 1. Но хаусдорфовите топологични пространства са очевидно пространства, удовлетворяващи аксиомите 1), 2), 3'). Ако заменим аксиома 3') с друга, може да се стигне до по-нататъшно стесняване на класа на пространствата (вж. за това 1.2.2).

2. Множеството A от топологичното пространство T е затворено тогава и само тогава, когато съвпада със затворената си обвивка $\overline{A}$, т. е. $A=\overline{A}$ (вж. пример 2 от 12.1).

3. Обединение на не повече от изброим брой затворени множества се нарича множество от тип F_σ. Сечение на не повече от изброим брой отворени множества се нарича множество от тип G_δ. Например множеството на рационалните числа в R_1 е множество от тип F_σ. Множеството на ирационалните числа е множество от тип G_δ.

4. Затворената обвивка $\overline{A}$ на множеството A от топологично пространство се състои от всички точки, които са или точки на сгъстяване за множеството A, или елементи на A (вж. пример 4 от 12.1).

5. Важен клас множества в топологични пространства са множествата, които се получават от отворени (затворени) множества с помощта на не повече от изброим брой операции обединение (сечение) и изваждане.

Семейството B на бореловите множества е най-малкото семейство от множества, удовлетворяващо следните свойства:

a) всяко отворено множество принадлежи на B;

b) ако $A \in B$, то $A' \in B$;

c) ако $A_n \in B$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in B$.

12.4. Свойства на топологичните пространства

В този параграф ще изложим основните свойства на топологичните пространства. Много от тях са свързани с т. нар. аксиоми за отделимост, които определят по-тесни класове топологични пространства.

12.4.1. Аксиоми за отделимост. Ще формулираме тези аксиоми в такъв ред, че условията на всяка аксиома да са следствие от условията на аксиомата, която я следва.

Определение 1. *Едно топологично пространство се нарича* ***регулярно,*** *ако за всяка точка a и всяко несъдържащо я затворено множество F съществуват такива две непресичащи се отворени множества Σ_a и Σ, че $a \in \Sigma_a$, $F \subset \Sigma$.*

Пример за нерегулярно топологично пространство е пример 2 от 12.3.1.*

Определение 2. *Едно топологично пространство T се нарича* ***напълно регулярно,*** *ако за всяка точка a и всяко затворено множество F, което не съдържа точката a, съществува такава непрекъсната числова функция f, дефинирана в това пространство, че $0 \leq f(x) \leq 1$, $x \in T$, $f(a)=0$, $f(x)=1$, $x \in F$.*

Напълно регулярните пространства се наричат още **тихоновски пространства.****

Всяко напълно регулярно пространство е регулярно. Действително нека $I_0=[0, 1/2)$, $I_1=(1/2, 1]$. Тогава $\Sigma_a=f^{-1}(I_0)$ и $\Sigma=f^{-1}(I_1)$ са отворени, тъй като f е непрекъснато изображение, $\Sigma_a \cap \Sigma=\varnothing$, $a \in \Sigma_a$, $F \subset \Sigma$. Следователно пространството е регулярно.

* Точката O и затвореното множество $\{1/n\}$ са неотделими в посочения смисъл.

** Андрей Николаевич Тихонов — съветски математик (1906).

Определение 3. *Едно топологично пространство се нарича* ***нормално,*** *ако за всеки две затворени, непресичащи се множества* F_1 *и* F_2 *съществуват две такива непресичащи се отворени множества* Σ_1 *и* Σ_2, *че* $F_1 \subset \Sigma_1$, $F_2 \subset \Sigma_2$.

12.4.2. Нормални и напълно регулярни (тихоновски) пространства. Лема на Урисон*. В сила е следната лема:

Лема 1 (лема на Урисон). *За всеки две непресичащи се затворени множества* F_1 *и* F_2 *на нормално топологично пространство* $T=(X, \Sigma)$ *съществува такава непрекъсната числова функция* f, *дефинирана в* T, *че* $0 \leqq f(x) \leqq 1$, $x \in X$, $f(x)=0$, *ако* $x \in F_1$; $f(x)=1$, *ако* $x \in F_2$.

Доказателство. Ще построим редица от отворени множества $\Sigma(r)$, съответствуващи на рационалните числа от вида $r=k \cdot 2^{-n}$ $(k=0, 1, 2, \dots, 2^n$, n е цяло положително число), притежаващи свойствата: 1) $F_1 \subset \Sigma(0)$, $F_2=\Sigma'(1)$ („'" означава допълнение) и 2) $\overline{\Sigma}(r) \subset \Sigma(r')$ за всеки $r<r'$, където $\overline{\Sigma}(r)$ е затворената обвивка на $\Sigma(r)$.

