7. Изследване графиката на функция и намиране на екстремални стойности

Разработеният в предишните две глави апарат на диференциалното смятане се прилага в тази глава за изследване графиката на функция и за намиране както на локалните, така и на глобалните екстремални стойности на функция.

7.1. Стационарни точки

7.1.1. Признаци за монотонност на функция. От предишната глава вече знаем, че изучаването на участъците на монотонност на диференцируема функция се свежда до изследване знака на първата производна на тази функция.

За удобство ще формулираме още веднъж намерените в предишната глава условия за монотонност на функция.

1°. *За да бъде диференцируемата в интервала (a, b) функция f ненамаляваща (нерастяща), е необходимо и достатъчно производната ѝ f' да бъде неотрицателна (неположителна) навсякъде в този интервал.*

2°. *За да бъде диференцируемата в интервала (a, b) функция f растяща (намаляваща), е достатъчно производната ѝ f' да бъде положителна (отрицателна) навсякъде в този интервал.*

Ще намерим областите на монотонност на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. Производната $f'(x)=3x(x-2)$ на тази функция е положителна при $-\infty<x<0$, отрицателна при $0<x<2$ и положителна при $2<x<+\infty$. Затова съгласно казаното дадената функция f расте на полуправата $(+\infty, 0)$, намалява в интервала $(0, 2)$ и расте на полуправата $(2, +\infty)$. Графиката на тази функция е изобразена на фигура 7.1.

7.1.2. Намиране на стационарни точки. Ще напомним определенията за локален максимум и локален минимум на функция.

Нека функцията f е дефинирана навсякъде в някоя околност на точката c. Тогава тази функция има в точката c ***локален максимум*** *(или съответно* ***локален минимум****), ако съществува такава околност на точката c, че стойността $f(c)$ да е най-голяма (или съответно най-малка) измежду всички стойности $f(x)$ на тази функция от тази околност.*

Локалният максимум и локалният минимум се обединяват под общото название ***локален екстремум.***

В 6.1 установихме необходимо условие за екстремум на диференцируема в дадена точка функция.

Ако функцията f е диференцируема в точка c и има в тази точка локален екстремум, то $f'(c)=0$.

Заедно с това в 6.1 беше показано, че анулирането на производната е само необходимо, но не и достатъчно условие за локален екстремум на диференцируема в дадена точка функция.

Така функцията $f(x)=x^3$ има производна $f'(x)=3x^2$, която се анулира в точката $x=0$, но няма екстремум в тази точка (вж. графиката на тази функция на фиг. 6.2).

Точките, в които производната f' на функцията f се анулира, ще наричаме ***стационарни точки*** на функцията f.

Всяка стационарна точка е точка на възможен екстремум на функцията. Обаче, за да се направи заключението, че в дадена стационарна точка действително има екстремум, са необходими допълнителни изследвания, за които трябва да разполагаме с достатъчни условия за екстремум.

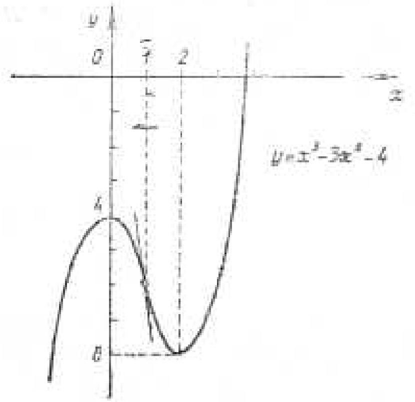
Такива условия ще бъдат установени в следващите три точки.

7.1.3. Първо достатъчно условие за екстремум.

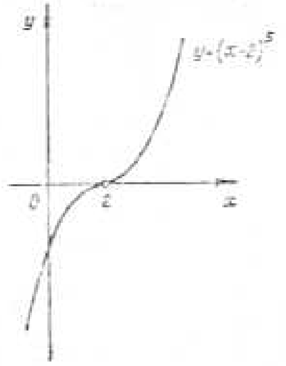
Теорема 7.1. *Нека функцията f е диференцируема навсякъде в някоя околност на точката c и нека c е стационарна точка за функцията f. Тогава, ако в тази околност производната f' е положителна (отрицателна) отляво на точката c и отрицателна (положителна) отдясно на точката c, функцията f има в точката c локален максимум (минимум). Ако производната f' има в тази околност един и същ знак отляво и отдясно на точката c, то функцията f няма екстремум в точката c.*

Доказателство. 1. Нека отначало производната f' в разглежданата околност е положителна (отрицателна) отляво на точката c и отрицателна (положителна) отдясно на точката c. Трябва да се докаже, че стойността $f(c)$ е най-голяма (най-малка) измежду всички стойности $f(x)$ в разглежданата околност. Означаваме с x_0 произволна точка от разглежданата околност, различна от c. Достатъчно е да се докаже, че $f(c)-f(x_0)>0$ (<0).

Тъй като функцията f е диференцируема навсякъде в разглежданата околност на точката c, то в сегмента, ограничен от



Фиг. 7.1



Фиг. 7.2

точките c и x_0, за функцията f са изпълнени всички условия на теорема 6.4 на Лагранж. Според тази теорема

$$f(c)-f(x_0)=(c-x_0)f'(\xi), \tag{7.1}$$

където ξ е някоя стойност на аргумента между x_0 и c. Тъй като производната $f'(\xi)$ е положителна (отрицателна) при $x_0<c$ и отрицателна (положителна) при $x_0>c$, дясната страна на (7.1) е положителна (отрицателна).

2. Нека сега производната f' има един и същ знак отляво и отдясно на c. Означавайки, както по-рано, с x_0 произволна точка от разглежданата околност, различна от c, и повтаряйки горните разсъждения, ще получим, че дясната страна на (7.1) има различни знаци при $x_0<c$ и $x_0>c$. Това доказва, че в точката c нямаме екстремум. □

Следващото от теорема 7.1 правило може да се формулира така:

1. *Ако при преминаването през дадена стационарна точка с производната f' сменя знака си от плюс на минус (от минус на плюс), то функцията f има в точката с локален максимум (минимум).* 2. *Ако при преминаването през дадена стационарна точка с производната f' не сменя знака си, то функцията няма екстремум в точката c.*

Примери:

1. Намерете точките на екстремум на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. Тъй като $f'(x)=3x(x-2)$, функцията f има две стационарни точки $x=0$ и $x=2$. При преминаване през точката $c=0$ производната сменя знака си от плюс на минус, а при преминаване през точката $c=2$ — от минус на плюс. Следователно $x=0$ е точка на локален максимум, а $x=2$ е точка на локален минимум (вж. фиг. 7.1).

2. Намерете точките на екстремум на функцията $f(x)=(x-2)^5$. Производната $f'(x)=5(x-2)^4$ се анулира единствено в точката $x=2$. Тъй като $f'(x)$ е положителна както отляво, така и отдясно на тази точка, то функцията $f(x)=(x-2)^5$ няма точка на екстремум. Графиката на тази функция е дадена на фиг. 7.2.

Понякога изследването на знака на първата производна отляво и отдясно на стационарна точка може да се окаже доста трудно. За такива случаи ще дадем друго достатъчно условие за екстремум в дадена стационарна точка c, което не изисква изследване на знака на f' в околност на точката c, но предполага съществуването на различна от нула втора производна $f^{(2)}(x)$ в точката c.

7.1.4. Второ достатъчно условие за екстремум

Теорема 7.2. *Нека функцията f има в дадена стационарна точка с крайна втора производна. Тогава функцията $f(x)$ има в точката с локален максимум, ако $f^{(2)}(c)<0$, и локален минимум, ако $f^{(2)}(c)>0$.*

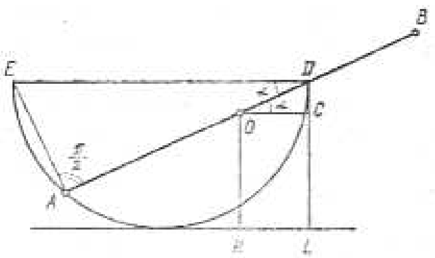
Доказателство. От условието $f^{(2)}(c)<0(>0)$ и от теорема 6.1 следва, че функцията f' намалява (расте) в точката c. Тъй като по условие $f'(c)=0$, то съществува околност на точката c, в която $f'(c)$ е положителна (отрицателна) отляво на c и отрицателна (положителна) отдясно на c. Но тогава съгласно предишната теорема f има в точката c локален максимум (минимум). □

Забележка. Теорема 7.2 има, общо казано, по-тясна сфера на действие от теорема 7.1. Така например теорема 7.2 не решава въпроса за екстремум, когато втората производна $f^{(2)}(x)$ не съществува в точката c и когато $f^{(2)}(c)=0$. В последния случай при решаване на въпроса за наличие на екстремум е необходимо да се изучи в точката c и поведението на производните от по-висок ред, което ще направим по-нататък.

Примери:

1. В чаша с формата на полукълбо с радиус r е сложен хомогенен прът с дължина l (фиг. 7.3). При предположението, че $2r<l<4r$, да се намери равновесното положение на пръта.

Равновесното положение на пръта съответствува на минималната стойност на потенциалната му енергия, т. е. на най-ниското положение на центъра на тежестта му O (тъй като прътът е хомогенен, центърът на тежестта му съвпада с неговата среда). Като означим с OK перпендикуляра към равнината, на която стои чашата, ще сведем задачата до намирането на такова положение



Фиг. 7.3

на пръта AB, при което отсечката OK има най-малка дължина. Най-напред ще пресметнем дължината на отсечката OK като функция от ъгъла α на наклона на пръта към равнината, на която стои чашата. Нека DL е успоредна на OK, а OC е перпендикулярна на OK (D е точката, в която прътът се опира в ръба на чашата).

От правоъгълния триъгълник EAD имаме $AD=ED\cos\alpha=2r\cos\alpha$. По условие $AO=l/2$, така че

$$OD=AD-AO=2r\cos\alpha-l/2.$$

От друга страна, $DC=DL-OK=r-OK$. Затова от правоъгълния триъгълник ODC имаме

$$\sin\alpha=\frac{DC}{OD}=\frac{r-OK}{2r\,.\cos\alpha-l/2}.$$

Следователно дължината на отсечката OK, която ще означим с f, е $f(\alpha)=r+\frac{l}{2}\sin\alpha-r\sin 2\alpha$. Преминаваме към определянето на тази стойност на ъгъла α, за която f има минимум. (Ясно е, че можем да се ограничим със стойности за ъгъл α от първия квадрант.) Тъй като

$$f'(\alpha)=\frac{l}{2}\cos\alpha-2r\cos 2\alpha=\frac{l}{2}\cos\alpha+2r-4r\cos^2\alpha,$$

то стационарните точки ще са решения на квадратното уравнение $4r\cos^2\alpha-\frac{l}{2}\cos\alpha-2r=0$. Понеже $\cos\alpha$ е положителен в първия квадрант, то ще ни интересува само положителният корен на това уравнение

(7.2) $$\cos\alpha_0=\frac{l+\sqrt{l^2+128r^2}}{16r}.$$

Макар и от смисъла на задачата да е ясно, че единствената стационарна точка α_0 е точка на минимум за функцията f, ще установим това с помощта на теорема 7.2. Достатъчно е да се убедим, че $f^{(2)}(\alpha_0)>0$. Тъй като

$$f^{(2)}(\alpha)=-\frac{l}{2}\sin\alpha+4r\sin 2\alpha=8r\sin\alpha\,.(\cos\alpha-l/16r),$$

то от (7.2) имаме

$$f^{(2)}(\alpha_0)=8r\sin\alpha_0(\cos\alpha_0-l/16r)=\frac{1}{2}\sin\alpha_0.\sqrt{l^2+128r^2}>0.$$

С това е установено, че на равновесното положение на пръта отговаря определеният от формула (7.2) ъгъл на наклона му към равнината, на която стои чашата.

2. Още веднъж ще намерим точките на екстремум на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. Стационарните точки на тази функция, както вече видяхме, са $x=0$ и $x=2$. Понеже

$$f^{(2)}(x)=6x-6,\ f^{(2)}(0)=-6<0,\ f^{(2)}(2)=6>0,$$

то според теорема 7.2 функцията f има максимум в точката 0 и минимум в точката 2. Екстремалните стойности на тази функция са

$$f_{\max}=f(0)=-4,\ f_{\min}=f(2)=-8.$$

7.1.5 Трето достатъчно условие на екстремум

Теорема 7.3. *Нека $n\geq 1$ е нечетно число и нека функцията f има производна от ред n в някоя околност на точката c и производна от ред $n+1$ в точката c. Тогава, ако са изпълнени съотношенията*

(7.3) $$f'(c)=f^{(2)}(c)=\cdots=f^{(n)}(c)=0,\ f^{(n+1)}(c)\neq 0,$$

функцията f има в точката c локален екстремум, по-точно локален максимум при $f^{(n+1)}(c)<0$ и локален минимум при $f^{(n+1)}(c)>0$.

Доказателство. При $n=1$ теорема 7.3 съвпада с доказаната теорема 7.2, така че трябва да проведем доказателството само за нечетно $n\geq 3$.

Нека нечетното число n удовлетворява условието $n\geq 3$ и нека за определеност $f^{(n+1)}(c)>0$. Ще докажем, че функцията f има в точката c локален минимум.

Тъй като $f^{(n+1)}(c)>0$, функцията $f^{(n)}$ расте в точката c съгласно теорема 6.1. Но тогава, понеже $f^{(n)}(c)=0$, може да се твърди, че навсякъде в достатъчно малка околност на точката c функцията $f^{(n)}$ е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c.

Като имаме пред вид това, ще развием функцията f' в околност на точката c по формулата на Тейлор, като ще запишем остатъчния член във формата на Лагранж (вж. 6.8.7). Ще получим, че за всяко x от достатъчно малка околност на точката c съществува такава точка ξ между x и c, че

$$f'(x)=f'(c)+\frac{(x-c)}{1!}f^{(2)}(c)+\dots+\frac{(x-c)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(c)$$
$$+\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi).$$

Съгласно съотношенията (7.3) това разлагане добива вида

$$f'(x)=\frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi). \quad (7.4)$$

По-рано установихме, че за всяко x от достатъчно малка околност на точката c производната $f^{(n)}$ е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c. Тъй като ξ е между x и c, то за всяко x от достатъчно малка околност на точката c величината $f^{(n)}(\xi)$ (а очевидно поради нечетността на n и цялата дясна страна на (7.4)) е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c.

И така с помощта на равенство (7.4) доказахме, че производната $f'(x)$ за всички x от достатъчно малка околност на точката c е отрицателна отляво на c и положителна отдясно на c. В този случай според първото достатъчно условие за екстремум (т. е. теорема 7.1) функцията f има в точката c локален минимум.

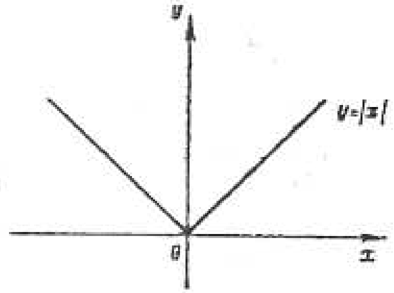
Случаят $f^{(n+1)}(c)<0$ се разглежда съвършено аналогично. Същите разсъждения и формула (7.4) в този случай дават възможност да се заключи, че функцията f има в точката c локален максимум.

Забележка. Много важно е изискването за нечетност на числото n в теорема 7.3. При четно n и при запазване на всички останали условия на теорема 7.3 функцията f няма да има екстремум в точката c (вж. по този повод теорема 7.10).

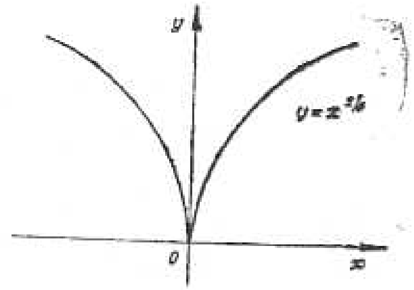
7.1.6. Екстремум на функция, която не е диференцируема в дадена точка. По-рано разгледахме въпроса за съществуване на екстремум на функцията f в точката c, в която функцията f е диференцируема. В тази точка ще изучим въпроса за съществуване на екстремум в точката c на такава функция, която не е диференцируема в точката c, но е диференцируема във всяка друга точка на някоя околност на точката c и освен това е непрекъсната в точката c.

Оказва се, че теорема 7.1 може да бъде обобщена в случай на такава функция. В сила е следното твърдение:

Теорема 7.4. *Нека функцията f е диференцируема навсякъде в някоя околност на точката c с изключение евентуално на точката c и е непрекъсната в точката c. Тогава, ако в тази околност производната f' е положителна (отрицателна) отляво на точката c и отрицателна (положителна) отдясно на точката c, функцият f има в точката c локален максимум (минимум). Ако производната f' има един и същ знак отляво и отдясно на точката c, функцията няма екстремум в точката c.*



Фиг. 7.4



Фиг. 7.5

Доказателството съвпада напълно с доказателството на теорема 7.1.

Достатъчно е да отбележим, че условията на теорема 7.4 и този път осигуряват приложимостта на теорема 6.4 на Лагранж към функцията f в сегмента, ограничен от точките c и x_0, където x_0 е произволна точка от достатъчно малка околност на точката c.

