5. Диференциално смятане

В тази глава ще бъдат въведени основните понятия производна и диференциал на функция. Ще установим основните правила за диференциране и ще пресметнем производните на всички основни елементарни функции. В края на главата ще бъдат разгледани производни и диференциали от по-висок ред и въпросът за диференциране на функции, зададени параметрично.

5.1. Понятие за производна

5.1.1. Нарастване на функция. Диференчна форма на условието за непрекъснатост. Да разгледаме функцията f, дефинирана в интервала (a, b).* Нека x е произволна точка от интервала (a, b), а Δx е произволно число, толкова малко, че числото $x+\Delta x$ също да принадлежи на интервала (a, b). Числото Δx ще наричаме нарастване на аргумента.

Нарастване на функцията *f в точката x, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, ще наричаме числото*

$$\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x). \tag{5.1}$$

Така за функцията $y=\sin x$ нарастването ѝ в точката x, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, е

$$\Delta \sin x=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2). \tag{5.2}$$

В сила е следното твърдение:

За да бъде функцията f непрекъсната в точката x, е необходимо и достатъчно нарастването $\Delta f(x)$ на тази функция в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, да бъде безкрайно малко при $\Delta x \to 0$.

* За дефиниционна област на функцията вместо интервала (a, b) може да се вземе всяко гъсто в себе си множество $\{x\}$.

Действително според определението за непрекъснатост на функцията f в точката x трябва да имаме

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x). \tag{5.3}$$

Съгласно 3.4.4 съществуването на границата (5.3) е еквивалентно на това, че функцията $[f(x+\Delta x)-f(x)]$ на аргумента Δx е безкрайно малка при $\Delta x \to 0$.

Доказаното твърдение позволява условието за непрекъснатост на функцията f в точката x да се изкаже в следната форма: *Функцията f е непрекъсната в точката x, ако нарастването $\Delta f(x)$ на тази функция в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, е безкрайно малко при $\Delta x \to 0$, т. е. ако*

$$\lim_{\Delta x\to 0} [f(x+\Delta x)-f(x)]=0. \tag{5.4}$$

Условието (5.4) ще наричаме ***диференчна форма*** *на условието за непрекъснатост на функцията f в точката x.* Това условие нееднократно ще използваме по-нататък.

С помощта на условието (5.4) още веднъж ще се убедим, че функцията $\sin x$ е непрекъсната във всяка точка x от безкрайната права. Наистина от (5.2), от условието $|\cos(x+\Delta x/2)|\leq 1$ и от равенството $\lim_{\Delta x\to 0}\sin(\Delta x/2)=0$ непосредствено следва, че $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$.

5.1.2. Определение на производна. Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b), x фиксирана точка от този интервал и Δx е нарастване на аргумента, за което $x+\Delta x$ принадлежи също на интервала (a, b).

Ще смятаме, че $\Delta x \neq 0$, и ще разгледаме в избраната точка x частното на функцията f в тази точка и съответното нарастване на аргумента Δx:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{5.5}$$

Частното (5.5) ще наричаме ***диференчно частно*** (в дадената точка x). Тъй като x е фиксирано, диференчното частно (5.5) е функция на аргумента Δx. Тази функция е дефинирана за всички стойности на аргумента Δx от някоя достатъчно малка δ-околност на точката $\Delta x=0$ с изключение на точката $\Delta x=0$, т. е. дефинирана е навсякъде в достатъчно малка прободена δ-околност на точката $\Delta x=0$. Това ни дава право да разглеждаме въпроса за съществуване на граница на тази функция при $\Delta x \to 0$ $(\Delta x \neq 0)$.

Определение 1. ***Производна на функцията*** *f в дадена точка x се нарича границата на диференчното частно (5.5) при $\Delta x \to 0$ (**при** условие, че тази граница съществува).*

Производната на функцията f в дадена точка x ще означаваме със символа $f'(x)$.

И така по определение

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Ако функцията има производна във всяка точка x на интервала (a, b), то тази производна ще бъде също функция на аргумента x, дефинирана в интервала (a, b).

Примери:

1. $f(x)=C=\text{const}$. Очевидно производната $f'(x)$ на тази функция е тъждествено равна на нула, тъй като нарастването на функцията $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$ е равно на нула за всяко x и всяко Δx.

2. $f(x)=x$. За тази функция диференчното частно (5.5) е

$$\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Оттук следва, че производната на тази функция е равна на единица във всяка точка x от безкрайната права.

Напълно аналогично на понятията дясна и лява граница на функция в дадена точка се въвеждат понятията дясна и лява производна на функцията f в дадена точка x.

Определение 2. ***Дясна (лява) производна на функцията*** *f в дадена точка x се нарича дясната (лявата) граница на диференчното частно (5.5) в точката $\Delta x=0$ (при условие, че тази граница съществува).*

За означаване на дясната (лявата) производна на функцият f в точката x се използва символът $f'(x+0)$ $(f'(x-0))$.

От съпоставянето на определенията 1 и 2 и от свойството на дясна и лява граница на функция, установено в 3.4.2, следват твърденията:

1) *Ако функцията f има в точката x производна $f'(x)$, то тази функция има в точката x както дясна, така и лява производна и $f'(x+0)=f'(x-0)=f'(x)$.*

2) *Ако функцията f има в точката x дясна и лява производна и ако тези производни са равни помежду си, то функцията f има в точката x производна $f'(x)$ и $f'(x)=f'(x+0)=f'(x-0)$.*

В допълнение на твърдение 2) ще отбележим, че ако функцията f има дясна и лява производна в точката x, но тези производни не са равни помежду си, то функцията няма производна в точката x. Иначе ще получим противоречие с твърдение 1). Пример за такава функция е

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x & \text{при } x\geq 0,\\ -x & \text{при } x<0.\end{cases}$$

Тази функция има в точката $x=0$ дясна производна, равна на $\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x/\Delta x)=1$, и лява производна, равна на $\lim_{\Delta x\to 0}((-\Delta x)/\Delta x)=-1$, но няма производна в точката $x=0$.

5.1.3. Геометричен смисъл на производната. Да разгледаме графиката на функцията f, дефинирана и непрекъсната в интервала (a, b).

Избираме произволна точка x от интервала (a, b) и даваме нарастване $\Delta x\neq 0$ на аргумента x, толкова малко, че числото $x+\Delta x$ да принадлежи също на интервала (a, b). Нека M и P са точки от графиката на функцията f с абсциси, съответно равни на x и $x+\Delta x$ (вж. фиг. 5.1). Точките M и P ще имат очевидно координати

$$M(x, f(x)),\ P(x+\Delta x, f(x+\Delta x)).$$

Правата, минаваща през точките M и P от графиката на функцията f, ще наричаме *секуща*. Понеже точката M е фиксирана, то ъгълът, който всяка секуща MP сключва с оста Ox, е функция на аргумента Δx (тъй като стойността на Δx еднозначно определя точката P от графиката на функцията f). Ще означим ъгъла между секущата MP и оста Ox със символа $\varphi(\Delta x)$.

Определение. *Ако съществува гранично положение на секущата MP, когато точката P клони към точката M по графиката на функцията (т. е. когато $\Delta x\to 0$), то това гранично положение се нарича* ***допирателна*** *към графиката на функцията f в точката M от тази графика.*

От това определение следва, че за да съществува допирателна към графиката на функцията f в точката M, е достатъчно да съществува границата $\lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\varphi_0$, при това тази граница φ_0 е равна на ъгъла, който допирателната сключва с оста Ox.

Ще докажем следното твърдение:

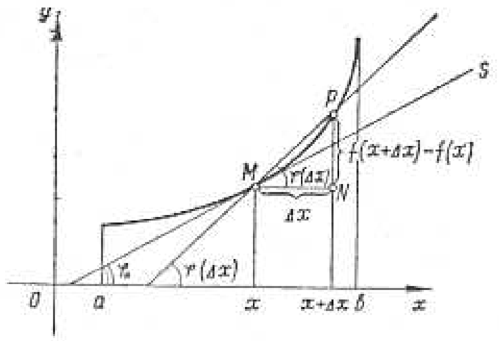
Ако функцията f има в дадена точка x производна, то съществува допирателна към графиката на функцията f в точката $M(x, f(x))$ и ъгловият коефициент на тази допирателна (т. е. тангенсът на ъгъла, който тя сключва с оста Ox) е равен на производната $f'(x)$.

Спускаме от точките M и P перпендикуляри към абсцисната ос (вж. фиг. 5.1). Прекарваме права през точката M, успоредна на абсцисната ос, и означаваме с N точката на пресичане на тази права с перпендикуляра, спуснат от P към абсцисната ос. От триъгълника MNP имаме

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

така че

(5.6) $$\varphi(\Delta x)=\operatorname{arc\,tg}(\Delta y/\Delta x).$$



Фиг. 5.1

Ще се убедим, че съществува граница на дясната (а следователно и на лявата) страна на (5.6) при $\Delta x \to 0$. Действително от съществуването на производната $f'(x)$ следва съществуването на границата $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta f(x)/\Delta x) = f'(x)$. Оттук и от непрекъснатостта на функцията $\operatorname{arc tg} u$ за всички u следва, че съществува границата на дясната страна на (5.6) и тя е равна на $\operatorname{arc tg} f'(x)$.

И така доказахме, че съществува границата

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \operatorname{arc tg} f'(x).$$

Но това означава, че съществува гранично положение на секущите, т. е. съществува допирателната към графиката на функцията в точката $M(x, f(x))$ и ъгълът φ_0 между тази допирателна и оста Ox е равен на $\varphi_0 = \operatorname{arc tg} f'(x)$. Следователно ъгловият коефициент на тази допирателна $\operatorname{tg} \varphi_0$ е равен на $f'(x)$. С това твърдението е доказано.

5.2. Понятие за диференцируемост на функция

5.2.1. Определение за диференцируемост на функция. Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b), x е произволно число от този интервал, Δx е такова нарастване на аргумента, че $x + \Delta x$ принадлежи също на интервала (a, b) и $f(x+\Delta x) - f(x)$ е нарастването на функцията в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx.

Определение. *Функцията f се нарича* ***диференцируема*** *в точката x, ако нарастването $\Delta f(x)$ на тази функция в точката x, отговарящо на нарастването на аргумента Δx, може да се представи във вида*

$$\Delta f(x) = A \,.\, \Delta x + \alpha(\Delta x) \,.\, \Delta x, \tag{5.7}$$

където A е число, независещо от Δx, а $\alpha(\Delta x)$ е функция на аргумента Δx, безкрайно малка в точката $\Delta x = 0$.

В точката $\Delta x = 0$ функцията $\alpha(\Delta x)$ е неопределена и можем да ѝ припишем в тази точка произволна стойност. За в бъдеще ще бъде удобно да считаме $\alpha(0) = 0$. Така функцията α ще бъде непрекъсната в точката $\Delta x = 0$ и равенството (5.7) може да се разпространи и за стойността $\Delta x = 0$.

Забележка. Второто събираемо в дясната страна на (5.7) $\alpha(\Delta x) \,.\, \Delta x$ може да се запише във вида $o(\Delta x)$*. Наистина, тъй като и двете функции $\alpha = \alpha(\Delta x)$ и Δx са безкрайно малки в точката Δx, то и произведението им е безкрайно малка функция в точката $\Delta x = 0$ от по-висок ред, отколкото Δx (вж. 3.4.5). Тогава (5.7) може да се запише във вида

$$\Delta f(x) = A \Delta x + o(\Delta x).$$

Ще докажем следното твърдение:

Теорема 5.1. *За да бъде функцията f диференцируема в точката x, е необходимо и достатъчно тя да има в тази точка крайна производна $f'(x)$.*

Доказателство. *1. Необходимост.* Нека функцията f е диференцируема в точката x, т. е. нарастването ѝ $\Delta f(x)$ в тази точка, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, е представимо във вида (5.7). Като разделим (5.7) на Δx (приемаме, че $\Delta x \neq 0$), получаваме

$$\Delta f(x)/\Delta x = A + \alpha(\Delta x). \tag{5.8}$$

Дясната (следователно и лявата) страна на (5.8) има граница, равна на A, в точката $\Delta x = 0$. Остава да отбележим, че границата при $\Delta x \to 0$ на лявата страна на (5.8) (в случай че тя съществува) по определение е равна на производната $f'(x)$.

И така доказахме, че ако за функцията f е в сила представянето (5.7), то тази функция има в точката x производна $f'(x)$ и $f'(x) = A$.

2. Достатъчност. Нека съществува крайна производна $f'(x)$, т. е. съществува крайната граница

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x). \tag{5.9}$$

Да означим със символа $\alpha(\Delta x)$ разликата $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x)$, т. е. да положим

* Ще напомним, че символът $o(\Delta x)$ означава безкрайно малка функция от по-висок ред от Δx в точката $\Delta x = 0$.

$$\alpha(\Delta x)=\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}-f'(x). \qquad (5.10)$$

От съществуването на границата (5.9) следва, че функцията $\alpha(\Delta x)$, определена от (5.10), има граница при $\Delta x \to 0$, равна на нула.

Като умножим съотношението (5.10) с Δx, ще получим представянето

$$\Delta f(x)=f'(x)\,.\,\Delta x+\alpha(\Delta x)\,.\,\Delta x,$$

което съвпада с представянето (5.7) при $A=f'(x)$. □

С това е доказано, че от съществуването на крайна производна $f'(x)$ следва диференцируемостта на функцията f в точката x, при това в условието за диференцируемост (5.7) числото A съвпада с $f'(x)$.

Доказаната теорема позволява да отъждествяваме диференцируемост на функция в дадена точка със съществуване на производна на тази функция в тази точка.

Операцията намиране на производна ще наричаме *диференциране*.

5.2.2. Диференцируемост и непрекъснатост. Лесно се доказва следното твърдение:

Теорема 5.2. *Ако функцията f е диференцируема в дадена точка x, тя е непрекъсната в тази точка.*

Доказателство. Тъй като функцията f е диференцируема в точката x, то за нарастването ѝ $\Delta f(x)$ в тази точка е валидно представянето (5.7), от което следва, че $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0$, а това означава, че функцията f е непрекъсната в точката x (според диференчната форма на условието за непрекъснатост (5.4). □

Ще отбележим, че обратното твърдение на теорема 5.2 не е вярно, т. е. от непрекъснатостта на функцията f в дадена точка x не следва диференцируемостта ѝ в тази точка.

За пример може да служи функцията $y=|x|$, която е очевидно непрекъсната в точката $x=0$, но няма в тази точка производна.

Ще отбележим, че съществуват функции, непрекъснати във всяка точка на даден интервал, но нямащи производна нито в една точка на този интервал. (Първият пример за такава функция е бил построен от Вайерщрас. Един пример на такава функция е даден в допълнението към глава 10.)

5.2.3. Понятие за диференциал на функция. Разглеждаме функцията f, диференцируема в дадена точка x. Нарастването $\Delta f(x)$ на такава функция в точката x може да се представи във вида (5.7).

Ще отбележим, че нарастването (5.7) е сума от две събираеми,

първото от които $A\,.\,\Delta x$ е линейно относно Δx, а второто $\alpha(\Delta x).\Delta x$ в точката $\Delta x=0$ е безкрайно малка функция от по-висок ред, отколкото Δx.

Ако числото A, равно съгласно теорема 5.1 на производната $f'(x)$, е различно от нула, то първото събираемо $A\,\Delta x=f'(x)\,\Delta x$ представлява ***главната част*** на нарастването $\Delta f(x)$ на диференцируемата функция f. Тази главна част на нарастването е линейна хомогенна функция на аргумента* Δx и се нарича ***диференциал*** на функцията f.

В случай че $A=f'(x)=0$, диференциалът на функцията се приема равен на нула по определение.

И така диференциалът на функцията f в дадена точка x, отговарящ на нарастване на аргумента Δx, се означава със символа df и

$$df=f'(x)\,\Delta x. \qquad (5.11)$$

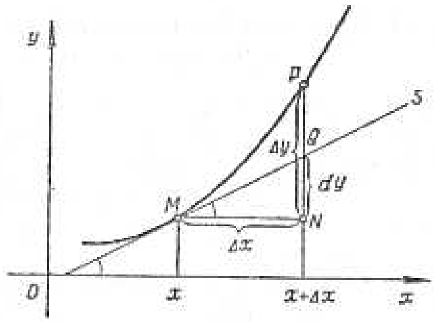
Когато $f'(x)\neq 0$, това число представлява главната част на нарастването на функцията f, която е линейна и хомогенна относно нарастването на аргумента Δx.

Веднага ще отбележим, че диференциалът df и нарастването Δf на функцията f в дадена точка, отговарящи на едно и също нарастване на аргумента Δx, изобщо не са равни помежду си. Това лесно се вижда от графиката на f (вж. фиг. 5.2). Нека M и P са точки от графиката на функцията f, отговарящи съответно на аргумента x и $x+\Delta x$, MS е допирателната към графиката в точката M, $MN \parallel Ox$, $NP \parallel Oy$, Q е пресечната точка на допирателната MS с правата PN. Тогава нарастването Δf на функцията f в точката x, отговарящо на нарастване на аргумента Δx, е очевидно равно на дължината на отсечката NP, а диференциалът df на функцията в точката x, отговарящ на същото нарастване на аргумента Δx, е равен на дължината на отсечката NQ. (Това непосредствено следва от формула (5.11) и от факта, че в правоъгълния триъгълник MQN отсечката MN е равна на Δx, а тангенсът на ъгъла QMN е равен на $f'(x)$.) Ясно е, че дължините на отсечките NP и NQ в общия случай са различни.

Много удобно е да се въведе и понятието ***диференциал на аргумента*** x, но трябва да се различават двата случая: 1) когато аргументът x е независима променлива, и 2) когато аргументът x е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя нова променлива t, която можем да считаме независима.