Построението ще направим с индукция по n. Нека $n=0$. Тогава системата $\Sigma(r)$ ще съдържа само двете множества: $\Sigma(1)$, $\Sigma(0)$. Тъй като пространството T е нормално, то съществуват такива отворени множества Σ_1 и Σ_2, че $F_1 \subset \Sigma_1$, $F_2 \subset \Sigma_2$. Тогава множеството $\Sigma(0)=\Sigma_1$ е търсеното.

Да допуснем сега, че множеството $\Sigma(r)$ е построено за числата $r=k \cdot 2^{-n+1}$, $k=0, 1, 2, \dots, 2^{n-1}$ и при това е изпълнено условие 2). Нека k е цяло нечетно и $0<k<2^n-1$. Тогава $\Sigma((k-1)2^{-n}) \subset \Sigma((k+1) \cdot 2^{-n})$, тъй като числата $(k-1)2^{-n}$ и $(k+1) \cdot 2^{-n}$ имат вида $k' \cdot 2^{n-1}$, където $0 \leqq k' \leqq 2^{n-1}$. Понеже T е нормално пространство, а $\overline{\Sigma}((k-1) \cdot 2^{-n}) \cap \Sigma'((k+1) \cdot 2^{-n})=\emptyset$ и тези множества са затворени, то съществуват такива отворени множества G и G_1, че $\overline{\Sigma}((k-1) \cdot 2^{-n}) \subset G$, $\Sigma'((k+1) 2^{-n}) \subset G_1$ и $G \cap G_1=\emptyset$. Тогава G_1' е затворено и $G \subset G_1' \subset \Sigma((k+1) \cdot 2^{-n})$, т. е. $G \subset \Sigma((k+1) \cdot 2^{-n})$. Като положим $\Sigma(k \cdot 2^{-n})=\Sigma(r)=G$, завършваме построението по индукция.

Ще определим сега функцията $f(x)$, като положим:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{за } x \in \Sigma(0), \\ \sup\{r : x \overline{\in} \Sigma(r)\} & \text{за } x \in \Sigma'(0). \end{cases}$$

Тогава по условие 1) имаме $f(x)=0$, ако $x \in F_1$; $f(x)=1$, ако $x \in F_2$. Наистина, ако $x \in F_2$, то $x \in \Sigma'(1)$, т. е. $x \overline{\in} \Sigma(1)$ и от условие 2) следва, че $x \in \Sigma(r)$, $r<1$, т. е. $\sup\{r : x \in \Sigma(r)\}=1$.

* Павел Самуилович Урисон — руски математик (1898—1924).

Ще докажем непрекъснатостта на функцията f. Избираме произволно $x_0 \in X$ и цяло число $n>0$. Избираме такова r, че $f(x_0)<r<f(x_0)+2^{-n-1}$. Нека $\Sigma=\Sigma(r) \cap (\overline{\Sigma(r-2^{-n})})'$, където $\Sigma(s)=\emptyset$, $s<0$, $\Sigma(s)=X$, $s>1$. Отвореното множество Σ съдържа точката x_0, тъй като $f(x_0)<r$, и следователно $x_0 \in \Sigma(r)$; също така от това, че $r-2^{-n-1}<f(x_0)$, следва $x_0 \in \Sigma'(r-2^{-n-1}) \subset (\overline{\Sigma(r-2^{-n})})'$. По-нататък, ако $x \in \Sigma$, то $x \in \Sigma(r)$ и затова $f(x) \leqq r$. Още повече, $x \in (\overline{\Sigma(r-2^{-n})})' \subset \Sigma'(r-2^{-n})$ и следователно $r-2^{-n} \leqq f(x)$, така че ако $x \in \Sigma$, то $|f(x)-f(x_0)| \leqq 2^{-n}$. Така получаваме, че за всяка околност $\Sigma_{f(x_0)}$ (в числовия сегмент $[0, 1]$) съществува такава околност Σ на точката x_0, че $f(\Sigma) \subset \Sigma_{f(x_0)}$, т. е. функцията f е непрекъсната в T. □

Следствие. *Нормалните топологични пространства са напълно регулярни.* Това следва от лемата и от това, че в топологичните пространства всяка точка е затворено множество.*

12.4.3. Регулярни пространства с изброим базис. Теорема на Тихонов. В тази точка ще докажем теорема, която установява връзка между аксиомите за отделимост и аксиомите за изброимост:

Теорема 12.5 (теорема на Тихонов). *Всяко регулярно топологично пространство с изброим базис е нормално пространство.*

Доказателство. Нека $T=(X, \Sigma)$ е регулярно топологично пространство с изброим базис $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ и F_1, F_2 са две затворени непресичащи се множества. За всяка точка $x \in F_i$ $(i=1, 2)$ съществува такава околност U_x, че $\overline{U}_x \cap F_i=\emptyset$. Това следва от факта, че всяка околност на точка съдържа затворена обвивка на някоя околност на тази точка.** От покритието $\{U_x : x \in F_i, i=1, 2\}$ на множеството F_i може да се избере изброимо подпокритие, т. е. в множеството F_i съществуват такива изброими системи от точки $x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,p}, \dots$, че $F_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{x_{i,k}}$, $i=1, 2$. При това $\overline{U}_{x_{1,k}} \cap F_2=\emptyset$ и аналогично $U_{x_{2,k}} \cap F_1=\emptyset$.

