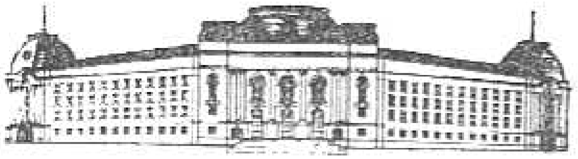
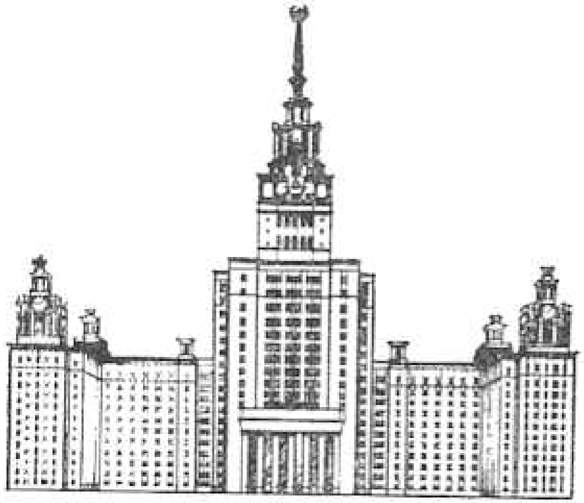




СЪВМЕСТНО ИЗДАНИЕ
МЕЖДУ
МОСКОВСКИ ДЪРЖАВЕН УНИВЕРСИТЕТ
„М. В. ЛОМОНОСОВ“
И СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ
„КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“,
НАПИСАНО ПО ЕДИННА ПРОГРАМА
ЗА ОБУЧЕНИЕТО НА СТУДЕНТИТЕ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ
ЗА СПЕЦИАЛНОСТИТЕ
МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА
И ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА

Владимир Александрович Илин
Виктор Антонович Садовничи
Благовест Христов Сендов

МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ

ПЪРВА ЧАСТ

Под редакцията на
академик А. Н. Тихонов

Второ преработено
издание

НАУКА И ИЗКУСТВО
1984
СОФИЯ

Владимир Бабев

Индекс 51

Книгата представлява учебник по математически анализ по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за първата година на обучение на студентите по специалностите „математика", „механика" и „приложна математика". В нея са включени теория на реалните числа, теория на границите, непрекъснатост на функции, диференциално и интегрално смятане на функции на една променлива и техните приложения, диференциално смятане на функции на повече променливи и теория на неявните функции (както в евклидови, така и в нормирани пространства).

Учебникът съдържа три ясно отделени нива на изложение: елементарно, основно и повишено. Елементарното ниво съответствува на програмата за техническите вузове със задълбочено изучаване на математика; основното ниво отговаря на програмата за специалностите „приложна математика" и „физика" в университетите; повишеното ниво включва допълнителен материал, който обикновено се изучава в механо-математическите факултети на университетите.

В предлагания „Математически анализ" са намерили голямо отражение порасналата роля на числените методи и приложението на математическия анализ за тяхното развитие.

Съдържание

3. Теория на границите

4. Непрекъснатост на функция

5. Диференциално смятане

6. Основни теореми за диференцируемите функции

7. Изследване графиката на функция и намиране на екстремални стойности

8. Примитивна функция и неопределен интеграл

9. Определен интеграл на Риман

10. Геометрични приложения на определения интеграл

11. Приближени методи за пресмятане корените на уравнения и определени интеграли

12. Метрични, топологични, нормирани пространства

13. Функции на няколко променливи

Предговор
към второто издание

Второто издание на учебника не се различава много от първото издание. Съкратени са няколко параграфа, главно от третото равнище. Усъвършенствувани са някои доказателства и са направени редица редакционни изменения. Отстранени са печатните грешки забелязани в първото издание.

В това издание са рационализирани означенията и е използван знакът □ за край на доказателството.

АВТОРИТЕ

Предговор
към първото издание

Днешният прогрес в математиката до голяма степен е свързан с развитието на електронната изчислителна техника. Математическите методи за изследване проникват във всички области на човешката дейност. Всичко това повишава интереса към математиката от страна на другите науки, използващи в различна степен математическите знания, и поставя нови задачи пред самата математика.

Във връзка с това възниква необходимостта да се напише учебник по математически анализ, в който са взети пред вид тези закономерности.

Обстоятелството, че решаването на математическите задачи се реализира чрез автоматични сметачни машини (АСМ) с помощта на алгоритми, поставя повишени изисквания за точност в алгоритмичното ниво на изложение на математическите дисциплини. Разбира се, едно такова изложение трябва да се основава върху класическите концепции на математиката, без да ги замъглява. Тези общи принципи заедно със задачата за точно, ясно и достъпно изложение са заложени в предлаганата на читателя книга. Тя е написана в съответствие със съгласуваната между Московския и Софийския университет програма за преподаване на математически анализ първа част.

В предлагания учебник е отделено голямо внимание на въпросите за оптимизиране, които играят важна роля в математиката и нейните приложения. По-специално в него за първи път в учебната литература от този род е изложен в завършен вид алгоритъм за намиране както на вътрешен, така и на контурен екстремум на функция. В учебника е отделено значително място за изучаване на въпроса за изходната информация, която е достъпна при решаването на дадена задача. Така например за намиране екстремума на

функция на една променлива авторите предлагат алгоритъм, основан само на информацията за стойностите на функцията в точките от дефиниционната ѝ област. Предлаганият алгоритъм не използва стойностите на производната на функцията в дефиниционната ѝ област и е приложим за намиране на екстремум на недиференцируеми функции. Тази постановка е типична при решаване на задачи за оптимизиране на производствени процеси.