Ще се уговорим в случая, когато аргументът x е независима променлива, да отъждествяваме диференциала на този аргумент dx

* Ще напомним, че линейна функция на аргумента t се нарича функция от вида $y=At+B$, където A и B са константи. В случай че $B=0$, линейната функция се нарича хомогенна.



Фиг. 5.2

с нарастването* му Δx, т. е. ще считаме, че $dx = \Delta x$. Като следствие на тази уговорка равенство (5.11) приема вида

$$df = f'(x)\,.\,dx. \tag{5.12}$$

По такъв начин в случая, когато аргументът x е независима променлива, за диференциала на функцията f е валидно представянето (5.12).

По-нататък в 5.3.3 ще докажем, че представянето (5.12) има универсален характер и е валидно и в случая, когато аргументът x не е независима променлива, а е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t. (В този случай във формулата (5.12) dx не трябва да се смята равно на Δx, тъй като от казаното по-горе имаме $dx=\varphi'(t)\,dt$.)

5.3. Диференциране на сложна функция и обратна функция

5.3.1. Диференциране на сложна функция. Ще установим правило за намиране производната на сложна функция $y=f(\varphi(t))$ в точката t при условие, че са известни производните на съставящите я функции φ и f съответно в точките t и $x=\varphi(t)$.

Теорема 5.3. *Нека функцията φ е диференцируема в точката t, а функцията f е диференцируема в съответната точка $x=\varphi(t)$. Тогава сложната функция $f(\varphi(t))$ е диференцируема в точката t и производната ѝ в тази точка е*

$$\{f(\varphi(t))\}'=f'(x)\,.\,\varphi'(t)=f'(\varphi(t))\,\varphi'(t). \tag{5.13}$$

* Тази уговорка се съгласува с разглеждането на независимата променлива x като функция от вида $f(x)=x$, за която $f'(x)\,.\,\Delta x=\Delta x$, т. е. $dx=\Delta x$.

Доказателство. Да дадем на аргумента на функцията φ в дадена точка t произволно, различно от нула нарастване Δt. На това нарастване отговаря нарастването $\Delta x = \varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)$ на функцията $x=\varphi(t)$, при това нарастването Δx може да бъде и нула.

На нарастването Δx отговаря нарастване $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ на функцията f в съответната точка $x=\varphi(t)$. Тъй като функцията f по условие е диференцируема в точката $x=\varphi(t)$, то нарастването ѝ Δf в тази точка може да се представи във вида

$$\Delta f=f'(x)\,.\,\Delta x+\alpha(\Delta x)\,.\,\Delta x, \tag{5.14}$$

където $\alpha(\Delta x)$ клони към нула при $\Delta x \to 0$.

Ще подчертаем, че както беше казано в 5.2.1, представянето (5.14) е в сила и при $\Delta x=0$.

Разделяме (5.14) на $\Delta t\neq 0$ и получаваме

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\alpha(\Delta x)\,.\,\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{5.15}$$

Ще докажем, че дясната (следователно и лявата) страна на (5.15) има граница при $\Delta t\to 0$, равна на дясната страна на (5.13). С това ще бъдат доказани диференцируемостта на сложната функция и формула (5.13) за нейната производна.

От диференцируемостта на функцията $x=\varphi(t)$ в точката t следва, че частното $\Delta x/\Delta t$ има граница при $\Delta t\to 0$, равна на $\varphi'(t)$. Остава да се докаже, че функцията $\alpha(\Delta x)$ при $\Delta t\to 0$ клони към нула, което непосредствено следва от това, че $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и че $\Delta x\to 0$ при $\Delta t\to 0$, въз основа на диференчната форма на условията за непрекъснатост на диференцируемата в точката t функция $x=\varphi(t)$. И така цялата дясна страна на (5.15) има граница при $\Delta t\to 0$ и тази граница е равна на дясната страна на (5.13). Теоремата е доказана.

Забележка 1. Теорема 5.3 и съдържащото се в нея правило за пресмятане на производна на сложна функция могат да се пренесат последователно за сложни функции, които са суперпозиции на три и повече функции. Така за сложна функция, която е суперпозиция на три функции $F(f(\varphi(t)))$, правилото за диференциране има вида

$$\{F(f(\varphi(t)))\}'=F'(f(\varphi(t)))\,.\,f'(\varphi(t))\,.\,\varphi'(t), \tag{5.16}$$

при което формулата (5.16) е валидна, ако функцията φ е диференцируема в точката t, функцията f е диференцируема в съответната точка $\varphi(t)$, а функцията $F(u)$ е диференцируема в съответната точка $f(\varphi(t))$.

5.3.2. Диференциране на обратна функция

Теорема 5.4. *Нека функцията f расте (намалява) и е непрекъсната в някоя околност на точката x. Нека освен това тази функция е диференцируема в точката x и производната ѝ $f'(x)$ е различна от нула. Тогава в някоя околност на съответната точка $y=f(x)$ е дефинирана функцията $x=f^{-1}(y)$, обратна на функцията f, която е диференцируема в точката $y=f(x)$ и за производната ѝ в точката y е валидна формулата*

$$\{f^{-1}(y)\}'=1/f'(x). \tag{5.17}$$

Доказателство. Понеже функцията f е строго монотонна и непрекъсната в някоя околност на точката x, то според теорема 4.5 (вж. 4.2) обратната ѝ функция f^{-1} е дефинирана, строго монотонна и непрекъсната в някоя околност на съответната точка $y=f(x)$.

Даваме на аргумента на обратната функция в точката y произволно, достатъчно малко и различно от нула нарастване Δy. На това нарастване Δy отговаря нарастване на обратната функция $\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)$ в съответната точка $y=f(x)$, което поради строгата монотонност на функцията е различно от нула.

Това ни дава право да напишем следното тъждество*:

$$\Delta x/\Delta y=1/(\Delta y/\Delta x). \tag{5.18}$$

Нека сега в тъждеството (5.18) нарастването Δy клони към нула. Тогава съгласно диференчната форма на условието за непрекъснатост на обратната функция $x=f^{-1}(y)$ в съответната точка $y=f(x)$ нарастването на тази функция Δx ще клони също към нула. Ще се убедим, че в този случай съществува граница на дясната страна на (5.18), равна на дясната страна на (5.17). С това ще бъде доказано, че същата граница има и лявата страна на (5.18), т. е. че обратната функция има производна в съответната точка $y=f(x)$ и за тази производна е вярно равенството (5.17).

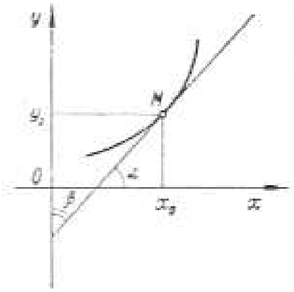
И така, за да завършим доказателството на теоремата, остава да се убедим, че дясната страна на (5.18) има граница при $\Delta x\to 0$, равна на $1/f'(x)$, където x е дадената точка.

Тъй като $x=f^{-1}(y)$, $\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)$, то $x+\Delta x=f^{-1}(y+\Delta y)$, т. е. $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ и $\Delta y=f(x+\Delta x)-y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Оттук следва, че дясната страна на (5.18) може да бъде записана във вида

$$1/(\Delta y/\Delta x)=1/\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right).$$

* Това тъждество може да се напише за всеки две числа Δy и Δx, различни от нула.



Фиг. 5.3

От последното равенство съгласно определението за производна $f'(x)$ и предположението $f'(x)\neq 0$ веднага следва, че границата на дясната страна на (5.18) съществува при $\Delta x\to 0$ и е равна на $1/f'(x)$. Теоремата е доказана.

Примери за приложение на доказаната теорема ще бъдат дадени в следващия параграф.

Доказаната теорема има просто геометрично тълкуване. Нека M е точка от графиката на функцията $y=f(x)$, отговаряща на дадена стойност на аргумента x (вж. фиг. 5.3). Тогава очевидно производната $f'(x)$ е равна на тангенса на ъгъла α, който допирателната в точката M сключва с оста Ox, а производната на обратната функция $\{f^{-1}(y)\}'$ в съответната точка $y=f(x)$ е равна на тангенса на ъгъла β, който тази допирателна сключва с оста Oy. Тъй като сумата на ъглите α и β е равна на $\pi/2$, то формулата (5.17) изразява очевидния факт: $\operatorname{tg}\beta=1/\operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha+\beta=\pi/2$.

5.3.3. Инвариантност на формата на първия диференциал. В 5.2.3 се убедихме, че когато аргументът x на диференцируемата функция f е независима променлива, за диференциала df на тази функция имаме представянето (5.12)

$$df=f'(x).dx.$$

Сега ще докажем, че представянето (5.12) е универсално и е в сила и в случая, когато аргументът x е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t. Това свойство на диференциала на функциите е прието да се нарича ***инвариантност на неговата форма.***

И така нека аргументът x на диференцируемата функция f е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t. В този случай f може да се разглежда като сложна функция от вида $f(\varphi(t))$ на аргумента t. Понеже този аргумент t

е независима променлива, то за сложната функция $f(\varphi(t))$ и за функцията $x=\varphi(t)$ диференциалите са представими във формата (5.12), т. е. във вида

$$df=\{f(\varphi(t))\}'\,dt,\quad dx=\varphi'(t)\,dt. \tag{5.19}$$

По правилото за диференциране на сложна функция

$$\{f(\varphi(t))\}'=f'(x)\,.\,\varphi'(t). \tag{5.13}$$

Замествайки (5.13) в първата от формулите (5.19), получаваме

$$df=f'(x)\,\varphi'(t)\,dt. \tag{5.20}$$

Като съпоставим полученото равенство (5.20) с второто от равенствата от (5.19), получаваме окончателно за df израза

$$df=f'(x)\,dx,$$

който съвпада с представянето (5.12). □

Забележка. Може да се даде и друга еквивалентна формулировка на свойството инвариантност на формата на първия диференциал, непосредствено следваща от универсалността на представянето (5.12): *Производната на диференцируемата функция f е равна на отношението на диференциала на тази функция df и диференциала на аргумента ѝ dx, т. е. се определя от равенството*

$$f'(x)=df/dx, \tag{5.21}$$

както в случая, когато аргументът x е независима променлива, така и в случая, когато самият аргумент x е диференцируема функция от вида $x=\varphi(t)$ на някоя независима променлива t.

Универсалността на представянето на производната (5.21) позволява да се използва отношението df/dx за означаване на производната на функцията f относно аргумента x.

5.3.4. Приложение на диференциала за намиране на приближени формули. Нека за простота аргументът x на функцията f е независима променлива. В 5.2.3 показахме, че диференциалът df на функцията f в общия случай не е равен на нарастването Δf на тази функция. Обаче с точност до безкрайно малка функция от по-висок ред в сравнение с Δx е изпълнено следното приближено равенство:

$$\Delta f\approx df. \tag{5.22}$$

Частното $(\Delta f-df)/\Delta x$ е естествено да се нарича относителна грешка на равенството (5.22). Тъй като $\Delta f-df=o(\Delta x)$, то относителната грешка на неравенството (5.22) става произволно малка при намаляване на $|\Delta x|$.

Съотношението (5.22) позволява да заменяме с известно приближение нарастването Δf на диференцируема функция f с диференциала df на тази функция. Целесъобразността на тази замяна се оправдава с това, че диференциалът df е линейна функция на Δx, докато нарастването Δf в общия случай е по-сложна функция на аргумента Δx.

Като вземем пред вид, че $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$, $df=f'(x)\,dx$, можем да запишем приближеното равенство (5.22) във вида $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x$ или във вида

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\,.\,\Delta x. \tag{5.23}$$

Приближеното равенство (5.23), също както и (5.22), е валидно за всяка диференцируема функция f в дадена точка x с точност до величината $o(\Delta x)$, която е безкрайно малка от по-висок ред, отколкото Δx.

Това приближено равенство позволява с грешка $o(\Delta x)$ да се замени функцията f в малка околност на точката x (т. е. за малки Δx) с линейната функция на аргумента Δx от дясната страна на (5.23). Приближената формула (5.23) се използва много често в практиката.

5.4. Диференциране на сума, разлика, произведение и частно на функции

Теорема 5.5. *Ако всяка от функциите u и v е диференцируема в дадена точка x, то сумата, разликата, произведението и частното на тези функции (частното при условие, че $v(x)\neq 0$) са също диференцируеми в тази точка и са в сила формулите*

$$\begin{gathered}[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x),\\ [u(x)\,.\,v(x)]'=u'(x)\,.\,v(x)+u(x)\,.\,v'(x),\\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)\,v(x)-u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}.\end{gathered} \tag{5.24}$$

Доказателство. Ще разгледаме поотделно случаите на сума (разлика), произведение и частно.

1°. Нека $y(x)=u(x)\pm v(x)$. Означаваме с Δu, Δv и Δy нарастванията на функциите u, v и y в точката x, отговарящи на нарастване на аргумента Δx. Тогава очевидно

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]$$
$$-[u(x)\pm v(x)]=[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]=\Delta u\pm\Delta v.$$

Следователно

$$\Delta y/\Delta x=\Delta u/\Delta x\pm\Delta v/\Delta x. \tag{5.25}$$

Нека сега $\Delta x \to 0$. От съществуването на производните на функциите u и v в точката x следва, че съществува граница на дясната страна на (5.25), която е равна на $u'(x) \pm v'(x)$. Следователно съществува граница (при $\Delta x \to 0$) и на лявата страна на (5.25). Според определението за производна тази граница е равна на $y'(x)$ и така получаваме $y'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

2°. Нека $y(x) = u(x) . v(x)$. Запазвайки за $\Delta u, \Delta v$ и Δy същия смисъл, ще имаме

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x+\Delta x) - y(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)\\ &= (u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x+\Delta x)v(x)) + (u(x+\Delta x)v(x)\\ &\quad - u(x)v(x))\end{aligned}$$

(прибавяме и изваждаме събираемото $u(x+\Delta x)v(x)$).

По-нататък можем да запишем

$$\begin{aligned}\Delta y &= u(x+\Delta x)(v(x+\Delta x) - v(x)) + v(x)(u(x+\Delta x) - u(x))\\ &= u(x+\Delta x) . \Delta v + v(x)\Delta u,\end{aligned}$$

така че

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{5.26}$$

Нека сега $\Delta x \to 0$. Тогава от диференцируемостта на функциите u и v в точката x следва, че съществуват границите на отношенията $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ и са съответно равни на $u'(x)$ и $v'(x)$. По-нататък от диференцируемостта на функцията u в точката x и от теорема 5.2 следва непрекъснатостта на u в тази точка. Следователно съществува границата $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x)$ и тя е равна на $u(x)$.

Тогава съществува границата на дясната страна на (5.26) при $\Delta x \to 0$ и тя е равна на $u(x) . v'(x) + v(x) . u'(x)$.

Следователно съществува и граница (при $\Delta x \to 0$) на лявата страна на (5.26). Според определението на производна тази граница е равна на $y'(x)$ и получаваме търсената формула $y'(x) = u'(x) . v(x) + u(x) . v'(x)$.

3°. Нека накрая $y(x) = u(x)/v(x)$. Понеже $v(x) \neq 0$, съгласно теорема 4.11 за постоянството на знака на непрекъснатите функции $v(x+\Delta x) \neq 0$ за всички достатъчно малки Δx и можем да напишем, че

$$\begin{aligned}\Delta y &= y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}\\ &= \frac{u(x+\Delta x)v(x) - v(x+\Delta x)u(x)}{v(x) . v(x+\Delta x)}.\end{aligned}$$

Като прибавим и извадим в числителя събираемото $u(x) . v(x)$, ще получим

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{[u(x+\Delta x) . v(x) - u(x) . v(x)] - [v(x+\Delta x)u(x) - u(x)v(x)]}{v(x) . v(x+\Delta x)}\\ &= \frac{v(x)[u(x+\Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x+\Delta x) - v(x)]}{v(x) . v(x+\Delta x)} = \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{v(x) . v(x+\Delta x)},\end{aligned}$$

така че

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x) . v(x+\Delta x)}. \tag{5.27}$$

Нека сега $\Delta x \to 0$. От диференцируемостта (и следващата от нея непрекъснатост) на функциите u и v в точката x следва съществуването на границите:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v(x)}{\Delta x} = v'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} v(x+\Delta x) = v(x).$$

Тъй като $v(x) \neq 0$, границата на дясната страна на (5.27) при $\Delta x \to 0$ съществува и е равна на

$$\frac{v(x) . u'(x) - u(x) . v'(x)}{v^2(x)}.$$

Следователно границата (при $\Delta x \to 0$) и на лявата страна на (5.27) съществува. По определението за производна тази граница е равна на $y'(x)$, откъдето получаваме търсената формула

$$y'(x) = \frac{u'(x) . v(x) - u(x) . v'(x)}{v^2(x)}. \ \square$$

Следствие. *Ако за функциите u и v в дадена точка x са изпълнени същите предположения, както и в теорема 5.5, то в тази точка x са верни следните равенства за диференциалите:*

$$\begin{cases} d(u \pm v) = du \pm dv,\\ d(uv) = v\,du + u\,dv\\ d(u/v) = (v\,du - u\,dv)/v^2. \end{cases} \tag{5.28}$$

За доказателството на (5.28) е достатъчно да се умножат равенствата (5.24) с dx и да се използва универсалното представяне (5.12) на диференциала на произволна функция f.

5.5. Производни на основните елементарни функции

Вече знаем, че ***основни елементарни функции*** са: показателната функция $y = a^x$ и логаритмичната функция $y = \log_a x$, разглеждани за всяка фиксирана стойност на a, такава, че $0 < a \neq 1$;

степенната функция $y=x^{\alpha}$, където α е фиксирано реално число; четирите тригонометрични функции sin, cos, tg и ctg и четирите обратни тригонометрични функции arc sin, arc cos, arc tg и arc ctg.

В този параграф ще пресметнем и систематизираме в таблица производните на всички основни елементарни функции.