* Затова ще отбележим, че произволна точка x на едно топологично пространство може да се представи във вида $x=\bigcap_{y \neq x} \Sigma'_y$, където Σ_y са околности на точката $y \neq x$, които не съдържат точката x. Сечението на затворени множества е затворено множество.

** Нека Σ е някоя околност на точката a, $A=X \setminus \Sigma$ е затворено и съществуват такива отворени множества $\Sigma_a \ni a$, $G \supset A$, че $\Sigma_a \cap G=\emptyset$. Тогава $\overline{\Sigma}_a \subset X \setminus A=\Sigma$, което трябваше да се докаже.

Определяме по индукция при произволно $n \geq 1$ множествата $V_{1,n}$ и $V_{2,n}$ като полагаме

$$V_{1,n} = U_{x_{1,n}} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_{x_{2,k}}, \quad V_{2,n} = U_{x_{2,k}} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_{x_{1,k}}.$$

Лесно се вижда, че $V_{1,n}$ и $V_{2,m}$ не се пресичат. Наистина, ако $n \leq m$, то

$$V_{1,n} \cap V_{2,m} \subset U_{x_{1,n}} \cap U_{x_{2,m}} \setminus U_{x_{1,n}} = \varnothing,$$

а ако $n \geq m$, то $V_{1,n} \cap V_{2,m} \subset (U_{x_{1,n}} / U_{x_{2,n}}) \cap U_{x_{2,m}} = \varnothing$.

Следователно множествата $V_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{1,n}$ и $V_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{2,n}$ също не се пресичат. От друга страна, те съдържат съответно множествата F_1 и F_2. Така е доказано, че две произволни затворени непресичащи се множества от пространството T могат да се включат в непресичащи се отворени множества. С други думи, пространството T е нормално, което трябваше да се докаже.

12.4.4. Компактни и нормални пространства. Цел на тази точка е доказателството на следната теорема:

Теорема 12.6. *Компактното топологично пространство е нормално топологично пространство.*

Доказателство. Нека $T = (X, \Sigma)$ е компактно топологично пространство. Ще докажем най-напред, че то е регулярно. Нека a и F са точка и затворено множество, което не я съдържа: $a \notin F$. За всяка точка $x \in F$ и точката a съществуват такива околности Σ_a и Σ_x, че $\Sigma_x \cap \Sigma_a = \varnothing$. Подпространството F на компактното пространство е компактно (вж. лема 5 от 12.1). От покритието на F с отворените множества $\{\Sigma_x\}$ ще изберем крайно покритие $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$. Нека $\Sigma_1 = \bigcup_{k=1}^{n} \Sigma_{x_k}$, а сечението на съответните на Σ_{x_k} околности $\Sigma_a^{x_k}$ на точката a означим със $\Sigma_2 = \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_a^{x_k}$.

Тогава $F \subset \Sigma_1$, $a \in \Sigma_2$ и $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$. Следователно пространството T е регулярно.

Нека сега F_1 и F_2 са две затворени множества, за които $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Поради регулярността на пространството за всяка точка $x \in F_1$ съществуват такива отворени множества Σ_x^1 и G_x^2, че $x \in \Sigma_x^1$, $F_2 \subset G_x^2$ и $\Sigma_x^1 \cap G_x^2 = \varnothing$. От покритието на компактното пространство F_1 с отворени множества $\{\Sigma_x^1\}$ избираме крайно подпокритие $\{\Sigma_{x_k}^1\}_{k=1}^{m}$ и означаваме $\Sigma^1 = \bigcup_{k=1}^{m} \Sigma_{x_k}^1$. Сечението на съответните отворени множества G_{x_k} означаваме със $\Sigma^2 = \bigcap_{k=1}^{m} G_{x_k}^2$. Тогава $F_1 \subset \Sigma^1$, $F_2 \subset \Sigma^2$ и $\Sigma^1 \cap \Sigma^2 = \varnothing$, т. е. пространството $T = (X, \Sigma)$ е нормално. Теоремата е доказана.