При избора на метода на изложение авторите са се ръководили от това, че подборът на алгоритъма за решаване на дадена задача зависи от информацията, която може да бъде използвана при поставянето на тази задача. Така например при въвеждането на понятието определен интеграл на Риман авторите тръгват от концепция, основаваща се на използване стойностите на функцията в точки от сегмента. Тази концепция е очевидно за предпочитане в сравнение с въвеждането на определен интеграл на Риман с помощта на примитивна функция, тъй като тя отговаря на идеите на числените методи за пресмятане на определени интеграли чрез използване на АСМ.

В заключение искам да изкажа увереност, че предлаганата книга ще способствува за повишаване на математическата култура на читатели с различни изисквания към обема на математическите знания.

АКАД. А. Н. ТИХОНОВ

Увод

Тази книга е учебник по математически анализ, написана по съгласуваната между Московския и Софийския университет единна програма за първата година на обучение. Тя напълно обхваща материала за първата година на обучение, предвиден в програмата за студенти от университетите на СССР и НРБ по специалностите „математика“, „механика“ и „приложна математика“.

Особеност на книгата е, че тя съдържа три ясно отделими едно от друго нива на изложение: елементарно, основно и повишено, като за разбирането на материала от елементарното ниво не се изисква да се чете материалът от основното и повишеното ниво, а за разбиране на материала от основното ниво не се изисква да се чете материалът от повишеното ниво.

Елементарното ниво отговаря на програмите за техническите ВУЗ-ове в СССР с повишено изучаване на математически анализ; основното ниво на изложение отговаря на програмите за специалностите „приложна математика“ и „физика“ на университетите в СССР и България; материалът от повишеното ниво допълва материала от основното ниво с раздели, които обикновено се изучават в механо-математическите факултети на университетите.

Текстът, отделен в книгата с две вертикални черти, се отнася към повишеното ниво на изложение; текстът, отделен с една вертикална черта — към основното ниво, а останалият текст е съдържанието на елементарното ниво на изложение.

Книгата съдържа уводна глава, в която се илюстрира възникването на основните понятия в математическия анализ с цел да се улесни възприемането на следващия материал.

В нея е отразена нарасналата роля на числените методи и са поместени редица примери за приложение на апарата на математическия анализ при пресмятане стойностите на елементарни функции, интеграли, корени на уравнения и намиране на екстремални точки.

Днес в СССР и у нас има много учебници по математически анализ, сред които особено сполучливи по наше мнение са учебниците, написани от Л. Д. Кудрявцев и С. М. Николски в СССР и от Я. Тагамлицки в НР България. Авторите на тази книга несъмнено са изпитали влиянието на тези прекрасни учебници. При написването на текста те са използвали и някои материали от книгата на В. А. Илин и Е. Г. Позняк „Основи на математическия анализ", а също така опита от преподаването в университетите.

Авторите изказват дълбока благодарност на главния редактор на тази книга акад. А. Н. Тихонов за многобройните ценни съвети и забележки.

С особена благодарност те отбелязват труда на В. М. Говоров и Г. Христов, който далеч надхвърли рамките на обикновеното редактиране.

Авторите са благодарни също за ценните бележки на Л. Д. Кудрявцев, И. И. Ляшко, В. Л. Макарова, Д. Дойчинов и Т. Боянов.

1. Увод в математическия анализ

Ще започнем нашето изложение с изясняване на кръга от понятия и проблеми, които предстои да срещнем при изучаването на математическия анализ. При това веднага трябва да се уговорим, че дадените в тази уводна глава формулировки често имат предварителен характер и изискват допълнително уточняване.

1. Да разгледаме най-простия вид движение — движението на материална точка по права линия, и да изясним какви математически понятия възникват при описването на такова движение.

Да предположим, че материалната точка се движи по оста Oy, а x е времето, отчитано от даден начален момент. За характеризиране на това движение трябва да се знае правилото, посредством което на всеки момент от време x се съпоставя координата y на движещата се точка. Такова правило се нарича *закон на движение.*

Като се абстрахираме от физическия смисъл на променливите x и y, идваме до понятието функция, което е вече известно от курса по математика в средните училища. Това е едно от най-важните понятия в цялата математика.

*Ако по някакво правило на всяка стойност на една променлива x се съпоставя определена стойност $f(x)$ на друга променлива y, казваме, че променливата **y** е функция на променливата x, и пишем $y=y(x)$ или $y=f(x)$.*

*При това променливата x се нарича **аргумент** или **независима променлива**, а променливата y — **функция** или **зависима променлива**.*

*Буквата f в записа $y=f(x)$ често се нарича **характеристика** на разглежданата функция, а стойността $f(x)$, отговаряща на дадена фиксирана стойност на x, се нарича **частна стойност** или просто **стойност на функцията в точката** x.*

Ще отбележим веднага, че дадената формулировка на понятието функция се нуждае от уточняване, тъй като в нея нищо не се казва за това, от какво множество се вземат стойностите на независимата променлива x.

Множеството, от което се вземат стойностите на независимата променлива x, се нарича обикновено ***дефиниционна област на функцията.*** Задаването на дефиниционните области на функциите изисква развиването на теорията на числовите множества и общата теория на множествата.*

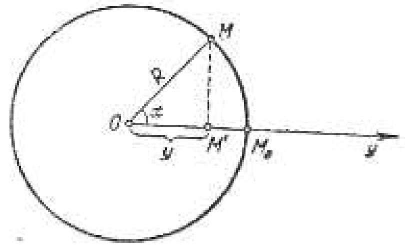
За означаване на аргумента, функцията и нейната характеристика могат да се използват различни букви. Така например записът $\alpha = \varphi(t)$ означава, че променливата α е функция на аргумента t, при това характеристиката на тази функция е означена с φ.