Примери:

1. Да се намерят точките на екстремум на функцията $f(x)=|x|$. Тази функция е диференцируема навсякъде върху безкрайната права освен в точката $x=0$ и е непрекъсната в точката $x=0$; при това $f'(x)=1$ при $x>0$ и $f'(x)=-1$ при $x<0$.

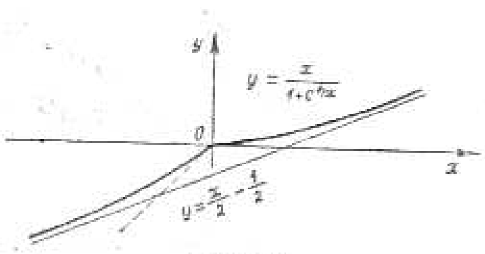
Теорема 7.1 не е приложима за тази функция, а съгласно теорема 7.4 тя има минимум при $x=0$ (фиг. 7.4).

2. Да се намерят точките на екстремум на функцията $f(x)=x^{2/3}$. Тази функция е непрекъсната върху цялата безкрайна права и е диференцируема навсякъде върху тази права с изключение на точката $x=0$. Производната ѝ при $x\neq 0$ е

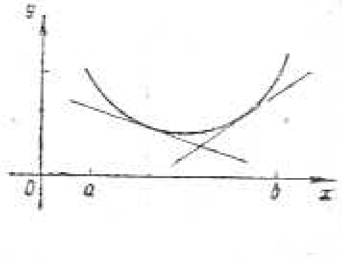
$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

В предишния пример производната имаше в точката $x=0$ прекъсване от първи род*; този път производната има в точката $x=0$ прекъсване от втори род („безкраен скок"). От израза за производната заключаваме, че тя е отрицателна отляво на точката $x=0$

* Въпреки че тази производна не съществува в точката $x=0$, тя има в тази точка крайни дясна и лява граница, несъвпадащи помежду си.



Фиг. 7.6



Фиг. 7.7

и положителна отдясно на тази точка. Следователно теорема 7.4 позволява да твърдим, че разглежданата функция има минимум в точката $x=0$ (графиката на тази функция е дадена на фиг. 7.5).

3. Да се намерят точките на екстремум на функцията

$$f(x)=\begin{cases} x/(1+e^{1/x}) & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Лесно се вижда, че функцията е непрекъсната върху цялата безкрайна права. Действително единствената „съмнителна" точка е $x=0$, но и в тази точка функцията е непрекъсната, тъй като

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} f(x)=0.$$

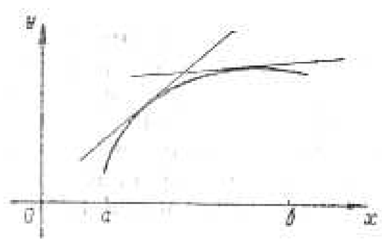
Очевидно разглежданата функция е диференцируема върху цялата безкрайна права с изключение на точката $x=0$. Навсякъде освен в тази точка производната се определя от формулата

$$f'(x)=(1+e^{1/x}+x^{-1}e^{1/x})(1+e^{1/x})^{-2}.$$

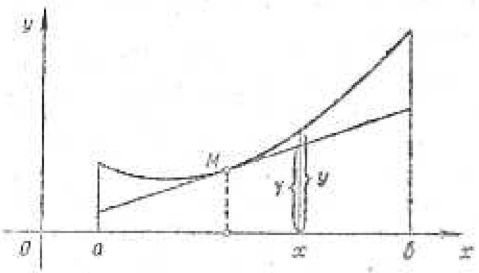
Тъй като $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$ не съществува, функцията f не е диференцируема в точката $x=0$. Понеже производната f' е положителна и отляво, и отдясно на точката $x=0$, то съгласно теорема 7.4 разглежданата функция няма екстремум в точката $x=0$ и следователно въобще няма екстремум. (Графиката на функцията е изобразена на фиг. 7.6.)

7.1.7. Обща схема за намиране на екстремум. Ще предполагаме, че функцията f е непрекъсната в интервала* (a, b) и производната ѝ f' съществува и непрекъсната в този интервал с изключение евентуално на краен брой точки. Освен това ще предполагаме, че

* Вместо интервала (a, b) може да се разглежда безкрайната права или отворена полуправа.



Фиг. 7.8



Фиг. 7.9

производната f' се анулира в интервала (a, b) само в краен брой точки. С други думи, предполагаме, че интервалът (a, b) има само краен брой точки, в които производната f' не съществува или се анулира. Означаваме тези точки с $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ $(a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b)$. Съгласно направените предположения производната f' запазва постоянен знак във всеки от интервалите $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$. Следователно въпросът за съществуване на екстремум във всяка от точките $x_1, x_2, \ldots, x_n$ може да бъде решен (в положителен или отрицателен смисъл) с помощта на теорема 7.4.

7.2. Изпъкналост на графиката на функция

Да предположим, че функцията f е диференцируема във всяка точка на интервала (a, b). Тогава, както установихме в 5.1.3, съществува допирателна към графиката на функцията във всяка точка $M(x, f(x))$ на тази графика $(a<x<b)$, при това тази допирателна не е успоредна на оста Oy.

Определение. *Ще казваме, че графиката на функцията f има в интервала (a, b)* ***изпъкналост, насочена надолу (нагоре)****, ако графиката ѝ в този интервал няма точки под (над) всяка своя допирателна.*

Забележка 1. Терминът *над* (*или под*) има смисъл, към като допирателната не е успоредна на оста Oy.

На фиг. 7.7 е дадена графиката на функция, която има в интервала (a, b) изпъкналост, насочена надолу, а на фиг. 7.8 — графиката на функция, която има изпъкналост, насочена нагоре.

Теорема 7.5. *Ако функцията f има в интервала (a, b) крайна втора производна и ако тази производна е неотрицателна (неположителна) навсякъде в този интервал, то графиката на функ-*

цията f има в интервала (a, b) изпъкналост, насочена надолу (нагоре).

Доказателство. За определеност ще разгледаме случая, когато $f^{(2)}(x) \geqq 0$ навсякъде в (a, b). Ще означим с c произволна точка от интервала (a, b) (фиг. 7.9). Трябва да се докаже, че графиката на функцията f в интервала (a, b) няма точки под допирателната, минаваща през точката $M(c, f(c))$. Записваме уравнението на тази допирателна, означавайки текущата й ордината с Y. Тъй като ъгловият коефициент на допирателната е равен на $f'(c)$, то уравнението й има вида

$$Y-f(c)=f'(c)(x-c). \tag{7.5}$$

Разлагаме функцията f по формулата на Тейлор при $n=1$ в околност на точката c:

$$f(x)=f(c)+\frac{x-c}{1!}f'(c)+\frac{(x-c)^2}{2!}f^{(2)}(\xi), \tag{7.6}$$

където остатъчният член е във формата на Лагранж, ξ е между c и x. (Понеже по условие f има втора производна в интервала (a, b), формулата (7.6) е вярна за всяко x от интервала (a, b) (вж. 6.8.7).

Като съпоставим (7.6) и (7.5), ще имаме

$$f(x)-Y=\frac{1}{2}(x-c)^2 f^{(2)}(\xi). \tag{7.7}$$

Тъй като втората производна по условие е неотрицателна навсякъде в (a, b), то дясната страна на (7.7) е неотрицателна, т. е. за всяко x от (a, b) имаме $f(x) \geqq Y$.

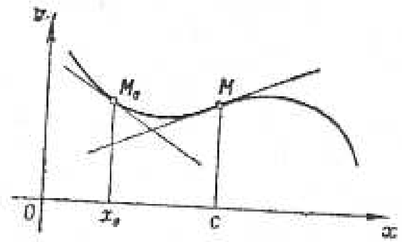
Последното неравенство доказва, че графиката на функцията f навсякъде в интервала (a, b) лежи над допирателната (7.5).

Теоремата се доказва аналогично за случая $f^{(2)}(x) \leqq 0$. □

Забележка 2. Ако $f^{(2)}(x)=0$ навсякъде в интервала (a, b), то, както лесно можем да се убедим, f е линейна функция, т. е. графиката й е права линия. В този случай можем да считаме посоката на изпъкналостта й произволна.

Теорема 7.6. *Нека втората производна на функцията f е непрекъсната и положителна (отрицателна) в точката c. Тогава съществува околност на точката c, в която графиката на функцията f има изпъкналост, насочена надолу (нагоре).*

Доказателство. Според теоремата за постоянство на знака на непрекъснатата функция съществува околност на точката c, в която втората й производна $f^{(2)}$ е положителна (отрицателна). От предишната теорема следва, че графиката на функцията f има в тази околност изпъкналост, насочена надолу (нагоре).



Фиг. 7.10

Следователно посоката на изпъкналост на графиката на функция се характеризира напълно със знака на втората производна на тази функция.

Пример:

Да се изследва посоката на изпъкналост на графиката на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. От вида на втората й производна $f^{(2)}(x)=6(x-1)$ следва, че тази производна е отрицателна при $x<1$ и положителна при $x>1$. Следователно изпъкналостта на графиката на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$ е насочена нагоре в интервала $(-\infty, 1)$ и надолу в интервала $(1, +\infty)$ (вж. фиг. 7.1).

7.3. Точки на инфлексия

7.3.1. Определение на инфлексна точка. Необходимо условие за инфлексия. Нека a, b и c са три числа, за които $a<c<b$. Ще предполагаме, че функцията f е диференцируема в интервала (a, b), т. е. съществува допирателна към графиката на тази функция във всички точки, абсцисите на които принадлежат на интервала (a, b). Ще предполагаме още, че графиката на функцията f има определена посока на изпъкналост във всеки от интервалите (a, c) и (c, b).

Определение. *Точката $M(c, f(c))$ от графиката на функцията f се нарича* ***точка на инфлексия (инфлексна точка)*** *на тази графика, ако съществува околност на точката c от абсцисната ос, в която графиката на функцията f има отляво и отдясно на точката с различни посоки на изпъкналост.*

На фиг. 7.10 е изобразена графиката на функция, която има ***инфлексия*** в точката $M(c, f(c))$.

Понякога при определянето на инфлексна точка на графиката на функцията f се иска допълнително в достатъчно малка околност на точката c от абсцисната ос графиката отдясно и отляво на точката c да лежи от различни страни на допирателната й в точката $M(c, f(c))$. По-нататък ще докажем, че това свойство следва от даденото определение при предположението, че производната е непрекъсната в точката c.

Ще докажем следните две леми:

Лема 1. *Нека функцията f има производна f' навсякъде в една δ-околност на точката c, при това тази производна е непрекъсната в точката c. Тогава, ако графиката на функцията f има в интервала $(c, c+\delta)$ изпъкналост, насочена надолу (нагоре), то навсякъде в интервала $(c, c+\delta)$ няма точки от тази графика, които да са под (над) допирателната към графиката в точката $M(c, f(c))$.*

Доказателство. Да разгледаме редицата $\{x_n\}$ от точки на интервала $(c, c+\delta)$, клоняща към c. През всяка точка $M_n(x_n, f(x_n))$ на графиката на функцията f да прекараме допирателната към тази графика, т. е. правата

$$Y_n=f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n).$$

Тъй като по условие графиката на функцията f има в интервала $(c, c+\delta)$ изпъкналост, насочена надолу (нагоре), то за всяко n и всяка фиксирана точка x на интервала $(c, c+\delta)$ имаме

$$f(x)-Y_n=f(x)-f(x_n)-(x-x_n)f'(x_n)\geq 0\ (\leq 0). \tag{7.8}$$

От условието за непрекъснатост на f' (и още повече на f) в точката c и от определението за непрекъснатост по Хайне следва, че съществува границата

$$\lim_{n\to\infty}(f(x)-Y_n)=\lim_{n\to\infty}\{f(x)-f(x_n)-(x-x_n)f'(x_n)\}$$
$$=f(x)-f(c)-(x-c)f'(c).$$

Ще означим тази граница с $f(x)-Y$, където под Y се разбира текущата ордината на допирателната към графиката на функцията f в точката $M(c, f(c))$ (уравнението на тази допирателна има вида $Y=f(c)+(x-c)f'(c)$).

Като извършим в неравенството (7.8) граничен преход при $n\to\infty$ и използваме теорема 3.13, ще получим, че $f(x)-Y\geq 0$ (≤ 0) за всяка фиксирана точка x от интервала $(c, c+\delta)$, при което Y означава текущата ордината на допирателната в точката $M(c, f(c))$. □

Забележка. Аналогично се формулира и доказва лема 1 и в случая, когато графиката на функцията има определена посока на изпъкналост в интервала $(c-\delta, c)$.

Лема 2. *Нека функцията f има производна f' в някоя околност на точката c и тази производна е непрекъсната в точката c. Тогава, ако графиката на функцията f има инфлексия в точката c, то в достатъчно малка δ-околност на тази точка отдясно и отляво на c тази графика лежи в различни полуравнини, определени от допирателната в точката $M(c, f(c))$.*

За доказване на тази лема трябва да се избере $\delta>0$ толкова малко, че във всеки от интервалите $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$ графиката на функцията f да има определена посока на изпъкналост (тези посоки ще бъдат различни в интервалите $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$). След това прилагаме лема 1 за функцията f за всеки от интервалите $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$. □

Лема 2 дава необходимо условие за инфлексия в графиката на два пъти диференцируема в дадена точка функция.

Теорема 7.7 (необходимо условие за инфлексия в графиката на два пъти диференцируема функция). *Ако функцията f има в точката c втора производна и графиката ѝ има инфлексия в точката $M(c, f(c))$, то $f^{(2)}(c)=0$.*

Доказателство. Нека, както и по-горе, Y е текущата ордината на допирателната $Y=f(c)+(x-c)f'(c)$, минаваща през точката $M(c, f(c))$ от графиката на функцията.

Ще разгледаме функцията

$$F(x)=f(x)-Y=f(x)-f(c)-(x-c)f'(c).$$

Тази функция F, както и функцията f, има в точката c втора производна (и затова има и първа производна в някоя околност на c, при това тя е непрекъсната в точката c). Според лема 2 в достатъчно малка околност на точката c графиката на функцията $y=f$ лежи в различни полуравнини, определени от допирателната в точката $M(c, f(c))$ отляво и отдясно на c.

Затова в достатъчно малка околност на точката c не могат да се намерят две точки $x_1<c<x_2$, за които $F(x_1)\cdot F(x_2)>0$, т. е. в тези две точки $F(x)$ да има еднакъв знак.

Да допуснем, че $f^{(2)}(c)\neq 0$. Понеже $F'(x)=f'(x)-f'(c)$, $F^{(2)}(x)=f^{(2)}(x)$, то $F'(c)=0$, $F^{(2)}(c)\neq 0$ и съгласно теорема 7.2 функцията F има в точката c локален екстремум. Полученото противоречи на това, че в достатъчно малка околност на точката c не могат да се намерят две точки $x_1<c<x_2$, за които $F(x_1)$ и $F(x_2)$ да имат еднакъв знак. □

Анулирането на втората производна е само необходимо условие за инфлексия на два пъти диференцируема функция. Това се вижда например от графиката на функцията $f(x)=x^4$. За тази функция втората производна $f''(x)=12x^2$ се анулира в точката $x=0$, но графиката ѝ няма инфлексия в точката $M(0, 0)$.

Според теорема 7.7, за да се намерят всички инфлексни точки на графиката на два пъти диференцируема функция f, трябва да се разгледат всички корени на уравнението $f''(x)=0$.

Тъй като анулирането на втората производна е само необходимо условие за инфлексия, нужно е допълнително изследване за съществуване на инфлексия във всяка точка, за която $f''(x)$

$=0$. За провеждането на такова изследване трябва да се намерят и достатъчни условия за инфлексия, към което преминаваме.

7.3.2. Първо достатъчно условие за инфлексия

Теорема 7.8. *Нека функцията f има втора производна в някоя околност на точката c и $f''(c)=0$. Тогава, ако в тази околност втората производна f'' има различни знаци отдясно и отляво на c, то графиката на тази функция има инфлексия в точката $M(c, f(c))$.*

Доказателство. Графиката на функцията f има допирателна в точката $M(c, f(c))$, тъй като от условията на теоремата следва съществуването на крайна производна $f'(c)$. От това, че f'' отляво и отдясно на c има различни знаци, и от теорема 7.4 следва, че посоката на изпъкналост отляво и отдясно на c е различна. □

Пример:

Да се намерят инфлексните точки на графиката на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$. Тази функция разглеждахме нееднократно (графиката й е изобразена на фиг. 7.1). Понеже $f''(x)=6(x-1)$, то единствената стойност на аргумента, при която е възможна инфлексия, е $x=1$. На тази стойност на аргумента съответствува точката $M(1, -6)$ от графиката. Тъй като f'' има различни знаци при $x>1$ и при $x<1$, то $M(1, -6)$ е инфлексна точка за графиката на разглежданата функция.

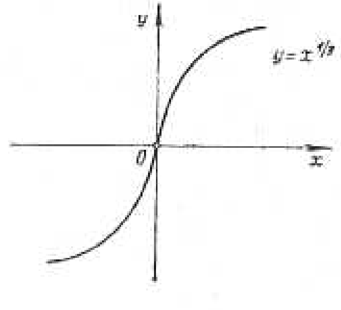
7.3.3. Някои обобщения на първото достатъчно условие за инфлексия. В условията на теорема 7.8 можем да се откажем от изискването за двукратна диференцируемост на функцията f в самата точка c, като запазим това изискване само за точките, които лежат в някоя околност отляво и отдясно на тази точка. При това трябва допълнително да предположим обаче съществуването на крайна производна $f'(c)$.