5.5.1. Производни на тригонометричните функции

1°. Производна на функцията $y=\sin x$. Тъй като за тази функция

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2),$$

то при всяко $\Delta x\neq 0$ диференчното частно ще има вида

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\cos(x+\Delta x/2)\,.\,\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\,.$$

По определението на производна

(5.29) $$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\cos(x+\Delta x/2)\,.\,\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\right\}.$$

Поради непрекъснатостта на функцията $y=\cos x$ във всяка точка x на безкрайната права имаме

(5.30) $$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x.$$

По-нататък, като използваме първата забележителна граница, с елементарната смяна на променливата $t=\Delta x/2$ получаваме

(5.31) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

От съществуването на границите (5.30), (5.31) и от теоремата за граница на произведение на две функции следват съществуването на граница на дясната страна на (5.29) и равенството

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\cos(x+\Delta x/2)\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\right\}=\cos x,$$

или

(5.32) $$(\sin x)'=\cos x$$

за всяка точка x от безкрайната права.

2°. Производна на функцията $y=\cos x$. Тъй като за всяка точка x от безкрайната права

$$\cos x=\sin(\pi/2-x),$$

то по правилото за диференциране на сложна функция и по формула (5.32) имаме

$$(\cos x)'=(\sin(\pi/2-x))'=\cos(\pi/2-x)\,.\,(\pi/2-x)'$$
$$=\cos(\pi/2-x)\,.\,(-1)=-\sin x,$$

или

(5.33) $$(\cos x)'=-\sin x.$$

3°. Производна на функцията $y=\operatorname{tg}x$. Тъй като $\operatorname{tg}x=\sin x/\cos x$, то по правилото за диференциране на частно и от (5.32) и (5.33) във всяка точка x, в която $\cos x\neq 0$, ще имаме

$$(\operatorname{tg}x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\,.\,\cos x-(\cos x)'\,.\,\sin x}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

И така

(3.34) $$(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$$

във всяка точка $x\neq\pi n+\pi/2$, където $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$

4°. Производна на функцията $y=\operatorname{ctg}x$. Понеже $\operatorname{ctg}x=\cos x/\sin x$, като използваме правилото за диференциране на частно и (5.32), (5.33), за всяка точка x, в която $\sin x\neq 0$, ще имаме

$$(\operatorname{ctg}x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\,.\,\sin x-(\sin x)'\,.\,\cos x}{\sin^2 x}$$
$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Получихме

(5.35) $$(\operatorname{ctg}x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-(1+\operatorname{ctg}^2 x)$$

във всяка точка $x\neq\pi n$, където $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots$

5.5.2. Производна на логаритмичната функция. Нека $y=\log_a x$, където $0<a\neq 1$ и $x>0$ е фиксирана точка. Тогава за всяко достатъчно малко $\Delta x\neq 0$ имаме

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{x}\,.\,\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}.$$

По определението на производна

(5.36) $$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}.$$

Като използваме втората забележителна граница и елементарната смяна на променливата $t=\Delta x/x$, имаме

(5.37) $$\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}=e.$$

От съществуването на границата (5.37) и от непрекъснатостта на функцията $y=\log_a x$ в точката x следва, че границата в дясната страна на (5.36) съществува и е равна на $\frac{1}{x}\log_a e$.

И така

(5.38) $$(\log_a x)'=x^{-1}\log_a e$$

за всяко $0<a\neq 1$ и $x>0$.

По-специално при $a=e$ имаме

$$(\ln x)'=1/x \text{ за всяко } x>0.$$

5.5.3. Производни на показателната и обратните тригонометрични функции. За намирането на производните на тези функции ще използваме теорема 5.4 за диференциране на обратна функция, доказана в 5.3.2.

1°. Производна на функцията $y=a^x$, $0<a\neq 1$. Тъй като функцията $y=a^x$, дефинирана върху цялата безкрайна права $-\infty<x<+\infty$, е обратна на функцията $x=\log_a y$, дефинирана от своя страна върху полуправата $0<y<+\infty$, и за функцията $x=\log_a y$ в околност на всяка точка от полуправата $0<y<+\infty$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4, то функцията $y=a^x$ е диференцируема във всяка точка $x=\log_a y$ и за производната ѝ е вярна формулата

$$(a^x)'=1/(\log_a y)'=1/(y^{-1}\log_a e)=y/\log_a e$$

(използвахме израза (5.38) за производна на логаритмичната функция).

От последното равенство и от равенствата $y=a^x$, $1/\log_a e=\ln a$ получаваме окончателно

(5.39) $$(a^x)'=a^x.\ln a$$

за всяка точка x от безкрайната права.

По-специално при $a=e$ имаме

$$(e^x)'=e^x.$$

2°. Производна на функцията $y=\arcsin x$. Функцията $y=\arcsin x$ е дефинирана в интервала $-1<x<1$ и е обратна на функцията $x=\sin y$, дефинирана в интервала $-\pi/2<y<\pi/2$. За функцията $x=\sin y$ в околност на всяка точка y от интервала $-\pi/2<y<\pi/2$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\arccos x$ е диференцируема във всяка точка $x=\sin y$ и за производната ѝ имаме формулата

(5.40) $$(\arcsin x)'=1/(\sin y)'=1/\cos y=1/\sqrt{1-\sin^2 y}.$$

Използвахме равенството (5.32) със знак „+" пред корена, понеже $\cos y$ е положителен в интервала $-\pi/2<y<\pi/2$.

Като вземем пред вид, че $\sin y=x$, от (5.40) получаваме окончателно

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(за всички x от интервала $-1<x<1$).

3°. Производна на функцията $y=\arccos x$. Функцията $y=\arccos x$ е дефинирана в интервала $-1<x<1$ и е обратна на функцията $x=\cos y$, дефинирана в интервала $0<y<\pi$. За функцията $x=\cos y$ в околност на всяка точка y от интервала $0<y<\pi$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\arccos x$ е диференцируема във всяка точка $x=\cos y$ и производната ѝ е

5.41) $$(\arccos x)'=1/(\cos x)'=1/(-\sin x)=-1/\sqrt{1-\cos^2 y}.$$

Тук използвахме равенството (5.33) със знак „+" пред корена понеже $\sin y$ е положителен в интервала $0<y<\pi$.

От това, че $\cos y=x$, и от (5.41) получаваме

$$(\arccos x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

за всички x от интервала $-1<x<1$.

4°. Производна на функцията $y=\operatorname{arctg} x$. Функцията $y=\operatorname{arctg} x$ е дефинирана върху безкрайната права $-\infty<x<\infty$ и е обратна на функцията $x=\operatorname{tg} y$, дефинирана в интервала $-\pi/2<y<\pi/2$. За функцията $x=\operatorname{tg} y$ в околност на всяка точка y от интервала $-\pi/2<y<\pi/2$ са изпълнени условията на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\operatorname{arctg} x$ е диференцируема във всяка точка $x=\operatorname{tg} y$ и за производната ѝ имаме формулата

$$(\operatorname{arctg} x)'=1/(\operatorname{tg} y)'=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

(използвахме съотношението (5.34)).

И така

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

за всяка точка x от безкрайната права.

5^0. Производна на функцията $y=\operatorname{arc\,ctg} x$. Функцията $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ е дефинирана върху безкрайната права $-\infty<x<+\infty$ и е обратна на функцията $x=\operatorname{ctg} y$, дефинирана в интервала $0<y<\pi$. За функцията $x=\operatorname{ctg} y$ в околност на всяка точка y от интервала $0<y<\pi$ са изпълнени всички условия на теорема 5.4. Следователно функцията $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ е диференцируема във всяка точка $x=\operatorname{tg} y$ и за производната ѝ в тази точка имаме

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)'=\frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'}=\frac{1}{-(1+\operatorname{ctg}^2 x)}=\frac{-1}{1+x^2}$$

(използвахме (5.35)).

Така

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)'=\frac{-1}{1+x^2}$$

за всяка точка x от безкрайната права.

5.5.4. Производна на степенната функция. Нека $y=x^\alpha$, където α е произволно реално число и x е произволна точка от полуправата $0<x<+\infty$. В глава 4 вече разгледахме степенната функция $y=x^\alpha$ като суперпозиция на логаритмичната и показателната функция:

$$y=x^\alpha=(a^{\log_a x})^\alpha=a^{\alpha\log_a x}$$

(където a е произволно фиксирано число, по-голямо от единица).

По правилото за диференциране на сложната функция $y=a^u$, където $u=\alpha\log_a x$, ще получим

$$y'=(a^u)'\,.\,(\alpha\log_a x)'=a^u\ln a\,.\,\alpha\, x^{-1}\log_a e$$
$$=a^{\alpha\log_a x}\,.\,\alpha\,.\,x^{-1}=x^\alpha\,.\,\alpha\,.\,x^{-1}=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}\,.$$

И така окончателно имаме

$$(x^\alpha)'=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}$$

за всяко $x>0$.

5.5.5. Таблица за производните на основните елементарни функции. Ще подредим в таблица производните на всички основни елементарни функции:

1^0. $(x^\alpha)'=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}\quad(x>0)$.

Специално $(1/x)'=-1/x^2$, $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

2^0. $(\log_a x)'=x^{-1}\log_a e\ (0<a\neq1,\ x>0)$.

Специално $(\ln x)'=1/x$.

3^0. $(a^x)'=a^x\ln a\qquad(0<a\neq1)$.

Специално $(e^x)'=e^x$.

4^0. $(\sin x)'=\cos x$.

5^0. $(\cos x)'=-\sin x$.

6^0. $(\operatorname{tg} x)'=\cos^{-2}x=1+\operatorname{tg}^2 x\ (x\neq\pi n+\pi/2;\ n=0,\ \pm1,\cdots)$.

7^0. $(\operatorname{ctg} x)'=-\sin^{-2}x=-(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,(x\neq\pi n;\ n=0,+1,\ \pm2,\ldots)$.

8^0. $(\arcsin x)'=(1-x^2)^{-1/2}\qquad(-1<x<1)$.

9^0. $(\arccos x)'=-(1-x^2)^{-1/2}\qquad(-1<x<1)$.

10^0. $(\operatorname{arc\,tg} x)'=1/(1+x^2)$.

11^0. $(\operatorname{arc\,ctg} x)'=-1/(1+x^2)$.

В глава 4 разгледахме хиперболичните функции $y=\operatorname{sh} x$, $y=\operatorname{ch} x$, $y=\operatorname{th} x$ и $y=\operatorname{cth} x$, които са прости комбинации на показателната функция. От представянето на тези функции чрез показателната функция елементарно се получават следните изрази за производните им:

12^0. $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$.

13^0. $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$.

14^0. $(\operatorname{th} x)'=\operatorname{ch}^{-2} x$.

15^0. $(\operatorname{cth} x)'=-\operatorname{sh}^{-2} x\qquad(x\neq0)$.

Таблицата на производните заедно с правилото за диференциране на сложна функция и правилата за диференциране на сума, разлика, произведение и частно са изчислителният апарат на тази част от математическия анализ, която се нарича ***диференциално смятане.***

В глави 1 и 4 вече въведохме понятието елементарна функция като функция, изразяваща се чрез основните елементарни функции посредством четирите аритметични действия и краен брой суперпозиции.

От дадената таблица на производните и правилата за диференциране на сума, разлика, произведение, частно и сложна функция следва важният извод, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна функция, т. е. операцията диференциране не извежда вън от класа на елементарните функции.

5.5.6. Таблица за диференциалите на основните елементарни функции. В 5.3.3 установихме, че диференциалът df на функцията f е винаги равен на производната на тази функция $f'(x)$, умножена с диференциала на аргумента dx. Затова от таблицата на производните непосредствено се получава таблицата на диференциалите на основните елементарни функции:

1^0. $d(x^\alpha)=\alpha\,.\,x^{\alpha-1}\,.\,dx\quad(x>0)$.

Специално $d(1/x)=-x^{-2}\,.\,dx$, $d(\sqrt{x})=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.

2°. $d(\log_a x)=x^{-1}\log_a e\,.\,dx$ $(0<a\neq 1,\ x>0)$.

Специално $d(\ln x)=\dfrac{dx}{x}$.

3°. $d(a^x)=a^x\ln a\,.\,dx$ $(0<a\neq 1)$.

Специално $d(e^x)=e^x\,.\,dx$.

4°. $d(\sin x)=\cos x\,.\,dx$.

5°. $d(\cos x)=-\sin x\,.\,dx$.

6°. $d(\operatorname{tg} x)=\cos^{-2}x\,.\,dx=(1+\operatorname{tg}^2 x)\,.\,dx$ $(x\neq\pi n+\pi/2;\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots)$.

7°. $d(\operatorname{ctg} x)=-\sin^{-2}x\,.\,dx=-(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,.\,dx$ $(x\neq\pi n;\ n=0,\ \pm 1,\cdots)$.

8°. $d(\arcsin x)=(1-x^2)^{-1/2}\,.\,dx$ $(-1<x<1)$.

9°. $d(\arccos x)=-(1-x^2)^{-1/2}\,.\,dx$ $(-1<x<1)$.

10°. $d(\operatorname{arc\,tg} x)=\dfrac{dx}{1+x^2}$.

11°. $d(\operatorname{arc\,ctg} x)=-\dfrac{dx}{1+x^2}$.

5.5.7. Логаритмична производна. Производна на степенно-показателната функция. Нека функцията f е положителна и диференцируема в дадена точка x. Тогава и сложната функция на аргумента x от вида $w=\ln f$ е също диференцируема в точката x съгласно теорема 5.3 и за производната на тази сложна функция относно аргумента x имаме

$$(\ln f(x))'=f'(x)/f(x). \tag{5.42}$$

Величината (5.42) е прието да се нарича ***логаритмична производна*** на функцията f в точката x.

Логаритмичната производна може да се използва при пресмятането на някои функции. За пример ще пресметнем производната на функцията $y=u(x)^{v(x)}$, където u и v са две функции, диференцируеми в точката x, като $u(x)$ е строго положителна в тази точка.

При тези ограничения функцията $w=\ln y=v(x).\ln u(x)$ ще бъде диференцируема в точката x. Наистина според теорема 5.3 функцията $\ln u(x)$ е диференцируема в точката x. Следователно въз основа на теоремата за диференцируемост на произведение на две диференцируеми функции функцията $w=\ln y=v(x)\ln u(x)$ е

диференцируема в точката x и по втората формула на (5.24) получаваме

$$(\ln y)'=v'(x)\,.\,\ln u(x)+v(x)\,(\ln u(x))' \tag{5.43}$$
$$=v'(x)\,.\,\ln u(x)+v(x)\,.\,u'(x)/u(x).$$

От (5.42) и (5.43) имаме

$$y'/y=v'(x)\,.\,\ln u(x)+v(x)\,.\,u'(x)/u(x).$$

Отчитайки, че $y=u(x)^{v(x)}$, получаваме окончателно

$$(u(x)^{v(x)})'=u(x)^{v(x)}\,(v'(x)\ln u(x)+v(x)u'(x)/u(x)). \tag{5.44}$$

Формула (5.44) е вярна при предположение, че u и v са диференцируеми в точката x и $u(x)>0$ в тази точка.

5.6. Производни и диференциали от по-висок ред

5.6.1. Понятие за производна от n-ти ред. Производната f' на функцията f, дефинирана и диференцируема в интервала $(a,\ b)$, е също функция, дефинирана в интервала $(a,\ b)$. Възможно е тази функция да бъде диференцируема в някоя точка x на интервала $(a,\ b)$, т. е. да има в тази точка производна. Тогава тази производна се нарича ***втора производна*** (или ***производна от 2-ри ред***) на функцията f в точката x и се означава със символа $f^{(2)}(x)$, или $f''(x)$.

След като е въведено понятието втора производна, последователно могат да се въведат понятията трета производна, четвърта производна и т. н. Ако предположим, че вече сме въвели понятието $(n-1)$-ва производна и че $(n-1)$-вата производна е диференцируема в някоя точка на интервала $(a,\ b)$, т. е. има в тази точка производна, то тази производна се нарича ***n-та производна*** (или ***производна от n-ти ред***) на функцията f в точката x и се означава със символа $f^{(n)}(x)$.

По този начин определяме понятието n-та производна индуктивно

$$f^{(n)}=(f^{(n-1)})'. \tag{5.45}$$

Функция, която има в дадено множество $\{x\}$ производна от n-ти ред и няма производна от по-висок ред, се нарича n пъти диференцируема в даденото множество.

Понятието производна от по-висок ред има голямо приложение. Тук ще се ограничим с това да покажем механичния смисъл на втората производна. Ако функцията f описва закона за движение на материална точка по оста Oy, то, както знаем от глава 1, първата производна $f'(x)$ изразява моментната скорост на движещата се точка в момента x. Тогава втората производна $f''(x)$ е равна на скоростта на изменение на скоростта, т. е. на ускорението на движещата се точка в момента x.

Методиката за пресмятане на производните от по-висок ред изисква само умение за пресмятане на производни от първи ред, тъй като последователното прилагане на формулите (5.45) представлява многократно пресмятане на първи производни. За пример ще пресметнем производните от n-ти ред на някои от основните елементарни функции.

5.6.2. n-ти производни на някои функции

1°. Ще пресметнем n-тата производна на степенната функция $y=x^\alpha$ ($x>0$, α — произволно реално число). Диференцирайки последователно, получаваме

$$y'=\alpha x^{\alpha-1},\ y^{(2)}=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},\ y^{(3)}=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3},\ \ldots,$$

откъдето лесно се вижда общият закон

$$(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Строгото доказателство на този закон става лесно с метода на индукцията.

В частния случай при $\alpha=m$, където m е естествено число, имаме

$$(x^m)^{(m)}=m!,$$
$$(x^m)^{(n)}=0 \qquad \text{при } n>m.$$

Следователно n-тата производна на полином от степен m при $n>m$ е равна на нула.