12.5. Линейни нормирани пространства, линейни оператори

Понятието линейно пространство играе основна роля в анализа. Линейните пространства и линейните оператори в тези пространства играят основна роля и в много други важни области на математиката.

12.5.1. Определение на линейно пространство.

Определение 1. *Множеството L, съдържащо поне един елемент, се нарича* ***линейно*** *или* ***векторно пространство,*** *ако са изпълнени следните аксиоми:*

1. За всеки два елемента x, $y \in L$ еднозначно се определя трети елемент $z \in L$, наречен тяхна ***сума,*** *който се означава с $x+y$, и при това:*

a) $x+y=y+x$ *(комутативност);*

b) $x+(y+z)=(x+y)+z$ *(асоциативност);*

c) *съществува такъв елемент $0 \in L$, че $x+0=x$ за всеки елемент $x \in L$; елементът 0 се нарича* ***нулев*** *или* ***нула*** *на пространството L;*

d) *за всеки елемент $x \in L$ съществува такъв елемент $-x$, че $x+(-x)=0$; елементът $-x$ се нарича* ***противоположен*** *елемент на елемента x.*

2. За всяко число α и всеки елемент $x \in L$ е определен елементът $\alpha x \in L$, наречен ***произведение*** *на α и x, при което*

a) $\alpha(\beta x) = (\alpha . \beta) x$;

b) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$;

c) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$;

d) $1 . x = x$ *за всеки елемент x.*

Ако в аксиома 2 се използват само реални числа, пространството L се нарича ***реално линейно пространство.*** *Ако се използват комплексни числа, пространството L се нарича* ***комплексно.***

Ще разгледаме някои примери на линейни пространства. При изучаване на метричните пространства бяха разгледани множеството на реалните числа, аритметичното n-мерно пространство, множеството на непрекъснатите функции в даден сегмент и множеството на ограничените редици. Всички тези множества са примери за линейни пространства, ако се въведат операциите събиране и умножение по следните правила:

1) В съвкупността E^1 на реалните числа обичайните аритметични операции събиране и умножение.

2) В n-мерното аритметично пространство — по формулите

$$x+y=(x_1, x_2, \ldots, x_n)+(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$
$$\alpha . x=\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

3) В пространството на непрекъснатите в даден сегмент функции — обичайните операции за събиране на две функции, т. е. $f+g=f(x)+g(x)$, и умножение на функция и число, т. е. $\alpha f=\alpha . f(x)$.

4) В множеството на ограничените редици въвеждаме операциите събиране и умножение по формулите

$$x+y=(x_1, x_2, \ldots)+(y_1, y_2, \ldots)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots),$$
$$\alpha x=\alpha(x_1, x_2, \ldots)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots).$$

Не е трудно да се провери за всички изброени примери, че са изпълнени аксиомите, определящи линейно пространство. За тези линейни пространства ще запазим означенията, дадени при разглеждането им като метрични пространства, т. е. съответно в случая 1) — означението E^1, в случая 2) — означението E^n, в случая 3) — означението $C_{[a,b]}$ и в случая 4) — означението m.

Определение 2. *Линейните пространства L и L^* се наричат **изоморфни**, ако съществува такова взаимно еднозначно съответствие между елементите им, че ако на елемента $x \in L$ съответствува елементът $x^* \in L^*$, а на $y \in L$ съответствува $y^* \in L^*$, то на $x+y$ съответствува x^*+y^*, а на $\alpha . x$ съответствува αx^* (α е произволно число).*

Изоморфните пространства могат да се разглеждат като различни реализации на едно и също пространство и такива пространства няма да считаме различни.

12.5.2. Нормирани пространства. Банахови пространства

Определение 3. *Функцията $f(x)=\|x\|$, която съпоставя на всеки вектор x от линейното пространство L реалното число $\|x\|$, се нарича **норма** в линейното пространство L, ако удовлетворява следните аксиоми:*

1) $f(x)=\|x\|=0$ *тогава и само тогава, когато* $x=0$;

2) $f(\alpha x)=\|\alpha x\|=|\alpha| . \|x\|=|\alpha| . f(x)$ *за всяко число* α;

3) $f(x_1+x_2)=\|x_1+x_2\|\leqq\|x_1\|+\|x_2\|=f(x_1)+f(x_2)$ *за всяко* x_1 *и всяко* x_2, *принадлежащи на* L.

Определение 4. *Линейно пространство L, в което е въведена функцията $f(x)=\|x\|$, се нарича **линейно нормирано пространство.***

За да подчертаем, че пространството L е нормирано, ще го означаваме обикновено с буквата N.

Стойността на нормата за даден вектор $x \in N$ се нарича ***норма*** на вектора, ***дължина*** на вектора или ***модул*** на вектора.