Доказателството на теорема 7.8 с посочените изменения дословно съвпада с приведеното доказателство.

По-нататък можем да се условим при определянето на инфлексните точки да не изключваме случая, когато допирателната към графиката в разглежданата точка е успоредна на оста Oy.* При това условие в теорема 7.8 можем да се откажем даже от изискването за еднократна диференцируемост в самата точка c и да формулираме тази теорема по следния начин:

Нека функцията f има крайна втора производна навсякъде в някоя околност на точката c с изключение евентуално в точката c. Нека освен това функцията f е непрекъсната в точка c и графиката й има допирателна в точката $M(c, f(c))$, евентуално успоредна на оста Oy. Тогава, ако в разглежданата околност втората производна $f^{(2)}$ има различни знаци отляво и отдясно на точката c, то графиката на функцията f има инфлексия в точката $M(c, f(c))$.

* В този случай първата производна f' е безкрайна в точката c.



Фиг. 7.11

Доказателството на формулираното твърдение е напълно аналогично на доказателството на теорема 7.8.

Пример:

Да се намерят инфлексните точки на графиката на функцията $y=x^{1/3}$. Тази функция има втора производна навсякъде върху безкрайната права с изключение на точката $x=0$. В точката $x=0$ разглежданата функция е непрекъсната, но вече първата й производна е безкрайност. Обаче графиката на функцията $y=x^{1/3}$ има в точката $(0, 0)$ допирателна, успоредна на оста Oy* (фиг. 7.11). Тъй като втората производна има отляво и отдясно на точката $x=0$ различни знаци, то графиката на функцията $y=x^{1/3}$ има инфлексия в точката $(0, 0)$.

7.3.4. Второ достатъчно условие за инфлексия

Теорема 7.9. *Ако функцията f има в точката c крайна трета производна и удовлетворява в тази точка условията $f^{(2)}(c)=0$, $f^{(3)}(c)\neq 0$, то графиката й има инфлексия в точката $M(c, f(c))$.*

Доказателство. От условието $f^{(3)}(c)\neq 0$ и от теорема 6.1 следва, че функцията $f^{(2)}(x)$ или расте, или намалява в точката c. Тъй като $f^{(2)}(c)=0$, то и в единия, и в другия случай съществува околност на точката c, в която $f^{(2)}(x)$ има различни знаци отляво и отдясно на c. Но тогава съгласно предишната теорема графиката на функцията f има инфлексия в точката $M(c, f(c))$. □

* Следва например от това, че графиката на обратната функция $x=y^3$ има в тази точка допирателна.

З а б е л е ж к а. Разбира се, теорема 7.9 има по-тясна сфера на действие, отколкото теорема 7.8. Така теорема 7.9 не решава въпроса за наличие на инфлексия, когато функцията f няма крайна трета производна, а също така и когато $f^{(3)}(c)=0$. В последния случай, за да се реши въпросът за наличие на инфлексия, е нужно да се изучи поведението на производните от по-висок ред в точката c, което ще бъде направено по-нататък.

Ще се върнем към примера, разгледан в предишната точка, и ще покажем, че въпросът за наличие на инфлексия на графиката на функцията $f(x)=x^3-3x^2-4$ може да бъде решен и с помощта на теорема 7.9. Наистина $f^{(3)}(x)=6\neq 0$, следователно $M(1, -6)$ е инфлексна точка съгласно теорема 7.9.

7.3.5. Трето достатъчно условие за инфлексия. Ще установим още едно достатъчно условие за инфлексия, приложимо за случая, когато в дадена точка c се анулират както втората, така и третата производна на разглежданата функция.

Аналог на теорема 7.3 е следното твърдение:

Теорема 7.10. *Нека $n\geq 2$ е четно число и нека функцията f има производни до n-ти ред в някоя околност на точката c и производна от $(n+1)$-ви ред в самата точка c. Тогава, ако са изпълнени съотношенията*

$$f^{(2)}(c)=f^{(3)}(c)=\ldots=f^{(n)}(c)=0,\quad f^{(n+1)}(c)\neq 0, \tag{7.3'}$$

то графиката на функцията f има инфлексия в точката $M=(c, f(c))$.

Д о к а з а т е л с т в о. При $n=2$ теорема 7.10 съвпада с вече доказаната теорема 7.9, така че е нужно да се даде доказателство само за четно $n\geq 4$.

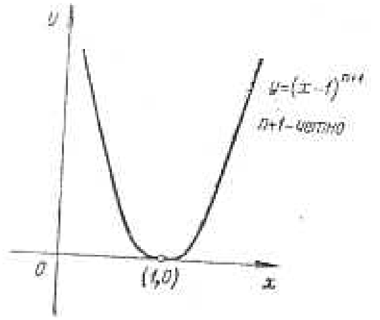
Нека четното число n удовлетворява условието $n\geq 4$ и нека $f^{(n+1)}(c)\neq 0$. Тогава според теорема 6.1 функцията $f^{(n)}$ или намалява в точката c (при $f^{(n+1)}(c)<0$), или расте в тази точка (при $f^{(n+1)}(c)>0$). Понеже освен това $f^{(n)}(c)=0$, то и в двата случая функцията $f^{(n)}$ има в достатъчно малка околност на точката c различни знаци отдясно и отляво на c.

Да разложим функцията $f^{(2)}$ в околността на точката c по формулата на Тейлор, като запишем остатъчния член във формата на Лагранж (вж. 6.8.7). Ще получим, че за всяко x от достатъчно малка околност на точката c съществува точка ξ между x и c, за която

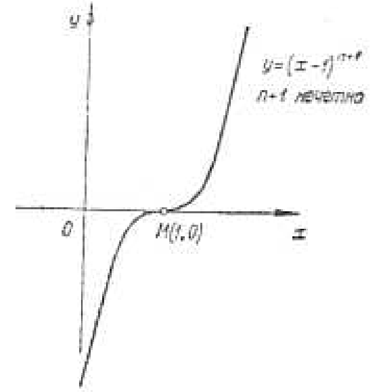
$$f^{(2)}(x)=f^{(2)}(c)+\frac{x-c}{1!}f^{(3)}(c)+\ldots+\frac{(x-c)^{n-3}}{(n-3)!}f^{(n-1)}(c)+\frac{(x-c)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(\xi).$$

Поради съотношенията (7.3′) написаното разлагане добива вида

$$f^{(2)}(x)=\frac{(x-c)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(\xi). \tag{7.4'}$$



Фиг. 7.12



Фиг. 7.13

По-рано установихме, че за всички x от достатъчно малка околност на точката c производната $f^{(n)}$ има различни знаци отдясно и отляво на c. Тъй като ξ лежи между x и c, то за всяко x от достатъчно малка околност на точката c величината $f^{(n)}(\xi)$ (а очевидно поради четността на n и цялата дясна страна на (7.4′)) има различни знаци отдясно и отляво на c. И така съгласно равенството (7.4′) за всяко x от достатъчно малка околност на точката c производната $f^{(2)}$ има различни знаци отдясно и отляво на c. Според теорема 7.8 графиката на функцията f има инфлексия в точката $M(c, f(c))$.□

З а б е л е ж к а. Много важно е изискването за четност на n в теорема 7.10 (сравнете тази теорема с теорема 7.3). (Вж. фиг. 7.12, 3.13.)

7.4. Асимптоти на графиката на функция

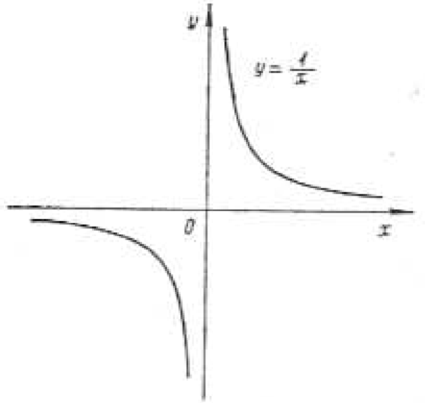
Определение 1. *Казва се, че правата $x=a$ е* ***вертикална асимптота*** *на графиката на функцията f, ако поне една от границите*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \textit{или} \quad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

е равна на $+\infty$ или $-\infty$.

Пример:

Графиката на функцията $f(x)=1/x$ има вертикална асимптота $x=0$, тъй като $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} x^{-1}=-\infty$ (фиг. 7.14).



Фиг. 7.14

Да предположим по-нататък, че функцията f е дефинирана за произволно големи стойности на аргумента. За определеност ще разглеждаме произволно големи положителни стойности.

Определение 2. *Правата $Y=kx+b$ се нарича* ***наклонена асимптота*** *към графиката на функцията f при $x\to+\infty$, ако функцията f се представя във вида*

(7.9) $$f(x)=kx+b+\alpha(x),$$

където $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$.

Теорема 7.11. *Необходимо и достатъчно условие функцията f да има наклонена асимптота при $x\to+\infty$ е да съществуват двете граници*

(7.10) $$\lim_{x\to+\infty}x^{-1}f(x)=k \text{ и } \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b.$$

Доказателство. *Необходимост.* Нека графиката на функцията f има при $x\to+\infty$ наклонена асимптота, т. е. за f е в сила представянето (7.9). Тогава

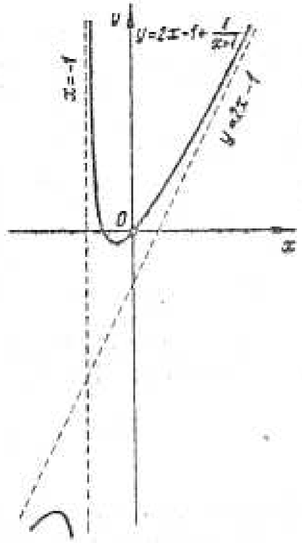
$$\lim_{x\to+\infty}x^{-1}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^{-1}(kx+b+\alpha(x))=\lim_{x\to+\infty}(k+b/x+\alpha(x)/x)=k,$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b.$$

Достатъчност. Нека съществуват границите (7.10). Втората от тези граници ни дава право да твърдим, че разликата $f(x)-kx-b$ е безкрайно малка при $x\to+\infty$. Като означим тази безкрайно малка с α, ще получим за f представянето (7.9). □

Забележка. Аналогично се определя наклонена асимптота и се доказва теорема 7.11 и за случая $x\to-\infty$.

Пример: Графиката на функцията $f(x)=(2x^2+x)/(x+1)$ има наклонена асимптота $Y=2x-1$ и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$ и освен това има вертикална асимптота $x=-1$ (фиг. 7.15). Действително

$$\lim_{x\to\pm\infty}x^{-1}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(2x+1)/(x+1)=2,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x)=\lim_{x\to\pm\infty}(-1+1/(x+1))=-1,$$
$$\lim_{x\to-1+0}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to-1-0}f(x)=-\infty.$$



Фиг. 7.15

Наред с линейните асимптоти се разглеждат и асимптоти от по-сложен вид.

Казва се, че параболата от n-ти ред, определена от многочлена

(7.11) $Y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$,

е ***асимптота*** *за графиката на функцията f при $x\to+\infty$, ако функцията f се представя във вида*

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0+\alpha(x),\ \lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0.$$

Лесно се доказва следващото твърдение.

Необходимо и достатъчно условие графиката на функцията f при $x\to+\infty$ да има асимптота (7.11) е да съществуват следните $n+1$ граници:

$$\lim_{x\to+\infty}x^{-n}f(x)=a_n,\ \lim_{x\to+\infty}x^{-(n-1)}(f(x)-a_nx^n)=a_{n-1},$$
$$\dots,\ \lim_{x\to+\infty}x^{-1}(f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2))=a_1,$$
$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x))=a_0.$$

7.5. Построяване на графиката на функция

В този параграф ще изложим схема, по която е целесъобразно да се провеждат изследванията на графиката на функция, и ще илюстрираме тази схема с пример.

При изучаването на графиката на дадена функция f е целесъобразно да се направят следните изследвания:

1°. Да се уточни дефиниционната област на функцията.

2°. Да се изясни въпросът за съществуване на асимптоти (вертикални и наклонени).

3°. Да се намерят областите на растене и намаляване на функцията и точките на екстремум.

4°. Да се намерят областите, в които се запазва посоката на изпъкналост, и инфлексните точки.

5°. Да се намерят точките, в които графиката на функцията пресича оста Ox.

По получените данни лесно се построява ескиз на графиката на функцията. За пример ще построим графиката на функцията

$$f(x)=\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}. \tag{7.12}$$

Ще следваме изложената по-горе схема.

1°. Понеже функцията (7.12) е рационална дроб, тя е дефинирана и непрекъсната навсякъде върху безкрайната права освен в точката $x=0$, в която знаменателят се анулира.

2°. Ще изясним въпроса за съществуване на асимптоти. Очевидно

$$\lim_{x\to 0\pm 0}\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}=-\infty$$

и затова графиката на функцията има вертикална асимптота $x=0$. Освен това от съществуването на границите

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^{-1}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^3}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x/2)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^2+14x-6}{4x^2}=-\frac{5}{4}$$

следва, че при $x\to\infty$ и при $x\to-\infty$ графиката на функцията има наклонена асимптота $Y=x/2-5/4$.

3°. За да намерим областите на растене и намаляване, ще пресметнем първата производна на функцията (7.12)

$$f'(x)=\frac{x^3-7x+6}{2x^3}=\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}.$$

Като вземем пред вид освен това, че функцията и първата ѝ производна не съществуват при $x=0$, ще получим следните области, в които f' запазва постоянен знак:

Област на стойностите на x	$-\infty<x<-3$	$-3<x<0$	$0<x<1$	$1<x<2$	$2<x<+\infty$
Знак на f'	+	−	+	−	+
Поведение на функцията f	расте	намалява	расте	намалява	расте

От приведената таблица е очевидно, че функцията има екстремуми в следните точки:

1) максимум при $x=-3$ и $f(-3)=-49/12$,

2) максимум при $x=1$ и $f(1)=5/4$,

3) минимум при $x=2$ и $f(2)=9/8$.

4°. За да намерим областите, в които се запазва посоката на изпъкналост, пресмятаме втората производна:

$$f^{(2)}(x)=\frac{7x-9}{x^4}=\frac{7(x-9/7)}{x^4}.$$

Отчитаме също, че функцията и производните ѝ не съществуват в точката $x=0$, и получаваме следните области:

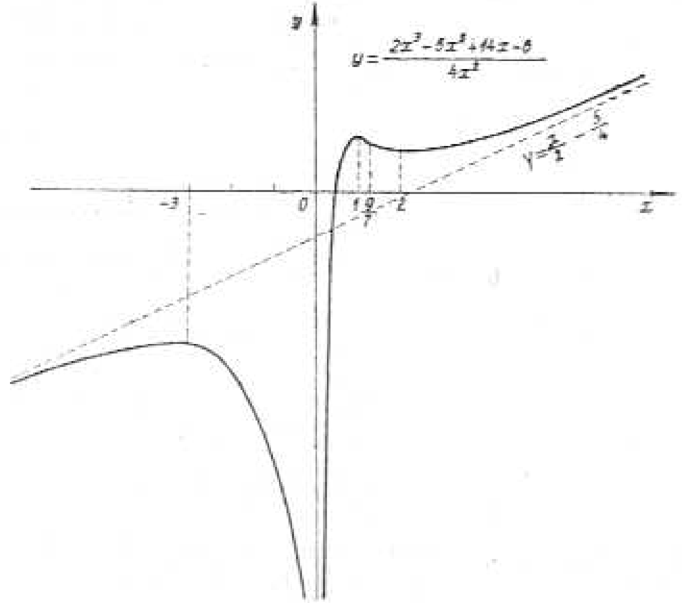
Област на стойностите на x	$-\infty<x<0$	$0<x<9/7$	$9/7<x<+\infty$
Знак на $f^{(2)}$	−	−	+
Посока на изпъкналост на f	нагоре	нагоре	надолу

От приведената таблица е очевидно, че графиката на функцията има инфлексия в точката $(9/7, f(9/7))$ и $f(9/7)=913/756$.

5°. Остава да намерим точките, в които графиката пресича оста Ox. Тези точки съответствуват на реалните корени на уравнението

$$2x^3-5x^2+14x-6=0.$$

Лесно се вижда, че $2x^3-5x^2+14x-6=2(x-1/2)(x^2-2x+6)$. Понеже квадратният тричлен x^2-2x+6 има комплексни корени, то уравнението има само един реален корен $x=1/2$, така че графиката на функцията пресича оста Ox в точката $(1/2, 0)$. По получените данни построяваме ескиз на графиката на разглежданата функция (фиг. 7.16).