2°. Сега ще пресметнем n-тата производна на показателната функция $y=a^x$ ($0<a\neq1$). Диференцирайки последователно, ще получим

$$y'=a^x\ln a,\ y^{(2)}=a^x\ln^2 a,\ y^{(3)}=a^x\ln^3 a,\ \ldots$$

Общата формула се установява лесно посредством индукция и има вида $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$.
В частност

$$(e^x)^{(n)}=e^x.$$

3°. Ще сметнем сега n-тата производна на функцията $y=\sin x$. Първата производна на тази функция може да се запише във вида $y'=\cos x=\sin(x+\pi/2)$. По този начин диференцирането на функцията $y=\sin x$ прибавя към аргумента ѝ величината $\pi/2$. Оттук получаваме формулата:

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\pi/2).$$

4°. Съвсем аналогично установяваме формулата

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\pi/2).$$

5°. Следващата, n-тата производна, която ще пресметнем, е на функцията $y=\operatorname{arctg} x$. Ще докажем с помощта на метода на индукцията, че е в сила следната формула:

$$(\operatorname{arctg} x)^{(n)}=(n-1)!(1+x^2)^{-n/2}\sin[n(\pi/2+\operatorname{arctg} x)]. \tag{5.46}$$

Тъй като $y=\operatorname{arctg} x$, $x=\operatorname{tg} y$, $1/(1+x^2)=1/(1+\operatorname{tg}^2 y)=\cos^2 y$, можем да препишем формулата във вида

$$y^{(n)}=(n-1)!\cos^n y\,.\,\sin[n(\pi/2+y)]. \tag{5.46'}$$

Ще се убедим индуктивно във верността на формулата (5.46').

При $n=1$ $y'=(\operatorname{arctg} x)'=1/(1+x^2)=\cos^2 y$. Същия израз получаваме и при $n=1$ от (5.46') (достатъчно е да отчетем, че $\sin(\pi/2+y)=\cos y$).

Следователно при $n=1$ формула (5.46') е вярна.

Ще предположим сега, че формула (5.46') е вярна за някое n, и ще се убедим, че тя е вярна и за $n+1$.

Наистина, диференцирайки (5.46'), получаваме

$$y^{(n+1)}=(n-1)!\frac{d}{dx}\{\cos^n y\,.\,\sin[n(\pi/2+y)]\}$$

$$=(n-1)!\frac{d}{dy}\{\cos^n y\,.\,\sin[n(\pi/2+y)]\}\frac{dy}{dx}$$

$$=(n-1)!\left\{\frac{d}{dy}(\cos^n y)\,.\,\sin[n(\pi/2+y)]+\cos^n y\,.\,\frac{d}{dy}(\sin[n(\pi/2+y)])\right\}y'.$$

Като отчетем, че $y'=\cos^2 y$, $\dfrac{d}{dy}(\cos^n y)=n\cos^{n-1}y\,.\,(-\sin y)$,

$\dfrac{d}{dy}(\sin[n(\pi/2+y)])=n\cos[n(\pi/2+y)]$, ще получим

$$y^{(n+1)}=n!\cos^{n+1}y\,.\,\{-\sin y\,.\,\sin[n(\pi/2+y)]+\cos y\,.\,\cos[n(\pi/2+y)]\}$$

$$=n!\cos^{n+1}y\,.\,\cos[(n+1)y+n\pi/2]=n!\cos^{n+1}y\,.\,\sin[(n+1)(\pi/2+y)].$$

Получихме за $y^{(n+1)}$ формула от вида (5.46') при номер $n+1$. С това индукцията е завършена и формула (5.46') е доказана.

6°. Накрая ще пресметнем n-тата производна на дробно-линейна функция $y=(ax+b)/(cx+d)$, където a, b, c и d са произволни константи. Диференцираме последователно функцията и получаваме

$$y'=\frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2}=(ad-bc)\,.\,(cx+d)^{-2},$$

$$y^{(2)}=(ad-bc)(-2)\,.\,(cx+d)^{-3}\,.\,c,$$

$$y^{(3)}=(ad-bc)(-2)\,.\,(-3)\,.\,(cx+d)^{-4}\,.\,c^2,\ .\ .\ .$$

Лесно се вижда общият закон

$$y^{(n)}=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}n!\,(ad-bc)\,c^{n-1}(cx+d)^{-n-1},$$

който се доказва по метода на индукцията.

5.6.3. Формула на Лайбниц за n-тата производна на произведение от две функции. Докато установеното по-рано правило за пресмятане на първата производна на сума или разлика от две функции $(u\pm v)'=u'\pm v'$ се пренася лесно (например по метода на индукцията) и в случая на производна от n-ти ред $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$, то при пресмятането на n-тата производна на произведение на две функции нещата са по-сложни.

Съответното правило носи названието ***формула на Лайбниц*** и има следния вид

$$(5.47)\qquad (u\,.\,v)^{(n)}=u^{(n)}\,.\,v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}\,.\,v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}\,.\,v''+\ .\ .\ .\ +u\,.\,v^{(n)}.$$

Лесно се вижда законът, по който е построена дясната страна на формулата на Лайбниц (5.47): тя съвпада с формулата за развитие на бинома $(u+v)^n$, но вместо степените на u и v са взети производните от съответния ред. Това сходство става още по-пълно, ако вместо самите функции u и v напишем съответно $u^{(0)}$ и $v^{(0)}$ (т. е. ако разглеждаме функцията като производна от нулев ред).

Ще докажем формулата на Лайбниц по метода на индукцията. При $n=1$ тя има вида $(u\,.\,v)'=u'\,.\,v+u\,.\,v'$, който съвпада с правилото за диференциране на произведение на две функции. Затова достатъчно е да предположим верността на (5.47) за някое n и да докажем верността ѝ за $n+1$. И така нека за някой номер n формулата (5.47) да е вярна. Ще диференцираме тази формула и ще обединим събираемите в дясната страна по следния начин:

$$(5.48)\qquad (u\,.\,v)^{(n+1)}=u^{(n+1)}\,.\,v+\left[\binom{n}{0}u^{(n)}\,.\,v'+\binom{n}{1}u^{(n)}\,.\,v'\right]$$
$$+\left[\binom{n}{1}u^{(n-1)}\,.\,v^{(2)}+\binom{n}{2}u^{(n-1)}\,.\,v^{(2)}\right]$$
$$+\left[\binom{n}{2}u^{(n-2)}\,.\,v^{(3)}+\binom{n}{3}u^{(n-2)}\,.\,v^{(3)}\right]+\ .\ .\ .\ +u\,.\,v^{(n+1)}$$

(използвахме, че $1=\binom{n}{0}$).

Лесно се проверява, че за всеки номер k, който не надминава n, е в сила

$$(5.49)\qquad \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}.$$

За да се убедим във верността на формула (5.49), е достатъчно да видим, че

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+1)}{k!},\ \binom{n}{k-1}=\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+2)}{(k-1)!},$$

$$\binom{n+1}{k}=\frac{(n+1)n\ .\ .\ .\ (n-k+2)}{k!}.$$

От написаните съотношения следва, че

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+2)}{(k-1)!}$$
$$=\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+1)+n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+2)\,.\,k}{k!}$$
$$+\frac{n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+2)(n-k+1+k)}{k!}=\frac{(n+1)n(n-1)\ .\ .\ .\ (n-k+2)}{k!}$$
$$=\binom{n+1}{k}.$$

Като използваме формула (5.49), можем да препишем съотношението (5.48) във вида

$$(u\,.\,v)^{(n+1)}=u^{(n+1)}v+\binom{n+1}{1}u^{(n)}\,.\,v'+\binom{n+1}{2}u^{(n-1)}\,.\,v^{(2)}$$
$$+\binom{n+1}{3}u^{(n-2)}\,.\,v^{(3)}+\ .\ .\ .\ +u\,.\,v^{(n+1)}.$$

С това се убеждаваме във верността на формула (5.47) за $n+1$. □

Пример: Да пресметнем n-тата производна на функцията $y=x^2 . e^x$. Полагаме във формулата на Лайбниц (5.47) $u=e^x$, $v=x^2$ и отчитайки, че $u^{(k)}=e^x$ (за всяко k), $v'=2x$, $v^{(2)}=2$, $v^{(3)}=v^{(4)}=\dots=0$, ще получим

$$(x^2 . e^x)^{(n)}=e^x . x^2+\binom{n}{1}e^x . 2x+\binom{n}{2}e^x . 2$$

$$=(x^2+2nx+n(n-1))e^x.$$

Ще подчертаем, че формулата на Лайбниц е много удобна, когато едната функция-множител има само краен брой, различни от нула производни, а пресмятането на всички производни на другата функция-множител не представлява затруднение.

5.6.4. Диференциали от по-висок ред. По-рано за означаване на диференциала на аргумента и съответния диференциал на функцията използвахме символите dx и df. В тази точка ще се наложи да използваме и други символи за означаване на тези диференциали. По-специално ще означаваме диференциала на аргумента и съответствуващия му диференциал на функцията със символите δx и δf. В тези означения инвариантният по форма израз за първия диференциал на функцията f ще има вида $\delta f=f'(x) . \delta x$.

Ще разгледаме израза за първия диференциал на диференцируема в дадена точка x функция f:

(5.50) $$df=f'(x)\,dx.$$

Да предположим, че величината в дясната страна на (5.50) е функция на аргумента x, диференцируема в дадената точка x. За това е достатъчно да поискаме функцията f да бъде два пъти диференцируема в дадената точка x, а аргументът x или да бъде независима променлива, или два пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

При тези предположения можем да разглеждаме диференциала

$$\delta(df)=\delta(f'(x)\,dx)$$

на величината (5.50).

Определение 1. *Стойността $\delta(df)$ на диференциала на първия диференциал (5.50), взета при $\delta x=dx$, се нарича* ***втори диференциал*** *на функцията f (в дадената точка x) и се означава със символа $d^2 f$.*

И така по определение*

* Символът $\{\dots\}|_{\delta x=dx}$ означава, че в израза, заключен в големите скоби, трябва да се положи $\delta x=dx$.

$$d^2 f=\delta(df)|_{\delta x=dx}=\{\delta[f'(x)\,dx]\}|_{\delta x=dx}.$$

Диференциалът $d^n f$ от произволен ред n се определя по индукция.

Нека вече с определен диференциалът $d^{n-1} f$ от ред $n-1$ и нека функцията f е n пъти диференцируема в дадената точка x, а аргументът ѝ x е или независима променлива, или n пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

Определение 2. *Стойността $\delta(d^{n-1}f)$ на диференциала от $(n-1)$-вия диференциал $d^{n-1}f$, взет при $\delta x=dx$, се нарича* ***n-ти диференциал*** *на функцията f (в дадената точка x) и се означава със символа $d^n f$.*

И така по определение

$$d^n f=\delta(d^{n-1}f)_{\delta x=dx}.$$

При пресмятането на втория и следващите диференциали трябва съществено да се различават двата случая: 1) когато аргументът x е независима променлива; 2) когато аргументът x е съответствуващ брой пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

В първия случай, когато x е независима променлива, имаме право да считаме, че dx не зависи от x и е равно на едно и също нарастване на аргумента Δx (за всички точки x). При това ще получим $\delta(dx)=(dx)'\delta x=0$.

Последното равенство и второто съотношение в (5.28) ни дават право да напишем следните равенства:

(5.51)
$$\begin{aligned} d^2 f=\delta(df)|_{\delta x=dx}&=\{\delta[f'(x) . dx]\}|_{\delta x=dx}\\ &=\{\delta[f'(x)]\,dx+f'(x)\,\delta(dx)\}|_{\delta x=dx}\\ &=\{\delta[f'(x)]\,dx\}|_{\delta x=dx}=\{f^{(2)}(x) . \delta x . dx\}|_{\delta x=dx}\\ &=f^{(2)}(x)(dx)^2. \end{aligned}$$

И така в случая, когато аргументът x е независима променлива, за втория диференциал на функцията f в точката x имаме

(5.52) $$d^2 f=f^{(2)}(x)(dx)^2.$$

Съвсем аналогично (лесно се убеждаваме в това по индукция), когато аргументът x е независима променлива, за n-тия диференциал на n пъти диференцируема функция f имаме

$$d^n f=f^{(n)}(x) . (dx)^n.$$

Следователно в случая, когато аргументът x е независима променлива, производната от ред n на функцията f е равна на отношението на n-тия диференциал на тази функция $d^n f$ към n-тата степен на диференциала на аргумента dx.

Съвсем друг вид имат вторият и следващите диференциали в случая, когато аргументът x е съответно n пъти диференцируема фукция на някоя независима променлива t. Ще пресметнем втория диференциал при предположение, че функцията f е два пъти диференцируема в дадена точка x, а аргументът ѝ x е два пъти диференцируема функция на някоя независима променлива t.

Като повторим разсъжденията от (5.51), този път ще получим

$$d^2 f = \delta(dy)|_{\delta x = dx} = \{\delta[f'(x)\,.\,dx]\}|_{\delta x = dx}$$
$$= \{\delta[f'(x)]\,.\,dx + f'(x)\,.\,\delta(dx)\}|_{\delta x = dx}$$
$$= \{f^{(2)}(x)\,.\,\delta x\,.\,dx\}|_{\delta x = dx} + \{f'(x)\,\delta(dx)\}|_{\delta x = dx}\,.$$

Съгласно определението за втори диференциал на функцията x имаме

$$\delta(dx)|_{\delta x = dx} = d^2 x$$

и следователно

$$d^2 f = f^{(2)}(x)(dx)^2 + f'(x)\,.\,d^2 x. \tag{5.53}$$

Като сравним (5.53) с (5.52), виждаме, че (за разлика от първия диференциал) вторият диференциал няма свойството инвариантност на формата.

Толкова повече диференциалите от по-висок ред не притежават свойството инвариантност на формата.

6. Основни теореми за диференцируемите функции

В тази глава са дадени редица важни теореми за диференцируемите функции. Тези теореми са удобни при изследване поведението на функции както в околности на отделни точки, така и в цели участъци от дефиниционните им области.

6.1. Нарастване (намаляване) на функция в точка. Локален екстремум

Нека функцията f е дефинирана навсякъде в някоя околност на точката c.

Определение 1. *Ще казваме, че функцията f* ***нараства в точката*** *c, ако съществува δ-околност на тази точка, в която $f(x)<f(c)$ при $x<c$ и $f(x)>f(c)$ при $x>c$.*

Определение 2. *Ще казваме, че функцията f* ***намалява в точката*** *c, ако съществува δ-околност на тази точка, в която $f(x)>f(c)$ при $x<c$ и $f(x)<f(c)$ при $x>c$.*

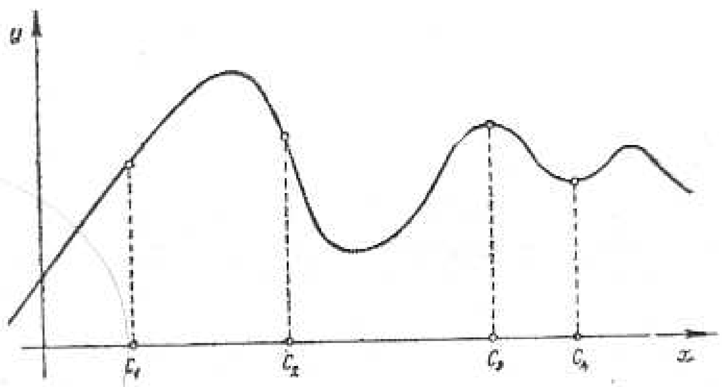
Определение 3. *Ще казваме, че функцията f има в точката c* ***локален максимум (локален минимум)****, ако съществува такава δ-околност на точката c, че $f(c)$ е най-голямата (най-малката) измежду всички стойности $f(x)$ на функцията в тази околност.*

Определение 4. *Ще казваме, че функцията f има в точката c* ***локален екстремум****, ако тя има в тази точка или локален максимум, или локален минимум.*

На фиг. 6.1 е изобразена функция, нарастваща в точката c_1, намаляваща в точката c_2, имаща локален максимум в точката c_3 и локален минимум в точката c_4.

Ще докажем следните две теореми:

Теорема 6.1 (достатъчно условие за нарастване или намаляване на функция в точка). *Ако функцията f е диференцируема в*



Фиг. 6.1

точката c и производната ѝ $f'(c)$ е положителна (отрицателна) в тази точка, то тя е нарастваща (намаляваща) в точката c.

Доказателство. Ще разгледаме случая $f'(c)>0$ (понеже случаят $f'(c)<0$ е аналогичен).

Тъй като

$$f'(c):=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c},$$

то според определението за граница на функция по Хайне за положителното число $\varepsilon=f'(c)$ съществува такова $\delta>0$, че

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right|<f'(c) \text{ при } 0<|x-c|<\delta,$$

или

$$0<\frac{f(x)-f(c)}{x-c}<2f'(c) \quad \text{при} \quad c-\delta<x<c+\delta, \quad x\neq c.$$

Така навсякъде в прободената δ-околност на точката c имаме

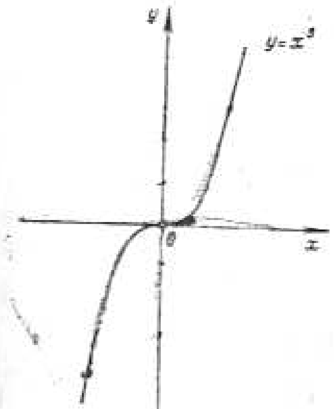
$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>0.$$

Следователно в тази δ-околност на точката c

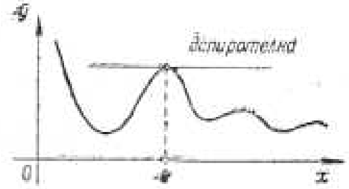
$$f(x)>f(c) \text{ при } x>c,$$
$$f(x)<f(c) \text{ при } x<c,$$

т. е. функцията f е нарастваща в точката c. □

Забележка 1. Положителността (отрицателността) на производната $f'(c)$ не е необходимо условие за нарастването (намаляването) на функцията f в точката c. Така функцията $f(x)=x^3$



Фиг. 6.2



Фиг. 6.3

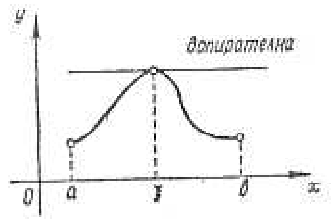
нараства в точката $c=0$, а производната ѝ в тази точка е равна на нула (вж. фиг. 6.2).

