$$\int \frac{R(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}, \tag{8.67}$$

където R е някоя рационална функция. Освен това може да се покаже, че при всяка комбинация на абсолютните стойности и знаците на константите A, m и m' има субституция, която свежда интеграла (8.67) към т. нар. ***каноничен интеграл***

$$\int \frac{R_1(z^2)\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \tag{8.68}$$

в който с k е означена константа, удовлетворяваща условието $0<k<1$.

Всеки каноничен интеграл (8.68) се привежда с точност до събираемо елементарна функция до следните три стандартни интеграла:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{8.69}$$

и

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad (0<k<1).$$

Интегралите (8.69) е прието да се наричат ***елиптични интеграли*** съответно ***от 1-ви, 2-ри и 3-ти род.*** Тези интеграли, както е показано от Лиувил*, не са елементарни функции. Елиптичните интеграли от 1-ви и 2-ри род съдържат само един параметър k, приемащ реални стойности от интервала $0<k<1$, а елиптичните интеграли от 3-ти род съдържат освен това и параметър h, който може да приема и комплексни стойности.

Льожандър** подлага интегралите (8.69) на по-нататъшно опростяване чрез субституцията $z=\sin\varphi$ $(0\leqq\varphi\leqq\pi/2)$.

С помощта на тази субституция първият от интегралите (8.69) се преобразува във вида

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{8.70}$$

Вторият от интегралите (8.69) при тази смяна с точност до постоянен множител е равен на разликата на интеграла (8.70) и интеграла

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \tag{8.71}$$

Третият от интегралите (8.69) се преобразува във вида

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{8.72}$$

Интегралите (8.70), (8.71) и (8.72) е прието да се наричат ***елиптични интеграли*** съответно ***от 1-ви, 2-ри и 3-ти род във форма на Льожандър.***

* Жозеф Лиувил — френски математик (1809—1882).
** Адриан Мари Льожандър — френски математик (1752—1833).

9. Определен интеграл на Риман

В уводната глава беше показано, че към понятието определен интеграл водят редица важни задачи на естествознанието. В тази глава ще построим строга теория на определения интеграл на Риман.

9.1. Определение на интеграл. Интегруемост

Ще въведем понятията деление на сегмента $[a, b]$, дробене на това деление и обединение на две деления.

Определение 1. *Ще казваме, че е дадено едно* ***деление*** *на сегмента $[a, b]$, ако са дадени точките $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$, за които $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$.*

Това деление на сегмента $[a, b]$ ще означаваме със символа $\{x_k\}$.

Определение 2. *Делението $\{x'_k\}$ на сегмента $[a, b]$ се нарича* ***дробно*** *на делението $\{x_k\}$ на този сегмент, ако всяка точка на делението $\{x_k\}$ съвпада с някоя от точките на делението $\{x'_k\}$, т. е. $\{x_k\}\subset\{x'_k\}$.*

Определение 3. *Делението $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ се нарича* ***обединение*** *на двете деления $\{x'_k\}$ и $\{x''_k\}$ на този сегмент, ако всички точки на деленията $\{x'_k\}$ и $\{x''_k\}$ са точки на делението $\{x_k\}$ и делението $\{x_k\}$ не съдържа други точки.*

Ще отбележим, че обединението на две деления е дробно на всяко от тях.

Да разгледаме в сегмента $[a, b]$ функция f, която има крайни стойности във всички точки от този сегмент. По дадено деление $\{x_k\}$ ще намерим числото, т. нар. ***интегрална сума***, $\sigma(x_k,$

$\xi_k)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$, където ξ_k е някоя точка от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. Интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ зависи както от делението $\{x_k\}$, така и от избора на точките $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$. Ако означим с Δx_k разликата x_k-x_{k-1}, то интегралната сума може да се запише така:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k,\quad \xi_k\in[x_{k-1}, x_k].$$

Сегментите $[x_{k-1}, x_k]$ се наричат понякога ***частични сегменти***, а точките ξ_k — ***междинни точки***.

Числото $d=\max\{\Delta x_k : k=1, 2, 3, \dots, n\}$ ще наричаме ***диаметър на делението*** $\{x_k\}$. Ще въведем основните понятия граница на интегрални суми и интегруемост на функция по Риман.

Определение 4. *Числото I се нарича* ***граница на интегралните суми*** σ, *когато диаметърът d на делението $\{x_k\}$ клони към нула, ако за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, че при $d<\delta$ при всеки избор на междинните точки ξ_k е в сила неравенството*

$$|I-\sigma|<\varepsilon.$$

Лесно можем да се убедим, че съществува само една граница на интегралните суми σ при $d\to 0$.

За означаване на границата на интегрални суми се използва символът

$$I=\lim_{d\to 0}\sigma(x_k, \xi_k).$$

Определение 5. *Функцията f се нарича* ***интегруема по Риман*** *в сегмента $[a, b]$, ако за тази функция в дадения сегмент съществува границата I на интегралните ѝ суми σ, когато диаметърът d на делението $\{x_k\}$ клони към нула.*

Числото I се нарича ***определен интеграл на Риман*** на функцията f в граници от a до b и се означава със символа

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Следователно по определение

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{d\to 0}\sigma(x_k, \xi_k).$$

Числото a се нарича ***долна граница на интегрирането***, а числото b — ***горна граница на интегрирането***. Променливата x

под знака на определения интеграл се нарича **интеграционна променлива** и може да се означи с произволна буква:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(u)\,du=\int_a^b f(t)\,dt \text{ и т. н.}$$

Ще илюстрираме въведените понятия с примери.