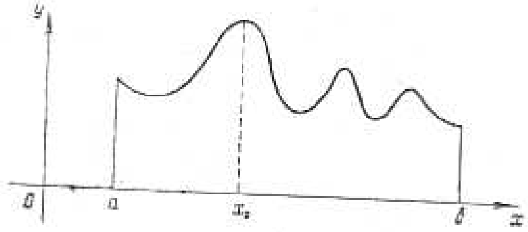


Фиг. 7.16

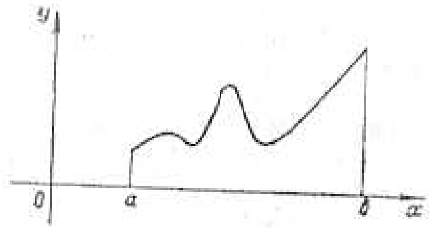
7.6. Глобален максимум и глобален минимум на функция в сегмент. Граничен (контурен) екстремум

7.6.1. Определяне на максималната и минималната стойност на функция, дефинирана в сегмент. Да разгледаме функцията f, дефинирана и непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Досега се занимавахме само с намирането на локалните максимуми и минимуми на функция. Сега ще поставим задачата за намиране на глобалните максимуми и минимуми, т. е. на максималната и минималната стойност на функцията в сегмента $[a, b]$. Ще подчертаем, че според теоремата на Вайерщрас (вж. теорема 4.15) непрекъснатата функция f в сегмента $[a, b]$ непременно достига максималната и минималната си стойност. За определеност ще се спрем на намирането на максималната стойност на f в сегмента $[a, b]$.

Максималната си стойност функцията f може да достига или във вътрешна точка x_0 от сегмента $[a, b]$ (тогава тя съвпада с един от локалните максимуми на функцията f, вж. фиг. 7.17), или в



Фиг. 7.17



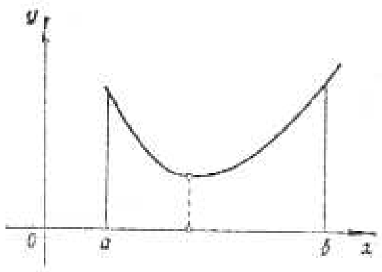
Фиг. 7.18

един от краищата на сегмента $[a, b]$ (фиг. 7.18). Оттук е ясно, че за намиране на максималната стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$ трябва да сравним стойностите на функцията f във всички точки на локален максимум и в крайните точки на сегмента a и b. Най-голямата от тези стойности ще бъде максималната стойност на f в сегмента $[a, b]$. Аналогично се намира и минималната стойност на f в сегмента $[a, b]$.

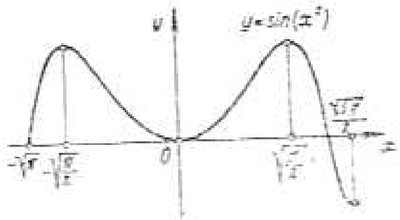
Изследването на стационарните точки може да се избегне, като се сравнят стойностите на f във всички стационарни точки и в крайните точки a и b. Най-голямата (най-малката) от тези стойности е очевидно максималната (минималната) стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$.

Ще отбележим, че ако f има в сегмента $[a, b]$ само една точка на локален максимум (или на локален минимум), то, без да сравняваме стойността на f в тази точка с $f(a)$ и $f(b)$, можем да твърдим, че тази стойност е максималната (минималната) стойност на f в сегмента $[a, b]$ (фиг. 7.19). С аналогични средства се решава въпросът за намиране на максималната (минималната) стойност на функцията f в интервал, полуправа и безкрайната права (при условие, че тази стойност се достига).

Може да се случи така, че диференцируема функция да няма в сегмента $[a, b]$ (или полуправата $a\leqq x<\infty$) стационарни точки



Фиг. 7.19



Фиг. 7.20

В такъв случай f е монотонна в този сегмент (полуправа) и нейната максимална и минимална стойност се достигат в краищата на сегмента (полуправата).

За пример ще разгледаме задачата за намиране на максималната и минималната стойност на функцията $f(x)=\sin x^2$ в сегмента $-\sqrt{\pi}\leq x\leq\sqrt{5\pi/2}$.

Тъй като $f'(x)=2x\cos x^2$, то в разглеждания интервал функцията има стационарни точки $x=0$ и $x=\pm\sqrt{\pi/2}$. Като сравним стойностите на функцията в тези точки и в краищата на сегмента

$$f(0)=0,\ f(\pm\sqrt{\pi/2})=1,\ f(-\sqrt{\pi})=0,$$
$$f(\sqrt{5\pi/2})=\sin(5\pi/4)=-\sqrt{2}/2,$$

виждаме, че максималната стойност на разглежданата функция е 1 и се достига в две вътрешни точки на сегмента $x_1=-\sqrt{\pi/2}$ и $x_2=\sqrt{\pi/2}$, а минималната ѝ стойност е равна на $-\sqrt{2}/2$ и се достига в десния край на сегмента $\sqrt{5\pi/2}$. Графиката на разглежданата функция е изобразена на фиг. 7.20.

7.6.2. Граничен (контурен) екстремум. Нека функцията f е дефинирана в някой сегмент $[a, b]$. *Ще казваме, че тази функция има в крайната (контурната) точка b на този сегмент* ***граничен (контурен) максимум (минимум)****, ако съществува лява полуоколност на точката b, в която стойността $f(b)$ е най-голяма (най-малка) измежду всички стойности на тази функция.*

Аналогично се определя граничен (контурен) максимум и граничен (контурен) минимум в крайната (контурната) точка a на сегмента $[a, b]$.

Граничният максимум и граничният минимум се обединяват с общото название ***граничен (контурен) екстремум.***

В сила е следното достатъчно условие за граничен екстремум: За да има функцията f в точката b на сегмента $[a, b]$ граничен максимум (граничен минимум), е достатъчно тя да има в точката b положителна (отрицателна) лява производна.* (Доказателството е съвършено аналогично на доказателството на теорема 6.1.) От това достатъчно условие за граничен екстремум непосредствено се получава и следното необходимо условие за граничен екстремум на функция, имаща в точката b лява производна: Функцията f, имаща в точката b лява производна, има в тази точка граничен максимум (граничен минимум) само тогава, когато производната в точката b е неотрицателна (неположителна).

Аналогично необходимо условие функцията f, имаща в точката a дясна производна, да има в тази точка граничен максимум (граничен минимум) е производната в точката a да бъде неположителна (неотрицателна).

7.6.3. Теорема на Дарбу**.

Определение. *Ще казваме, че функцията f има* ***производна*** *в сегмента $[a, b]$, ако f има крайна производна във всяка вътрешна точка на $[a, b]$ и освен това има крайни едностранни производни $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$.*

Очевидно функция, която има производна в сегмента $[a, b]$, е непрекъсната в този сегмент.

Ще докажем сега следващата теорема.

Теорема 7.12 (теорема на Дарбу). *Нека функцията f има производна в сегмента $[a, b]$. Тогава каквото и да е числото C, заключено между $A=f'(a+0)$ и $B=f'(b-0)$, съществува точка ξ от този сегмент, за която $f'(\xi)=C$.*

Доказателство. Най-напред ще докажем следното твърдение: Ако F има производна в $[a, b]$ и ако $F'(a+0)$ и $F'(b-0)$ са числа с различни знаци, то съществува такава точка ξ от сегмента $[a, b]$, че $F'(\xi)=0$.

Нека за определеност $F'(a+0)<0$, $F'(b-0)>0$. Тогава функцията F има граничен максимум и в двата края на сегмента $[a, b]$. Но това означава, че минималната стойност на F в сегмента $[a, b]$ се достига в някоя вътрешна точка ξ на този сегмент (функцията F е диференцируема, а очевидно и непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и затова достига минимума си в този сегмент). В точката ξ функцията F има локален минимум и затова $F'(\xi)=0$.

* За контурната точка a достатъчно условие за граничен максимум (граничен минимум) е отрицателността (положителността) на дясната производна в точката a.

** Гастон Дарбу — френски математик (1842—1917).

За доказателството на теорема 7.12 остава да положим $F(x) = f(x) - Cx^*$ и да приложим към F току-що доказаното твърдение.□

Ще отбележим, че не предполагахме непрекъснатост на производната f'.

Допълнение към глава 7

АЛГОРИТЪМ ЗА НАМИРАНЕ НА ЕКСТРЕМАЛНИТЕ СТОЙНОСТИ НА ФУНКЦИЯ, ИЗПОЛЗУВАЩ САМО СТОЙНОСТИТЕ НА ТАЗИ ФУНКЦИЯ

Да предположим, че функцията f е зададена в сегмента $[a, b]$ и знаем стойностите ѝ във възлите на мрежа, която се получава при деление на сегмента $[a, b]$ на 2^n равни части ($n=1, 2, 3, \dots$). За определеност ще разгледаме случая за намиране точка на минимум за функцията f. При това ще предполагаме, че са изпълнени следните две условия: 1) функцията f има в сегмента $[a, b]$ единствена точка на минимум c; 2) при $a<c$ функцията f намалява в сегмента $[a, c]$ (т. е. намалява наляво от точката на минимума), а при $c<b$ функцията f расте в сегмента $[c, b]$ (т. е. расте надясно от точката на минимума).

Тези условия са изпълнени например, ако функцията f е два пъти диференцируема в сегмента $[a, b]$ и $f'(c)=0$, а f'' е строго положителна в $[a, b]$. Разбира се, функцията f може да удовлетворява двете условия и без да е диференцируема.

Ще дадем един алгоритъм за построяване на свиваща се система от сегменти, съдържащи точката c, в която функцията f достига минимума си.

Ще се спрем на построяването на първия сегмент на свиващата се система, тъй като всички останали сегменти се строят по същия начин. Разделяме сегмента $[a, b]$ с помощта на точките $a=x_0, x_1, x_2, x_3, x_4=b$ на четири равни подсегмента $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, 3, 4$.

Един подсегмент $[x_{i-1}, x_i]$ ще наричаме ***сегмент на намаляване,*** *ако $f(x_{i-1})>f(x_i)$, т. е. ако стойността на функцията f в левия му край е строго по-голяма от стойността ѝ в десния край, и съответно* ***сегмент на нарастване,*** *ако $f(x_{i-1})<f(x_i)$,*

* При това без ограничения на общността предполагаме, че $f'(a+0)=A<C<B=f'(b-0)$.

т. е. ако стойността на функцията f в левия край е строго по-малка от стойността ѝ в десния край.

Понеже функцията f има в сегмента $[a, b]$ единствена точка на минимум c, то тази точка c ще принадлежи на един от четирите подсегмента $[x_{i-1}, x_i]$.

Подсегментът $[x_{i-1}, x_i]$, съдържащ точката c, е или сегмент на намаляване, или сегмент на нарастване, или сегмент, в краищата на който функцията приема равни стойности.

Понеже функцията f по условие намалява наляво от точката на минимума c и расте надясно от тази точка, ако даден подсегмент съдържа точката на минимума c, то всеки подсегмент, лежащ наляво от него, е сегмент на намаляване и всеки подсегмент надясно от него е сегмент на нарастване. Следователно можем да твърдим, че подсегментът, който съдържа точката на минимума c, е или най-десният от сегментите на намаляване, или най-левият от сегментите на нарастване, или подсегмент, в краищата на който функцията f приема равни стойности.

Това твърдение позволява да се даде алгоритъм за построяване на първия сегмент $[a_1, b_1]$ от свиващата се система сегменти $\{[a_n, b_n]\}$, всеки от които съдържа точката на минимума c.

Ще разгледаме четирите възможни случая.

1. Между подсегментите $[x_{i-1}, x_i]$ има сегмент, в краищата на който f приема равни стойности. Тогава този сегмент съдържа точката на минимума c и го приемаме за първи сегмент $[a_1, b_1]$ на свиващата се система.

2. Всички подсегменти $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, 3, 4$, са сегменти на намаляване. В този случай точката на минимума се съдържа в най-десния сегмент, т. е. в сегмента $[x_3, x_4]$, който приемаме за $[a_1, b_1]$.

3. Всички подсегменти $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, 3, 4$, са сегменти на нарастване. Тогава минимумът лежи в най-левия от подсегментите, т. е. в сегмента $[x_0, x_1]$, който приемаме за $[a_1, b_1]$.

4. Измежду подсегментите има както сегменти на намаляване, така и лежащи надясно от тях сегменти на нарастване. В този случай може да се твърди, че точката на минимума c лежи в обединението на най-десния сегмент на намаляване и най-левия сегмент на нарастване. Обединението на тези два сегмента приемаме за $[a_1, b_1]$.

Така определихме еднозначен алгоритъм за построяване на първия сегмент $[a_1, b_1]$ за свиващата се система от сегменти $\{[a_n, b_n]\}$.

Вторият сегмент на тази система $[a_2, b_2]$ се построява, като тръгнем от $[a_1, b_1]$, по същия начин, както построихме сегмента $[a_1, b_1]$, тръгвайки от $[a, b]$. По същия начин, тръгвайки от n-тия сегмент $[a_n, b_n]$, се построява $(n+1)$-вия сегмент $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ на свиващата се система.

Ясно е, че така построената система от сегменти $\{[a_n, b_n]\}$ е свиваща се, и понеже всички те съдържат точката на минимума c, и двете редици от десните краища $\{b_n\}$ и левите краища $\{a_n\}$ на тези сегменти клонят към точката на минимума c.

Аналогично се построява алгоритъм за намиране на точката на максимума на функцията f, имаща в сегмента $[a, b]$ единствена точка на максимум c, при условие, че функцията расте наляво от c при $c>a$ и намалява надясно от c при $c<b$.

8. Примитивна функция и неопределен интеграл

В тази глава ще изучим обратната операция на операцията диференциране, т. е. ще се заемем с въпроса за възстановяване на функция, ако е известна нейната производна. Изучаването на този въпрос ще ни доведе естествено до понятията ***примитивна функция*** и ***неопределен интеграл*** (вече споменати в глава 1).

Ще отложим въпроса за съществуване на примитивна функция и неопределен интеграл до глава 9, а тук ще изучим най-важните методи за интегриране, както и класовете функции, чиито неопределени интеграли се изразяват чрез елементарни функции.

8.1. Понятие за примитивна функция и неопределен интеграл

8.1.1. Понятие за примитивна функция.

Определение. *Функцията F се нарича* ***примитивна функция*** *(или просто* ***примитивна****) на функцията f в интервала (a, b), ако тя е диференцируема във всяка точка x на този интервал и производната ѝ F' е равна на f.*

Забележка. Аналогично се определя примитивна на функцията f върху безкрайната права и върху полуправа.*

Примери:

1. Функцията $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ е примитивна на функцията $f(x)=-x/\sqrt{1-x^2}$ в интервала $(-1, 1)$, тъй като във всяка точка x на този интервал $(\sqrt{1-x^2})'=-x/\sqrt{1-x^2}$.

* Може да се въведе примитивна на функция f и в сегмента $[a, b]$ като такава функция F, която има производна F' във всяка вътрешна точка на сегмента $[a, b]$, равна на f, и освен това има дясна производна $F'(a+0)$, равна на $f(a)$, и лява производна $F'(b-0)$, равна на $f(b)$.

2. Функцията $F(x)=\sin x$ е примитивна на функцията $f(x)=\cos x$ върху безкрайната права $(-\infty, +\infty)$, тъй като във всяка точка x на безкрайната права $(\sin x)'=\cos x$.

3. Функцията $F(x)=\ln x$ примитивна на функцията $f(x)=1/x$ върху отворената полуправа $x>0$, тъй като във всяка точка x на тази полуправа $(\ln x)'=1/x$.

Ако F е примитивна на функцията f в интервала (a, b), то очевидно и функцията $F+C$, където C е произволна константа, е примитивна на функцията f в същия интервал.

Естествено възниква въпросът, каква е връзката между различните примитивни на една и съща функция f. В сила е следната основна теорема:

Теорема 8.1. *Ако F_1 и F_2 са примитивни на функцията f в интервала (a, b), то навсякъде в този интервал $F_1(x)-F_2(x)=C$, където C е константа.*

С други думи, две произволни примитивни на една и съща функция могат да се различават само с константа.

Доказателство. Полагаме $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Тъй като всяка от функциите F_1 и F_2 е диференцируема в интервала (a, b), то според теорема 5.5 и функцията Φ е диференцируема в интервала (a, b), при това навсякъде в този интервал $\Phi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$.

В 6.4.1 беше доказана теорема 6.5 със следното съдържание: Ако функцията Φ е диференцируема навсякъде в интервала (a, b) и ако навсякъде в този интервал $\Phi'(x)=0$, то функцията Φ е константа в интервала (a, b).

От тази теорема получаваме, че $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)=C=\text{const}$. □

Следствие. *Ако F е една от примитивните на функцията f в интервала (a, b), то всяка примитивна Φ на функцията f в същия интервал има вида $\Phi(x)=F(x)+C$, където C е константа.*

8.1.2. Неопределен интеграл.

Определение. *Съвкупността от всички примитивни функции на дадена функция f в интервала (a, b) се нарича* ***неопределен интеграл*** *от функцията f (в този интервал) и произволен елемент на тази съвкупност се означава със символа*

$$\int f(x)\,dx. \tag{8.1}$$

В това означение знакът $\int$ се нарича интеграл, изразът $f(x)\,dx$ — подинтегрален израз, а функцията f — подинтегрална функция.

Ако F е една от примитивните на функцията f в интервала (a, b), то според следствието от теорема 8.1

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C, \tag{8.2}$$

където C е произволна константа.