Теорема 6.2 (необходимо условие за локален екстремум на диференцируема в дадена точка функция). *Ако функцията f е диференцируема в точката c и има в тази точка локален екстремум, то $f'(c)=0$.*

Доказателство. Съгласно условието на теоремата съществува крайна производна $f'(c)$. Тъй като функцията f има в точката c локален екстремум, то в тази точка тя не е нито нарастваща, нито намаляваща. Следователно според теорема 6.1 производната ѝ $f'(c)$ не може да бъде нито положителна, нито отрицателна. □

Теорема 6.2 има много прост геометричен смисъл: ако в някоя точка на кривата $y=f(x)$ се достига локален екстремум и съществува допирателна в тази точка, тя е успоредна на оста Ox (вж. фиг. 6.3).

Забележка 2. Примерът с функцията $f(x)=x^3$ (вж. фиг. 6.2) показва, че анулирането на производната е само необходимо условие, но не е достатъчно за локален екстремум (производната $f'(x)=3x^2$ на тази функция се анулира в точката $x=0$, но в тази точка функцията няма екстремум).



Фиг. 6.4

6.2. Теорема за анулиране на производната

Теорема 6.3 (теорема на Рол*). *Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, диференцируема във всички вътрешни точки на този сегмент и $f(a)=f(b)$. Тогава съществува такава вътрешна точка ξ от сегмента $[a, b]$, че стойността на производната $f'(\xi)$ в тази точка е равна на нула.*

Накратко: между две равни стойности на диференцируема функция непременно има нула на производната на тази функция.

Доказателство. Тъй като функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то съгласно теорема 4.15 тази функция достига в този сегмент максималната си стойност M и минималната си стойност m. Възможни са два случая: 1) $M=m$; 2) $M>m$. В случая 1) $f(x)=M=m=\mathrm{const}$. Затова производната $f'(x)$ е равна на нула във всяка вътрешна точка на сегмента $[a, b]$. В случая $M>m$, тъй като $f(a)=f(b)$, то функцията достига в някоя вътрешна точка ξ на сегмента $[a, b]$ поне една от двете стойности M или m. Но тогава функцията f има в точката ξ локален екстремум. Понеже функцията f е диференцируема в точката ξ, то съгласно теорема 6.2 $f'(\xi)=0$. □

Теоремата на Рол има просто геометрично тълкуване: Ако в краищата на сегмента ординатите на кривата $y=f(x)$ са равни, то съгласно теоремата на Рол има точка, в която допирателната към тази крива е успоредна на оста Ox (фиг. 6.4).

Както ще видим по-нататък, теоремата на Рол е в основата на много формули и теореми на математическия анализ.

* Мишел Рол — френски математик (1652 — 1719).

6.3. Формула за крайните нараствания (формула на Лагранж)

Голямо значение в анализа и неговите приложения има следната теорема, принадлежаща на Лагранж*.

Теорема 6.4 (теорема на Лагранж). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и диференцируема в интервала (a, b), то съществува точка ξ от интервала (a, b), за която е в сила формулата*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi). \tag{6.1}$$

Формулата (6.1) се нарича ***формула на Лагранж*** или ***формула за крайните нараствания.***

Доказателство. Да разгледаме функцията

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)(f(b)-f(a))/(b-a), \tag{6.2}$$

за която са изпълнени всички условия от теоремата на Рол. Наистина F е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ (като разлика между функцията f и една линейна функция) и във всички точки на интервала (a, b) има производна, равна на

$$F'(x)=f'(x)-(f(b)-f(a))/(b-a).$$

От формула (6.2) е очевидно, че $F(a)=F(b)=0$.

Съгласно теоремата на Рол вътре в сегмента $[a, b]$ има такава точка ξ, че

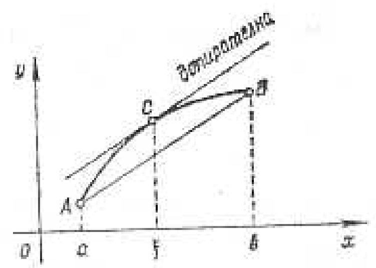
$$F'(\xi)=f'(\xi)-(f(b)-f(a))/(b-a)=0. \tag{6.3}$$

От равенството (6.3) следва формулата на Лагранж (6.1). Ще подчертаем, че във формула (6.1) не е необходимо $b>a$. Формулата е вярна и при $b<a$.

Забележка. Ние получихме теоремата на Лагранж като следствие от теоремата на Рол. Ще отбележим заедно с това, че теоремата на Рол е частен случай от теоремата на Лагранж (при $f(a)=f(b)$).

За изясняване геометричния смисъл на теоремата на Лагранж ще отбележим, че величината $(f(b)-f(a))/(b-a)$ е ъгловият коефициент на секущата, минаваща през точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ на кривата $y=f(x)$, а $f'(\xi)$ е ъгловият коефициент на допирателната към кривата $y=f(x)$ в точката $C(\xi, f(\xi))$. Формулата на Лагранж означава, че има точка C от кривата $y=f(x)$ между точките A и B, допирателната в която е успоредна на секущата AB (фиг. 6.5).

* Жозеф Луи Лагранж — френски математик и механик (1736—1813).



Фиг. 6.5

Формулата на Лагранж за сегмента $[x_0, x_0+\Delta x]$ ще има вида

(6.4) $$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x \,.\, f'(\xi),$$

където ξ е някоя точка, заключена между x_0 и $x_0+\Delta x$. Тогава има такова число θ от интервала $0<\theta<1$, че

$$\xi=x_0+\theta \,.\, \Delta x.$$

По този начин формула (6.4) добива вида

(6.5) $$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x \,.\, f'(x_0+\theta \,.\, \Delta x),$$

където θ е някое число от интервала $0<\theta<1$. Формулата на Лагранж във вида (6.5) ни дава нарастването на функцията, предизвикано от произволното крайно нарастване Δx на аргумента. Този вид на формулата на Лагранж оправдава термина ***формула за крайните нараствания.***

6.4. Някои следствия от формулата на Лагранж

6.4.1. Константност на функция, която има нулева производна в даден интервал.

Теорема 6.5. *Ако функцията f е диференцируема навсякъде в интервала (a, b) и ако навсякъде в този интервал $f'(x)=0$, то функцията f е константа в интервала (a, b).*

Доказателство. Нека x_0 е някоя фиксирана точка в интервала (a, b), а x е произволна точка от този интервал.

Сегментът $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$) се съдържа в интервала (a, b). Затова функцията f е диференцируема (а също така и непрекъсната) в този сегмент. Това ни дава право да приложим теоремата на Лагранж за функцията f в сегмента $[x_0, x]$. Съгласно тази теорема вътре в сегмента $[x_0, x]$ има точка ξ, за която

(6.6) $$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(\xi).$$

По условие производната на функцията f е равна на нула навсякъде в интервала (a, b) и следователно $f'(\xi)=0$. Тогава от (6.6) получаваме

(6.7) $$f(x)=f(x_0).$$

Равенството (6.7) показва, че стойността на функцията f във всяка точка x на интервала (a, b) е равна на стойността ѝ във фиксираната точка x_0. Това означава, че функцията f е константа в интервала (a, b). □

6.4.2. Условия за монотонност на функция в интервал. Като второ следствие от формулата на Лагранж ще разгледаме въпроса за условията, които осигуряват ненамаляване (ненарастване) на функцията в даден интервал. Ще напомним определенията за ненамаляваща, ненарастваща, растяща и намаляваща функция в даден интервал.

1°. Казва се, че функцията f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b), ако за всеки две точки x_1 и x_2 от този интервал, за които $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството

$$f(x_1)\leqq f(x_2) \quad (f(x_1)\geqq f(x_2)).$$

2°. Казва се, че функцията f е растяща (намаляваща) в интервала (a, b), ако за всеки две точки x_1 и x_2 от този интервал, за които $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (f(x_1)>f(x_2)).$$

Теорема 6.6. *Необходимо и достатъчно условие функцията f, диференцируема в интервала (a, b), да бъде ненамаляваща (ненарастваща) в този интервал е производната ѝ да бъде неотрицателна (неположителна) в този интервал.*

Доказателство. 1. *Достатъчност.* Нека $f'(x)\geqq 0\ (\leqq 0)$ навсякъде в интервала (a, b). Трябва да се докаже, че f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b). Нека x_1 и x_2 са произволни точки от интервала (a, b), за които $x_1<x_2$. Функцията f е диференцируема (следователно и непрекъсната) в сегмента $[x_1, x_2]$. Като приложим теоремата на Лагранж за функцията f в сегмента $[x_1, x_2]$, ще получим

(6.8) $$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),$$

където $x_1<\xi<x_2$.

По условие $f'(\xi)\geqq 0\ (\leqq 0)$ и $x_2-x_1>0$. Затова дясната, а следователно и лявата страна на (6.8) е неотрицателна (неположителна), което доказва, че f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b).

2. *Необходимост.* Нека функцията f е диференцируема и ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b). Трябва да се докаже, че $f'(x)\geq 0$ $(\leqq 0)$ в този интервал. Тъй като f е ненамаляваща (ненарастваща) в интервала (a, b), то тя е ненамаляваща (ненарастваща) във всяка точка на интервала (a, b). Следователно съгласно теорема 6.1 производната f' не може да бъде отрицателна (положителна) в нито една точка на интервала (a, b). □

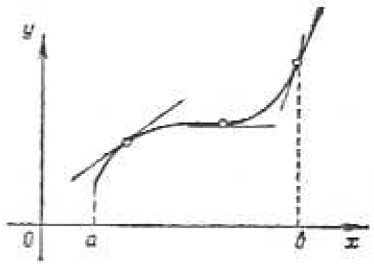
Теорема 6.7. *За да бъде функцията f растяща (намаляваща) в интервала (a, b), е достатъчно производната ѝ f' да бъде положителна (отрицателна) в този интервал.*

Доказателството е аналогично на доказателството за достатъчността в теорема 6.6. Нека x_1 и x_2 са произволни точки от интервала (a, b), удовлетворяващи условието $x_1<x_2$. Като запишем формулата на Лагранж за сегмента $[x_1, x_2]$, ще получим равенството (6.8), но сега в това равенство $f'(\xi)>0$ (<0).

Поради това лявата страна на (6.8) е положителна (отрицателна), което доказва, че f е растяща (намаляваща) в интервала (a, b).

Забележка. Положителността (отрицателността) на производната f' в интервала (a, b) не е необходимо условие за нарастването (намаляването) на функцията f в интервала (a, b). Така например функцията $f(x)=x^3$ расте в интервала $(-1, 1)$, но производната ѝ $f'(x)=3x^2$ не е навсякъде положителна в този интервал (тя е нула в точката $x=0$). Въобще леко се доказва, че функцията f е растяща (намаляваща) в интервала (a, b), ако производната ѝ f' е положителна (отрицателна) навсякъде в този интервал с изключение на краен брой точки, в които тази производна е равна на нула. (За да докажем това, е достатъчно да приложим теорема 6.7 към всеки от крайния брой интервали, в които f' е строго положителна (отрицателна), и да отчетем, че f е непрекъсната в точките, в които производната е равна на нула.)

Установената в теорема 6.7 връзка между знака на производната и посоката на изменението на функцията се разбира лесно по геометрични съображения. Тъй като производната е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията $y=f(x)$, то знакът на производната показва дали допирателната сключва с положителната посока на оста Ox остър или тъп ъгъл. Ако $f'(x)>0$ навсякъде в интервала (a, b), то навсякъде в този интервал допирателната сключва с оста Ox остър ъгъл и очевидно кривата $y=f(x)$ се „изкачва нагоре" навсякъде в този интервал (фиг. 6.6).



Фиг. 6.6

6.4.3. Липса на прекъсвания от първи род и отстраними прекъсвания на производната. Теоремата на Лагранж позволява да се установи едно забележително свойство на производната. Ще започнем с доказателството на следната лема:

Лема 1. *Нека функцията f има крайна производна f' навсякъде в интервала $(c, c+\delta)$ $((c-\delta, c))$, където δ е някое положително число, и освен това има дясна производна $f'(c+0)$ (лява производна $f'(c-0)$). Тогава, ако производната f' има в точката c дясна (лява) граница, то тази граница съвпада с дясната производна $f'(c+0)$ (лявата производна $f'(c-0)$).*

Доказателство. От съществуването на дясна производна $f'(c+0)$ (лява производна $f'(c-0)$) следва съществуването на крайната граница

$$\lim_{x\to c+0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\quad\left(\lim_{x\to c-0}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right).$$

Но това означава, че

$$\lim_{x\to c+0}(f(x)-f(c))=0\quad\left(\lim_{x\to c-0}(f(x)-f(c))=0\right),$$

т. е. функцията f е непрекъсната в точката c отдясно (отляво).

Фиксираме произволно x в интервала $(c, c+\delta)$ $((c-\delta, c))$. Тъй като функцията f е диференцируема (следователно непрекъсната) в този интервал и освен това непрекъсната отдясно (отляво) в точката c, то за тази функция в сегмента $[c, c+\delta]$ (в $[c-\delta, c]$) са изпълнени всички условия от теоремата на Лагранж 6.4.

Съгласно тази теорема между x и c съществува такава точка ξ, че е изпълнено равенството

$$(f(x)-f(c))/(x-c)=f'(\xi). \tag{6.9}$$

Да направим в (6.9) граничен преход при $x\to c+0$ $(x\to c-0)$. Ако производната $f'(x)$ има в точката c крайна дясна граница $\lim\limits_{x\to c+0}f'(x)$ (крайна лява граница $\lim\limits_{x\to c-0}f'(x)$), то дясната страна на

(6.9) ще клони към тази граница (тъй като $\xi \to c+0$ ($\xi \to c-0$) при $x \to c+0$ ($x \to c-0$).

Същата граница при $x \to c+0$ ($x \to c-0$) трябва да има и лявата страна на (6.9). Но границата на лявата страна на (6.9) при $x \to c+0$ ($x \to c-0$) по определение е равна на дясната производна $f'(c+0)$ (лявата производна $f'(c-0)$). □

Прилагайки лема 1 за всяка точка c на даден интервал (a, b), идваме до следното твърдение: Ако функцията f има крайна производна навсякъде в интервала (a, b), то производната f' не може да има в този интервал нито точки на отстранимо прекъсване, нито точки на прекъсване от първи род.

Наистина, ако в някоя точка c на интервала (a, b) съществуват крайни дясна и лява граница на функцията f', то f' е непрекъсната в точката c (според доказаната лема*). Ако не съществува нито една от границите $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)$, то функцията f' по определение има в точката c прекъсване от втори род. И така производната f' във всяка точка c на интервала (a, b) е или непрекъсната, или има прекъсване от втори род. □

Ще приведем пример на функция, чиято производна съществува и е крайна навсякъде в даден интервал и има в дадена точка от този интервал прекъсване от втори род.

Ще разгледаме в интервала $(-1, 1)$ функцията

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos x^{-1} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Очевидно за всяко $x\neq 0$ производната на тази функция съществува и е $f'(x)=2x\cos x^{-1}+\sin x^{-1}$. Съществуването на производната f' в точката $x=0$ непосредствено следва от съществуването на границата

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cos(1/\Delta x)=0.$$

Производната f' няма в точката $x=0$ нито дясна, нито лява граница, тъй като събираемото $2x\cos x^{-1}$ има в точката $x=0$ граница, равна на нула, а второто събираемо $\sin x^{-1}$ няма в точката $x=0$ нито дясна, нито лява граница.

6.4.4. Извеждане на някои неравенства. В заключение ще покажем как с помощта на теоремата на Лагранж могат да бъдат получени някои полезни неравенства. За пример ще докажем следните две неравенства:

(6.10) $$|\sin x_1-\sin x_2|\leq|x_1-x_2|,$$

(6.11) $$|\operatorname{arc\,tg} x_1-\operatorname{arc\,tg} x_2|\leq|x_1-x_2|$$

(тук x_1 и x_2 са какви да е стойности на аргумента). За да установим неравенството (6.10), ще приложим теоремата на Лагранж за функцията $f(x)=\sin x$ в сегмента $[x_1, x_2]$. Получаваме

(6.12) $$\sin x_1-\sin x_2=(x_1-x_2)\,.\,f'(\xi).$$

Като отчетем, че $f'(\xi)=\cos\xi$ и че $|\cos\xi|\leq 1$ за всяко ξ, и като вземем абсолютните стойности в (6.12), получаваме неравенството (6.10).

За доказване на неравенството (6.11) ще приложим теоремата на Лагранж към функцията $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ в сегмента $[x_1, x_2]$ и ще вземем пред вид, че $f'(\xi)=1/(1+\xi^2)\leq 1$.

6.5. Обобщение на формулата на крайните нараствания (формула на Коши)

В този параграф ще докажем теорема, принадлежаща на Коши, която обобщава доказаната теорема на Лагранж.