Примери:

1. Геометрично тълкуване на интегралната сума. Ще разгледаме криволинеен трапец, т. е. фигурата, ограничена от графиката на непрекъсната неотрицателна функция f, зададена в сегмента $[a, b]$, правите $x=a$ и $x=b$, перпендикулярни на абсцисната ос, и сегмента $[a, b]$ от абсцисната ос (фиг. 9.1). Очевидно интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$, отговаряща на избраното деление $\{x_k\}$ и избраните междинни точки ξ_k, представлява лицето на стъпаловидната фигура, защрихована на този чертеж.

В следващата глава ще бъде дадено понятието лице на равнинна фигура и ще бъде установено, че при $d\to 0$ границата на тази стъпаловидна фигура е равна на лицето на криволинейния трапец.

2. Пример на най-проста интегруема по Риман функция. Ще покажем, че функцията $f(x)=c=\text{const}$ е интегруема във всеки сегмент $[a, b]$ и $\int_a^b c\,dx=c(b-a)$. Наистина при всяко деление $\{x_k\}$ и при всеки избор на точките $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$ имаме $f(\xi_k)=c$. Следователно

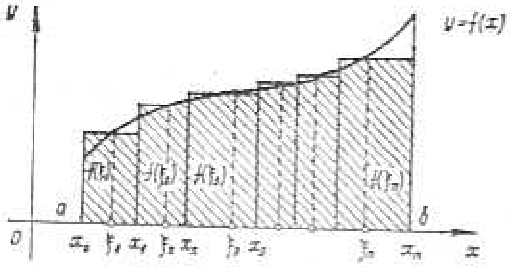
$$\begin{aligned}\sigma(x_k, \xi_k)&=c\,.\,\Delta x_1+c\,.\,\Delta x_2+\dots+c\,.\,\Delta x_n\\&=c\,.\,(\Delta x_1+\Delta x_2+\dots+\Delta x_n)=c\,.\,(b-a)\end{aligned}$$

за всяко деление $\{x_k\}$ и всеки избор на точките $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$. Затова

$$\int_a^b c\,dx=\lim_{d\to 0}\sigma(x_k, \xi_k)=\lim_{d\to 0}c\,.\,(b-a)=c\,.\,(b-a).$$

3. Пример на ограничена в сегмента $[a, b]$, но неинтегруема по Риман функция. Ще разгледаме функцията на Дирихле D, стойностите на която в рационалните точки на сегмента $[a, b]$ са равни на единица, а в ирационалните — на нула.

Избираме произволно деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$. Във



Фиг. 9.1

всеки от частичните сегменти съществува поне една рационална точка ξ_k. Написваме съответната интегрална сума

$$\sigma(x_k, \xi_k)=\sum_{k=1}^{n} D(\xi_k)\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=b-a.$$

Освен това в тези сегменти $[x_{k-1}, x_k]$ има ирационални точки η_k $\eta_k\in[x_{k-1}, x_k]$. Затова интегралната сума, отговаряща на дадения избор от междинни точки $\eta_k\in[x_{k-1}, x_k]$, ще се запише така:

$$\sigma(x_k, \eta_k)=\sum_{k=1}^{n} D(\eta_k)\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n} 0\,.\,\Delta x_k=0.$$

Ясно е, че интегралните суми на функцията на Дирихле нямат граница, когато диаметърът на делението клони към нула: при един избор на междинните точки ξ_k интегралната сума е равна на $b-a\neq 0$, а при друг — на нула и това е така, колкото и малък да е диаметърът на делението.

4. Неинтегруемост по Риман на неограничените в сегмента $[a, b]$ функции. Нека f не е ограничена в $[a, b]$. Ще покажем, че за всяко деление $\{x_k\}$ интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ може да стане по абсолютна стойност произволно голяма в зависимост от избора на междинните точки ξ_k. Наистина, ако функцията f не е ограничена в сегмента $[a, b]$, а сегментът $[a, b]$ е разделен на краен брой сегменти $[x_{k-1}, x_k]$, то функцията ще бъде неограничена поне в един частичен сегмент от делението. Без да нарушаваме общността, ще приемем, че f е неограничена в сегмента $[x_0, x_1]$. Избираме произволно в останалите сегменти $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, . . . , $[x_{n-1}, x_n]$ междинните точки $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ и ги фиксираме. Означаваме със $\sigma_1(x_k, \xi_k)$ величината

$$\sigma_1(x_k, \xi_k)=f(\xi_2)\,\Delta x_2+f(\xi_3)\,\Delta x_3+\cdots+f(\xi_n)\,\Delta x_n.$$