Нормата на вектор е винаги неотрицателна и е равна на нула само за нулевия вектор. Действително, като положим в аксиома 3) $x_1=-x_2$ и отчетем 1) и 2), получаваме

$$0=\|O\|=\|x_1-x_1\|\leqq\|x_1\|+\|-x_1\|=\|x_1\|+|-1| . \|x_1\|=2\|x_1\|, \text{ т. е. }$$
$f(x_1)=\|x_1\|\geq 0$.

Във всяко нормирано пространство може да се въведе естествена метрика по правилото $\rho(x, y)=\|x-y\|$. От аксиомите за норма следва, че функцията $\rho(x, y)$ действително задава разстояние в пространството, т. е. удовлетворява аксиомите за разстояние.

Освен това, понеже N е линейно пространство, метриката $\rho(x, y)$ е инвариантна относно транслация, т. е.

$$\rho(x_1+x, x_2+x)=\|(x_1+x)-(x_2+x)\|=\|x_1-x_2\|=\rho(x_1, x_2),$$

и положително хомогенна, т. е.

$$\rho(\alpha x, \alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|=\|\alpha(x-y)\|=|\alpha|\,\|x-y\|=|\alpha|\,\rho(x, y).$$

С появата на естествена метрика в нормираните пространства могат да бъдат въведени всички понятия, които разгледахме при метричните пространства, като пълнота и др.

Следващото определение отделя от всички нормирани пространства най-важния клас пространства, наречени банахови*.

Определение 5. ***Банахово пространство*** *се нарича всяко пълно линейно нормирано пространство.*

Примери:

1. Пространството E^1 от реалните числа с обичайните аритметични операции, както знаем, е линейно пространство. То се превръща в нормирано пространство, ако за норма на числото x приемем абсолютната му стойност: $\|x\|=|x|$. От свойствата на абсолютната стойност следва, че са налице всички свойства за норма. Това нормирано пространство е пълно, т. е. банахово. Неговата пълнота, т. е. пълнотата на E^1, като метрично пространство с обичайното разстояние между реални числа ($\rho(x, y)=\|x-y\|=|x-y|$) беше установена в глава 3.

* Стефан Банах — полски математик (1892—1945).

2. Линейното пространство E^n, разгледано по-горе, е също нормирано пространство, ако за норма на вектора $x=(x_1, x_2, \cdots x_n)$ приемам

$$\|x\|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}.$$

Аксиомите 1) и 2) са очевидно изпълнени, а неравенството на триъгълника се превръща в неравенството

$$\|x+y\|=\left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^2\right)^{1/2}=\|x\|+\|y\|,$$

което е частен случай ($p=2$) от неравенството на Минковски за суми (вж. 9.6.3). Това пространство E^n е пълно, тъй като сходимостта на $x^{(k)} \to x$ в E^n означава сходимост на всички координати $x_i^{(k)}$ на вектора $x^{(k)}$ към съответните координати на вектора x. Остава да се приложи твърдението от пример 1.

3. Пространството $C[a, b]$ от непрекъснати функции с обичайните операции за събиране на функции и умножение на функция с число, както вече говорихме, е линейно пространство. То се превръща в нормирано, ако положим $\|f(x)\|=\max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, където $f(x)$ е непрекъсната функция в сегмента $[a, b]$. Като използваме свойствата на абсолютната стойност и на функцията max, лесно се убеждаваме, че всички аксиоми за норма са изпълнени. Може да се докаже, че това пространство е пълно.

4. Пространството m на ограничените редици също може да се нормира, като положим за $x \in m$, $x=(x_1, x_2, x_3, \cdots)$

$$\|x\|=\sup\{|x_k|: k=1, 2, 3, \cdots\}.$$

Аксиомите за норма и тук се проверяват лесно. Можем да се убедим също така, че това пространство е пълно нормирано пространство, т. е. банахово пространство.

12.5.3. Оператори в линейни и нормирани пространства. Нека L_1 и L_2 са две линейни пространства и A е изображение на пространството L_1 в L_2, т. е. $A: L_1 \to L_2$.

Определение 6. *Изображението $A: L_1 \to L_2$ на едно линейно пространство L_1 в друго L_2 се нарича* ***линейно изображение или линеен оператор,*** *ако*:

a) $A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2$ *за всеки два вектора* $x_1, x_2 \in L_1$;

b) $A(\alpha x)=\alpha Ax$ *за всеки вектор* $x \in L_1$ *и всяко число* α.