2. Често се налага да се разглежда такава функция $y = f(x)$, аргументът x на която е също функция $x = \varphi(t)$ на друга променлива t. В такъв случай се казва, че променливата y е ***сложна функция*** на аргумента t, а променливата x се нарича ***междинен аргумент.*** Такава сложна функция се нарича още ***суперпозиция*** на функциите f и φ и се означава с $y = f(\varphi(t))$.

Ще разгледаме един прост пример, илюстриращ използването на понятието сложна функция. Нека материалната точка M се върти равномерно по окръжност с радиус R с постоянна ъглова скорост ω. Ще намерим закона на движението на проекцията M' на точката M върху оста Oy, минаваща през центъра O на окръжността и лежаща в нейната равнина (фиг. 1.1). Естествено е да предполагаме, че в началния момент $t=0$ движещата се точка M се намира в точката M_0, която е пресечна точка на окръжността с оста Oy. Да означим с y координатата на проекцията M' на точката M върху оста Oy, а с x — ъгъла M_0OM, на който се завърта точката M за време t. Очевидно $y = R\cos x$, $x = \omega t$ и ще получим, че координатата y на проекцията M' е сложна функция на времето t от вида $y = R\cos x$, където $x = \omega t$. Тази сложна функция може да се запише във вида $y = R\cos\omega t$. Ще отбележим, че движението по закона $y = R\cos\omega t$ е прието да се нарича в механиката ***хармонично трептене.***

3. Важна характеристика на движението на материална точка е нейната скорост във всеки момент от времето t (моментна скорост). Ако материална точка се движи по оста Oy по закона $y = f(x)$, то като фиксираме произволен момент от време x и вземем някакво нарастване на времето Δx, можем да твърдим, че в

* В зависимост от характера на дефиниционната област на функцията и от множеството на стойностите ѝ в различните раздели на анализа функциите се наричат още ***изображения, оператори, функционали*** и т. н. Едно изображение се нарича ***взаимно еднозначно*** или ***1,1-значно,*** ако при него всяко y съответствува само на едно x. При взаимно еднозначните изображения съществува ***обратно изображение,*** съпоставящо на всяко y определено x (именно това, което съответствува на дадeното y при изходното изображение).



Фиг. 1.1

момента x движещата се точка има координата $f(x)$, а в момента $x + \Delta x$ — координата $f(x + \Delta x)$.

По такъв начин числото $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ представлява пътят, изминат от движещата се точка за интервала време от x до $x + \Delta x$.

Оттук следва, че частното

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{1.1}$$

наричано ***диференчно частно,*** представлява ***средна скорост*** на движещата се точка за интервала време от x до $x + \Delta x$.

Моментна скорост (или просто ***скорост***) *на движещата се точка се нарича границата, към която клони средната скорост* (1.1), *когато интервалът от време Δx клони към нула.*

Ако се използва символът за граница, моментната скорост $v(x)$ в момента x се записва така:

$$v(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.2}$$

Физическото понятие за моментна скорост води до основното математическо понятие производна. Като се абстрахираме от механичния смисъл на разглежданата по-горе функция f, *ще наречем производна на произволна функция f в дадена фиксирана точка x границата в дясната страна на* (1.2) *(разбира се, при условие, че тази граница съществува).*

За означаване на производната на функцията f в точката x се използва символът $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операцията намиране на производна се нарича **диференциране**

Горните разглеждания показват, че при дефиниране на производна на функция основна роля играе понятието граница на функция.

Предварителна представа за понятието граница на функция (а и за понятието производна) се дава в курса по математика в средното училище.

Строгото и последователно изучаване на понятието граница е възможно само на основата на строго изградена теория на реалните числа. Така например без строго изградена теория на реалните числа е невъзможно да се установи съществуването на следните две важни граници:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} \text{ и } \lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t},$$

които възникват, както ще видим по-нататък, при пресмятане производните на функциите $y=\sin x$ и $y=\log_a x$.

Горните разглеждания показват, че въпросът за съществуване и пресмятане на производни води до необходимостта от изграждане на строга теория на реалните числа и на тази основа — теория на границите.

4. Ще пристъпим към намирането на производните на две конкретни елементарни функции $y=\sin x$ и $y=\log_a x$ и ще изясним какви математически проблеми възникват при това.

Най-напред ще намерим производната на функцията $y=\sin x$ в произволна фиксирана точка x. За тази функция диференчното частно (1.1) има вида

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\cdot\cos(x+\Delta x/2).$$

Така производната на функцията $y=\sin x$ в точката x е равна по определение на границата

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}\cdot\cos(x+\Delta x/2)\right\} \tag{1.3}$$

(при условие, че тя съществува).

Може да се очаква, че

$$\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)=\cos x. \tag{1.4}$$

Ще отбележим обаче, че не за всяка функция f е изпълнено равенството

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x/2)=f(x). \tag{1.5}$$

Функцията f, за която е изпълнено равенството (1.5), *се нарича* ***непрекъсната*** (в точката x). Понятието непрекъснатост на функция е едно от най-важните математически понятия и ще бъде основно изучено в този курс по математически анализ. В частност ще бъде доказано, че функцията $y=\cos x$ е непрекъсната във всяка точка x, т. е. във всяка точка x е изпълнено равенството (1.4).