Ще подчертаем, че ако примитивната (а следователно и неопределеният интеграл) на функцията f в интервала (a, b) съществува, то подинтегралният израз във формулата (8.1) представлява диференциалът на всяка от тези примитивни. Действително нека F е произволна примитивна на функцията f в интервала (a, b), т. е. за всяко x от интервала (a, b) имаме $F'(x)=f(x)$. Тогава $f(x)\,dx=F'(x)\,dx=dF$.

Примери:

1. $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sqrt{1-x^2}+C$ в интервала $-1<x<1$, тъй като функцията $F(x)=\sqrt{1-x^2}$ е една от примитивните на функцията $f(x)=-x/\sqrt{1-x^2}$ в този интервал.

2. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$ върху безкрайната права $-\infty<x<\infty$, тъй като функцията $F(x)=\sin x$ е една от примитивните на функцията $f(x)=\cos x$ върху безкрайната права.

В тази глава няма да се занимаваме с въпроса за съществуването на примитивни (или неопределени интеграли). Тук само ще отбележим, че в 9.4 ще бъде доказано, че за всяка функция f, непрекъсната в интервала (a, b), съществува примитивна функция (и неопределен интеграл) в този интервал.

8.1.3. Основни свойства на неопределения интеграл.

Най-напред ще отбележим две свойства, непосредствено следващи от определението на неопределен интеграл:

1°. $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx.$

2°. $\int dF(x)=F(x)+C.$

Свойство 1° означава, че знаците d и $\int$ „взаимно се съкращават", когато знакът на диференциала стои пред знака на интеграла.

Свойство 2° означава, че знаците $\int$ и d „взаимно се съкращават" и когато знакът на интеграла стои пред знака на диференциала, но в този случай към F трябва да се добави произволна константа C.

За установяването на свойство 1° е достатъчно да се вземе диференциалът на двете страни на формула (8.2) и да се вземе пред вид, че $dF(x)=F'(x)\,dx=f(x)\,dx$.

За установяването на свойство 2° е достатъчно в лявата страна на (8.2) да използваме равенството $dF(x)=f(x)\,dx$.

Следващите две свойства се наричат ***линейни свойства на интеграла***:

3°. $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$

4°. $\int [Af(x)]\,dx=A\int f(x)\,dx \quad (A=\text{const}).$

Равенствата във формулите на 3° и 4° имат условен характер: те трябва да се разбират като равенства на дясната и лявата страна с точност до събираемо произволна константа (това е разбираемо, тъй като всеки от интегралите, фигуриращи във формулите на 3° и 4°, е определен с точност до произволна константа).

Понеже две примитивни на една и съща функция могат да се различават само с константа, то за доказателството на свойство 3° е достатъчно да се покаже, че ако F е примитивна на f, а G — примитивна на g, то функцията $F\pm G$ е примитивна на $f\pm g$, което непосредствено следва от това, че производната на (алгебричната) сума на функции е равна на сумата от производните на тези функции, т. е. $(F\pm G)'=F'\pm G'=f\pm g$. Аналогично се доказва и свойство 4°. В този случай се използва равенството $(AF(x))'=AF'(x)=Af(x)$.

8.1.4. Таблица на основните неопределени интеграли. В глава 5 получихме таблицата на производните на основните елементарни функции, което е основа на апарата за смятане в диференциалното смятане. Всяка формула на тази таблица, показваща, че дадена функция F има производна, равна на f, ни води съгласно определението за неопределен интеграл към съответна формула на интегралното смятане

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

По този начин идваме до следната таблица на основните неопределени интеграли:

1°. $\int 0\,dx=C.$

2°. $\int 1\,dx=x+C.$

3°. $\int x^{\alpha}\,dx=x^{\alpha+1}/(\alpha+1)+C \qquad (\alpha\neq-1).$

4°. $\int x^{-1}\,dx=\ln|x|+C \qquad (x\neq0).$

5°. $\int a^x\,dx=a^x/\ln a+C \ (0<a\neq1), \ \int e^x\,dx=e^x+C.$

6°. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C.$

7°. $\int \cos x\,dx=\sin x+C.$

8°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx=\operatorname{tg} x+C \quad (x\neq\pi n+\pi/2,$ където $n=0,\pm1,\pm2,\dots).$

9°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=\int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx=-\operatorname{ctg} x+C \quad (x\neq\pi n,$ където $n=0,\pm1,\pm2,\dots).$

10°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C\\ -\arccos x+C\end{cases} \quad (-1<x<1).$

11°. $\int \frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arctg} x+C,\\ -\operatorname{arcctg} x+C.\end{cases}$

12°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm1}\right|+C$ (в случая на знак минус се разглежда $|x|>1$).

13°. $\int \frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C \quad (|x|\neq1).$

Към тези формули могат да се присъединят и съответните формули за хиперболичните функции:

14°. $\int \operatorname{sh} x\,dx=\operatorname{ch} x+C.$

15°. $\int \operatorname{ch} x\,dx=\operatorname{sh} x+C.$

16°. $\int \operatorname{ch}^{-2} x\,dx=\operatorname{th} x+C.$

17°. $\int \operatorname{sh}^{-2} x\,dx=-\operatorname{cth} x+C \quad (x\neq0).$

Ще направим някои бележки по отношение на формулите 4°, 12° и 13°. Формула 4° е вярна за всеки интервал, несъдържащ $x=0$. Наистина, ако $x>0$, то от формулата $(\ln x)'=1/x$ заключаваме, $\int x^{-1}\,dx=\ln x+C$, а ако $x<0$, то от $(\ln(-x))'=1/x$ заключаваме, че $\int x^{-1}\,dx=\ln(-x)+C$. Следователно формула 4° е вярна за всяко $x\neq 0$.

Формулите 12° и 13° заемат изключително положение в нашата таблица, тъй като те нямат аналози сред формулите от таблицата на производните.

Разбира се, за проверка на формулите 12° и 13° е достатъчно да се убедим, че производните на изразите в десните страни на тези формули съвпадат със съответните подинтегрални функции.

Нашата най-близка цел е да допълним таблицата на неопределените интеграли с основни начини и методи за интегриране. Но преди да пристъпим към реализацията на тази цел, ще направим една важна забележка.

В главите 1 и 4 въведохме понятието елементарна функция, а в 5.5.5 установихме, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна функция. С други думи, установихме, че операцията диференциране не ни извежда от класа на елементарните функции. Ще отбележим веднага, че при операцията интегриране нещата стоят другояче. Може да се докаже, че интеграли от някои елементарни функции вече не са елементарни функции. Примери за такива интеграли са следните:

1°. $\int e^{-x^2}\,dx.$ 2°. $\int \cos(x^2)\,dx.$

3°. $\int \sin(x^2)\,dx.$ 4°. $\int \frac{dx}{\ln x}$ $(0<x\neq 1)$.

5°. $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$ $(x\neq 0)$. 6°. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx.$

Никой от изброените интеграли не е елементарна функция. Разгледаните функции не само че реално съществуват, но и играят голяма роля в различни въпроси на физиката. Така например интегралът 1°, наречен ***интеграл на Поасон*** или ***интеграл на грешките,*** се използува широко в статистическата физика, в теорията на топлопроводността и дифузията, интеграли 2° и 3°, наречени ***интеграли на Френел,*** се прилагат широко в оптиката. Често се срещат в приложенията и интегралите 4°—6°, първият от които се нарича ***интегрален логаритъм,*** а последните два — ***интегрален косинус*** и ***интегрален синус.***

8.2. Основни методи за интегриране

8.2.1. Интегриране чрез смяна на променливата (субституция). Смяната на променливата е един от най-ефективните методи за интегриране. Той се основава на следното елементарно твърдение:

Нека функцията φ е дефинирана и диференцируема в множеството $\{x\}$, което представлява или интервал, или отворена полуправа, или безкрайната права, и нека $\{t\}$ е множеството от всички стойности на тази функция. Нека освен това за функцията g да съществува в множеството $\{t\}$ примитивна функция G, т. е.

(8.3) $$\int g(t)\,dt = G(t) + C.$$

Тогава навсякъде в множеството $\{x\}$ за функцията $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ съществува примитивна функция, равна на $G(\varphi(x))$, т. е.

(8.4) $$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = G(\varphi(x))+C.$$

За доказателството на това твърдение е достатъчно да използуваме правилото за диференциране на сложна функция

$$\frac{d}{dx}\{G(\varphi(x))\} = G'(\varphi(x))\varphi'(x)$$

и да отчетем, че по определението на примитивна $G'=g$. Да предположим сега, че трябва да пресметнем интеграла

(8.5) $$\int f(x)\,dx.$$

В редица случаи е удобно за нова променлива да се избере такава диференцируема функция $t=\varphi(x)$, че да е изпълнено равенството

(8.6) $$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x),$$

при което функцията g се интегрира лесно, т. е. интегралът

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C$$

се пресмята просто. Доказаното твърдение ни позволява да напишем следната формула за интеграла (8.5):

(8.7) $$\int f(x)\,dx = G(\varphi(x))+C.$$

Този начин за пресмятане на интеграла (8.5) се нарича именно ***интегриране чрез смяна на променливата.***

Разбира се, той не е приложим към всеки интеграл. Освен това трябва да подчертаем, че изборът на сполучлива субституция в голяма степен се определя от умението на този, който смята.

Примери:

1. Да се пресметне $\int \sin 3x\,dx$. За пресмятането на този интеграл трябва да се направи простата субституция $t=3x$, $dt=3dx$. В резултат от тази смяна ще получим

$$\int \sin 3x\,dx=\int \frac{1}{3}\sin t\,dt=-\frac{1}{3}\cos t+C=-\frac{1}{3}\cos 3x+C.$$

2. Да се пресметне $\int \frac{dx}{x+a}$. Този интеграл се пресмята посредством смяната $t=x+a$, $dt=dx$. При това получаваме

$$\int \frac{dx}{x+a}=\int \frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|x+a|+C\ (x\neq -a).$$

3. Да се пресметне $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$. Лесно се вижда, че този интеграл се пресмята със субституцията $t=\cos x$. Наистина при това $dt=-\sin x\,dx$ и

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx=-\int e^t\,dt=-e^t+C=-e^{\cos x}+C.$$

4. Да се пресметне $\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx$. За пресмятането на този интеграл е удобна субституцията $t=\operatorname{arc\,tg} x$. Наистина при тази субституция $dt=\frac{dx}{1+x^2}$ и

$$\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^{100}}{1+x^2}\,dx=\int t^{100}\,dt=\frac{t^{101}}{101}+C=\frac{1}{101}(\operatorname{arctg} x)^{101}+C.$$

5. Да се пресметне $I=\int (5x-6)^{1979}\,dx$. Разбира се, развивайки подинтегралната функция по формулата за бинома на Нютон, можем да доведем този интеграл до сума на хиляда деветстотин и осемдесет таблични интеграла. Но много по-просто е да се направи субституцията $t=5x-6$, $dt=5dx$, в резултат на което ще получим

$$I=\frac{1}{5}\int t^{1979}\,dt=\frac{1}{9900}t^{1980}+C=\frac{1}{9900}(5x-6)^{1980}+C.$$

6. Да се пресметне $\int \frac{dx}{\cos x}$. За да предвидим субституцията, която трябва да направим, ще приведем интеграла във вида

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}=\int \frac{\cos x\,dx}{1-\sin^2 x}.$$

Сега е ясно, че трябва да положим $t=\sin x$, $dt=\cos x\,dx$. В резултат ще получим

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\int \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln|\operatorname{tg}(x/2+\pi/4)|+C.$$

7. Да се пресметне $\int \frac{x^5\,dx}{(3x)^{12}+1}$. За пресмятане на този интеграл е удобна субституцията $t=(3x)^6$, $dt=2\,.\,3^7x^5\,dt$. В резултат на посочената субституция получаваме

$$\int \frac{x^5\,dx}{(3x)^{12}+1}=\frac{1}{4374}\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4374}\operatorname{arc\,tg} t+C=\frac{1}{4374}\operatorname{arc\,tg}(3x)^6+C.$$

8. Да се пресметне $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$. За пресмятане на този интеграл е удобна тригонометричната субституция

$$t=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a},\quad x=a\operatorname{tg} t,\quad dx=a\cos^{-2}t\,dt.$$

В резултат на тази субституция интегралът приема вида

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=a^{-2}\int \cos t\,dt=a^{-2}\sin t+C$$
$$=\frac{\operatorname{tg} t}{a^2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

9. Да се пресметне $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$. Тук е удобна субституцията $t=\arcsin\frac{x}{a}$, $x=a\sin t$, $dx=a\cos t\,dt$, при което

$$\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}=a^{-2}\int \cos^{-2}t\,dt=a^{-2}\operatorname{tg} t+C$$
$$=\frac{\sin t}{a^2\sqrt{1-\sin^2 t}}+C=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C.$$

10. Да се пресметне $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx$. За пресмятане на този интеграл е удобна субституцията $2t=\arccos\frac{x}{a}$, $x=a\cos 2t$, $dx=-2a\sin 2t\,dt$. Получаваме

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx=-4a\int \cos^2 t\,dt=-2a\int (1+\cos 2t)\,dt$$
$$=-2at-2a\int \cos 2t\,dt=-2at-a\sin 2t+C$$
$$=-a\left(\arccos\frac{x}{a}+\sqrt{1-(x/a)^2}\right)+C.$$

8.2.2. Интегриране по части. Нека всяка от функциите u и v е диференцируема в множеството $\{x\}$ и в това множество нека да съществува примитивна на функцията $v \cdot u'$. Тогава в $\{x\}$ съществува примитивна и на функцията $u \cdot v'$ и е в сила следната формула:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)\,.\,v(x) - \int v(x)\,.\,u'(x)\,dx. \tag{8.8}$$

Забележка. Определението за диференциал и свойството инвариантност на формата му позволяват формула (8.8) да се запише във вида

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,.\,v(x) - \int v(x)\,du(x). \tag{8.9}$$

За доказателството на формулираното твърдение ще запишем формулата за производна на произведението на двете функции $u(x)$ и $v(x)$:

$$[u(x)\,.\,v(x)]' = u(x)\,.\,v'(x) + u'(x)\,.\,v(x). \tag{8.10}$$

Интегрираме равенството (8.10). Тъй като по условие за всяко x от множеството $\{x\}$ съществуват $\int v(x)u'(x)\,dx$ и $\int [u(x)\,.\,v(x)]'\,dx = u(x)\,.\,v(x)+C$, то за всяко x от множеството $\{x\}$ съществува и интегралът $\int u(x)v'(x)\,dx$, при това е вярна формулата (8.8) (или (8.9)).

Формулата (8.9) свежда въпроса за намиране на интеграла $\int u\,dv$ до намиране на интеграла $\int v\,du$. В редица конкретни случаи вторият интеграл може лесно да се пресметне.

Пресмятането на интеграла $\int u\,dv$ *посредством формула* (8.9) *се нарича* ***интегриране по части***. Ще отбележим, че при конкретно прилагане на формулата за интегриране по части (8.9) е много удобно да се използва таблицата на диференциалите от 5.5.6.

Примери:

1. Да се пресметне $I = \int x^n \ln x\,dx$ $(n \neq -1)$. Като положим $u = \ln x$, $dv = x^n dx$ и използваме формула (8.9), получаваме $du = x^{-1}\,dx$, $v = x^{n+1}/(n+1)$,

$$I = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)x^{n+1} + C.$$

2. Да се пресметне $I = \int x \operatorname{arctg} x\,dx$. Като положим $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = x\,dx$ и използваме формула (8.9), получаваме

$$I = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x - x/2 + C.$$

3. Да се пресметне $I = \int x^2 \cos x\,dx$. Най-напред ще приложим формула (8.9), като ще положим $u = x^2$, $dv = \cos x\,dx$. Получаваме $du = 2x\,dx$, $v = \sin x$, $I = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,dx$. За пресмятането на последния интеграл ще приложим формула (8.9) още веднъж, като този път ще положим $u = x$, $dv = \sin x\,dx$. Получаваме $du = dx$, $v = -\cos x$,

$$I = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\,dx = (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C.$$

По такъв начин интегралът $\int x^2 \cos x\,dx$ се пресмята посредством двукратно интегриране по части. Лесно е да се разбере, че интегралът $\int x^n \cos x\,dx$ (където n е произволно цяло положително число) може да се пресметне по аналогичен начин посредством n-кратно интегриране по части.

4. Ще пресметнем сега $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ ($a = \text{const}$, $b = \text{const}$). Най-напред ще приложим формула (8.9), като ще положим $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\,dx$. Получаваме

$$du = ae^{ax}\,dx,\quad v = b^{-1}\sin bx,$$

$$I = b^{-1}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

За пресмятане на последния интеграл още веднъж прилагаме формула (8.9), като ще положим този път $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx\,dx$. Получаваме

$$I = b^{-1}e^{ax}\sin bx + ab^{-2}e^{ax}\cos bx - a^2b^{-2}I. \tag{8.11}$$

По такъв начин чрез двукратно интегриране на I по части получаваме за интеграла I уравнението от първа степен (8.11). От това уравнение намираме

$$I = (a^2+b^2)^{-1}(a\cos bx + b\sin bx)\,e^{ax}.$$

Практиката показва, че голямата част от интегралите, които могат да се решат чрез интегриране по части, може да се раздели на следните три групи:

1. Към първата група се отнасят интегралите, чиято подинтегрална функция съдържа като множител една от следните функции: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $(\operatorname{arctg} x)^2$, $(\arccos x)^2$, $\ln \varphi(x)$, . . . , а другият множител е производна на позната функция (вж. разгледаните примери **1** и **2**). За пресмятане на интегралите от първата група прилагаме формулата (8.9), като полагаме в нея u равна на една от изброените функции.