Изображението $A: L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n \to L$ на декартовото произведение на линейните пространства $L_1, L_2, \cdots, L_n$* в линейното пространство L се нарича ***полилинейно,*** ако са линейни всички изображения

$$A_i: L_i \to L, \quad i=1, 2, 3, \cdots, n,$$

получени от $A(x, y, \cdots, z)$ чрез фиксиране на всички променливи освен променливата, стояща на i-то място. Тук $x \in L_1$, $y \in L_2$, $\cdots$, $z \in L_n$.

Ако е зададено линейното изображение $A: L_1 \to L_2$ на линейното пространство L_1 в линейното пространство L_2 и пространството L_2 е реалната числова ос (или комплексната равнина), то операторът A се нарича ***функционал.***

Ще разгледаме някои примери на оператори и функционали.

Примери:

1. Нека L е произволно линейно пространство. Операторът E съпоставя на всеки елемент $x \in L$ същия елемент x от това пространство, т. е. $E: L \to L$ и $Ex=x$ за всяко $x \in L$. Такъв оператор се нарича единичен или единица.

2. В тримерното пространство E^3 ще зададем оператор A като линейно преобразуване, състоящо се в проектирането на всеки вектор върху оста Ox (т. е. на всеки вектор се съпоставя неговата координата от оста Ox). Операторът може да се зададе с матрица. Например в базиса от единичните вектори l_1, l_2, l_3, насочени съответно по координатните оси Ox, Oy, Oz, операторът A може да се зададе така:

$$Ax=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x=(x_1, x_2, x_3) \in E^3.$$

3. В пространството $\boldsymbol{C}[a, b]$ е зададен линейният оператор $A: Af(x)=\int_a^b f(x)\,dx$. Операторът A е изображение на $C_{[a, b]}$ в числовата ос и е функционал.

Модулът на непрекъснатост $\omega(f; \delta)$ (вж. глава 4) и функционалът $\delta f=f(a)$, който съпоставя на всяка непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция стойността ѝ в точката a, са примери за

* Линейните операции в $L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_n$ са определени с равенствата $[x_1, x_2, \cdots, x_n]+[y_1, y_2, \cdots, y_n]=[x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n]$, $\alpha[x_1, x_2, \cdots, x_n]=[\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n]$, където $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $[y_1, y_2, \cdots, y_n] \in L_1 \times \cdots \times L_n$, $x_i, y_i \in L_i$; $i=1, 2, \cdots, n$, α е число.

функционали в пространството $C_{[a,b]}$. Функционалът $\delta f = f(a)$ се нарича ***делта-функция.***

12.5.4. Пространство на операторите. Нека L_1 и L_2 са две линейни пространства. Ще разгледаме съвкупността $\{A\}$ от всички линейни оператори, изобразяващи L_1 в L_2. В множеството $\{A\}$, елементите на което са линейни оператори, изобразяващи L_1 в L_2, могат да се въведат алгебрични операции. Нека A_1 и A_2 са такива оператори. Определяме събиране на тези оператори посредством равенството

$$(A_1+A_2)\,x=A_1x+A_2x, \quad x\in L_1.$$

Умножение на линеен оператор с число определяме с формулата

$$(\alpha A)\,x=\alpha\, Ax.$$

Очевидно е, че при тези определения всички аксиоми, задаващи линейно пространство, ще бъдат изпълнени и разглежданото множество $\{A\}$ на линейните оператори ще бъде линейно пространство. Нула за това пространство ще бъде нулевият оператор O, т. е. операторът, привеждащ всеки вектор x в нулевия вектор: $Ox=o$.

Пространството на линейните оператори, което въведохме, обикновено се означава така: $(L_1\to L_2)$. Ако пространствата L_1 и L_2 освен това имат и топология, например са нормирани, то и пространството на операторите $(L_1\to L_2)$ ще има определена топология.

12.5.5. Норма на оператор. Нека N_1 и N_2 са две линейни нормирани пространства и операторът A изобразява N_1 в N_2.

Определение 7. *Линейният оператор $A:N_1\to N_2$, изобразяващ линейното нормирано пространство N_1 в линейното нормирано пространство N_2, се нарича* ***ограничен,*** *ако съществува такава константа M, че $\|Ax\|_{N_2}\leq M\|x\|_{N_1}$ за всяко $x\in N_1$.* Индексът долу на символа норма означава пространството, в което се разглежда нормата на вектора. Когато това няма да води до недоразумение, тези индекси ще се изпускат.

В сила е следното твърдение:

Теорема 12.8. *За да бъде линейният оператор $A:N_1\to N_2$, който изобразява линейното нормирано пространство N_1 в N_2, непрекъснат, е необходимо и достатъчно той да бъде ограничен.*

(Ще отбележим, че тук под непрекъснатост на оператора се разбира непрекъснатост на съответното изображение.)