За пресмятането на границата (1.3) не е достатъчно да се докаже само верността на (1.4). Необходимо е още да се пресметне и границата

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{(\Delta x/2)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\quad(t=\Delta x/2). \tag{1.6}$$

По-нататък ще докажем, че границата (1.6), наричана ***първа забележителна граница,*** съществува и е равна на единица.

Само след като установим непрекъснатостта на функцията $y=\cos x$ (т. е. равенство (1.4)) и пресметнем първата забележителна граница (1.6), можем да твърдим, че границата (1.3) съществува и е равна на $\cos x$ или че производната на функцията $y=\sin x$ съществува и е равна на $\cos x$.

Ще минем сега към пресмятане на производната на функцията $y=\log_a x$, считайки, че $0<a\neq 1$, като ще фиксираме произволна точка $x>0$. За тази функция диференчното частно (1.1) е

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

($\Delta x\neq 0$ и се избира така, че $x+\Delta x>0$). Производната на функцията $y=\log_a x$ във всяка точка $x>0$ е равна по определение на границата

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} \tag{1.7}$$

(при условие, че тази граница съществува). Да преобразуваме дробта (1.7) чрез следните операции: 1) заменяме разликата от логаритми с логаритъм на частно; 2) умножаваме и разделяме на една и съща величина $x>0$); 3) внасяме множителя, стоящ пред логаритъма, под знака на логаритъма, с което той става степенен показател. В резултат за границата (1.7) получаваме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right\}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right\} \tag{1.8}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}\right\}=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{x}\log_a(1+t)^{1/t}\right\}$$

$$(t=\Delta x/x\to 0).$$

Да разгледаме отделно границата на израза $(1+t)^{1/t}$ при $t\to 0$:

$$\lim_{t\to 0}[(1+t)^{1/t}]. \tag{1.9}$$

Тази граница се нарича ***втора забележителна граница.*** В този курс ще бъде доказано, че тази граница съществува и че тя е равна на ирационалното число e, което с точност до петнадесетия знак след десетичната запетая е

$$e = 2{,}718281828459045\ldots$$

Освен това ще бъде доказана непрекъснатостта на функцията $y = \log_a x$ във всяка точка $x > 0$ и по-специално в точката $x = e$. Но тогава от съществуването на граница (1.9), равна на e, следва, че

$$\lim_{t\to 0} \log_a [(1+t)^{1/t}] = \log_a e.$$

Последното равенство и равенството (1.8) ни позволяват да твърдим, че границата на (1.7) е

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\log_a (x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x}\log_a e.$$

След като бъде пресметната втората забележителна граница и установена непрекъснатостта на функцията $y = \log_a x$ в точката e, ще можем да твърдим, че логаритмичната функция има производна и

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e \text{ при } 0<a\neq 1,\ x>0.$$

5. В математиката освен разгледаните две функции $y=\sin x$ и $y=\log_a x$ се изучават още и следните функции: $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, $y=x^\alpha$ (α — реално число), $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$, $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$, $y=\operatorname{arc\,ctg} x$. *Тези функции е прието да се наричат* ***основни елементарни функции.***

Забележително е, че при пресмятането на производните на основните елементарни функции не възникват никакви други трудности освен тези, които срещнахме при пресмятането на производните на функциите $y=\sin x$ и $y=\log_a x$. За пресмятане на производните на основните елементарни функции са необходими само аритметичните свойства на операцията граничен преход, двете забележителни граници и непрекъснатостта на всяка от тези функции.

Таблицата на производните на всички основни елементарни функции е следната:

1°. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x>0,\ \alpha$ — реално число).

2°. $(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$ $(0<a\neq 1,\ x>0)$,

при $a=e$ имаме $(\log_e x)' = \frac{1}{x}$.

3°. $(a^x)' = a^x \log_e a$ $(0<a\neq 1)$,

при $a=e$ имаме $(e^x)'=e^x$.

4°. $(\sin x)' = \cos x$.

5°. $(\cos x)' = -\sin x$.

6°. $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$ $(x\neq \pi/2 + n\pi$, където $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7°. $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$ $(x\neq n\pi$, където $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

8°. $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ $(|x|<1)$.

9°. $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$ $(|x|<1)$.

10°. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = 1/(1+x^2)$.

11°. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -1/(1+x^2)$.

Обосновка на горната таблица е една от задачите на тази част от математическия анализ, която се нарича ***диференциално смятане.***

Традиционната задача на класическото диференциално смятане е пресмятането на производната на всяка функция f, която се получава от изброените по-горе основни елементарни функции чрез краен брой суперпозиции и краен брой аритметични действия (събиране, умножение, изваждане и деление). Такава функция f е прието да се нарича ***елементарна функция.***

И така ***елементарна функция*** *се нарича такава функция, която е получена от основните елементарни функции чрез краен брой суперпозиции и четирите аритметични действия.*

Пример за елементарна функция е функцията

$$f(x) = 5^{\operatorname{arc\,tg}((x+1)/(x^2+2))}.$$

За пресмятане производната на произволна елементарна функция са необходими освен таблицата за производните на основните елементарни функции още правилата: 1) правило за диференциране на сложна функция; 2) правила за диференциране на сума, разлика, произведение и частно на функции.