Ще разгледаме сега функцията f само върху сегмента $[x_0, x_1]$. Тъй като f е неограничена в този сегмент, то за всяко отнапред зададено положително число M ще се намери такава точка ξ_1 от този сегмент, че

$$|f(\xi_1)|\geq(|\sigma_1|+M)/\Delta x_1.$$

Оттук следва, че $|f(\xi_1)|\,\Delta x_1\geq|\sigma_1|+M$, и затова

$$|\sigma(x_k, \xi_k)|=\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\right|=|f(\xi_1)\,\Delta x_1+\sigma_1(x_k, \xi_k)|$$
$$\geq|f(\xi_1)|\,\Delta x_1-|\sigma_1(x_k, \xi_k)|\geq M.$$

Да изберем сега редица от такива числа $\{M_n\}$, че $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=+\infty$, а също и такава редица от деления на сегмента $[a, b]$, че съответните диаметри $d_n\to 0$. По посочения по-горе начин построяваме редицата от интегрални суми σ_n, удовлетворяващи условието $|\sigma_n|\geq M_n$. Тази редица от интегрални суми е разходяща, т. е. функцията f не е интегруема в интервала $[a, b]$.

9.2. Голяма и малка сума и техните свойства

9.2.1. Определение на голяма и малка сума. Пример 4 от 9.1 ни дава основание да разглеждаме само ограничени в даден сегмент функции (тъй като неограничените функции не са интегруеми по Риман). Нека $f(x)$ е ограничена в сегмента $[a, b]$ функция и $\{x_k\}$ е произволно деление на този сегмент. Понеже f е ограничена в сегмента $[a, b]$, тя е ограничена и във всеки частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$ и затова има точна долна граница m_k и точна горна граница M_k в частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$.

И така нека

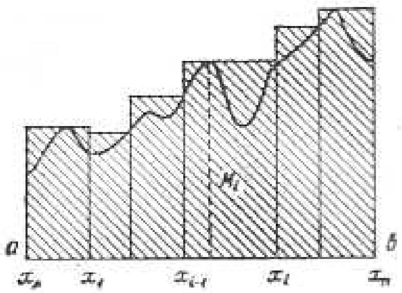
$$m_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\},\quad M_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}.$$

Определение 1. *Сумите*

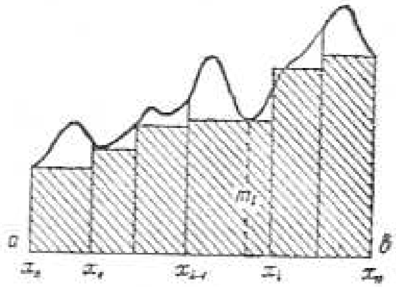
$$S=M_1\,\Delta x_1+M_2\,\Delta x_2+\cdots+M_n\,\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k$$

II

$$s=m_1\,\Delta x_1+m_2\,\Delta x_2+\cdots+m_n\,\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k$$



Фиг. 9.2



Фиг. 9.3

ще наричаме съответно ***голяма и малка сума на Дарбу на*** *функцията $f(x)$ за даденото деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$.*

Ще изясним геометричния смисъл на голямата и малката сума. Ще разгледаме отново криволинейния трапец, т. е. фигурата, ограничена от сегмента $[a, b]$ на оста Ox, отгоре — от графиката на непрекъснатата функция $y=f(x)\geq 0$ и правите $x=a$ и $x=b$, перпендикулярни на оста Ox (фиг. 9.2). Нека е дадено произволно деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$. Тъй като f е непрекъсната, числото M_k е нейната максимална стойност в сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. Затова голямата интегрална сума е равна на лицето на стъпаловидната фигура, съдържаща криволинейния трапец. Това лице е защриховано на фиг. 9.2.

Аналогично малката сума е равна на лицето на стъпаловидната фигура, която се съдържа в криволинейния трапец (фиг. 9.3). Числото m_k е минималната стойност на функцията f в частичния сегмент $[x_{k-1}, x_k]$.

9.2.2. Основни свойства на големите и малките суми. Ще докажем следните леми:

Лема 1. *Нека $\sigma(x_k, \xi_k)$ е интегрална сума, отговаряща на делението $\{x_k\}$. Тогава при всеки избор на междинните точки ξ_k са в сила неравенствата*

$$s\leq\sigma\leq S,$$

където s и S са съответно малката и голямата сума, отговарящи на това деление.

Доказателство. От определението на числата m_k и M_k заключаваме, че $m_k\leq f(\xi_k)\leq M_k$ за всяко $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$. Като умножим тези неравенства с Δx и ги сумираме по k от 1 до n, получаваме исканите неравенства. □

Лема 2. *Нека $\{x_k\}$ е произволно фиксирано деление на сегмента $[a, b]$, а ε е произволно фиксирано число. Тогава могат да се изберат така междинните точки ξ_k, че интегралната сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ и голямата сума S да удовлетворяват неравенството $0\leq S-\sigma(x_k, \xi_k)<\varepsilon$. Междинните точки η_k могат да се изберат и така, че интегралната сума $\sigma(x_k, \eta_k)$ и малката сума s да удовлетворяват неравенството $0\leq\sigma(x_k, \eta_k)-s<\varepsilon$.*