Доказателство. Нека A е непрекъснат оператор. Ако той не е ограничен, ще съществува такава редица от елементи $\{x_n\}$, че

$$\|A_{x_n}\|>n\,\|x_n\|.$$

Нека $y_n=x_n/n\,\|x_n\|$. Тогава $y_n\to 0$, тъй като $\|y_n\|=n^{-1}\to 0$ при $n\to\infty$. От друга страна,

$$\|A\,y_n\|=\frac{1}{n\,\|x_n\|}\,\|Ax_n\|>1.$$

Ще отбележим, че от линейността на оператора A следва $Ao=o$; действително $Ao=A\,(x-x)=Ax-Ax=o$. Затова Ay_n не клони към $Ao=o$, т. е. операторът A не е непрекъснат в точката нула, което противоречи на условието на теоремата.

Обратно, ако A е ограничен, то $\|Ax\|\leq M\|x\|$. Нека $x_n\to x$, т. е. $\|x_n-x\|\to 0$ при $n\to\infty$. Тогава $\|Ax_n-Ax\|=\|A\,(x_n-x)\|\leq M\|x_n-x\|\to 0$ при $n\to\infty$. Следователно $Ax_n\to Ax$ и операторът A е непрекъснат в точката x. □

Определение 8. *Нека A е линеен ограничен оператор. Най-малката от константите M, удовлетворяващи условието*

$$\|Ax\|\leq M\|x\|,$$

се нарича ***норма*** *на оператора A и се означава с $\|A\|$.*

Следователно съгласно определение 8 нормата на оператора A притежава следните свойства:

а) $\|Ax\|\leq\|A\|\cdot\|x\|$ за всяко $x\in N_1$;

б) за всяко число $\varepsilon>0$ съществува такъв елемент x_ε, че $\|Ax_\varepsilon\|>(\|A\|-\varepsilon)\,\|x_\varepsilon\|$.

Ще покажем, че $\|A\|=\sup\{\|Ax\|:\|x\|\leq 1\}$ или, което е същото, $\|A\|=\sup\{\|Ax\|/\|x\|:\|x\|\neq 0\}$. Действително, ако $\|x\|\leq 1$, то $\|Ax\|\leq\|A\|\cdot\|x\|\leq\|A\|$. Следователно и $\sup\limits_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|\leq\|A\|$. От друга страна, за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв елемент x_ε, че

$$\|Ax_\varepsilon\|>(\|A\|-\varepsilon)\,\|x_\varepsilon\|.$$

Нека $\xi_\varepsilon=x_\varepsilon/\|x_\varepsilon\|$. Тогава $\|A\xi_\varepsilon\|=\dfrac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|}>\dfrac{1}{\|x_\varepsilon\|}\,(\|A\|-\varepsilon)\,\|x_\varepsilon\|=\|A\|-\varepsilon$. Тъй като $\|\xi_\varepsilon\|=1$, то $\sup\{\|Ax\|:\|x\|\leq 1\}\geq\|A\xi_\varepsilon\|>\|A\|-\varepsilon$. Следователно $\sup\{\|Ax\|:\|x\|\leq 1\}\geq\|A\|$ или $\|A\|=\sup\{\|Ax\|:\|x\|\leq 1\}$.

Забележка. От проведените разсъждения следва, че $\|A\|=\sup\{\|Ax\|:\|x\|=1\}$.

В т. 4 беше въведено пространството $(L_1\to L_2)$ на операторите, изобразяващи линейното пространство L_1 в линейното пространство L_2. Това пространство играе важна роля в различни области на анализа и сега ще продължим да го изучаваме.

Да предположим сега, че споменатите линейни пространства L_1 и L_2 са нормирани. Ще ги означим съответно с N_1 и N_2, а съответното линейно пространство, елементите на което са линейните ограничени оператори, ще означим с $(N_1\to N_2)$. В пространството $(N_1 \to N_2)$ може да се въведе норма. Норма на елемента A от пространството $(N_1 \to N_2)$ въвеждаме по правилото: $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$. Лесно се вижда, че са изпълнени всички аксиоми от определението за норма. По такъв начин линейното пространство $(N_1 \to N_2)$, елементи на което са линейните ограничени оператори, е линейно нормирано пространство. Възниква естественият въпрос: Кога това пространство е пълно, т. е. банахово?

Отговорът на този въпрос се съдържа в следната теорема.