Правилото за диференциране на сложна функция $y=f(u)$, където $u=\varphi(x)$, има следния вид: *ако функцията $u=\varphi(x)$ има производна в дадена точка x_0, а функцията $y=f(u)$ има производна в съответната точка $u_0=\varphi(x_0)$, то сложната функция $y=f(\varphi(x))$ има производна в точката x_0 и тази производна y' е*

$$y' = f'(\varphi(x_0)).\varphi'(x_0), \tag{1.10}$$

т. е. е равна на произведението на производната на функцията $y=f(u)$ в точката $u_0=\varphi(x_0)$ и производната на функцията $u=\varphi(x)$ в точката x_0.

Удобно е и едно друго записване на формулата (1.10), при което индексите долу показват по коя променлива се диференцира:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Верността на формулата за производна на сложна функция (1.10) лесно може да се подкрепи с интуитивни съображения, но строгото ѝ извеждане не е лесно и ще бъде дадено в следващото изложение.

Много по-просто е да се установят правилата за диференциране на сума, разлика, произведение и частно на две функции и те са:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

(в последната формула се изисква $v(x)$ да не е нула в разглежданата точка x).

Важни задачи на диференциалното смятане са обосноваването на таблицата за производните на основните елементарни функции и на правилата за диференциране на сложна функция, на сума, разлика, произведение и частно на функции, а също така и за производна на обратна функция. Това ще ни позволи да пресмятаме производната на всяка елементарна функция f.

Оказва се, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна функция, т. е. операцията диференциране не извежда вън от класа на елементарните функции. Това обстоятелство оправдава въвеждането на класа от елементарни функции като традиционен обект на класическия анализ.

6. Да се върнем към разглежданата механична задача за движение на материална точка по права линия — оста Oy, но този път ще предположим, че за всеки момент от време x е дадена моментната скорост $f(x)$ на движещата се точка и трябва да се намери законът на движение на тази точка.

Тъй като моментната скорост $f(x)$ е производна на функцията $y = F(x)$, определяща закона на движение, то задачата се свежда до това по дадена функция f да се намери такава функция F, чиято производна F' е равна на f. Като изоставим механичния смисъл на функциите f и F, идваме до математическите понятия ***примитивна функция*** и ***неопределен интеграл.***

Примитивна функция *на функцията f се нарича такава функция F, производната F' на която е равна на f.*

Ще отбележим, че ако функцията F е примитивна на функцията f, то и функцията $F+C$, където C е произволна константа, е също примитивна на функцията f (тъй като производната на константа е равна на нула).

По-трудно се установява обратното твърдение: Всеки две примитивни на една и съща функция f в интервала (a, b) се различават само със събираемо константа. Доказателството на това твърдение е по-сложно и ще бъде проведено в следващото изложение.

Въз основа на горното твърдение можем да констатираме следното: Ако функцията F е някоя примитивна на функцията f, то всяка примитивна на функцията f има вида $F+C$, където C е константа.

Съвкупността от всички примитивни на дадена функция f се нарича ***неопределен интеграл*** *от тази функция и се означава със символа*

$$\int f(x)\,dx.$$

Следователно, ако F е една от примитивните на функцията f то неопределеният интеграл от функцията f може да се представи в следния вид:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

където C е произволна константа.

Да се върнем към поставената задача за определяне на закона за движение на материална точка по оста Oy, ако е известна моментната скорост $f(x)$ в тази точка. Сега можем да твърдим, че търсеният закон за движение се определя от функцията $y = F(x)+C$, където F е коя да е примитивна на функцията f, а C е константа.

Както виждаме, по моментната скорост законът за движение се определя нееднозначно: с точност до адитивна константа C. За определяне на константата C трябва да се наложат допълнителни условия, например задаване на координатата y_0 на движещата се точка в даден момент от времето x_0. Като използваме това условие, ще получим $y_0 = F(x_0) + C$, откъдето $C = y_0 - F(x_0)$, така че окончателно търсеният закон на движението е

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0).$$

7. Ще разгледаме въпроса за намиране на примитивни функции и неопределени интеграли на някои елементарни функции. Тъй като функцията $f(x) = \cos x$ е призводна на $F(x) = \sin x$, то $F(x) = \sin x$ е една от примитивните на функцията $f(x) = \cos x$ и затова всяка примитивна на $f(x) = \cos x$ има вида $\sin x + C$, където C е константа, т. е.

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C.$$

Тези разсъждения имат общ характер.

Всяка формула на диференциалното смятане $F'(x) = f(x)$, която показва, че функцията f е производна на функцията F, поражда еквивалентна формула на интегралното смятане $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, т. е. неопределеният интеграл от функцията f е равен на $F + C$, където C е произволна константа.

Така от таблицата за производните на основните елементарни функции се получава следната таблица на важни неопределени интеграли:

1°. $\int x^\alpha \, dx = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) + C \qquad (\alpha \neq -1).$

2°. $\int \frac{dx}{x} = \log_e x + C \qquad (x > 0).$

3°. $\int a^x \, dx = a^x/\log_e a + C \qquad (0 < a \neq 1).$

По-специално при $a = e$ имаме $\int e^x \, dx = e^x + C.$

4°. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

5°. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

6°. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (x \neq \pi/2 + n\pi$, където $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

7°. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq n\pi$, където $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

8°. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (|x| < 1).$

9°. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$

Горната таблица ще бъде допълнена по-нататък с две важни правила за интегриране (интегриране чрез смяна на променливите, т. е. субституция, и интегриране по части).

Така се получава апарат за смятане в тази част на математическия анализ, която се нарича ***интегрално смятане.***

Трябва да отбележим, че за пресмятане на много важни неопределени интеграли този апарат е недостатъчен. Например той е недостатъчен за пресмятане на неопределения интеграл

$$\int e^{-x^2/2} dx, \tag{1.11}$$

който играе важна роля в теорията на вероятностите и нейните приложения.