Теорема 6.8 (теорема на Коши). *Ако всяка от двете функции f и g е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и диференцируема във всяка вътрешна точка на този сегмент и освен това производната $g'(x)$ е различна от нула навсякъде вътре в сегмента $[a, b]$, то съществува такава точка ξ от вътрешността на този сегмент, че да е изпълнено равенството*

(6.13) $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Формула (6.13) се нарича ***обобщена формула на крайните нараствания*** или ***формула на Коши.***

Доказателство. Най-напред ще докажем, че $g(a)\neq g(b)$. Наистина, ако това не е така, за функцията g в сегмента $[a, b]$ ще са изпълнени всички условия от теорема 6.3 (теоремата на Рол) и следователно вътре в сегмента $[a, b]$ ще съществува точка ξ, в която $g'(\xi)=0$. Това противоречи на условието на теоремата. И така $g(a)\neq g(b)$ и можем да разгледаме следната помощна функция:

(6.14) $$F(x)=f(x)-f(a)-(g(x)-g(a))(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)).$$

Поради изискванията, наложени на функциите f и g, функцията $F(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и диференцируема във всич

* Според тази лема $\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)=f'(c+0)$, $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)=f'(c-0)$, а тъй като $f'(c+0)=f'(c-0)=f'(c)$, то $\lim\limits_{x\to c-0} f'(x)=\lim\limits_{x\to c+0} f'(x)=f'(c)$. Следователно $f'(x)$ е непрекъсна а в точката c.

ки вътрешни точки на този сегмент. Освен това е очевидно, че $F(a)=F(b)$. Тогава за F са изпълнени всички условия на теорема 6.3 (на Рол). Съгласно тази теорема съществува вътрешна за сегмента $[a, b]$ точка ξ, за която

$$F'(\xi)=0. \tag{6.15}$$

Тъй като $F'(x)=f'(x)-g'(x)(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a))$, то от (6.15) получаваме

$$f'(\xi)-g'(\xi)(f(b)-f(a))/(g(b)-g(a)). \tag{6.16}$$

Отчитайки, че $g'(\xi)\neq 0$, от равенството (6.16) получаваме формулата на Коши (6.13). □

Забележка 1. Формулата на Лагранж (6.1) е частен случай от формулата на Коши (6.13) при $g(x)=x$.

Забележка 2. Във формула (6.13) не е задължително да имаме $b>a$. Формулата е вярна и при $b<a$.

6.6. Разкриване на неопределености (правило на Лопитал)

6.6.1. Разкриване на неопределеност от вида 0/0. Ще казваме, че отношението на две функции f/g е неопределеност от вида 0/0 при $x\to a$, ако

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0.$$

Да се разкрие тази неопределеност, означава да се пресметне границата $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))$ (при условие, че тя съществува).

Аналогично се въвеждат понятията неопределеност от вида 0/0 при $x\to a+0$ $(x\to a-0)$, при $x\to\infty$, а също и при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

Следващата теорема ни дава правило за разкриване на неопределеност от вида 0/0 при $x\to a$.

Теорема 6.9 (правило на Лопитал*). *Нека множеството C_δ е прободена δ-околност на точката a, функциите f и g са дефинирани и диференцируеми в C_δ и производната g' не се анулира в C_δ. Нека също*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0. \tag{6.17}$$

Тогава, ако съществува (крайна или безкрайна) граница

* Гийом Франсоа дьо Лопитал — френски математик (1661—1704).

$$\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x)), \tag{6.18}$$

то съществува и

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) \tag{6.19}$$

и е в сила съотношението

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x)). \tag{6.20}$$

Теоремата 6.9 ни дава правило за разкриване на неопределеност от вида 0/0, което свежда пресмятането на границата на частното на две функции в точката a до пресмятане на границата на частното на производните на тези функции в същата точка.

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица от стойности на аргумента, клоняща към a, чиито членове x_n са различни от a. Ще додефинираме функциите f и g в точката a, като ще ги положим равни на нула в тази точка. При това додефиниране на функциите f и g те са непрекъснати навсякъде в множеството C_δ, допълнено с точката a, т. е. навсякъде в δ-околността на точката a. Наистина непрекъснатостта на f и g във всички точки на δ-околността на точката a с изключение на точката a следва от тяхната диференцируемост в тези точки, а непрекъснатостта на f и g в точката a следва от това, че границите им в точката a са равни на стойностите им в тази точка съгласно додефинирането на тези функции.

Отчитайки, че всички елементи на редицата $\{x_n\}$ принадлежат на множеството C_δ, ще разгледаме произволен сегмент, ограничен от точките a и x_n.

Според казаното двете функции f и g са непрекъснати върху такъв сегмент. Освен това функциите f и g са диференцируеми във всяка вътрешна точка на избрания сегмент и производната g' не се анулира във вътрешните му точки.

Това ни дава право да приложим към функциите f и g в сегмента, ограничен от точките a и x_n, теоремата на Коши 6.8.

Според тази теорема между точките a и x_n съществува такава точка ξ_n, че да е изпълнено равенството

$$\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}=\frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}. \tag{6.21}$$

Като вземем пред вид, че $f(a)=g(a)=0$, можем да напишем съотношението (6.21) във вида

$$f(x_n)/g(x_n)=f'(\xi_n)/g'(\xi_n). \tag{6.22}$$

Нека сега в (6.22) n расте неограничено, т. е. $x_n\to a$. Понеже ξ_n е заключено между a и x_n, то и $\xi_n\to a$ при $n\to\infty$. От съществуването на границата (6.18) и от определението за граница на функция по Хайне следва, че дясната страна на (6.22) има граница при $n \to \infty$, равна на границата (6.18). Следователно същата граница при $n \to \infty$ има и лявата страна на (6.22). Понеже клонящата към a редица $\{x_n\}$ е произволна и според определението за граница на функция по Хайне съществуването на граница при $n \to \infty$ на лявата страна на (6.22), равна на (6.18), означава съществуване на граница на функцията (6.19), която също е равна на (6.18).

И така чрез граничен преход в (6.22) при $n \to \infty$ получаваме съотношението (6.20). □

Забележка 1. Правилото на Лопитал не винаги „действува", т. е. границата на частното на функциите (6.19) може да съществува и в случаи, когато границата на частното на производните (6.18) не съществува.

Например при $a=0$, $f(x)=x^2 \cos x^{-1}$, $g(x)=\sin x$ съществува

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x^{-1}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\lim_{x\to 0} x\cos x^{-1}=0,$$

докато

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^{-1}+\sin x^{-1}}{\cos x}$$

не съществува.

Забележка 2. Ако към условията (6.9) добавим изискването за непрекъснатост на производните f' и g' в точката a, то при условие $g'(a)\neq 0$ съотношението (6.20) може да се напише във вида

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=f'(a)/g'(a).$$

Забележка 3. Ако производните f' и g' удовлетворяват същите изисквания, както и функциите f и g, то правилото на Лопитал може да се приложи повторно, т. е. границата на частното на първите производни на функциите f и g може да се замени с границата на частното на вторите производни на тези функции. Така ще получим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Примери:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=1/2.$

2. Следващата граница се намира с двукратно прилагане на правилото на Лопитал:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=1/6.$$

3. С трикратно прилагане на правилото на Лопитал се пресмята следната граница:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2+2\cos x-2}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3}{2x-2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{12x^2}{2-2\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{24x}{2\sin x}=12.$$

Ние разгледахме въпроса за разкриване на неопределеност от вида 0/0 за случая на граница в точката a. Съвършено аналогични резултати са в сила и за случаите на граница в точката a отдясно (отляво), граница при $x\to\infty$, а също така и за граница при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$.

Сега ще се убедим, че теорема 6.9 е в сила във всеки от следните три случая:

1. Когато в теорема 6.9 за множество C_δ вземем интервала $(a, a+\delta)$ (съответно $(a-\delta, a)$), а всички граници (6.17) — (6.20) са взети при $x\to a+0$ (съответно при $x\to a-0$).

2. Когато в теорема 6.9 за C_δ вземем множеството от всички точки, лежащи вън от сегмента $[-\delta, \delta]$, а границите (6.17)—(6.20) са взети при $x\to\infty$.

3. Когато в теорема 6.9 за множество C_δ е взета полуправата $(\delta, +\infty)$ (съответно $(-\infty, \delta)$), а границите (6.17)—(6.20) са при $x\to+\infty$ (съответно при $x\to-\infty$).

Случай 1. В сила е цялата схема на доказателството на теорема 6.9, само че вместо редицата $\{x_n\}$, клоняща към a, от точки x_n, различни от a, трябва да вземем редица $\{x_n\}$ от интервала $(a, a+\delta)$ (съответно от $(a-\delta, a)$), клоняща към a.

Случай 2. Нека функциите f и g са дефинирани и диференцируеми навсякъде вън от сегмента $[-\delta, \delta]$ при някое $\delta>0$ и производната g' не се анулира вън от посочения сегмент. Нека освен това съществува границата

$$\lim_{x\to\infty}(f'(x)/g'(x)). \tag{6.18'}$$

Да направим смяна на променливата $t=1/x$ и да положим $G(t)=g(1/t)=g(x)$, $F(t)=f(1/t)=f(x)$. Тогава очевидно функциите F и G са дефинирани и диференцируеми в прободената $1/\delta$-околност на точката $t=0$ и производната

$$G'(t)=g'(1/t)(-1/t^2)=g'(x)(-x^2)$$

не се анулира в тази прободена $1/\delta$-околност.

Освен това поради съществуването на границата (6.18′) съществува и границата

$$\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.23}$$

Но тогава според теорема 6.9 ще съществува и границата

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}, \tag{6.24}$$

при това е изпълнено съотношението (6.20), което приема (поради (6.23) и (6.24)) вида

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \square$$

Случай 3. Използваме същата смяна $t=1/x$, както в случай 2, но сега тази смяна води вместо до разглеждане на границата при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$) до границата при $x\to 0+0$ ($x\to 0-0$), разгледана в случай 1.

Примери: 1. Да се пресметне $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x^\delta}{\ln(1+x)}$ за всяко $\delta>1$ (този пример се отнася към случай 1).

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{x^\delta}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\delta x^{\delta-1}}{(1/(1+x))}=\lim_{x\to 0+0}\delta x^{\delta-1}(1+x)=0.$$

2. Да се пресметне $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi/4-\operatorname{arctg}(1-1/x)}{\sin(1/x)}$ (този пример се отнася към случай 2).

Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/4-\operatorname{arctg}(1-1/x)}{\sin(1/x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1}{1+(1-1/x)^2}\cdot\frac{1}{x^2}}{(-1/x^2)\cos(1/x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+(1-1/x)^2}}{\cos(1/x)}=\frac{1}{2}.$$

6.6.2. Разкриване на неопределеност от вида ∞/∞. Ще казваме, че отношението на две дефинирани в околност на точката a функции f и g представлява неопределеност от вида ∞/∞ при $x\to a$, ако

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty.^{*} \tag{6.25}$$

За разкриване на тази неопределеност, т. е. за пресмятане на границата $\lim\limits_{x\to a}(f(x)/g(x))$, е в сила твърдение, напълно аналогично на теорема 6.9.

* Вместо ∞ в (6.25) може да имаме $+\infty$ или $-\infty$.

Теорема 6.9* (второ правило на Лопитал). *Нека множеството C_δ е прободена δ-околност на точката a, функциите f и g са дефинирани и диференцируеми в C_δ и производната g' не се анулира в C_δ. Нека по-нататък*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=\infty. \tag{6.17'}$$

Тогава, ако съществува (крайна или безкрайна) границата

$$\lim_{x\to a}(f'(x)/g'(x)), \tag{6.18'}$$

то съществува и границата

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)), \tag{6.19'}$$

при което е в сила съотношението

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.20'}$$

Доказателство. 1. Ще предположим най-напред, че съществува крайна граница (6.18') и тя е равна на числото b. Ще докажем, че в този случай съществува и границата (6.19') и е също равна на b.

Нека $\{x_n\}$ е произволна редица от стойности на аргумента, клоняща към a или отдясно, или отляво. Тъй като всички членове на тази редица принадлежат на множеството C_δ, то каквито и да са двата члена от редицата x_m и x_n, за функциите f и g в сегмента $[x_m, x_n]$ са изпълнени всички условия на теоремата на Коши (6.8). Според тази теорема между x_m и x_n съществува такава точка $\xi_{m,n}$, че е изпълнено равенството

$$\frac{f(x_n)-f(x_m)}{g(x_n)-g(x_m)}=\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\cdot\frac{1-f(x_m)/f(x_n)}{1-g(x_m)/g(x_n)}=\frac{f'(\xi_{m,n})}{g'(\xi_{m,n})}.$$

От това равенство заключаваме, че

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f'(\xi_{m,n})}{g'(\xi_{m,n})}\cdot\frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)}. \tag{6.26}$$

Сега избираме произволно положително число ε. Тъй като по условие $\lim\limits_{x\to a}(f'(x)/g'(x))=b$, а редицата $\{x_n\}$ клони към a, то за положителното число $\varepsilon/2$ може да се намери такъв номер m, че за всеки номер n, по-голям от m, да са изпълнени условията

$$f'(\xi_{m,n})/g'(\xi_{m,n})=b+\alpha_{m,n} \text{ и } |\alpha_{m,n}|<\varepsilon/2. \tag{6.27}$$

Ще отбележим, че според условие (6.17') $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=\infty$ и тъй като номерът m е фиксиран, съществува границата

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)}=1.$$

Това означава, че за положителното число $\frac{\varepsilon/2}{|b|+\varepsilon/2}$ и за избрания номер m съществува такъв номер n_0, че при всички $n>n_0$ имаме

$$\frac{1-g(x_m)/g(x_n)}{1-f(x_m)/f(x_n)}=1+\beta_{m,n}, \tag{6.28}$$

където $|\beta_{m,n}|<\frac{\varepsilon/2}{|b|+\varepsilon/2}$.

От (6.26), (6.27) и (6.28) следва, че

$$f(x_n)/g(x_n)=(b+\alpha_{m,n})(1+\beta_{m,n})=b+(b+\alpha_{m,n})\beta_{m,n}+\alpha_{m,n}.$$

Следователно е изпълнено неравенството

$$|f(x_n)/g(x_n)-b|\le(|b|+|\alpha_{m,n}|)\,.\,|\beta_{m,n}|+|\alpha_{m,n}|.$$

Отчитайки условията (6.27) и (6.28), при всички $n\ge n_0$ получаваме

$$(|b|+|\alpha_{m,n}|)\,.\,|\beta_{m,n}|+|\alpha_{m,n}|<(|b|+\varepsilon/2)\frac{\varepsilon/2}{(|b|+\varepsilon/2)}+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

И така за произволно избраното $\varepsilon>0$ намерихме такъв номер n_0, че при всички $n>n_0$ да имаме

$$|f(x_n)/g(x_n)-b|<\varepsilon.$$

Това означава, че границата (6.19′) е равна на числото b и е изпълнено (6.20′). По такъв начин теоремата е доказана за случая на крайна граница (6.18′).

2. Нека сега границата (6.18′) е равна на безкрайност. Тогава очевидно границата на реципрочното отношение $\lim(g'(x)/f'(x))$ е равна на нула и съгласно току-що разгледания случай на крайна граница (6.18′) ще получим*, че $\lim\limits_{x\to a}(g(x)/f(x))=0$.

Последното съотношение поради (6.18′) е еквивалентно на

$$\lim_{x\to a}(f(x)/g(x))=\infty. \;\square$$

Също както и теорема 6.9, теорема 6.9* е вярна и за всеки от следните три случая:

1) Когато за множество C_δ се вземе интервалът $(a,\ a+\delta)$ (съответно $(a-\delta,\ a)$), а границите (6.17′)—(6.20′) се разглеждат при $x\to a+0$ (съответно при $x\to a-0$).

* Отчитаме, че за реципрочното отношение са изпълнени всички условия на теорема 6.9*. По-специално производната f' не се анулира в достатъчно малка прободена δ-околност на точката a (това следва от съществуването на границата (6.18′), равна на ∞, и от неанулирането на производната g' в посочената прободена δ-околност).

2) Когато за множество C_δ се избере съвкупността от всички x, лежащи вън от сегмента $[-\delta,\ \delta]$ и всички граници (6.17′)—(6.20′) са взети при $x\to\infty$.

3) Когато за множество C_δ се вземе полуправата $(\delta,\ +\infty)$ (съответно $(-\infty,\ -\delta)$) и всички граници (6.17′)—(6.20′) се вземат при $x\to+\infty$ (съответно при $x\to-\infty$).

Доказателството на теорема 6.9* в тези три случая може да се заимствува от предишната точка.

Примери:

1. $$\lim_{x\to+0+0}\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to+0+0}\frac{\ln x}{x^{-1/2}}$$

$$=\lim_{x\to+0+0}\frac{x^{-1}}{(-1/2)\,x^{-3/2}}=-2\lim_{x\to+0+0}\sqrt{x}=0.$$

2. С n-кратно прилагане на правилото на Лопитал се пресмята

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ .\ .\ .=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

6.6.3. Разкриване на други видове неопределености. Освен изучените по-горе неопределености от вида $0/0$ и ∞/∞ често се срещат и неопределености от следните видове: $0\,.\,\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Всички тези неопределености се свеждат до изучените две неопределености с помощта на алгебрични преобразувания. Ще покажем това за последните три от изброените неопределености. Всяка от тях има вида

$$f^g, \tag{6.29}$$

където f клони съответно към 1, 0 или ∞ при $x\to a$, g — съответно към ∞ или 0. Като логаритмуваме израза (6.29), получаваме (считаме, че $f(x)>0$)

$$g\ln f. \tag{6.30}$$

За да намерим границата на израза (6.29), достатъчно е да намерим границата на (6.30).

Ще отбележим, че за всеки от разглежданите три случая изразът (6.30) е неопределеност от вида $0\,.\,\infty$ при $x\to a$. Следователно е достатъчно да се научим да привеждаме неопределеност от вида $0\,.\,\infty$ към неопределеност от вида $0/0$ или ∞/∞. Ще покажем как се прави това. Нека

$$z=\varphi\,.\,\psi, \tag{6.31}$$

при това

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0, \qquad \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty.$$

Можем да запишем (6.31) във вида

$$z=\varphi\,.\,\psi=\frac{\varphi}{1/\psi}. \tag{6.32}$$

Очевидно изразът (6.32) е неопределеност от вида 0/0 при $x\to a$. Нашата цел е достигната.