Доказателство. Нека $\{x_k\}$ е фиксирано деление на сегмента $[a, b]$ и $\varepsilon>0$. Ще докажем най-напред първото твърдение на лемата. Тъй като $M_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}$, то за избраното $\varepsilon>0$ съществува такава точка $\xi_k\in[x_{k-1}, x_k]$, че $0\leq M_k-f(\xi_k)<\varepsilon/(b-a)$. Като умножим тези неравенства с Δx_k и ги сумираме по k от 1 до n, ще получим

$$0\leq S-\sigma(x_k, \xi_k)<\varepsilon.$$

Аналогично, понеже $m_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}$, съществува такава точка $\eta_k\in[x_{k-1}, x_k]$, че

$$0\leq f(\eta_k)-m_k<\varepsilon/(b-a).$$

Последните неравенства след умножаване с Δx_k и сумиране водят до оценките $0\leq\sigma(x_k, \eta_k)-s<\varepsilon$. □

Следствие. *За всяко фиксирано деление $\{x_k\}$ са верни съотношенията*

$$S=\sup\{\sigma(x_k, \xi_k): \{\xi_k\}\},\ s=\inf\{\sigma(x_k, \eta_k): \{\eta_k\}\},$$

където точната горна и точната долна граница се вземат при всеки избор на междинните точки.

Лема 3. *При раздробяване на дадено деление голямата сума може само да се намали, а малката — само да се увеличи.*

Доказателство. Нека $\{x_k\}$ е дадено деление, а делението $\{x_k'\}$ се получава от него с добавяне на само една нова точка $\bar{x}$. Лесно се вижда, че общият случай се свежда към този. Да предположим, че $\bar{x}\in[x_{k-1}, x_k]$. Тогава в израза за S събираемото $M_k\Delta x_k$ се заменя с $M_k'(\bar{x}-x_{k-1})+M_k''(x_k-\bar{x})$, където

$$M_k'=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, \bar{x}]\},\ M_k''=\sup\{f(x): x\in[\bar{x}, x_k]\}.$$

Точната горна граница на функцията върху част от сегмента не надминава точната горна граница на функцията в целия сегмент. Затова $M_k'\leq M_k$, $M_k''\leq M_k$ и

$$M_k'(\bar{x}-x_{k-1})+M_k''(x_k-\bar{x})\leq M_k[(\bar{x}-x_{k-1})+(x_k-\bar{x})]=M_k\Delta x_k.$$

Тъй като всички други събираеми в израза за голямата сума са същите, то при добавяне на точката $\bar{x}$ голямата сума може само да се намали. Случаят, когато към дадено деление се прибавят няколко нови точки, се свежда очевидно към разглеждания. По същия начин се установява, че при раздробяване на дадено деление малката сума може само да се увеличи. □

Лема 4. *За две произволни деления на сегмента малката сума за едното от тези деления не надминава голямата сума за другото деление.*

Доказателство. Нека $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$ са две произволни деления на сегмента $[a, b]$, а S', s', S'', s'' са съответно големите и малките суми за тези деления. Да означим с $\{x_k\}$ обединението на деленията $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$, а с S и s голямата и малката сума на делението $\{x_k\}$. Ще отбележим, че $\{x_k\}$ е дребно деление както на делението $\{x_k'\}$, така и на делението $\{x_k''\}$. Съгласно лема 3 са изпълнени неравенствата

$$S' \geq S, \quad s'' \leq s.$$

Освен това от лема 1 имаме $s \leq S$. Като използваме тези три неравенства, заключаваме, че $s'' \leq S'$. Аналогично се установява, че $s' \leq S''$. □

Следствие. *Множеството на големите суми на функцията f, които отговарят на всички възможни деления на сегмента $[a, b]$, е ограничено отдолу. Множеството на малките суми е ограничено отгоре.*

Действително всяка голяма сума не е по-малка от коя да е фиксирана малка сума, така че множеството на големите суми е ограничено отдолу. Аналогични са разсъжденията за малките суми. Съгласно основната теорема 2.1 ще съществуват точна долна граница за множеството $\{S\}$ и точна горна граница за множеството $\{s\}$.

Определение 2. ***Горен интеграл на Дарбу*** *от функцията f се нарича точната долна граница I^* на множеството на големите суми $\{S\}$ на f за всички възможни деления на сегмента $[a, b]$.* ***Долен интеграл на Дарбу*** *от функцията $f(x)$ се нарича точната горна граница I_* на множеството от малките суми $\{s\}$ на f за всички възможни деления на сегмента $[a, b]$.*

Лема 5. *Долният интеграл на Дарбу никога не надминава горния интеграл на Дарбу, т. е. $I_* \leq I^*$.*

Доказателство. Допускаме противното, т. е. че $I_* > I^*$. Нека $I_* - I^* = \varepsilon > 0$.