Интегралът (1.11) е пример на интеграл от елементарна функция, който не е елементарна функция, така че *за разлика от диференцирането операцията интегриране не запазва класа на елементарните функции*. Това обстоятелство показва условността на понятието елементарна функция като традиционен обект на класическия анализ.

8. Отново ще предположим, че функцията f представлява моментната скорост на движеща се материална точка по оста Oy. Нека да пресметнем пътя, изминат от тази точка за интервала време от $x = a$ до $x = b$. За простота при разсъжденията ще предполагаме, че скоростта f е неотрицателна във всеки момент от времето x.

За решаване на поставената задача ще разделим интервала от време $[a, b]$ на малки подинтервали, ограничени от моментите $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

Естествено е да считаме, че във всеки такъв малък подинтервал от x_{k-1} до x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ скоростта f се изменя малко (което е изпълнено, когато f е непрекъсната), така че можем да я приемем във всеки подинтервал $[x_{k-1}, x_k]$ за константа със стойност $f(\xi_k)$, където ξ_k е някой момент от време в интервала $[x_{k-1}, x_k]$.

Следователно пътя $S[x_{k-1}, x_k]$, изминат от движещата се точка за подинтервала време от x_{k-1} до x_k, можем да считаме приблизително равен на произведението $f(\xi_k)$ и дължината $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ на подинтервала $[x_{k-1}, x_k]$, т. е.

$$S[x_{k-1}, x_k] \approx f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Тогава пътят $S[a, b]$, изминат от материалната точка за целия интервал време от $x = a$ до $x = b$, е приблизително равен на сумата

$$S[a, b] \approx f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\,\Delta x_n. \tag{1.12}$$

Сумата в дясната страна на (1.12) *се нарича* ***интегрална сума*** *или още* ***риманова сума.***

Естествено е да очакваме, че точната стойност на пътя $S[a, b]$ можем да получим, като преминем в интегралната сума (1.12) към граница, оставяйки най-голямата дължина Δx_k да клони към нула (при това, разбира се, броят n на подинтервалите ще расте неограничено). Като означим с d най-голямото от числата $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и използваме означението за граница, ще получим, че

$$S[a, b] = \lim_{d \to 0} \{f(\xi_1) \cdot \Delta x_1 + f(\xi_2) \cdot \Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n) \cdot \Delta x_n\}. \tag{1.13}$$

Разбира се, необходимо е да се уточни какво разбираме под граница на интегралната сума в (1.13). Този път операцията граничен преход е в нова, по-сложна форма, отколкото при обикновената граница на функцията $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Точното определение и изучаване на свойствата на граница от вида (1.13) е дадено в този курс. Тук ще отбележим само, че *границата в дясната страна на* (1.13) *се нарича* ***определен интеграл*** *от функцията* $f(x)$ *в граници от* a *до* b *и се означава със символа*

$$\int_a^b f(x)\, dx. \tag{1.14}$$

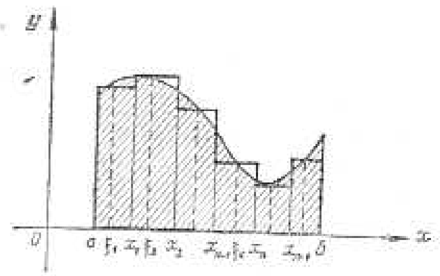
И така определеният интеграл (1.14) е точно равен на пътя $S[a, b]$, изминат от движеща се материална точка със скорост f за интервала време от $x=a$ до $x=b$.

Заедно с това е очевидно, че интегралната сума в дясната страна на (1.12) геометрично представлява сумата от лицата на правоъгълниците с основи Δx_k и височини $f(\xi_k)$. С други думи, интегралната сума в (1.12) е равна на лицето на стъпаловидната фигура, очертана на фиг. 1.2 с плътна линия. Естествено е да се очаква, че ако дължината d на най-голямото от числата Δx_k клони към нула, лицето на посочената стъпаловидна фигура ще клони към лицето на криволинейната фигура, лежаща под графиката на функцията f в интервала $a \leq x \leq b$ (на фиг. 1.2 тя е защрихована). Тази криволинейна фигура е прието да се нарича ***криволинеен трапец***.

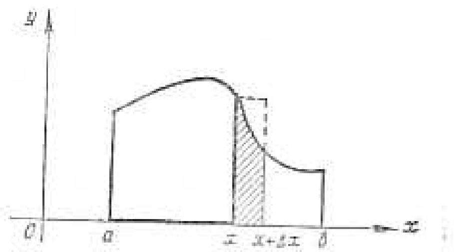
По такъв начин *определеният интеграл* (1.14) *е равен на лицето на споменатия криволинеен трапец*.

Разбира се, дадените нагледни разсъждения се нуждаят от уточнения. По-специално в системния курс по анализ подлежи на уточняване и самото понятие лице на криволинеен трапец и въобще лице на равнинна фигура.

И така горните разглеждания показват, че с понятието определен интеграл (1.14) са свързани две основни задачи: физическата задача за пресмятане дължина на път и геометричната задача за пресмятане лице на криволинеен трапец.



Фиг. 1.2



Фиг. 1.3

9. Сега ще се спрем на въпроса за връзката на определения интеграл (1.14) с въведения по-рано неопределен интеграл (или с примитивната), а също така и върху начините за пресмятане на определените интеграли.