2. Към втората група се отнасят интеграли от вида

$$\int (ax+b)^n \cos(cx)\,dx,\ \int (ax+b)^n \sin(cx)\,dx,\ \int (ax+b)^n e^{cx}\,dx,$$

където a, b, c са константи, n е произволно цяло положително число (вж. разгледания пример **3**). Интегралите от втората група се решават чрез n-кратно прилагане на формулата за интегриране по части (8.9), като за u трябва всеки път да се взема $(ax+b)$ в съответните степени. След всяко интегриране по части тази степен ще намалява с единица.

3. Към тази група се отнасят интеграли от вида $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int \sin(\ln x)\,dx$, $\int \cos(\ln x)\,dx$, . . . (вж. пример **4**). Като означим всеки от интегралите в тази група с I и двукратно интегрираме по части, стигаме до уравнение от първа степен за I.

Разбира се, посочените три групи не изчерпват всички интеграли, които се решават с интегриране по части. Ще приведем примери на интеграли, които не влизат в нито една от изброените три групи, но могат да се пресметнат с помощта на формула (8.9).

Да пресметнем $I=\int x\sin^{-2}x\,dx$. Този интеграл не влиза в нито една от споменатите три групи. Въпреки това, като приложим формула (8.9), полагайки в нея $u=x$, $dv=\sin^{-2}x\,dx$, получаваме $du=dx$, $v=-\operatorname{ctg} x$,

$$I=-x\operatorname{ctg} x+\int \operatorname{ctg} x\,dx=-x\operatorname{ctg} x+\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$

$$=-x\operatorname{ctg} x+\int \frac{d\sin x}{\sin x}=-x\operatorname{ctg} x+\ln|\sin x|+C$$

(в проведените разсъждения $x\neq\pi n$, където $n=0, \pm1, \pm2, \dots$).

Аналогично се пресмята и интегралът $\int x\cos^{-2}x\,dx$.

Ще пресметнем накрая важния за по-нататък интеграл

$K_\lambda=\int (t^2+a^2)^{-\lambda}\,dt$, където $a=\text{const}$, $\lambda=1, 2, 3, \dots$ Този интеграл също не влиза в споменатите по-горе три групи. За пресмятането му ще установим рекурентна формула, свеждаща пресмятането на K_λ до пресмятане на $K_{\lambda-1}$.

Можем да запишем (при $\lambda\neq1$)

$$K_\lambda=a^{-2}\int a^2(t^2+a^2)^{-\lambda}\,dt=a^{-2}\int((t^2+a^2)-t^2)(t^2+a^2)^{-\lambda}\,dt$$

$$=a^{-2}\int (t^2+a^2)^{-\lambda+1}\,dt-\frac{1}{2}a^{-2}\int t\,(t^2+a^2)^{-\lambda}\,2t\,dt$$

$$=a^{-2}K_{\lambda-1}-\frac{1}{2}a^{-2}\int t\,(t^2+a^2)^{-\lambda}\,d(t^2+a^2).$$

За пресмятане на последния интеграл прилагаме формулата за интегриране по части (8.9), като полагаме $u=t$, $dv=(t^2+a^2)^{-\lambda}\,d(t^2+a^2)$. Получаваме $du=dt$, $v=-(t^2+a^2)^{-\lambda+1}/(\lambda-1)$,

$$K_\lambda=a^{-2}K_{\lambda-1}+\frac{1}{2(\lambda-1)}a^{-2}t\,(t^2+a^2)^{-\lambda+1}-\frac{1}{2(\lambda-1)}a^{-2}K_{\lambda-1}.$$

От последното равенство получаваме рекурентната формула

$$K_\lambda=\frac{1}{2(\lambda-1)}a^{-2}\,.\,t\,(t^2+a^2)^{-\lambda+1}+\frac{2\lambda-3}{2\lambda-2}a^{-2}K_{\lambda-1}. \tag{8.12}$$

Ще се убедим, че рекурентната формула (8.12) позволява да се пресметне интегралът K_λ за всяко $\lambda=2, 3, \dots$ Наистина интегралът K_1 се пресмята елементарно

$$K_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d(t/a)}{(t/a)^2+1}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

След като е пресметнат интегралът K_1, като положим във формула (8.12) $\lambda=2$, без труд намираме K_2. На свой ред, като знаем K_2 и положим във формула (8.12) $\lambda=3$, получаваме K_3. Продължавайки по този начин, ще пресметнем интеграла K_λ за всяко естествено число λ.

8.3. Класове от функции, интегруеми в елементарни функции

Макар че, както отбелязахме, неопределеният интеграл от елементарна функция може да не се изразява чрез елементарни функции, все пак съществуват широки класове от функции, неопределените интеграли от които се изразяват чрез елементарни функции. Този параграф е посветен на изучаването на такива класове от функции.

Най-важен измежду тези класове от функции е класът на рационалните дроби, представляващи частно на два алгебрични полинома. Изучаването на класа на рационалните дроби се предшествува от кратки сведения за комплексните числа и алгебричните полиноми.

8.3.1. Кратки сведения за комплексните числа. Две реални числа x и y ще наричаме ***наредена двойка***, ако е казано кое от тези числа е първо и кое е второ.

Наредената двойка от реалните числа x и y ще означаваме със символа (x, y), записвайки на първо място първия елемент на двойката.

Комплексно число *се нарича наредената двойка (x, y) от реални числа, първото от които x се нарича* ***реална част,*** *а второто y —* ***имагинерна част*** *на това комплексно число.*

Когато имагинерната част y е равна на нула, съответната двойка $(x, 0)$ се отъждествява с реалното число x. Това позволява множеството на реалните числа да се разглежда като подмножество на комплексните числа.

Две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ са равни, ако $x_1=x_2$, $y_1=y_2$. Казва се, че комплексното число $z=(x, y)$ е равно на нула, ако $x=0$ и $y=0$.

Ще определим операциите събиране и умножение на комплексните числа. Понеже реалните числа са подмножество на комплексните числа, тези операции трябва да се определят така, че приложени към две реални числа, да водят до същия резултат, както операциите събиране и умножаване на реални числа, известни ни от 2.4.

Сума на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ наричаме комплексното число

(8.13) $$z=(x_1+x_2,\ y_1+y_2).$$

Произведение на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ наричаме комплексното число

(8.14) $$z=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1).$$

Лесно се проверява, че сумата и произведението на комплексни числа притежават същите свойства, както сумата и произведението на реални числа. В сила са следните свойства:

1°. $z_1+z_2=z_2+z_1$ (комутативно свойство на сумата).

2°. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (асоциативно свойство на сумата).

3°. $z+(0, 0)=z$ (особена роля на числото $(0, 0)$).

4°. За всяко число $z=(x, y)$ съществува противоположно на него число $z'=(-x, -y)$, за което $z+z'=(0, 0)$.

5°. $z_1 . z_2=z_2 . z_1$ (комутативно свойство на произведението).

6°. $(z_1 . z_2) . z_3=z_1 . (z_2 . z_3)$ (асоциативно свойство на произведението).

7°. $z . (1,0)=z$ (особена роля на числото $(1, 0)$).

8°. За всяко комплексно число $z=(x, y)$, различно от нула, съществува реципрочно на него число $\frac{1}{z}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\ -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$, за което $z . \frac{1}{z}=(1, 0)$.

9°. $(z_1+z_2) . z_3=z_1 . z_3+z_2 . z_3$ (дистрибутивно свойство на произведението относно сумата).

Свойствата 1°—9° позволяват да се твърди, че за комплексните числа се запазват напълно всички правила на елементарната алгебра, отнасящи се до аритметичните действия и почленното събиране на равенствата. Освен това тези свойства напълно решават въпроса за изваждането на комплексни числа като действие, обратно на събирането, и за делението на комплексни числа като действие, обратно на умножението.

Разлика на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ се нарича такова комплексно число z, което, събрано със z_2, дава z_1. С помощта на свойства 1°—4° се установява съществуването и единствеността на разликата на две произволни комплексни числа.

Лесно се проверява, че разликата на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ е комплексното число

(8.15) $$z=(x_1-x_2,\ y_1-y_2).$$

Частно на две комплексни числа $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$, второто от които не е нула, се нарича такова комплексно число z, което при умножаване със z_2 дава z_1. С помощта на свойства 5°—8° се установява лесно, че единственото частно на споменатите две комплексни числа е комплексното число

$$z=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right).$$

В операциите с комплексни числа особена роля играе числото, представено с двойката $(0, 1)$, което се означава с буквата i. Умножавайки тази двойка сама на себе си (т. е. повдигайки я в квадрат), според определението за произведение на комплексни числа получаваме

$$(0, 1) . (0, 1)=(-1, 0)=-1, \text{ т. е. } i^2=-1.$$

Като вземем пред вид това, всяко комплексно число $z=(x, y)$ може да се представи във вида

$$z=(x, y)=(x, 0)+(0, y)=(x, 0)+(y, 0).(0, 1)=x+iy.$$

По-нататък широко ще използваме представянето $z=x+iy$ за комплексното число $z=(x, y)$.

Комплексното число $\bar{z}=(x, -y)=x-iy$ се нарича ***спрегнато*** *на комплексното число $z=(x, y)=x+iy$.*

Очевидно едно комплексно число е равно на нула тогава и само тогава, когато спрегнатото му число е равно на нула.

За геометрично представяне на комплексните числа се използва правоъгълна декартова координатна система. Комплексното число $z=(x, y)$ се представя или с точката M с координати (x, y), или с вектора $\overrightarrow{OM}$ с начало в началото на координатната система. По този начин събирането и изваждането на комплексни числа се свеждат до събиране и изваждане на съответните им вектори (това се разбира от формулите (8.13) и (8.15)).

Непосредствено от определението (8.14) за произведение на комплексните числа следва твърдението: *Произведението на две (и повече) комплексни числа е равно на нула тогава и само тогава, когато поне един от множителите е нула.*

Наистина, ако поне едно от числата $z_1=(x_1, y_1)$ и $z_2=(x_2, y_2)$ е равно на $(0, 0)$, то от (8.14) е очевидно, че $z=z_1 . z_2=(0, 0)$. Ако, обратно, $z=z_1 . z_2$ е равно на $(0, 0)$, то от (8.14) следва, че

$$\left|\begin{array}{l} x_1 x_2-y_1 y_2=0 \\ y_1 x_2+x_1 y_2=0, \end{array}\right. \qquad (8.14')$$

и ако $z_1 \neq (0, 0)$, т. е. $x_1^2+y_1^2 \neq 0$, то (8.14′) представлява хомогенна система от две уравнения относно двете неизвестни x_2 и y_2 с детерминанта $x_1^2+y_1^2$ различна от нула. Такава система има само тривиалното решение, т. е. $z_2=(x_2, y_2)=(0, 0)$.

Непосредствено от определението (8.14) за произведение на две комплексни числа следва още едно твърдение: Комплексното число, спрегнато на произведението на две (и повече) комплексни числа, е равно на произведението от комплексните числа, спрегнати съответно на всеки от множителите, т. е.

$$\overline{(z_1 . z_2)}=\bar{z}_1 . \bar{z}_2. \qquad (8.14'')$$

С помощта на правилото за умножаване на комплексни числа (8.14) лесно се проверява, че дясната и лявата страна на (8.14″) са равни на едно и също комплексно число $(x_1x_2-y_1y_2, -x_1y_2-x_2y_1)$.

8.3.2. Кратки сведения за корените (нулите) на алгебричните полиноми.

1°. ***Алгебричен полином от n-та степен*** *се нарича израз от вида*

$$f(z)=c_n z^n+c_{n-1} z^{n-1}+\cdot\cdot\cdot+c_1 z+c_0, \qquad (8.16)$$

където $z=(x, y)=x+iy$ е променливо комплексно число, а c_n, c_{n-1}, . . . , c_0 са комплексни константи, първата от които е различна от нула. Като делим един алгебричен полином f от степен n на друг алгебричен полином φ от степен, не по-голяма от n, стигаме до заключението, че каквито и да са двата полинома f и φ (степента на φ да не надминава степента на f), то е в сила равенството

$$f(z)=\varphi(z) . q(z)+r(z), \qquad (8.17)$$

в което q и r са полиноми, при това степента на q е равна на разликата от степените на полиномите f и φ, а степента на r е по-малка от степента на φ.

По отношение на фигуриращите в равенството (8.17) полиноми f, φ, q и r обикновено се използват напълно разбираемите термини „делимо“, „делител“, „частно“ и „остатък“.

Казва се, че *полиномът f се дели на полинома $\varphi(z)$, ако във формула (8.17) остатъкът $r(z)=0$.*

Ще се уговорим да наричаме полином от нулева степен всяка комплексна константа. Ясно е, че всеки полином се дели на различен от нула полином от нулева степен.

Определение. *Комплексното число b се нарича* ***корен на полинома*** *f, ако $f(b)=0$.*

Теорема 8.2. *Полиномът от ненулева степен f се дели на двучлена $z-b$ тогава и само тогава, когато b е корен на този полином.*

Доказателство. Записваме за полиномите f и $\varphi(z)=z-b$ формула (8.17). Тъй като степента на остатъка r в тази формула трябва да бъде по-ниска от степента на делителя $\varphi(z)=z-b$, то r е полином на нулева степен, т. е. $r(z)=c=\text{const}$. Така формула (8.17) приема вида

$$f(z)=(z-b) q(z)+c. \qquad (8.18)$$

Като положим във формула (8.18) $z=b$, намираме, че $c=f(b)$. По определение f се дели на $z-b$ тогава и само тогава, когато остатъкът във формула (8.18) $c=f(b)$ е равен на нула, т. е. когато b е корен на f.□

2°. Естествено възниква въпросът, дали всеки алгебричен полином има корени. Отговор на този въпрос дава основната теорема на алгебрата: *Всеки полином от ненулева степен има поне един корен.*

От тази теорема следва, че *алгебричен полином от n-та степен има точно n корена, като се отчита тяхната кратност.* Наистина нека f е полином от n-та степен. Съгласно основната теорема на алгебрата f има поне един корен b_1, т. е. за f е в сила представянето

$$f(z)=(z-b_1)f_1(z), \tag{8.19¹}$$

в което f_1 е полином от $(n-1)$-ва степен. Ако $n\neq 1$, то съгласно основната теорема на алгебрата f_1 има поне един корен b_2, т. е. за f_1 е в сила представянето

$$f_1(z)=(z-b_2)f_2(z), \tag{8.19²}$$

в което f_2 е полином от $(n-2)$-ра степен. Продължавайки тези разсъждения, получаваме представянията

$$f_2(z)=(z-b_3)f_3(z), \tag{8.19³}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{n-1}(z)=(z-b_n)f_n(z). \tag{8.19ⁿ}$$

В последното от тези представяния f_n е полином от нулева степен, т. е. $f_n(z)=c=\text{const}$. Като съпоставим равенствата (8.19¹)—(8.19ⁿ) и отчетем, че $f_n(z)=c$, ще получим

$$f(z)=c(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n). \tag{8.20}$$

Ще отбележим, че комплексната константа c не е равна на нула, тъй като в противен случай полиномът f ще бъде тъждествено равен на нула и няма да бъде от n-та степен.

От равенството (8.20) е очевидно, че $f(b_1)=f(b_2)=\cdots=f(b_n)=0$, т. е. всяко от числата $b_1, b_2, \ldots, b_n$ е корен на полинома f. Освен това от (8.20) е очевидно, че каквото и да е комплексното число b, различно от $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$, комплексното число $f(b)$ не е равно на нула. Следователно полиномът f има точно n корена: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$.

Равенството (8.20) дава разлагане на полинома f на множители.

Полином (8.16), в който $c_n=1$, се нарича приведен. За приведен полином формулата за разлагане (8.20) има вида

$$f(z)=(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n). \tag{8.21}$$

По-нататък, ако не е казано противното, ще разглеждаме приведени полиноми.

Между корените на полинома f може да има и равни. Нека

$a, b, \ldots, c$ са различните корени на приведения полином $f(z)$. Тогава за този полином представянето (8.21) приема следния вид:

$$f(z)=(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\cdots(z-c)^{\gamma}. \tag{8.22}$$

В това разлагане $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ са цели числа, всяко от които не е по-малко от единица, и $\alpha+\beta+\cdots+\gamma=n$, където n е степента на полинома f.

Ако за полинома f е в сила разлагането (8.22), *казваме, че комплексното число a е α-кратен корен на f, комплексното число b е β-кратен корен на f . . . комплексното число c е γ-кратен корен на f.*

Корен с кратност единица се нарича ***еднократен (прост корен)****, а корен с кратност, по-голяма от единица, се нарича* ***многократен (кратен)****.*

Може да се даде и друго еквивалентно определение на корен с дадена кратност: комплексното число a се нарича ***α-кратен корен*** на полинома f, ако за f е в сила представянето

$$f(z)=(z-a)^{\alpha}\varphi(z), \text{ където } \varphi(a)\neq 0. \tag{8.23}$$

3°. Нека сега

$$f(z)=z^n+c_{n-1}z^{n-1}+c_{n-2}z^{n-2}+\cdots+c_0 \tag{8.24}$$

е приведен алгебричен полином с реални коефициенти $c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_0$. Ще докажем, че този полином притежава следното важно свойство.