За това ε съгласно определението на числото I^* съществува такова деление $\{x_k'\}$ на сегмента $[a, b]$, че за съответната му голяма сума S' е изпълнено неравенството $S' < I^* + \varepsilon/2$. По същия начин се показва съществуването на такова деление $\{x_k''\}$ на сегмента $[a, b]$, че малката му сума s'' удовлетворява неравенството $s'' > I_* - \varepsilon/2$. Като извадим почленно второто неравенство от първото, получаваме $S' - s'' < I^* - I_* + \varepsilon$. Но $I^* - I_* = -\varepsilon$, затова $S' - s'' < 0$, т. е. $s'' > S'$. Полученото неравенство противоречи на лема 4. Следователно $I_* \leq I^*$. □

Нека $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$, а $\{x_k\}$ е произволно деление на сегмента $[a, b]$, d е диаметърът на това деление. Означаваме с $\{x_k'\}$ делението, получено от делението $\{x_k\}$ с добавяне на l произволни нови точки. Нека S и s са голямата и малката сума за делението $\{x_k\}$, а S' и s' са голямата и малката сума за делението $\{x_k'\}$. В сила е следното твърдение:

Лема 6. *Разликите $S - S'$ и $s' - s$ удовлетворяват неравенствата $S - S' \leq (M - m) . l . d$, $s' - s \leq (M - m) . l . d$.*

Доказателство. Без да ограничаваме общността, може да смятаме, че към точките на делението $\{x_k\}$ е добавена само една точка $\bar{x}$, и да докажем, че в този случай са изпълнени неравенствата $S - S' \leq (M - m) d$, $s' - s \leq (M - m) d$.

Нека добавената точка $\bar{x}$ принадлежи на сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. Тогава голямата сума S ще се различава от голямата сума S' само с това, че събираемото $M_k \Delta x_k$ в сумата S ще се замени с двете събираеми $M_k'(\bar{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \bar{x})$ сумата S' (тук с M_k, M_k' и M_k'' са означени точните горни граници на f в сегментите $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_{k-1}, \bar{x}]$ и $[\bar{x}, x_k]$). Всички останали събираеми в сумите S и S' ще бъдат едни и същи. Оттук следва, че

$$S - S' = M_k \Delta x_k - [M_k'(\bar{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \bar{x})].$$

От последното съотношение, като отчетем свойствата на точните (горна и долна) граници $M_k \leq M$, $M_k' \geq m$, $M_k'' \geq m$, получаваме

$$S - S' \leq M \Delta x_k - m[(\bar{x} - x_{k-1}) + (x_k - \bar{x})]$$
$$= (M - m) \Delta x_k \leq (M - m) d.$$

Доказателството на оценката за малките суми е аналогично. □

Определение 3. *Числото A се нарича* ***граница на големите суми*** *S, когато диаметърът на деленията d клони към нула, ако за всяко положително число ε може да се намери такова положително число δ, че при $d < \delta$ да е изпълнено неравенството*

$$|S - A| < \varepsilon.$$

За означаване на тази граница е естествено да се използва символът

$$A = \lim_{d \to 0} S.$$

Аналогично се определя и границата B на малките суми s, когато d клони към нула.

Основна лема на Дарбу. *Горният интеграл на Дарбу I^* е равен на границата на големите суми S, когато диаметърът d на* *деленията клони към нула, т. е.* $\lim\limits_{d\to 0} S=I^*$. *Аналогично* $\lim\limits_{d\to 0} s = I_*$

Доказателство. Ще докажем първото твърдение на лемата. Ако $f(x)=c=\text{const}$, то $S=c(b-a)=I^*$ за всяко деление. Затова $\lim\limits_{d\to 0} S=I^*$. Ако функцията f не е константа, то $M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}>m=\inf\{f(x):x\in[a,b]\}$. Избираме произволно положително число ε. Съгласно определението на числото I^* съществува такова деление $\{x_k^*\}$, че голямата сума S^* на това деление да удовлетворява условието $S^*-I^*<\varepsilon/2$. Означаваме с l броя на точките на делението $\{x_k^*\}$, несъвпадащи с краищата на сегмента $[a, b]$.

Нека $\{x_k\}$ е произволно деление на сегмента $[a, b]$, диаметърът на което удовлетворява неравенството $d<\delta=\varepsilon/2l(M-m)$, и нека S е голямата сума на това деление. Раздробяваме делението $\{x_k\}$, като добавяме към него отбелязаните по-горе l точки на делението $\{x_k^*\}$. Така полученото деление означаваме с $\{x_k'\}$. Съгласно лема 6 голямата сума S' на последното деление ще удовлетворява условието

$$0\leq S-S'\leq (M-m)\,l\,.\,d<\varepsilon/2.$$

Но делението $\{x_k'\}$ може да се разглежда и като дробно на делението $\{x_k^*\}$, към което се добавят точките на делението $\{x_k\}$, несъвпадащи с краищата на сегмента $[a, b]$. Затова съгласно определението на I^* и лема 3

$$I^*\leq S'\leq S^*,\ \text{т. е. } 0\leq S'-I^*\leq S^*-I^*.$$

Но по-горе беше предположено, че $S^*-I^*<\varepsilon/2$, затова $0\leq S'-I^*<\varepsilon/2$. От това неравенство и от неравенството $0\leq S-S'<\varepsilon/2$ получаваме, че $0\leq S-I^*<\varepsilon$, когато d е по-малко от избраното по-горе δ. Следователно $I^*=\lim\limits_{d\to 0} S$. За малките суми доказателството е аналогично. □

9.3. Теореми за необходими и достатъчни условия за интегруемост на функции. Класове интегруеми функции

Доказаните свойства на големите и малките интегрални суми ни дават възможност да получим необходими и достатъчни условия за интегруемост по Риман на произволна ограничена функция.