Да означим с F определения интеграл от функцията f в граници от a до x, където a е някоя фиксирана стойност на аргумента, а x е променлива стойност. С други думи, полагаме*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt. \tag{1.15}$$

От геометрична гледна точка този интеграл, както пояснихме по-горе, е равен на лицето на трапеца, лежащ под графиката на функцията f в интервала $[a, x]$. На фиг. 1.3 този криволинеен трапец е ограден с плътна линия.

Чрез нагледни геометрични съображения, ще се убедим в това, че въведената от нас функция (1.15) е една от примитивните на функцията f, т. е. че $F'(x) = f(x)$.

Нека Δx е достатъчно малко нарастване на аргумента x. Очевидно разликата $F(x + \Delta x) - F(x)$ представлява лицето на „тесния" криволинеен трапец, защрихован на фиг. 1.3. От друга страна, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната във всяка точка x, т. е. ако стойностите на тази функция се менят малко при малки изменения на аргумента, то лицето на „тесния" криволинеен трапец ще се отличава малко от лицето $f(x)\Delta x$ на правоъгълника с основа Δx и височина $f(x)$.

Оттук следва, че при малко Δx диференчното частно

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \tag{1.16}$$

* Променливата под знака на определения интеграл означаваме с t, за да не се смесва с горната граница на интегриране x.

малко ще се различава от височината $f(x)$ на посочения правоъгълник, т. е. при $\Delta x \to 0$ границата на диференчното частно (1.16) трябва да бъде равна на $f(x)$. Заедно с това по определение тази граница е равна на производната $F'(x)$.

И така ние се убедихме, че $F'(x) = f(x)$, т. е. функцията (1.15) е една от примитивните на функцията f. Но тогава всяка примитивна на функцията f е равна на

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C, \tag{1.17}$$

където C е константа.

Направените разсъждения имат предварителен характер, но при наличие на развит апарат на математическия анализ може леко да се прецизират и строго да се докаже, че за всяка непрекъсната функция f съществува примитивна и тя се определя с равенството (1.17).

Равенството (1.17) на свой ред позволява да се установи връзката между определения интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ и всяка примитивна $\Phi(x)$ на функцията $f(x)$. За намиране на тази връзка ще вземем в равенството (1.17) за горна граница на интегрирането x отначало числото b, а после числото a. Така ще получим

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)\,dt + C = \int_a^b f(x)\,dx + C, \tag{1.18}$$

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)\,dt + C = C \tag{1.19}$$

(интегралът $\int_a^a f(t)\,dt$ е очевидно равен на нула).

Изваждаме от равенството (1.18) равенството (1.19) и получаваме знаменитата ***формула на Нютон — Лайбниц***

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

свеждаща въпроса за пресмятане на определения интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ до пресмятане на разликата от стойностите на произволна примитивна Φ на функцията f в точките b и a.

Обосноваването на формулата на Нютон — Лайбниц е една от важните задачи на математическия анализ.

10. Ще отбележим обаче, че точни аналитични изрази на примитивните функции могат да се получат само за тесен клас функции. Затова формулата на Нютон — Лайбниц не решава изцяло въпроса за пресмятане на определени интеграли.

Най-простият начин за приближено пресмятане на определен интеграл е т. нар. ***метод на правоъгълниците***, при който интегралът се заменя с интегралната сума от дясната страна на (1.12), в която за точките ξ_k се вземат средите на съответните им интервали $[x_{k-1}, x_k]$, а те от своя страна са с еднаква дължина, т. е. числата $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ са равни помежду си.

В този курс ще бъде доказано, че при определени изисквания за функцията f грешката, която правим при заменяне на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с посочената специална интегрална сума, е от порядък n^{-2}, където n е броят на подинтервалите.

Методът на правоъгълниците (както и много други методи за приближено пресмятане на определени интеграли) е много удобен при използване на автоматични сметачни машини (АСМ). Това обстоятелство и равенството (1.17) правят тези методи ефективно средство за намиране на примитивни и неопределени интеграли.

В таблица I привеждаме резултатите от пресмятането на калкулатор по метода на правоъгълниците на интеграла на Поасон

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$$

за някои стойности на x. В първата колона на таблицата са стойностите на аргумента x на интеграла на Поасон, във втората колона е посочен броят n на подинтервалите, а в третата колона — резултатите от пресмятанията.

От таблица I се вижда, че за пресмятане на интеграла на Поасон с точност до 10^{-5} при $x=0{,}1$ е достатъчно да вземем $n=10$, при $x=0{,}5$ е достатъчно $n=40$, а при $x=1$ е достатъчно да вземем $n=60$.

ТАБЛИЦА 1

x	n	$\approx F(x)$	x	n	$\approx F(x)$
0,1	2	0,0398319	0,5	10	0,191480
0,1	5	0,0398284	0,5	20	0,191466
0,1	10	0,0398279	0,5	40	0,191463
0,1	20	0,0398278	0,5	50	0,191463
0,2	10	0,0792609	1	30	0,341355
0,2	20	0,0792599	1	60	0,341347
0,2	30	0,0792597	1	80	0,341346
0,2	40	0,0792597	1	100	0,341345

11. Наред с приближените методи за пресмятане на интеграли важна роля в съвременната математика играят и приближените методи за определяне на корените на различни уравнения.