Теорема 12.9. *Ако линейното нормирано пространство $N_2 = B_2$ е банахово, то пространството $(N_1 \to B_2)$ на линейните ограничени оператори е също банахово.*

Доказателство. Нека $\{A_n\}$ е фундаментална редица в пространството на операторите $(N_1 \to B_2)$, т. е. $\|A_n - A_m\| \to 0$, когато $n, m \to \infty$. За всяко x имаме $\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\| \to 0$ при $n, m \to \infty$. Следователно, ако $x \in N_1$ е фиксирано, то редицата $\{A_n x\}$ от елементи на B_2 е фундаментална в B_2 и от пълнотата на B_2 следва, че тя е сходяща. Означаваме $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Получихме по този начин изображение на N_1 в B_2. Операторът, осъществяващ това изображение, означаваме с A. От свойствата на граница следва, че той е линеен. Ще покажем, че е ограничен. От това, че $\|A_n - A_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, следва $|\|A_n\| - \|A_m\|| \to 0$ при $n, m \to \infty$, т. е. числовата редица $\{\|A_n\|\}$ е фундаментална в E^1 и следователно е ограничена. Съществува такава константа M, че $\|A_n\| \leq M$ за всяко естествено n. Оттук получаваме $\|A_n x\| \leq \|A_n\| \, \|x\| \leq M \|x\|$, т. е. вземайки пред вид, че функцията, определяща норма (разстояние), е непрекъсната, имаме

$$\|Ax\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x\| \leq M \|x\|.$$

Следователно операторът A е ограничен. Операторът A беше определен като оператор, изобразяващ N_1 в B_2 по даденото по-горе правило. Ще покажем, че A е граница на редицата $\{A_n\}$ в смисъл на сходимост по норма в пространството $(N_1 \to B_2)$. Фиксираме $\varepsilon > 0$ и избираме n_0 така, че $\|A_{n+p} x - A_n x\| < \varepsilon$ за $n > n_0$, $p > 0$ и всяко x, за което $\|x\| \leq 1$. Нека $p \to \infty$; тогава $\|Ax - A_n x\| < \varepsilon$ за $n \geq n_0$ и всяко x, за което $\|x\| \leq 1$. Затова за $n \geq n_0$ имаме $\|A_n - A\| = \sup\{\|(A_n - A)x\| : \|x\| \leq 1\} \leq \varepsilon$. Следователно $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ в смисъл на сходимост по норма в пространството $(N_1 \to B_2)$, т. е. това пространство е банахово, което трябваше да се докаже. □

12.5.6. Понятие за хилбертово пространство. Ще дадем следното определение:

Определение 9. ***Хилбертово пространство*** *се нарича множество H от елементи $f, g, h, \ldots$, притежаващо следните свойства:*

1) *H е линейно пространство, т. е. в H са определени действията събиране и умножение с реално или комплексно число (в зависимост от това H се нарича реално или комплексно пространство).*

2) *H е метрично пространство, чиято метрика се въвежда с помощта на скаларно произведение, т. е. числова функция (f, g) на двойката аргументи f и g, наречена тяхно скаларно произведение, която удовлетворява аксиомите:*

а) $(af, g) = a(f, g)$ *за всяко число* a;

б) $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$;

в) $(f, g) = \overline{(g, f)}$;*

г) $(f, f) > 0$ *при* $f \neq 0$; $(f, f) = 0$ *при* $f = 0$. *Нормата* $\|f\|$ *на елемента* f *се определя с равенството*

$$\|f\| = (f, f)^{1/2},$$

а разстоянието между елементите f и g — с равенството

$$\rho(f, g) = \|f - g\|.$$

3) *H е пълно пространство като метрично пространство с въведеното по-горе разстояние. (Крайномерните пространства са винаги пълни.)*

Вземаме произволни елементи $f, g \in H$ и нека λ е реално число, тогава

$$0 \leq (f + \lambda(f, g)g, f + \lambda(f, g)g) = (f, f) + 2\lambda|(f, g)|^2 + \lambda^2|(f, g)|^2 \cdot (g, g),$$

следователно този полином относно λ не може да има различни реални корени, откъдето

$$|(f, g)|^4 - (f, f) \cdot |(f, g)|^2 (g, g) \leq 0.$$

Така (дори и в случая $(f, g) = 0$)

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f) \cdot (g, g),$$

или

$$(f, g) \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Получихме ***неравенството на Коши — Буняковски.*** Знакът равенство в него освен в тривиалния случай $f = o$ или $g = o$ се достига само когато $f = -\lambda(f, g) \cdot g$ при някоя стойност на λ, т. е. когато векторите f и g са колинеарни.

Като използваме това неравенство, лесно се проверява, че нормата $\|f\|$ на f и разстоянието $\rho(f, g) = \|f - g\|$ удовлетворяват всички аксиоми от съответните определения.

Заедно с метриката в хилбертовото пространство се появяват и понятия, свързани с граничен преход, в смисъл на въведеното

* Тук $\overline{(g, f)}$ означава число, комплексно спрегнато на (g, f).