Теорема 8.3. *Ако комплексното число a е λ-кратен корен на полинома* (8.24) *с реални коефициенти, то и спрегнатото му комплексно число $\overline{a}$ е също λ-кратен корен на този полином.*

Доказателство. Ще започнем с доказването на следния помощен факт: Ако f е полином с реални коефициенти, то комплексното число $f(\overline{z})$ е спрегнато на числото $f(z)$.

Тъй като коефициентите на полинома (8.24) са реални числа, то за доказателството на този факт е достатъчно да се убедим, че за всеки номер n комплексното число $(\overline{z})^n$ е спрегнато на z^n. Но това следва непосредствено от съотношението (8.14''). Като положим в това съотношение $z_1=z_2=z$, ще получим $(\overline{z^2})=(\overline{z})^2$. По-нататък полагаме в (8.14'') $z_1=z^2$, $z_2=z$ и получаваме $(\overline{z^3})=(\overline{z^2})\cdot\overline{z}=(\overline{z})^2\cdot\overline{z}=(\overline{z})^3$.

Продължавайки аналогично, се убеждаваме, че $(\overline{z^n})=(\overline{z})^n$ за всеки номер n.

И така доказано е, че числото $f(\overline{z})$ е спрегнато на числото $f(z)$, т. е. $\overline{f(z)}=f(\overline{z})$, или

$$f(z)=\overline{f(\overline{z})}. \tag{8.25}$$

Нека сега комплексното число a е λ-кратен корен на полинома с реални коефициенти f, т. е. е в сила представянето

(8.26) $$f(z)=(z-b)^{\lambda}\varphi(z),$$

където

(8.27) $$\varphi(a)\neq 0.$$

От (8.26) и (8.25) следва

$$f(z)=\overline{(\bar{z}-a)^{\lambda}\varphi(\bar{z})},$$

а последното равенство поради (8.14″) може да се напише във вида

(8.28) $$f(z)=\overline{(\bar{z}+a)^{\lambda}}\cdot\overline{\varphi(\bar{z})}.$$

Ще отбележим сега, че съгласно установеното по-горе съотношението $\overline{(z^n)}=(\bar{z})^n$ е изпълнено равенството

(8.29) $$\overline{(\bar{z}-a)^{\lambda}}=(\overline{\bar{z}-a})^{\lambda}=(z-\bar{a})^{\lambda}.$$

От (8.29) и (8.28) получаваме

(3.30) $$f(z)=(z-\bar{a})^{\lambda}\psi(z),$$

където

(8.31) $$\psi(z)=\overline{\varphi(\bar{z})}.$$

За да завършим доказателството на теорема 8.3, остава да се убедим, че $\psi(\bar{a})\neq 0$. Това следва веднага от факта, че съгласно (8.31) $\psi(\bar{a})=\overline{\varphi(a)}$, а $\overline{\varphi(a)}\neq 0$, тъй като $\varphi(a)\neq 0$ съгласно (8.27).□

8.3.3. Разлагане на алгебрични полиноми с реални коефициенти на произведение от неразложими множители. По-нататък ще разглеждаме само полиноми на реална променлива. Затова променливата ще означаваме с x, а не със z.

Като използуваме теорема 8.3, ще намерим разлагането на полином с реални коефициенти f на произведение от неразложими реални множители. Нека полиномът f има реални корени $b_1, b_2, \ldots, b_m$ с кратности съответно $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ и комплексно спрегнати корени a_1 и $\bar{a}_1$, a_2 и $\bar{a}_2, \ldots, a_n$ и $\bar{a}_n$ с кратности съответно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Тогава съгласно резултатите от 8.3.2 полиномът се представя във вида

(8.32) $$f(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{\beta_m}$$
$$\times(x-a_1)^{\lambda_1}(x-\bar{a}_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2}(x-\bar{a}_2)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot(x-a_n)^{\lambda_n}(x-\bar{a}_n)^{\lambda_n}.$$

Да означим реалната и имагинерната част на корена a_k ($k=1, 2, \ldots, n$) съответно с u_k и v_k, т. е. нека $a_k=u_k+iv_k$. Тогава $\bar{a}_k=u_k-iv_k$. Преобразуваме за всяко $k=1, 2, 3, \ldots, n$ израза

(8.33) $$(x-a_k)^{\lambda_k}(x-\bar{a}_k)^{\lambda_k}=((x-a_k)(x-\bar{a}_k))^{\lambda_k}$$
$$=((x-u_k-iv_k)(x-u_k+iv_k))^{\lambda_k}$$
$$=((x-u_k)^2+v_k^2)^{\lambda_k}=(x^2+p_kx+q_k)^{\lambda_k},$$

където $p_k=-2u_k$, $q_k=u_k^2+v_k^2$.

От (8.33) и (8.32) получаваме за полинома f следното разлагане на произведение от реални неразложими множители:

(8.34) $$f(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot(x-b_m)^{\beta_m}$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}.$$

Така идваме до извода, че полиномът f с реални коефициенти се представя като произведението (8.34) от неразложими реални множители, при което множителите, съответствуващи на реалните корени, са линейни двучлени със степени, равни на кратностите на корените, а множителите, съответствуващи на комплексните двойки корени, са квадратни тричлени със степени, равни на кратностите на тези двойки корени.

8.3.4. Разлагане на правилна рационална дроб на сума от елементарни дроби. ***Рационална дроб*** *се нарича частното на два алгебрични полинома.*

Навсякъде по-нататък ще разглеждаме рационални дроби, които са частно на два алгебрични полинома с реални коефициенти (такива дроби се наричат рационални дроби с реални коефициенти).

Рационалната дроб P/Q се нарича ***правилна,*** *ако степента на полинома P в числителя е по-малка от степента на полинома Q в знаменателя.*

В противен случай рационалната дроб се нарича ***неправилна.***

Ще докажем две помощни твърдения.

Лема 1. *Нека P/Q е правилна рационална дроб с реални коефициенти, знаменателят Q на която има за α-кратен корен реалното число a, т. е.*

(8.35) $$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\varphi(x),\ \textit{където}\ \varphi(a)\neq 0.$$

Тогава за тази дроб е вярно следното представяне:

(8.36) $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k}\varphi(x)}.$$

В това представяне A е реална константа, равна на $P(a)/\varphi(a)$, k е цяло число, удовлетворяващо условието $k \geqq 1$, ψ е такъв полином с реални коефициенти, че последната дроб в дясната страна на (8.36) е правилна.

Доказателство. Да означим с A реалното число $A=P(a)/\varphi(a)$ и да разгледаме разликата

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}.$$

Като приведем тази разлика към общ знаменател, ще имаме

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}=\frac{P(x)-A\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}\varphi(x)}=\frac{\Phi(x)}{(x-a)^{\alpha}\varphi(x)}, \tag{8.37}$$

където с Φ е означен полиномът с реални коефициенти $\Phi(x)=P(x)-A\varphi(x)$.

Тъй като $\Phi(a)=P(a)-A\,.\,\varphi(a)=P(a)-\varphi(a)\,.\,P(a)/\varphi(a)=0$, реалното число a е корен на полинома Φ с някаква кратност $k \geqq 1$. Това означава, че е вярно представянето

$$\Phi(x)=(x-a)^k\psi(x), \tag{8.38}$$

където $\psi(a)\neq 0$, а ψ е полином с реални коефициенти.

От представянето (8.38) и равенството (8.37) окончателно получаваме

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}=\frac{\psi(x)}{(x-a)^{\alpha-k}\varphi(x)}. \tag{8.39}$$

С това представянето (8.36) е доказано. Остава само да се убедим, че дробта в дясната страна на (8.39) е правилна, което непосредствено следва от факта, че разликата на две правилни рационални дроби е правилна рационална дроб (за да се убедим в това, е достатъчно да приведем разликата на правилните рационални дроби към общ знаменател).□

Лема 2. *Нека P/Q е правилна рационална дроб с реални коефициенти, знаменателят Q на която има за λ-кратни корени комплексните числа $a=u+iv$ и $\bar{a}=u-iv$, т. е.*

$$Q(x)=(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x), \tag{8.40}$$

където $\varphi(a)\neq 0$, $\varphi(\bar{a})\neq 0$, $p=-2u$, $q=u^2+v^2$. Тогава за тази дроб е в сила следното представяне:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{\psi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda-k}\varphi(x)}. \tag{8.41}$$

В това представяне M и N са реални константи, k е цяло число, удовлетворяващо условието $k \geqq 1$, а ψ е такъв полином с реални коефициенти, че последната дроб в дясната страна на (8.41) е правилна.

Доказателство на лема 2. Ще се уговорим да означаваме реалната част на комплексната величина A със символа $\mathrm{Re}[A]$, а имагинерната ѝ част със символа $\mathrm{Im}[A]$. Полагаме

$$M=v^{-1}\,\mathrm{Im}[P(a)/\varphi(a)],\quad N=\mathrm{Re}[P(a)/\varphi(a)]-uv^{-1}\,\mathrm{Im}[P(a)/\varphi(a)].$$

Не е трудно да се провери, че M и N са решение на следното уравнение:

$$P(a)-(Ma+N)\varphi(a)=0. \tag{8.42}$$

Наистина, като разделим това уравнение на $\varphi(a)$ и приравним реалната и имагинерната част на нула, получаваме двете равенства

$$\left|\begin{array}{l} Mu+N=\mathrm{Re}[P(a)/\varphi(a)],\\ Mv=\mathrm{Im}[P(a)/\varphi(a)],\end{array}\right.$$

от които се определят M и N. Да разгледаме сега разликата

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}.$$

Като приведем тази разлика към общ знаменател, ще имаме

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}=\frac{P(x)-(Mx+N)\varphi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x)}=\frac{\Phi(x)}{(x^2+px+q)^{\lambda}\varphi(x)}. \tag{8.43}$$

Тук с Φ е означен полиномът с реални коефициенти $\Phi(x)=P(x)-(Mx+N)\varphi(x)$. Равенството (8.42) позволява да се твърди, че комплексното число a, а следователно съгласно теорема 8.3 и спрегнатото му число $\bar{a}$ са корени на полинома Φ от някаква кратност $k \geqq 1$. В такъв случай за полинома Φ е в сила представянето

$$\Phi(x)=(x^2+px+q)^k\psi(x), \tag{8.44}$$

където $\psi(x)$ е полином с реални коефициенти, който няма за корени числата a и $\bar{a}$. От представянето (8.44) и формула (8.43) получаваме представянето (8.41). Последната дроб в дясната страна на (8.41) е правилна, понеже тази дроб е равна на разликата на две правилни дроби.□

Последователното прилагане на леми 1 и 2 към дробта P/Q по отношение на всички корени на знаменателя води до следното забележително твърдение:

Теорема 8.4. *Нека P/Q е правилна рационална дроб с реални коефициенти, знаменателят на която има вида*

$$Q(x)=(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_m)^{\beta_m} \tag{8.45}$$
$$\times(x^2+p_1x+q_1)^{\lambda_1}(x^2+p_2x+q_2)^{\lambda_2}\ldots(x^2+p_nx+q_n)^{\lambda_n}.$$

Тогава за тази дроб е в сила следното разлагане на сума от елементарни дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{B_1^{(1)}}{(x-b_1)}+\frac{B_2^{(1)}}{(x-b_1)^2}+\dots+\frac{B_{\beta_1}^{(1)}}{(x-b_1)^{\beta_1}}$$
$$+\dots+\frac{B_1^{(m)}}{(x-b_m)}+\frac{B_2^{(m)}}{(x-b_m)^2}+\dots+\frac{B_{\beta_m}^{(m)}}{(x-b_m)^{\beta_m}}$$
$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)}+\frac{M_2^{(1)}x+N_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\dots+\frac{M_{l_1}^{(1)}x+N_{l_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}}$$
$$+\dots+\frac{M_1^{(n)}x+N_1^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)}+\frac{M_2^{(n)}x+N_2^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^2}+\dots+\frac{M_{l_n}^{(n)}x+N_{l_n}^{(n)}}{(x^2+p_nx+q_n)^{l_n}}. \tag{8.46}$$

В това разлагане $B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, \dots, B_{\beta_m}^{(m)}, M_1^{(1)}, N_1^{(1)}, \dots, M_{l_n}^{(n)}, N_{l_n}^{(n)}$ *са реални константи, част от които могат да бъдат нули.*

Забележка. За определяне на константите равенството (8.46) трябва да се приведе към общ знаменател и да се сравнят коефициентите пред еднаквите степени на x в числителя.

Примери:

1. Да се разложи на сума от елементарни дроби

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}. \tag{8.47}$$

Тъй като квадратният тричлен x^2+x+1 има комплексни корени, ще търсим съгласно теорема 8.4 разлагане на дробта (8.47) от вида

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1}. \tag{8.48}$$

Като приведем равенството (8.48) към общ знаменател, получаваме

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{B_1(x^3-1)+B_2(x^2+x+1)+(Mx+N)(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Чрез сравняване в числителя коефициентите пред x^0, x^1, x^2 и x^3, стигаме до системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} B_1+M=2\\ B_2+N-2M=4\\ B_2+M-2N=1\\ B_1+B_2+N=2.\end{array}\right.$$

Като решим тази система, намираме $B_1=2$, $B_2=3$, $M=0$, $N=1$. Окончателно получаваме

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x^2+x+1}. \tag{8.49}$$

Този метод за намиране на разлагането на правилна рационална дроб се нарича ***метод на неопределените коефициенти.***

2. Да се намери разлагането на правилната дроб

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Тъй като квадратният тричлен x^2+1 има комплексни корени, ще търсим съгласно теорема 8.4 разлагане от вида

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{B}{x-2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Привеждаме последното равенство към общ знаменател и сравняваме числителите. Така получаваме

$$3x^4+2x^3+3x^2-1=B(x^4+2x^2+1)$$
$$+(M_1x+N_1)(x^3-2x^2+x-2)+(M_2x+N_2)(x-2).$$

Като сравним коефициентите пред x^0, x^1, x^2, x^3 и x^4, стигаме до системата уравнения

$$\left|\begin{array}{l} B+M_1=3\\ N_1-2M_1=2\\ 2B+M_1-2N_1+M_2=3\\ N_1-2M_1+N_2-2M_2=0\\ B-2N_1-2N_2=-1.\end{array}\right.$$

Като решим системата, намираме $B=3$, $M_1=0$, $N_1=2$, $M_2=1$, $N_2=0$. Окончателно получаваме

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}. \tag{8.50}$$

8.3.5. Интегруемост на рационалните дроби в елементарни функции. Сега сме готови да решим в общ вид проблема за интегриране на рационални дроби с реални коефициенти. Този проблем се свежда до интегриране само на правилни рационални дроби, тъй като всяка неправилна рационална дроб (посредством разделяне числителя на знаменателя) може да се представи като сума на алгебричен полином и правилна рационална дроб.

Пример:

$$\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x+2}=x^2-2x+\frac{4x+1}{x^2+x+2},$$

тъй като

$$\begin{array}{rl} x^4-x^3+1 & \mid x^2+x+2 \\ -\;\underline{x^4+x^3+2x^2} & x^2-2x \\ -2x^3-2x^2+1 & \\ -\;\underline{-2x^3-2x^2-4x} & \\ \text{остатък } 4x+1 & \end{array}$$

Ние знаем да интегрираме полиноми.

Остава да се научим да интегрираме правилна рационална дроб. Съгласно теорема 8.4 проблемът за интегриране на правилни рационални дроби се свежда до интегриране на елементарни дроби от следните четири типа:

(8.51) $$1)\ \frac{B}{x-b};\quad 2)\ \frac{B}{(x-b)^{\beta}};\quad 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}.$$

Тук $\beta=2, 3, 4, \cdots$; $\lambda=2, 3, 4, \cdots$; B, M, N, b, p и q са реални числа, при това тричленът x^2+px+q няма реални корени, т. е. $q-p^2/4>0$.

Ще докажем, че всяка от посочените четири вида дроби се интегрира в елементарни функции.