Да разгледаме уравнението

$$f(x)=0. \tag{1.20}$$

В този курс ще бъде доказано, че при определени изисквания за функцията f коренът $x=c$ на уравнението (1.20) може да бъде намерен като граница на редица x_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$, първият член на която се взема произволно в някакъв достатъчно широк интервал, а останалите се получават по итерационната формула

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n). \tag{1.21}$$

Този метод за приближено пресмятане на корен на уравнението (1.20) се нарича ***метод на Нютон*** (или ***метод на допирателните***).

Като конкретен пример ще разгледаме уравнението (1.20) с функция $f(x)$ от вида $f(x)=x^k-a$, където a е положително реално число, а $k\geqq 2$ — цяло положително число. За такава функция $f(x)$ положителен корен на уравнението (1.20) е $\sqrt[k]{a}$ (т. е. k-ти корен от положителното реално число a). Формулата (1.21), определяща последователните приближения по метода на Нютон, в този случай ще има вида

$$x_{n+1}=\frac{k-1}{k}x_n+\frac{a}{kx_n^{k-1}} \quad (n=1, 2, 3, \ldots) \tag{1.22}$$

(за да се убедим в това, достатъчно е да отчетем, че $f'(x)=kx^{k-1}$).

Формулата (1.22) дава един ефективен и леко реализуем на АСМ алгоритъм за пресмятане на k-ти корен от реално положително число a.

Ще приведем примери за пресметнати с АСМ корени по тази формула.

Всяко положително реално число a може да се представи (и то по единствен начин) във вида $a=2^L.x$, където L е цяло число, а x удовлетворява неравенствата $1/2\leqq x<1$. Ще избираме всеки път за първо приближение x_1 числото $x_1=2^{[L/k]}$, където k е степента на извлечения корен, а символът $[L/k]$ означава цялата част на числото L/k.

Резултатите от пресмятанията са събрани в таблица 2, в първата колона на която стоят числата a, от които извличаме корен, във втората колона е коренният показател, в третата колона са пресметнатите стойности на корените и в четвъртата колона е даден броят на направените итерации.

ТАБЛИЦА 2

a	k	$\sqrt[k]{a}$	n
2	2	1,414213181	4
3	2	1,732049942	5
4	2	1,999999046	5
2	5	1,148697853	5
3	5	1,245730400	5
4	5	1,319507599	6
2	10	1,071773529	5
3	10	1,116123199	6
4	10	1,148697853	6

12. Ние разгледахме постановката на най-важните задачи на математическия анализ, тръгвайки от най-простия механичен модел — движение на материална точка по права линия. Този модел естествено ни доведе до необходимостта да построим диференциалното и интегралното смятане за функции $f(x)$ на една независима променлива x. При описването на по-сложни задачи е естествено да възникне понятието функция на няколко независими променливи $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Така например температурата u на нагрявано тяло е функция на четири независими променливи: трите координати x_1, x_2, x_3 на точка от това тяло и времето t. Тази функция е естествено да означим със символа $u=f(x_1, x_2, x_3, t)$.

За функция на няколко променливи се въвежда понятието производна по всяка от променливите (такава производна се нарича ***частна производна*** по дадената променлива).

Важна задача за по-нататъшното развитие на математическия анализ е построяването на диференциално и интегрално смятане за функции на няколко променливи. В теорията на функциите на няколко променливи се изучава също така задачата за намиране на функция $y=f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, която е решение на функционалното уравнение $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)=0$. Тази задача може да се разглежда като обобщение на задачата за намиране на корен на уравнението (1.20).

Накрая математическият анализ, разбиран в най-широк смисъл, включва теорията на диференциалните уравнения (т. е. уравнения, съдържащи и производните на търсените функции).

През последните десетилетия широко развитие получиха теории, изхождащи от обобщено третиране на понятията функция, производна и решение на диференциално уравнение. Създаването на математическия анализ е едно от най-великите постижения на човешкия ум. То даде възможност от разглеждането на отделни, разпокъсани физически и геометрични задачи (като падане на тяло под действието на силата на тежестта, пресмятане на лица на фигури и др.) да се премине към развиване на общи методи за решаване на големи класове от задачи. Развитието на математическия анализ от своя страна оказва огромно влияние за прогреса на науката и техниката.

Класическият математически анализ е много удобен математически модел за описание на различни явления, при които се допуска, че разполагаме с точни стойности за всички изходни величини и можем да намерим точните стойности на пресмятаните величини.* Ще отбележим, че опирайки се на този модел, обикновено можем да оценим грешката, възникваща вследствие на това, че изходните величини са зададени с някаква грешка, и всички пресмятания могат да се направят само с определена точност.** По такъв начин апаратът на математическия анализ може да бъде използван за построяване на числени методи и оценки на грешките.

Накрая нека систематизираме най-важните проблеми, възникнали в резултат от направените предварителни разглеждания.

1. Уточняване на понятията реално число, множество и функция.

2. Развиване на теорията на границите и свързаното с тази теория понятие непрекъснатост на функция.

* Специално ще подчертаем, че този модел обхваща широки класове задачи, различни по своя характер — от физиката, биологията, икономиката, социологията и другите науки.

** Може например да се разглеждат изображения, поставящи в съответствие на всяка стойност на аргумента x цял интервал от стойности за y. Такива изображения в редица случаи представляват доста удобен математически апарат за отчитане на грешките от изходните данни и обработката на данните.

3. Построяване на апарата на диференциалното и интегралното смятане.

4. Построяване на теорията на определения интеграл като граница на суми от специален вид.

5. Развиване на приближени методи за пресмятане на определени интеграли и приближени методи за решаване на уравнения.

6. Изясняване на някои геометрични понятия (като лице на равнинна фигура, дължина на дъга и др.).