9.3.1. Необходими и достатъчни условия за интегруемост.

Помощна теорема. *Ограничената функция f в сегмента $[a, b]$ е интегруема в този сегмент тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $I_*=I^*$.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$. Тогава съществува границата I на интегралните ѝ суми σ при клонене към нула на диаметъра d.

Съгласно определението за граница на интегралните суми за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че при всеки избор на междинните точки ξ_k за делението $\{x_k\}$ с диаметър $d<\delta$ е изпълнено неравенството

$$|I-\sigma(x_k, \xi_k)|<\varepsilon/4.$$

Според лема 2 за даденото деление $\{x_k\}$ може така да се изберат междинните точки ξ_k' и ξ_k'' във всеки частичен сегмент $[x_{k-1}, x_k]$, че да са изпълнени неравенствата

$$S-\sigma(x_k, \xi_k')\leq\varepsilon/4,\quad \sigma(x_k, \xi_k'')-s\leq\varepsilon/4.$$

Ще подчертаем, че за даденото деление $\{x_k\}$ са изпълнени и неравенствата

$$|I-\sigma(x_k, \xi_k')|<\varepsilon/4,\quad |I-\sigma(x_k, \xi_k'')|<\varepsilon/4.$$

Остава да отбележим, че

$$S-s=[S-\sigma(x_k, \xi_k')]+[\sigma(x_k, \xi_k')-I]+[I-\sigma(x_k, \xi_k'')]+[\sigma(x_k, \xi_k'')-s].$$

Оттук, като отчетем, че модулът на сума не надминава сумата от модулите на събираемите, получаваме $S-s<\varepsilon$. По такъв начин при клонене към нула на диаметъра d на делението $\{x_k\}$, границите на големите и малките интегрални суми съвпадат. Наистина, тъй като за всяко деление са изпълнени неравенствата

$$s\leq I_*\leq I^*\leq S,$$

то от неравенството $S-s<\varepsilon$, понеже $\varepsilon>0$ е произволно избрано, следва, че $I_*=I^*$.

Достатъчност. Нека $I_*=I^*=A$. Според основната лема на Дарбу $I^*=\lim\limits_{d\to 0} S$, $I_*=\lim\limits_{d\to 0} s$, т. е. горният интеграл е граница на големите суми, а долният интеграл е граница на малките суми, когато диаметърът на делението d клони към нула. Затова за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова число $\delta>0$, че при всяко деление с диаметър $d<\delta$ да са изпълнени неравенствата $I_*-s=A-s<\varepsilon$, $S-I^*=S-A<\varepsilon$. При всяко дадено деление с диаметър, по-малък от δ, всяка интегрална сума $\sigma(x_k, \xi_k)$ удовлетворява неравенството $s \leq \sigma(x_k, \xi_k) \leq S$, а следователно и неравенството

$$A-\varepsilon<s\leq\sigma(x_k, \xi_k)\leq S<A+\varepsilon.$$

Оттук получаваме $|A-\sigma(x_k, \xi_k)|<\varepsilon$ (за всяко деление с диаметър d, по-малък от δ), така че $A=\lim_{d\to 0}\sigma(x_k, \xi_k)$, т. е. функцията f е интегруема. □

Ще докажем една теорема, която има важно значение в теорията на римановия интеграл.

Основна теорема. *За да бъде ограничената в сегмента $[a, b]$ функция f, интегруема в този сегмент, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществува деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, за което $S-s<\varepsilon$.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$. При доказателство на необходимостта в спомагателната теорема показахме, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за всяко деление на сегмента $[a, b]$ с диаметър d, по-малък от δ, е изпълнено неравенството $S-s<\varepsilon$. Необходимостта е доказана.

Достатъчност. Дадено е, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, че за съответните големи и малки суми е изпълнено съотношението: $S-s<\varepsilon$. Тогава, тъй като

$$s\leq I_*\leq I^*\leq S,$$

то $I^*-I_*<\varepsilon$. От това неравенство и произволния избор на ε заключаваме, че $I^*=I_*$, а от помощната теорема получаваме, че фунцията f е интегруема. □

9.3.2. Класове интегруеми функции. По-горе в 9.1 на тази глава видяхме, че ако функцията е константа в сегмента $[a, b]$, тя е интегруема по Риман в този сегмент, а също така, че интегруемите в даден сегмент функции трябва да бъдат ограничени в този сегмент (вж. пример 4). Естествено възниква въпросът за описване на класове функции, интегруеми по Риман в сегмента $[a, b]$. Измежду тях важна роля играе класът на непрекъснатите в сегмента $[a, b]$ функции.

Теорема 9.1. *Непрекъснатите в сегмента $[a, b]$ функции са интегруеми по Риман в този сегмент.*

Доказателство. Нека f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Избираме произволно число $\varepsilon>0$. Понеже f е непрекъсната, тя е равномерно непрекъсната и затова за избраното $\varepsilon>0$ съществува такова число $\delta>0$, че ако ξ' и ξ'' са произволни точки от сегмента $[a, b]$, за които $|\xi'-\xi''|<\delta$, то $|f(\xi')-f(\xi'')|<\varepsilon/(b-a)$. Оттук следва, че разликата между точните горна и долна граници на f в произволен сегмент с дължина, по-малка от δ, е по-малка от числото $\varepsilon/(b-a)$. Избираме деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ с диаметър d, по-малък от указаното $\delta: d<\delta$. Нека

$$M_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}, \quad m_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}.$$

Съгласно дефиницията за голяма и малка сума

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k.$$

Като използваме, че за избраното деление $M_k-m_k<\varepsilon/(b-a)$, ще получим

$$S-s<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k=\varepsilon.$$

От основната теорема заключаваме, че функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$. □

Следващата теорема дава достатъчно условие за интегруемост на един клас прекъснати функции.