Дробите от вида 1) и 2) се интегрират с помощта на субституцията $t=x-b$. Получаваме

(8.52) $$\int \frac{B}{x-b}\,dx = B\int \frac{dt}{t} = B\ln|t|+C=B\ln|x-b|+C,$$

(8.53) $$\int \frac{B}{(x-b)^{\beta}}\,dx = B\int t^{-\beta}\,dt = \frac{-B}{\beta-1}\,t^{-\beta+1}+C = \frac{-B}{\beta-1}\,(x-b)^{-\beta+1}+C.$$

За пресмятане на интеграла от дроб от тип 3 ще представим квадратния тричлен във вида $x^2+px+q=(x+p/2)^2+(q-p^2/4)$ и понеже $q-p^2/4>0$, $a=\sqrt{q-p^2/4}$ е реално число. Като направим субституцията $t=x+p/2$, получаваме

(8.54) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{t^2+a^2}\,dt$$
$$=\frac{M}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2}+(N-Mp/2)\int \frac{dt}{t^2+a^2}$$
$$=\frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2}+(N-Mp/2)\,\frac{1}{a}\int \frac{d(t/a)}{(t/a)^2+1}$$
$$=\frac{M}{2}\ln(t^2+a^2)+\frac{2N-Mp}{2a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C$$
$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Остава да се сметне интегралът от дроб от тип 4. Като използваме въведените означения $t=x+p/2$, $a=\sqrt{q-p^2/4}$, ще имаме

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}}\,dx = \int \frac{Mt+(N-Mp/2)}{(t^2+a^2)^{\lambda}}\,dt$$
$$=\frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\lambda}}+(N-Mp/2)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda}}.$$

Въвеждаме означенията

$$I_{\lambda}=\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^{\lambda}},\qquad K_{\lambda}=\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\lambda}}.$$

Интересуващият ни интеграл ще бъде решен, ако се пресметнат интегралите I_{λ} и K_{λ}. Интегралът I_{λ} се решава елементарно

$$I_{\lambda}=-\frac{1}{\lambda-1}(t^2+a^2)^{-\lambda+1}+C=-\frac{1}{\lambda-1}(x^2+px+q)^{-\lambda+1}+C.$$

Интегралът K_{λ} беше решен в края на 8.2.2. Така получихме за този интеграл рекурентната формула (8.12), която ни позволява да пресметнем K_{λ} за всяко $\lambda=2, 3, 4, \cdots$, понеже

$$K_1=\int \frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{a}+C.$$

И така пресметнати са интегралите от посочените четири типа (8.51) и е доказано, че всеки от тези интеграли представлява елементарна функция. С това идваме до следващата теорема, с която се изчерпва проблемът за интегриране на рационални дроби.

Теорема 8.5. *Всяка рационална дроб е интегруема в елементарни функции.*

В заключение ще разгледаме някои примери за пресмятане на неопределени интеграли от рационални дроби, а именно неопределените интеграли от дробите (8.49), (8.50), разгледани в предишния параграф. Като използваме за тях формулите (8.52), (8.53) и (8.54), ще получим

1. $$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{2}{x-1}\,dx+\int \frac{3}{(x-1)^2}\,dx+\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$
$$=2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

2. $$\int \frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx=\int \frac{2}{x-2}\,dx+\int \frac{2}{x^2+1}\,dx+\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$=3\ln|x-2|+2\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=3\ln|x-2|+2\operatorname{arc\,tg}x-1/2\,(x^2+1)+C.$$

3. $$\int\frac{x+1}{x(x-1)(x-2)}dx=\int\frac{dx}{2x}-\int\frac{2dx}{x-1}+\int\frac{3dx}{2(x-2)}$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x|-2\ln|x-1|+3/2\ln|x-2|+C.$$

8.3.6. Интегруемост в елементарни функции на някои тригонометрични и ирационални изрази. За разсъжденията в тази точка важна роля ще играе рационалната функция на два аргумента. Ще започнем с определянето на тази функция и изясняване на някои нейни свойства.

Полином от степен *n на два аргумента x и y се нарича израз от вида*

$$P_n(x,\ y)=a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2$$
$$+\dots+a_{n0}x^n+a_{n-1,1}xy^{n-1}+\dots+a_{0n}y^n,$$

в който с $a_{00}, a_{10},\dots, a_{0n}$ са означени такива реални константи, че сред числата $a_{n0}, a_{n-1,1}, a_{n-2,2},\dots, a_{0n}$ да има поне едно, различно от нула.

Рационална функция на два аргумента *x и y се нарича израз от вида*

$$R(x,\ y)=\frac{P_n(x,\ y)}{Q_m(x,\ y)},$$

в който P_n е полином на двата аргумента x и y ***от степен n*** *a* Q_m *— полином на двата аргумента x и y от степен m.*

В сила е следното тривиално твърдение: ако R е рационална функция на двата аргумента x и y, а R_1, R_2 и R_3 са три произволни рационални функции на една променлива t, то израз от вида

(8.55) $$R(R_1(t),\ R_2(t)).\ R_3(t)$$

е рационална функция на една променлива.

За доказване на това твърдение е достатъчно да отбележим, че в резултат от прилагане на операциите събиране, изваждане, умножение и деление към рационални функции на една променлива t се получава пак рационална функция на една променлива t.

По-нататък, за да докажем интегруемостта в елементарни функции на някои изрази, с помощта на специално подбрани субституции ще сведем интегралите от разглежданите изрази към интеграли от рационални дроби. *При това ще казваме, че интегралът от разглеждания израз* ***се рационализира*** *с посочената специална субституция.*

1°. Интегриране на някои тригонометрични изрази. Със символа R ще означаваме рационална функция на двата аргумента x и y.

В тази точка ще докажем интегруемостта в елементарни функции на всяка функция от вида

(8.56) $$R(\sin x,\ \cos x),$$

като ще покажем, че интеграл от такава функция се рационализира със субституцията $t=\operatorname{tg}(x/2)$. Наистина

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arc\,tg}t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

така че

(8.57) $$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ако положим $R_1(t)=2t/(1+t^2)$, $R_2=(1-t^2)/(1+t^2)$, $R_3(t)=2/(1+t^2)$, в дясната страна на (8.57) получаваме интеграл от вида (8.55), който е интеграл от рационална функция на аргумента t.

Пример:

• Да се пресметне $I_1=\int\frac{dx}{1+a\cos x}$, $a>0$, $a\neq1$. Като приложим универсалната тригонометрична субституция $t=\operatorname{tg}(x/2)$, получаваме

$$x=2\operatorname{arc\,tg}t,\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$I_1=2\int\frac{dt}{a+1+t^2(1-a)}=\frac{2}{a+1}\int\frac{dt}{1+t^2(1-a)/(1+a)}.$$

По-нататък трябва отделно да разгледаме двата случая:

1) $0<a<1$; 2) $a>1$.

В случая $0<a<1$ имаме

$$I_1=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(t\sqrt{(1-a)/(1+a)}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

В случая $a>1$

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{1+t\sqrt{(a-1)/(a+1)}}{1-t\sqrt{(a-1)/(a+1)}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\frac{1+\sqrt{(a-1)/(a+1)}\operatorname{tg}(x/2)}{1-\sqrt{(a-1)/(a+1)}\operatorname{tg}(x/2)}\right|+C.$$

2°. Интегриране на дробно-линейни ирационалности. В тази точка ще докажем интегруемостта в елементарни функции на всяка функция от вида

$$R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}\right), \tag{8.58}$$

където a, b, c и d са константи, n е цяло положително число. Функция от този вид ще наричаме ***дробно-линейна ирационалност.***

Ще докажем, че интеграл от функция от вида (8.58) при $ad-bc \neq 0$ се рационализира посредством субституцията $t=\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$. Наистина

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d}, \quad x=\frac{d\,.\,t^n-b}{a-c\,.\,t^n}, \quad dx=\frac{(ad-bc)\,n t^{n-1}}{(a-c\,.\,t^n)^2}\,dt,$$

така че

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}\right)dx = \int R\left(\frac{d\,.\,t^n-b}{a-c\,.\,t^n}, t\right)\frac{n\,(ad-bc)}{(a-ct^n)^2}t^{n-1}\,dt. \tag{8.59}$$

Ако положим $R_1(t)=\frac{d\,.\,t^n-b}{a-c\,.\,t^n}$, $R_2(t)=t$, $R_3(t)=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a-c\,.\,t^n)^2}$, то в дясната страна на (8.59) ще получим интеграл от вида (8.55), който е интеграл от рационална функция на аргумента t. С това е доказано, че интегралът от дробно-линейната ирационалност (8.58) се рационализира със субституцията $t=\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}$.

Пример:

Да се пресметне $I=\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{1-x}$. Правим субституцията

$$t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad t^2=\frac{1+x}{1-x}, \quad x=\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$$

получаваме

$$I=2\int\frac{t^2\,dt}{t^2+1}=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-2\operatorname{arc\,tg} t+C$$
$$=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

3°. Интегриране на квадратични ирационалности. В тази точка ще докажем интегруемостта в елементарни функции на всяка функция от вида

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), \tag{8.60}$$

където a, b и c са константи. Функция от този вид ще наричаме ***квадратична ирационалност.*** При това, разбира се, ще смятаме, че квадратният тричлен ax^2+bx+c няма равни корени (иначе квадратният корен от този тричлен може да се замени с рационален израз).

Ще докажем, че интеграл от функция от вида (8.60) винаги се рационализира с една от т. нар. субституции на Ойлер.

Най-напред ще разгледаме случая, когато квадратният тричлен ax^2+bx+c има комплексни корени. В този случай знакът на квадратния тричлен съвпада със знака на a и тъй като квадратният тричлен трябва да бъде положителен (от него се извлича квадратен корен), то $a>0$.

Тогава имаме право да направим следната субституция:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}. \tag{8.61}$$

Субституцията (8.61) обикновено се нарича ***първа субституция на Ойлер.*** Ще докажем, че тази субституция рационализира интеграла на функцията (8.60) за разглеждания случай. Повдигаме в квадрат двете страни на равенството $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-x\sqrt{a}$ и получаваме $bx+c=t^2-2\sqrt{a}\,tx$, така че

$$x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b},$$
$$dx=2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt.$$

По такъв начин

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt. \tag{8.62}$$

Под знака на интеграла в дясната страна на (8.62) имаме израз от вида (8.55) при $R_1(t)=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}$, $R_2(t)=\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,t+b}$, $R_3(t)=2\,\frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}$, така че в дясната страна на (8.62) получаваме интеграл от рационална дроб.

Ще разгледаме сега случая, когато квадратният тричлен ax^2+bx+c има реални корени x_1 и x_2. Тогава $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, а интегралът от функция от вида (8.60) се рационализира чрез субституцията

$$t=\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}, \tag{8.63}$$

наричана обикновено ***втора субституция на Ойлер.*** Наистина, като повдигнем в квадрат двете страни на равенството $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$ и съкратим на $x-x_1$, ще получим $a(x-x_2)=t^2(x-x_1)$, така че

$$x=\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}t,$$
$$dx=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

По такъв начин

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \tag{8.64}$$
$$=\int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\ \frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a}\right)\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}dt.$$

Дясната страна на (8.64) е израз от вида (8.55) при

$$R_1(t)=\frac{-ax_2+x_1t}{t^2-a},\quad R_2(t)=\frac{a(x_1-x_2)t}{t^2-a},$$

$R_3(t)=\frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}$. Така в дясната страна на (8.64) получаваме интеграл от рационална дроб.

Примери:

1. Да се сметне $I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. Тъй като квадратният тричлен x^2+x+1 има комплексни корени, ще направим първата субституция на Ойлер

$$t=\sqrt{x^2+x+1}+x.$$

Повдигаме на квадрат двете страни на равенството $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$ и получаваме $x^2+x+1=t^2-2tx+x^2$, или $x+1=t^2-2tx$, така че

$$x=\frac{t^2-1}{1+2t},\quad dx=2\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt.$$

По такъв начин

$$I=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt=\int\left(\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}\right)dt.$$

Неопределените коефициенти A, B и C се пресмятат лесно: $A=2$, $B=-3$, $C=-3$. Окончателно получаваме

$$I=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|1+2t|+3/2(1+2t)+C$$
$$=2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right|-\frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right|$$

$$+\frac{3}{2}(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})^{-1}+C.$$

2. Да се пресметне $I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$. Тъй като квадратният тричлен $1-2x-x^2$ има реални корени $x_1=-1+\sqrt{2}$ и $x_2=-1-\sqrt{2}$, ще направим втората субституция на Ойлер (8.63)

$$t=\frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x+1+\sqrt{2}}.$$

Като повдигнем на квадрат двете страни на равенството $\sqrt{1-2x-x^2}=t(x+1+\sqrt{2})$, ще имаме $-(x+1-\sqrt{2})=t^2(x+1+\sqrt{2})$, тъй че

$$x=\frac{-t^2(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1}{t^2+1},\quad \sqrt{1-2x-x^2}=\frac{2\sqrt{2}}{t^2+1}t,$$
$$1+\sqrt{1-2x-x^2}=\frac{t^2+2\sqrt{2}t+1}{t^2+1},\quad dx=-\frac{4\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}dt.$$

По такъв начин

$$I=-4\sqrt{2}\int\frac{t\,dt}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}.$$

Получаваме интеграл от рационална дроб, пресмятането на който предоставяме на читателя.

8.3.7. Интегриране на диференциален бином

Диференциален бином ще наричаме израз от вида

$$x^m(a+bx^n)^p,$$

където a и b са константи, а степенните показатели m, n и p са рационални числа. Ще изучим въпроса за интегриране в елементарни функции на диференциален бином.

Най-напред ще отбележим три случая, в които интегралът от диференциален бином допуска рационализираща субституция.

Първият случай е, когато p е цяло число. В този случай диференциалният бином е дробно-линейна ирационалност от вида $R(x,\sqrt[r]{x})$, където r е най-малкото общо кратно на знаменателите на рационалните числа m и n. Следователно интегралът от диференциалния бином в този случай се рационализира със субституцията $t=\sqrt[r]{x}$.

Втори случай имаме, когато $(m+1)/n$ е цяло число. В този случай, като направим субституцията $z=x^n$ и положим за краткост $(m+1)/n-1=q$, ще получим

(8.65) $$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = n^{-1}\int (a+bz)^p z^q\,dz.$$

Подинтегралната функция в дясната страна на (8.65) е дробно-линейна ирационалност от вида $R(z, \sqrt[s]{a+bz})$, където s е знаменателят на рационалното число p.

Така че в този случай диференциалният бином се рационализира със субституцията $t=\sqrt[s]{a+bz}=\sqrt[s]{a+bx^n}$.

Трети случай имаме, когато $(m+1)/n+p$ е цяло число. В този случай подинтегралната функция в дясната страна на (8.65) е дробно-линейна ирационалност от вида $R(z, \sqrt[s]{(a+bz)/z})$, така че интегралът от диференциалния бином се рационализира със субституцията $t=\sqrt[s]{(a+bz)/z}=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$.

В средата на миналия век П. Л. Чебишов* е доказал, че изброените три случая изчерпват случаите, при които диференциалният бином е интегруем в елементарни функции.

Примери:

1. Да се пресметне интегралът
$$I=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}}=\int x^{-2}(a+bx^2)^{-1/2}dx.$$
В случая $m=-2$, $n=2$, $p=-1/2$, така че $(m+1)/n+p=-1$ (трети случай). Като направим субституцията
$$t=\sqrt{ax^{-2}+b},\ x=\sqrt{a}/\sqrt{t^2-b},\ dx=-\sqrt{a}\,t\,(t^2-b)^{-3/2}\,dt,$$
ще получим
$$I=\int\left(-\frac{dt}{a}\right)=-\frac{t}{a}+C=a^{-1}\sqrt{ax^{-2}+b}+C.$$

2. Да се пресметне $I=\int x^5(1-x^2)^{-1/2}\,dx$. В дадения случай $m=5$, $n=2$, $p=-1/2$, така че $(m+1)/n=3$ (втори случай). Правим субституцията
$$t=\sqrt{1-x^2},\ x=\sqrt{1-t^2},\quad dx=-\frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$
и получаваме
$$I=-\int(1-t^2)^2dt=-\int dt+2\int t^2dt-\int t^4dt$$
$$=-t+\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{5}t^5+C$$
$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}-\frac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}+C.$$

* Пафнутий Лвович Чебишов — руски математик (1821—1894).

8.4. Елиптични интеграли

Към интегралите от квадратични ирационалности естествено се отнасят и следните интеграли:

(8.65) $$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})\,dx,$$

(8.66) $$\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})\,dx,$$

чиито подинтегрални функции съдържат квадратен корен от полиноми от трета или четвърта степен (с реални коефициенти).

Тези интеграли се срещат често в приложенията. Интегралите (8.65) и (8.66) не са елементарни функции. Тези два интеграла е прието да се наричат ***елиптични***, когато не се изразяват чрез елементарни функции, и ***псевдоелиптични***, когато се изразяват чрез елементарни функции.*

Поради важността на интегралите (8.65) и (8.66) за приложенията се съставят таблици и графики на функциите, определени с тези интеграли. При произволни коефициенти a, b, c, d и e такива таблици и графики се съставят доста трудно. Затова възниква задачата за свеждане на всички интеграли от вида (8.65) и (8.66) до няколко типа интеграли, съдържащи по възможност по-малко произволни коефициенти (или, както се казва, за привеждане на интегралите (8.65) и (8.66) в канонична форма).

Интегралът (8.65) се свежда към интеграла (8.66). Действително кубичният полином има винаги поне един реален корен x_0 и затова той може да се представи във вида $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_0)(x^2+px+q)$.

Като направим субституцията $x-x_0=\pm t^2$, както лесно се вижда, можем да преобразуваме интеграла (8.65) в (8.66). Следователно достатъчно е да разгледаме само интеграла (8.66).

Съгласно 8.4. полином от четвърта степен се разлага на произведение от два квадратни тричлена с реални коефициенти:
$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x^2+px+q)(x^2+p'x+q').$$

Съществува линейна или дробно-линейна субституция, която унищожава линейните членове в двата квадратни тричлена. Като направим такава субституция, ще преобразуваме интеграла (8.66) с точност до събираемо елементарна функция във вида

* Тези названия идват от това, че за първи път тези интеграли са възникнали при решаване на задачата на ректифициране на елипса (вж. пример 4 от 10.1.5).