Примери:

1. Да пресметнем $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$. Означаваме $y=x^x$. Тогава $\ln y = x\ln x = \frac{\ln x}{1/x}$. Прилагаме правилото на Лопитал и получаваме

$$\lim_{x\to 0+0}\ln y=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1/x}{-1/x^2}=-\lim_{x\to 0+0}x=0,$$

откъдето е ясно, че $\lim\limits_{x\to 0+0} y=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)}$. Нека $y=(1+x^2)^{1/(e^x-1-x)}$. Тогава да пресметнем

$$\ln y=\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}.$$

Като използваме правилото на Лопитал, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x/(1+x^2)}{e^x-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)\,2x}=2,$$

откъдето е ясно, че $\lim\limits_{x\to 0}y=e^2$.

6.7. Формула на Тейлор

В този параграф ще получим една от най-важните формули в математическия анализ, която има многобройни приложения както в математиката, така и в близките ѝ дисциплини.

Теорема 6.10 (теорема на Тейлор*). *Нека функцията f има в някоя околност на точката a производна от $(n+1)$-ви ред (n е произволно естествено число).* Нека x е произволна точка от тази околност, *а p — произволно положително число. Тогава между точките a и x съществува такава точка ξ, че е в сила формулата*

* Брук Тейлор — английски математик (1685—1731).

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_{n+1}(x), \tag{6.33}$$

където

$$R_{n+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,.\,p}f^{(n+1)}(\xi). \tag{6.34}$$

Забележка. Тъй като точката ξ е между x и a, то дробта $(x-a)/(x-\xi)$ е винаги положителна и за всяко $p>0$ е определена степента $\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p$.

Формула (6.33) се нарича ***формула на Тейлор*** (с център в точката a), а изразът $R_{n+1}(x)$ се нарича ***остатъчен член***. Както ще видим по-нататък, остатъчният член може да се запише не само във вида (6.34), но и по друг начин. Остатъчният член, записан във вида (6.34), е прието да се нарича ***остатъчен член в обща форма.***

Доказателство. Да положим

$$\varphi(x,\,a)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \tag{6.35}$$

и да означим със символа $R_{n+1}(x)$ разликата

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x,\,a). \tag{6.36}$$

Теоремата ще бъде доказана, ако покажем, че $R_{n+1}(x)$ се определя от формулата (6.34).

Фиксираме произволно x от посочената във формулировката на теоремата околност. За определеност можем да приемем, че $x>a$. Означаваме с t променлива, която се изменя в сегмента $[a,\,x]$, и разглеждаме помощната функция:

$$\psi(t)=f(x)-\varphi(x,\,t)-(x-t)^p\,.\,Q(x), \tag{6.37}$$

където

$$Q(x)=(x-a)^{-p}R_{n+1}(x). \tag{6.38}$$

Подробно ψ може да се запише и така:

$$\psi(t)=f(x)-f(t)-\frac{(x-t)}{1!}f'(t)-\frac{(x-t)^2}{2!}f^{(2)}(t)-\cdots-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)-(x-t)^p\,.\,Q(x). \tag{6.39}$$

Нашата цел е да определим Q, като използваме свойствата на помощната функция ψ. Ще покажем, че функцията ψ удовлетворява всички условия на теоремата 6.3 (на Рол) в сегмента $[a, x]$.

От формула (6.39) и от условията, наложени на функцията f, е очевидно, че функцията ψ е непрекъсната в сегмента $[a, x]$ и диференцируема във всички вътрешни точки на този сегмент.* Ще се убедим, че $\psi(a)=\psi(x)=0$. Полагайки в (6.37) $t=a$, като вземем пред вид равенство (6.38), имаме

$$\psi(a)=f(x)-\varphi(x, a)-R_{n+1}(x).$$

Оттук въз основа на (6.36) получаваме $\psi(a)=0$. Равенството $\psi(x)=0$ следва непосредствено от формула (6.39).

И така за функцията ψ са изпълнени всички условия на теорема 6.3 (на Рол) в сегмента $[a, x]$. Според тази теорема съществува точка ξ, вътрешна за сегмента $[a, x]$, за която

$$\psi'(\xi)=0. \tag{6.40}$$

Като диференцираме равенството (6.39), получаваме

$$\psi'(t)=-f'(t)+\frac{1}{1!}f'(t)-\frac{x-t}{1!}f^{(2)}(t)+\frac{2(x-t)}{2!}f^{(2)}(t) \tag{6.41}$$

$$-\cdots+\frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t)-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+p(x-t)^{p-1}Q(x).$$

Лесно се вижда, че всички членове в дясната страна на (6.41) с изключение на последните два, се унищожават взаимно. Следователно

$$\psi'(t)=-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+p(x-t)^{p-1}Q(x). \tag{6.42}$$

Полагаме във формула (6.42) $t=\xi$ и като използваме равенството (6.40), получаваме

$$Q(x)=\frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi). \tag{6.43}$$

Като съпоставим (6.43) и (6.38), намираме окончателно

$$R_{n+1}(x)=(x-a)^p\,Q(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi).$$

Случаят, когато $x<a$, се разглежда съвършено аналогично. □

* От условието за съществуване на производна от $(n+1)$-ви ред за функцията f в околност на точката a следва непрекъснатостта на функцията и всичките ѝ производни до n-ти ред в тази околност, а оттук и в сегмента $[a, x]$. По-нататък може да се твърди, че функцията f и всичките ѝ производни до n-ти ред са един път диференцируеми в посочената околност на точката a и следователно навсякъде вътре в сегмента $[a, x]$.

Ще намерим разлагането по формулата на Тейлор на алгебричните полиноми от n-та степен. Нека

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n.$$

Тогава, понеже $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$, остатъчният член $R_{n+1}(x)=0$, и формулата на Тейлор (6.33) приема вида

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

(Тук за точка a може да се вземе всяка точка от безкрайната права.) Следователно формулата на Тейлор дава възможност всеки полином f да се представи във вид на полином по степените на $x-a$, където a е произволно реално число.

Нека сега f е произволна функция, удовлетворяваща условията на теорема 6.10. Ще се постараем да изясним какви свойства притежава полиномът (6.35), фигуриращ във формулата на Тейлор за тази функция. Както и по-рано, ще означаваме този полином със символа $\varphi(x, a)$. Със символа $\varphi^{(n)}(x, a)$ означаваме n-тата производна на $\varphi(x, a)$ относно x. Като диференцираме формула (6.35) по x и положим след това $x=a$, получаваме следните равенства:

$$\begin{aligned}
&\varphi(a, a)=f(a),\\
&\varphi'(a, a)=f'(a),\\
&\varphi^{(2)}(a, a)=f^{(2)}(a),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi^{(n)}(a, a)=f^{(n)}(a).
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Тогава фигуриращият във формулата на Тейлор полином $\varphi(x, a)$ за произволна функция f има следните свойства: той и производните му до n-ти ред включително в точката $x=a$ са равни съответно на f и производните ѝ до n-ти ред.

6.8. Различни форми на остатъчния член. Формула на Маклорен

6.8.1. Остатъчният член във форма на Лагранж, Коши и Пеано. По-рано получихме формулата на Тейлор с остатъчен член в обща форма. Сега ще установим други възможни представяния на остатъчния член. Две от тях могат да бъдат получени като частен случай от общата формула.

Най-напред ще преобразуваме формулата за остатъчния член (6.34). Тъй като точката ξ е между точките a и x, то има такова число* θ от интервала $0<\theta<1$, че $\xi-a=\theta(x-a)$. При това $\xi=a+\theta(x-a)$, $x-\xi=(x-a)(1-\theta)$. Така формула (6.34) може да се запише във вида

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{6.45}$$

Ще разгледаме сега два важни частни случая на формула (6.45): 1) $p=n+1$; 2) $p=1$ (ще напомним, че във формулите (6.34) и (6.45) p може да бъде произволно положително число). Първият от тези частни случаи ($p=n+1$) довежда до ***остатъчен член във формата на Лагранж***

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{6.46}$$

Тази форма на остатъчния член се употребява най-често в приложенията. Остатъчният член във формата на Лагранж напомня последния член във формулата на Тейлор, само че $(n+1)$-вата производна на функцията f се пресмята не в точката a, а в някоя точка $\xi=a+\theta(x-a)$ между a и x.

Вторият от посочените по-горе частни случаи ($p=1$) води до ***остатъчен член във формата на Коши:***

$$R_{n+1}(x)=\frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n}}{n!}f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)). \tag{6.47}$$

Тъй като формите на Лагранж и Коши отговарят на различни стойности на p, а θ зависи от p, то стойностите на θ във формулите (6.46) и (6.47) са в общия случай различни. За оценка на някои функции формата на Коши е за предпочитане пред формата на Лагранж. Тези две форми на остатъчния член се използват обикновено в случаите, когато се иска при една или друга фиксирана стойност на x, различна от a, да се пресметне приближено стойността на функцията f.

Естествено е да заменим стойността на функцията $f(x)$ със стойността на полинома $\varphi(x, a)$ и да оценим грешката при това приближение. Срещат се задачи, в които ни интересува не числената стойност на тази грешка, а само порядъкът ѝ относно величината $(x-a)$. За тази цел е удобна друга форма за записване на остатъчния член, която сега ще изведем.

Ще докажем предварително една лема.

Лема 2. *Нека функцията g е дефинирана в околността Ω на точката a, има производни до ред $n-1$ в Ω и n-та производна в*

* Трябва да подчертаем, че ξ, а следователно и θ зависят от p.

точката a. Ако $g(a)=g'(a)=\dots=g^{(n)}(a)=0$, то за всяко $x\in\Omega$ е в сила съотношението

$$g(x)=o((x-a)^{n}). \tag{6.48}$$

Доказателство. Ще извършим доказателството индуктивно по отношение на натуралното число n.

За $n=1$ представянето (6.48) е в сила, тъй като g е диференцируема в точката a и $g'(a)=0$.

Да допуснем, че твърдението е вярно за n и да го докажем за $n+1$. От направеното допускане следва, че за всяко $x\in\Omega$ е в сила представянето

$$g'(x)=o((x-a)^{n}). \tag{6.49}$$

От друга страна, от теоремата за крайните нараствания имаме, че за всяко $x\in\Omega$ е в сила равенството

$$g(x)=g(x)-g(a)=(x-a)g'(\xi), \tag{6.50}$$

където ξ е между x и a, т. е. $|\xi-a|<|x-a|$.
От (6.49) и (6.50) получаваме

$$g(x)=(x-a)\,o((\xi-a)^{n})=(x-a)\,o((x-a)^{n})=o((x-a)^{n+1}).\ \square$$

Ще предполагаме, че функцията f има производна от $(n-1)$-ви ред в някоя околност на точката a и производна от n-ти ред в самата точка a.

При тези предположения ще разгледаме полинома $\varphi(x, a)$, определен от съотношението (6.35). Разликата между $f(x)$ и този полином, както и при доказателството на теорема 6.10, ще означим със символа $R_{n+1}(x)$, т. е. полагаме $R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x, a)$.

Ще докажем, че при направените предположения за остатъчния член $R_{n+1}(x)$ е в сила следното представяне:

$$R_{n+1}(x)=o((x-a)^{n}). \tag{6.51}$$

Представянето (6.51) е прието да се нарича ***остатъчен член във форма на Пеано****.

Като използваме установеното в края на предишния параграф свойство на полинома $\varphi(x, a)$, изразяващо се с равенствата (6.44), получаваме следните равенства:

$$R_{n+1}(a)=0,\ R'_{n+1}(a)=0,\ R''_{n+1}(a)=0,\ \dots,\ R^{(n)}_{n+1}(a)=0. \tag{6.52}$$

От равенствата (6.52) и лема 2 следва представянето (6.51).

В заключение ще запишем формулата на Тейлор с остатъчен член във формата на Пеано

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\dots+\frac{(x-a)^{n}}{n!}f^{(n)}(a)+o((x-a)^{n}).$$

* Джузепе Пеано — италиански математик (1853—1932).

6.8.2. Друго записване на формулата на Тейлор. Полагаме в (6.33) $a=x_0$, $x-a=\Delta x$ и вземаме остатъчния член във формата на Лагранж (6.46). При това $x=x_0+\Delta x$ и получаваме

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x\frac{f'(x_0)}{1!}+(\Delta x)^2\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \tag{6.53}$$
$$+\cdots+(\Delta x)^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+(\Delta x)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta\,.\,\Delta x)}{(n+1)!}$$

(тук θ е число от интервала $0<\theta<1$). Формулата на Тейлор (6.53) е естествено обобщение на формулата на Лагранж (6.5). Формулата на Лагранж (6.5) се получава от формулата (6.53) при $n=0$.

6.8.3. Формула на Маклорен. Формулата на Тейлор (6.33) с център в точката $a=0$ е прието да се нарича ***формула на Маклорен****, така че формулата на Маклорен представя функцията в околност на точката $x=0$. Ще запишем формулата на Маклорен за произволна функция f с остатъчен член във формите на Лагранж, Коши и Пеано:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(2)}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+R_{n+1}(x), \tag{6.54}$$

където остатъчният член има вида:

1) във форма на Лагранж

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \qquad (0<\theta<1); \tag{6.55}$$

2) във форма на Коши

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta x) \qquad (0<\theta<1); \tag{6.56}$$

3) във форма на Пеано

$$R_{n+1}(x)=o(x^n). \tag{6.57}$$

(Използвахме формулите (6.46), (6.47) и (6.48).)

Ще преминем към оценка на остатъчния член във формулата на Тейлор — Маклорен, намиране на разлаганията по формулата на Маклорен на най-важните елементарни функции и разглеждане на различни приложения на тази формула.

* Колин Маклорен — английски математик (1698—1746).

6.9. Оценка на остатъчния член. Разлагания на някои елементарни функции

6.9.1. Оценка на остатъчния член за произволна функция. Ще оценим остатъчния член за произволна функция f във формулата на Маклорен (6.54), взет във формата на Лагранж (6.55).

Ще предположим, че разглежданата функция f притежава следните свойства: съществува такова реално число M, че за всички номера n и за всички стойности на аргумента x от разглежданата околност на точката $x=0$ да е изпълнено неравенството

$$|f^{(n)}(x)|\leq M. \tag{6.58}$$

От неравенството (6.58) следва

$$|f^{(n)}(\theta x)|\leq M \quad \text{за } 0<\theta<1 \tag{6.59}$$

и затова от формулата (6.55) получаваме

$$|R_{n+1}(x)|=\frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1}|f^{(n+1)}(\theta x)|\leq M|x|^{n+1}/(n+1)!.$$

Така получаваме следната универсална оценка за остатъчния член в околност на точката $x=0$:

$$|R_{n+1}(x)|\leq M|x|^{n+1}/(n+1)!. \tag{6.60}$$

Напомняме, при всяко фиксирано x

$$\lim_{n\to\infty}|x|^{n+1}/(n+1)!=0$$

(вж. примера от 3.2.4). Оттук следва, че ако изберем достатъчно голям номер n, можем да направим дясната страна на (6.60) произволно малка. Това дава възможност да се използва формулата на Маклорен за приближено пресмятане на функции, притежаващи посоченото свойство, с произволна отнапред зададена точност. Ще приведем примери на функции, съвкупността от всички производни на които е ограничена в околност на точката $x=0$.

1. $f(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$. Съвкупността на всички производни на тази функция е ограничена във всеки сегмент $[-r, r]$ $(r>0)$ от числото $M=e^r$.

2. $f(x)=\cos x$ или $f(x)=\sin x$. Съвкупността от всички производни на всяка от тези функции е ограничена навсякъде върху безкрайната права от числото $M=1$.

6.9.2. Разлагане по формулата на Маклорен на някои елементарни функции.

1°. $f(x)=e^x$. Тъй като $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ за всяко n, формулата на Маклорен (6.54) има вида

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x), \tag{6.61}$$

където остатъчният член във формата на Лагранж е

(6.62) $$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\ (0<\theta<1).$$

Във всеки сегмент $[-r,\ r]$ $(r>0)$ поради $|e^{\theta x}|<e^r$ получаваме следната оценка за остатъчния член:

(6.62') $$|R_{n+1}(x)|<\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r.$$

2°. $f(x)=\sin x$. Тъй като $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\pi/2)$,

$$f^{(n)}(0)=\sin(n\pi/2)=\begin{cases} 0 & \text{при четно } n, \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{при нечетно } n, \end{cases}$$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

(6.63) $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{(n-1)/2}\frac{x^n}{n!}+R_{n+2}(x),$$

където n е нечетно число, а остатъчният член във формата на Лагранж е

$$R_{n+2}(x)=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\sin(\theta x+(n+2)\pi/2)\quad(0<\theta<1).$$

Очевидно във всеки сегмент $[-r,\ r]$ $(r>0)$ за остатъчния член е в сила следната оценка:

(6.64) $$|R_{n+2}(x)|\leqq r^{n+2}/(n+2)!.$$

3°. $f(x)=\cos x$. Тъй като $f^{(n)}(x)=\cos(x+n\pi/2)$,

$$f^{(n)}(0)=\cos(n\pi/2)=\begin{cases} 0 & \text{при нечетно } n, \\ (-1)^{n/2} & \text{при четно } n, \end{cases}$$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

(6.65) $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^{n/2}\frac{x^n}{n!}+R_{n+2}(x),$$

където n е четно число, а остатъчният член във формата на Лагранж е

$$R_{n+2}(x)=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos(\theta x+(n+2)\pi/2)\qquad(0<\theta<1).$$

Във всеки сегмент $[-r,\ r]$ $(r>0)$ получаваме за остатъчния член оценката (6.64).