Ще казваме, че *точката x е покрита* от интервал, ако се съдържа в този интервал.

Теорема 9.2. *Ако функцията f е дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$, то тя е интегруема по Риман в този сегмент, ако за всяко число $\varepsilon>0$ съществуват краен брой интервали, покриващи всички точки на прекъсване на тази функция, с обща дължина, по-малка от ε.*

Доказателство. Нека M и m са точната горна и точната долна граница на функцията f в сегмента $[a, b]$. Ще отбележим, че ако $M=m$, т. е. ако f е константа, тя е интегруема. Затова ще считаме, че $M>m$. Нека $\varepsilon>0$ е произволно число. Покриваме точките на прекъсване на функцията f с краен брой интервали, сумата от дължините на които е по-малка от числото $\varepsilon_1=\varepsilon/2(M-m)$. Точките на сегмента $[a, b]$, които не принадлежат на тези интервали, образуват множество от краен брой непресичащи се сегменти. Ще наречем тези сегменти допълнителни. Понеже във всеки от тях функцията е непрекъсната, тя е равномерно непрекъсната. Следователно съществуват такива числа $\delta_p>0$, че ако $|\xi'-\xi''|<\delta_p$, то $|f(\xi')-f(\xi'')|<\varepsilon/2(b-a)$, за произволни ξ' и ξ'', принадлежащи на p-тия допълнителен сегмент.

Нека $\delta=\min\delta_p$. Тогава, ако вземем такова деление на допълнителните сегменти на частични сегменти, че диаметърът на всеки от частичните сегменти да не надминава δ, то разликата между точните горна граница M_p и долна граница m_p на функцията f в p-тия частичен сегмент ще бъде не по-голяма от $\varepsilon/2(b-a)$. Като обединим всички деления на допълнителните сегменти и избраните по-горе интервали, взети с техните краища, ще получим деление $\{x_k\}$ на целия сегмент $[a, b]$. За така построеното общо деление на $[a, b]$ имаме

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=\sum{}'(M_k-m_k)\Delta x_k+\sum{}''(M_k-m_k)\Delta x_k,$$

където сумата с прим съдържа всички събираеми, отговарящи на частичните сегменти, образувани от интервалите, покриващи точките на прекъсване, а сумата със саконд — всички останали. Да разгледаме първото събираемо в дясната страна на горното равенство. Понеже $M_k-m_k<M-m$ за всяко k, то

$$\sum{}'(M_k-m_k)\Delta x_k\leq(M-m)\sum{}'\Delta x_k<(M-m)\varepsilon_1=\varepsilon/2.$$

По-нататък съгласно казаното по-горе от равномерната непрекъснатост на функцията f в допълнителните сегменти получаваме

$$\sum{}''(M_k-m_k)\Delta x_k<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum{}''\Delta x_k\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\varepsilon/2.$$

По такъв начин намерихме деление $\{x_k\}$, за което $S-s<\varepsilon$. От основната теорема получаваме, че функцията f е интегруема. □

Следствие 1. *Функцията f, ограничена в сегмента $[a, b]$ и имаща само краен брой точки на прекъсване, е интегруема в този сегмент. По-специално частично непрекъснатите в даден сегмент функции са интегруеми в този сегмент.*

Наистина според предишната теорема е достатъчно да изберем интервалите, покриващи точките на прекъсване, с еднаква дължина, по-малка от $\varepsilon/2p$, където p е броят на точките на прекъсване на функцията f.

Следствие 2. Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, а функцията g съвпада с функцията f във всички точки на сегмента $[a, b]$ с изключение евентуално на краен брой точки. Тогава функцията g е интегруема в сегмента $[a, b]$ и $\int_a^b f(x)\,dx$ $=\int_a^b g(x)\,dx$.

Теорема 9.3. *Всяка монотонна в сегмента $[a, b]$ функция f е интегруема в този сегмент.*

Доказателство. Случаят, когато f е константа в сегмента $[a, b]$, може да се изключи. Ще разгледаме например ненамаляваща в сегмента $[a, b]$ функция f. Нека $\varepsilon>0$ е произволно число. Избираме деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ с диаметър $d<\varepsilon/(f(b)-f(a))$. Ще отбележим, че понеже f не е константа, то $f(b)>f(a)$. Да оценим разликата $S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$, където M_k и m_k са точната горна и точната долна граница на f в $[x_{k-1}, x_k]$. Получаваме $S-s<\varepsilon\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)/(f(b)-f(a))$. Но за ненамаляваща функция $\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)=f(b)-f(a)$. Затова $S-s<\varepsilon$ и функцията f е интегруема. За нерастяща функция разсъжденията са аналогични. □

Ще докажем сега една теорема за интегруемост на суперпозиция от две функции.