4°. $f(x)=\ln(1+x)$. Тъй като

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(1+x)^{-n}(n-1)!,\ \ f(0)=0,\ \ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

(6.66) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_{n+1}(x).$$

Остатъчния член този път ще запишем и оценим във формите на Лагранж и Коши:

(6.67) $R_{n+1}(x)=(-1)^n x^{n+1}(1+\theta x)^{-n-1}/(n+1)$ (форма на Лагранж),

(6.68) $R_{n+1}(x)=(-1)^n x^{n+1}(1-\theta)^n(1+\theta x)^{-n-1}$ (форма на Коши).

За оценка на R_{n+1} за стойност на x от сегмента $0\leqq x\leqq 1$ е удобно да се използва формата на Лагранж (6.67). Ако във формулата (6.67) вземем абсолютните стойности, получаваме за всяко x от сегмента $0\leqq x\leqq 1$

(6.69) $$|R_{n+1}(x)|<1/(n+1).$$

От оценката (6.69) е очевидно, че за всяко x от сегмента $0\leqq x\leqq 1$ $R_{n+1}(x)\to 0$ при $n\to\infty$.

Да оценим сега R_{n+1} за отрицателни стойности на x от сегмента $-r\leqq x\leqq 0$, където $0<r<1$. За тази цел ще използваме формата на Коши (6.68).

Преписваме този остатъчен член във вида

(6.70) $$R_{n+1}(x)=(-1)^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}.$$

Като вземем под внимание, че за разглежданите стойности на x $(1-\theta)/(1+\theta x)<1$, от (6.70) за модула на остатъчния член получаваме

(6.71) $$|R_{n+1}(x)|<r^{n+1}/(1-r).$$

Тъй като $r<1$, то от оценката (6.71) следва, че $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n+1}(x)=0$.

5°. $f(x)=(1+x)^\alpha$, където α е реално число и $x>-1$. Тъй като

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$
$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),$$

формулата на Маклорен (6.54) има вида

(6.72) $$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_{n+1}(x),$$

където остатъчният член във формата на Лагранж е

(6.73) $$R_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$$

В частния случай, когато $\alpha=n$ е цяло число, $R_{n+1}(x)=0$ и получаваме известната от елементарния курс формула за бинома на Нютон:

(6.74) $$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n.$$

Ако трябва да получим разлагане не на двучлена $(1+x)^n$, а на двучлена $(a+x)^n$, то можем да изнесем a^n пред скоби и да използваме формула (6.74). Така ще получим

$$(a+x)^n=a^n(1+x/a)^n$$
$$=a^n\left(1+\frac{n}{1!}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{a}\right)^n\right).$$

Следователно общият случай на бинома на Нютон е частен случай от формулата на Маклорен.

6°. $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$. Понеже

$$f^{(n)}(x)=(1+x^2)^{-n/2}(n-1)!\,\sin(n(\operatorname{arc\,tg} x+\pi/2))$$

(вж. пример 5 от 5.6.2), то

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{при четно } n,\\ (-1)^{(n-1)/2}(n-1)! & \text{при нечетно } n\end{cases}$$

и формулата на Маклорен приема вида

(6.75) $$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^{(n-1)/2}\frac{x^n}{n}+R_{n+2}(x),$$

където n е нечетно число, а остатъчният член във формата на Лагранж е

$$R_{n+2}(x)=x^{n+2}(n+2)^{-1}(1+(\theta x)^2)^{-(n+2)/2}\sin((n+2)(\operatorname{arc\,tg} x+\pi/2))$$
$$(0<\theta<1).$$

За остатъчния член във всеки сегмент $[-r, r]$ (където $r>0$) имаме оценката

(6.76) $$|R_{n+2}(x)|<r^{n+2}/(n+2).$$

От оценката (6.76) е очевидно, че при всяко $r\leqq 1$ остатъчният член $R_{n+2}(x)$ клони към нула при $n\to\infty$.

6.10. Примери за приложения на формулата на Маклорен

6.10.1. Пресмятане на числото e на АСМ. В 3.2.3 въведохме числото e като граница на редицата $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и получихме за e груба оценка от вида $2\leqq e\leqq 3$. В тази точка ще покажем как може да се пресметне числото e с произволна точност.

Ще използваме формулата на Маклорен (6.61) и оценката на остатъчния член (6.62'), като ще положим в тях $x=r=1$. Ще получим

(6.77) $$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_{n+1}(1),$$

където

(6.78) $$|R_{n+1}(1)|\leqq e/(n+1)!<3/(n+1)!.$$

Като изберем в (6.77) и (6.78) n достатъчно голямо, можем да пресметнем с помощта на тези формули числото e с произволна отнапред зададена точност.

6.10.2. Доказателство за ирационалността на числото e. С помощта на формулата на Маклорен (6.77) ще докажем, че числото e е ирационално.

Като използваме за $R_{n+1}(1)$ представянето (6.62), при $x=1$ ще получим

(6.79) $$R_{n+1}(1)=e^{\theta}/(n+1)!,$$

където $0<\theta<1$. Следователно $R_{n+1}(1)$ удовлетворява неравенствата

(6.80) $$1/(n+1)!<R_{n+1}(1)<3/(n+1)!.$$

И така за e е в сила представянето (6.77) с неравенствата (6.80) за $R_{n+1}(1)$.

Ще предположим сега, че числото e е рационално, т. е. може да се представи във вида $e=m/n$, $n\geqq 2$.

Като изберем във формулата на Маклорен (6.77) номера n, равен на знаменателя на рационалната дроб $e=m/n$, и като умножим (6.77) с $n!$, ще получим, че всяко от числата $n!e$ и $n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$ е цяло, докато числото $n!\,R_{n+1}(1)$ поради неравенството (6.80) удовлетворява условията $1/(n+1)<n!\,R_{n+1}(1)<3/(n+1)$ и следователно не е цяло. Така при умножаване на формулата на Маклорен (6.77) с числото $n!$ получаваме съотношението

$$n!\,e-n!\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=n!\,R_{n+1}(1),$$

лявата страна на което е цяло число, а дясната не е цяло число. □

6.10.3. Пресмятане стойностите на тригонометричните функции. Лесно е да се убедим, че стойностите на тригонометричните функции $\sin x$ и $\cos x$ за x от сегмента $[0, \pi/4]$ напълно определят стойностите на тези функции за всяко x. Затова можем да се ограничим с пресмятането на $\sin x$ и $\cos x$ за стойности на x само от този сегмент. За да осигурим точност 10^{-4}, ще положим във формула (6.63) и в оценката (6.64) $n=5$, $r=\pi/4$. Тогава

$$|R_{n+2}(x)|=|R_7(x)|\leqq(\pi/4)^7/7!<10^{-4}$$

и затова за всяко x, удовлетворяващо условието $|x|\leqq\pi/4$, с точност до 10^{-4} имаме

$$\sin x\approx x-x^3/6+x^5/120.$$

Аналогично, като положим във формулата (6.65) и в оценката (6.64) $n=6$, $r=\pi/4$, получаваме

$$|R_{n+2}(x)|=|R_8(x)|\leqq(\pi/4)^8/8!<10^{-5}$$

и затова за всяко x, удовлетворяващо условието $|x|\leqq\pi/4$, с точност до 10^{-5}

$$\cos x\approx 1-x^2/2+x^4/24-x^6/720.$$

6.10.4. Пресмятане стойностите на логаритмичната функция. Всяко положително число a се представя, и то по единствен начин, във вида

(6.81) $$a=2^p\,.\,M,$$

където p е цяло число (с произволен знак), а M удовлетворява неравенствата*

(6.82) $$1/2\leqq M<1.$$

От (6.81) следва

(6.83) $$\ln a=p\ln 2+\ln M.$$

Като въведем вместо M нова променлива x, свързана с M чрез изразите

(6.84) $$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+x}{1-x},\quad x=\frac{M\sqrt{2}-1}{M\sqrt{2}+1},$$

ще получим от (6.82) и втората от формулите (6.84), че x не напуска границите на интервала**

(6.85) $$|x|<0{,}172.$$

* Наистина за всяко $a>0$, като положим $p=[\log_2 a]+1$, където $[x]$ е цялата част на числото x, $M=a\,.\,2^{-p}$, ще получим, че $p-1\leqq\log_2 a<p$, и затова $2^{p-1}\leqq a<2^p$, така че $a=2^p\,.\,M$, където $1/2\leqq M<1$.

** Достатъчно е да се намери максималната и минималната стойност на функцията, определена с втората от формулите (6.84) и сегмента $[1/2,1]$.

От (6.83) и първата от формулите на (6.84) следва

(6.86) $$\ln a=(p-1/2)\ln 2+\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

За пресмятане стойността на $\ln a$ ще използваме формулата (6.86), като ще развием в нея функцията $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ по формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Лагранж и ще отчетем, че x удовлетворява неравенството (6.85).

Тъй като при $n\geqq 1$ за тази функция f имаме

$$f^{(n)}(x)=(\ln(1+x))^{(n)}-(\ln(1-x))^{(n)}$$
$$=(-1)^{n-1}(1+x)^{-n}(n-1)!+(1-x)^{-n}(n-1)!,$$
$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & \text{при четно } n,\\ 2(n-1)! & \text{при нечетно } n,\end{cases}$$

то формулата на Маклорен (6.54) с остатъчен член във формата на Лагранж има вида

(6.87) $$f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\dots+\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}+R_{2n+3}(x),$$

където

(6.88) $$R_{2n+3}(x)=x^{2n+3}(2n+3)^{-1}\{(1+\theta x)^{-2n-3}+(1-\theta x)^{-2n-3}\},\ 0<\theta<1.$$

Ще оценим остатъчния член (6.88). От (6.85) получаваме, че изразът в големите скоби на (6.88) не надминава сумата $1+(1-0{,}172)^{-2n-3}$. Следователно за целия остатъчен член R_{2n+3} ще бъде в сила оценката

(6.89) $$|R_{2n+3}(x)|\leqq(0{,}172)^{2n+3}(2n+3)^{-1}\{1+(1-0{,}172)^{-2n-3}\}$$
$$\leqq(2n+3)^{-1}\{(0{,}172)^{2n+3}+(0{,}208)^{2n+3}\}.$$

От (6.86) и (6.87) следва, че за пресмятане на $\ln a$ може да се използва приближената формула

(6.90) $$\ln a\approx(p-1/2)\ln 2+2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right),$$

при която грешката не надминава стоящата в дясната страна на (6.89) величина.

При пресмятания с помощта на АСМ обикновено се използва формулата (6.90) при $n=6$. Ще отбележим, че при $n=6$ получаваме

$$\ln a\approx(p-1/2)\ln 2+2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{x^{13}}{13}\right)$$

с грешка, не по-голяма от $15^{-1}(0{,}172)^{15}+(0{,}208)^{15})<5\,.\,10^{-12}$.

6.10.5. Пресмятане стойностите на обратните тригонометрични функции. Достатъчно е да се ограничим с пресмятането на стойностите на $\operatorname{arc\,tg} x$, тъй като пресмятането на стойностите на функцията $\operatorname{arc\,ctg} x$, $\arcsin x$ и $\arccos x$ се свежда до пресмятане на стойностите на $\operatorname{arc\,tg} x$ с помощта на формулите:

$$\operatorname{arc\,ctg} x=\pi/2-\operatorname{arc\,tg} x,\quad \arcsin x=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x=\pi/2-\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Освен това достатъчно е да можем да пресмятаме стойностите на функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ само за положителни стойности на аргумента, тъй като при произволен знак на x имаме $\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{sgn} x\,.\,\operatorname{arc\,tg}|x|$. Нещо повече, пресмятането на стойностите на функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ за всяка стойност на аргумента x се свежда лесно към пресмятане стойностите на тази функция за стойности на аргумента, принадлежащи на сегмента $0\leq x\leq 1/8$.

Нека отначало аргументът x на функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ удовлетворява условието $x>1$. Полагаме

$$x_1=\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} 1)=\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x-\pi/4).$$

Тогава

$$\operatorname{arc\,tg} x_1=\operatorname{arc\,tg} x-\pi/4,\ \text{т. е.}$$

(6.91) $$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,tg} x_1+\pi/4,$$

при което

$$x_1=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)-\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 1)}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)\,.\,\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 1)}=\frac{x-1}{x+1}<1.$$

Така формулата (6.91) свежда пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на $x\geq 1$ до пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x_1$ за стойности на $x_1\leq 1$.

Нека сега k е кое да е от числата 0, 1, 2 или 3. Ако стойността $\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1}$ е известна при всяко $k=0$, 1, 2 и 3, ще покажем как пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за x от сегмента $2^{-k-1}\leq x\leq 2^{-k}$ се свежда до пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x_1$ за стойности на x_1 от сегмента $0\leq x_1\leq 2^{-k-1}$. Полагаме

$$x_1=\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1}).$$

Тогава

(6.92) $$\operatorname{arc\,tg} x=\operatorname{arc\,tg} x_1+\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1},$$

при което

(6.93) $$x_1=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)-\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1})}{1+\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 2^{-k-1})}=\frac{x-2^{-k-1}}{1+x\,.\,2^{-k-1}}.$$

Понеже $2^{-k-1}\leq x\leq 2^{-k}$, от (6.93) е очевидно, че $0\leq x_1\leq 2^{-k-1}$. Затова равенството (6.92) свежда пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на x от сегмента $2^{-k-1}\leq x\leq 2^{-k}$ до пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x_1$ за стойности на x_1 от сегмента $0<x_1<2^{-k-1}$.

Като приложим формула (6.92) най-много четири пъти (за $k=0$, 1, 2 и 3), пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на x от сегмента [0, 1] се свежда до пресмятането на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на x от сегмента [0, 1/8].

За пресмятането на стойностите на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на аргумента x от сегмента [0, 1/8] използваме формулата на Маклорен с остатъчен член във формата на Лагранж

(6.94) $$\operatorname{arc\,tg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+R_{2n+3}(x),$$

където

(6.95) $$R_{2n+3}(x)=x^{2n+3}(2n+3)^{-1}(1+(\theta x)^2)^{-(2n+3)/2}$$
$$\times\sin((2n+3)\operatorname{arc\,tg}(\theta x)+\pi/2)),\quad 0<\theta<1.$$

При всяко x от сегмента $0\leq x\leq 1/8$ за остатъчния член (6.95) е в сила оценката

(6.96) $$|R_{2n+3}(x)|\leq(2n+3)^{-1}\,.\,8^{-2n-3}.$$

От (6.94) следва, че за пресмятане на $\operatorname{arc\,tg} x$ за стойности на аргумента от сегмента $0\leq x\leq 1/8=0{,}125$ може да се използва приближената формула

(6.97) $$\operatorname{arc\,tg} x\approx x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

при която грешката не надминава величината от дясната страна на (6.96).

При смятане на АСМ може да се използва формула (6.97) при $n=6$. Тогава

$$\operatorname{arc\,tg} x\approx x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+\frac{x^{13}}{13}$$

с грешка, която не надминава $15^{-1}\,.\,8^{-15}<2\,.\,10^{-15}$.

6.10.6. Асимптотична оценка на елементарните функции и пресмятане на граници. Формулата на Тейлор — Маклорен е мощно средство за пресмятане на граници. От установеното в 6.9.2 разлагане на елементарните функции следват асимптотични оценки за тези функции, характеризиращи тяхното поведение в околността на точката $x=0$, т. е. при малки стойности на $|x|$, с точност до членовете от произволна степен n на малката величина x.

Като вземем във формулата на Маклорен за функциите e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ и $\operatorname{arc\,tg} x$ остатъчния член във формата на Пеано, ще получим, че за всяко n са в сила следните оценки:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

(6.98)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2$$

$$+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

Примери:

1. Като използваме втората от оценките (6.98), взета при $n=1$, пресмятаме границата

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^3/3! + o(x^4) - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0} (-1/3! + o(x)) = -1/3!.$$

2. $$I = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^3 \cdot \sin x}.$$

От вида на знаменателя може да се заключи, че определяща роля имат членовете от четвърта степен спрямо x (понеже $\sin x = x + o(x)$). Ползвайки формулите (6.98), записваме

(6.99) $$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! + o(x^5),$$

(6.100) $$\sin x = x + o(x),$$

(6.101) $$e^z = 1 + z + z^2/2 + o(z^2).$$

Очевидно при $z = -x^2/2$ от (6.101) получаваме

(6.102) $$e^{-x^2/2} = 1 - x^2/2 + x^4/8 + o(x^4).$$

Съгласно формулите (6.99), (6.100) и (6.102) търсената гранична стойност може да се запише във вида

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2/2 + x^4/8 + o(x^4) - 1 + x^2/2 - x^4/24}{x^4 + o(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1/8 + 1/24 + \alpha(x)}{1 + \alpha(x)} = 1/8 - 1/24 = 1/12.$$

(Тук със символа $\alpha(x)$ сме означили величината $x^{-4}o(x^4)$, която е безкрайно малка при $x \to 0$.)

3. $I = \lim_{x\to 0} (\cos x + x^2/2)^{-x(\sin x - x)}$.

Означаваме с y величината $y = (\cos x + x^2/2)^{-x(\sin x - x)}$. Тогава $I = \lim_{x\to 0} y$.

Като логаритмувзме* израза за y, ще имаме

$$\ln y = \frac{\ln(\cos x + x^2/2)}{x(\sin x - x)}.$$

Да пресметнем

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x + x^2/2)}{x(\sin x - x)}.$$

Тъй като $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^5)$, $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$, ще получим

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x^4/24 + o(x^5))}{-x^4/6 + o(x^5)}.$$

Ще отчетем сега, че $\ln(1+z) = z + o(z)$. От тази формула следва

$$\ln(1 + x^4/24 + o(x^5)) = x^4/24 + o(x^4),$$

така че

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{x^4/24 + o(x^4)}{-x^4/6 + o(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/24 + x^{-4}o(x^4)}{-1/6 + o(x)} = -1/4,$$

откъдето

$$I = \lim_{x\to 0} y = e^{-1/4}.$$

* При малки стойности на x изразът $\cos x + x^2/2$ е очевидно положителен.