Теорема 9.4. *Нека функцията f е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$, M и m са точната ѝ горна и точната ѝ долна граница в този сегмент. Нека освен това функцията φ да е дефинирана в сегмента $[m, M]$ и да удовлетворява следното условие*: съществува такова неотрицателно число C, че за произволни x_1 и x_2 от сегмента $[m, M]$ да е изпълнено неравенството $|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\leq C|x_1-x_2|$, тогава функцията $h(x)=\varphi(f(x))$ е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$.*

Доказателство. Нека ε е произволно положително число. Поради интегруемостта на функцията f в сегмента $[a, b]$ може да се избере такова разделяне $\{x_k\}$ на този сегмент, че $S-s<\varepsilon/C$, където S и s са съответно горната и долната интегрална сума на функцията f, а C е константата от условието на теоремата. Нека M_k и m_k са точните граници на функцията f в частичните сегменти Δx_k на разделянето $\{x_k\}$, а M_k^* и m_k^* са съответните точни граници за функцията h. Тогава съгласно условието, наложено на функцията φ за произволни точки x и y, принадлежащи на частичния сегмент Δx_k от разделянето $\{x_k\}$, е в сила неравенството $h(x)-h(y)\leq|h(x)-h(y)|=|\varphi(f(x))-\varphi(f(y))|\leq C|f(x)-f(y)|\leq C(M_k-m_k)$.

Понеже неравенството $h(x)-h(y)\leq C(M_k-m_k)$ е изпълнено

* Това условие се нарича условие на Липшиц. Очевидно, ако една функция удовлетворява условието на Липшиц, тя е непрекъсната.

за произволни точки x и y, принадлежащи на сегмента Δx_k, то още повече ще бъде изпълнено и неравенството $M_k^*-m_k^* \leq C(M_k-m_k)$. Нека сега S^* и s^* да са съответните горна и долна интегрална сума на функцията h за избраното разделяне $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$. Тогава $S^*-s^*=\sum_{k=1}^{n}(M_k^*-m_k^*)\Delta x_k \leq C\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k<\varepsilon$. Тъй като ε е произволно положително число, то съгласно основната теорема, функцията h е интегруема в сегмента $[a, b]$. □

Теорема 9.4'. *Нека f е функция, интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$, M и m са точните ѝ горна и долна граница в $[a, b]$. Нека освен това функцията $\varphi(x)$ да е непрекъсната в сегмента $[m, M]$. Тогава сложната функция $h(x)=\varphi(f(x))$ е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$.*

Доказателство. Нека $C=\max\{|\varphi(t)|: m\leq t\leq M\}$ и ε е произволно положително число. Полагаме $\varepsilon_1=\varepsilon/(b-a+2C)$. Поради това, че φ е равномерно непрекъсната в $[m, M]$, съществува такова $\delta>0$, че $|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon_1$, ако $|s-t|<\delta$ и $s, t\in[m, M]$. Избираме δ още така, че $\delta<\varepsilon_1$. Поради интегруемостта на функцията f в $[a, b]$ съществува такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, за което съответната горна и долна интегрална сума на f удовлетворяват неравенството $S-s<\delta^2$. Нека

$$M_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\},\quad m_k=\inf\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\},$$

$$M_k^*=\sup\{h(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\},\quad m_k^*=\inf\{h(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}.$$

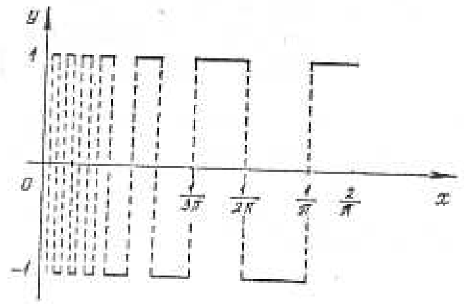
Разделяме целите числа $1, 2, \ldots, n$ на две множества A и B: числото $k\in A$, ако $M_k-m_k<\delta$, числото $k\in B$, ако $M_k-m_k\geq\delta$. Ако $k\in A$, то $M_k-m_k<\delta$, следователно от равномерната непрекъснатост на функцията φ в сегмента $[m, M]$ получаваме $M_k^*-m_k^*\leq\varepsilon_1$. Наистина, ако се разглежда индекс $k\in A$, ще получим, че $M_k-m_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}-\inf\{f(x): x\in[x_{k-1}, x_k]\}<\delta$, т. е. при $x, y\in[x_{k-1}, x_k]$ разликата $f(x)-f(y)=s-t$ по абсолютна стойност не надминава δ: $|s-t|<\delta$, $s=f(x)$, $t=f(y)$. Следователно поради равномерната непрекъснатост на функцията φ получаваме

$$|\varphi(f(x))-\varphi(f(y))|=|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon_1.$$

Тъй като последното неравенство е изпълнено при всяко x и всяко y от сегмента $[x_{k-1}, x_k]$, то и

$$\sup\{\varphi(f(x)): x\in[x_{k-1}, x_k]\}-\inf\{\varphi(f(x)): x\in[x_{k-1}, x_k]\}<\varepsilon_1.$$

По-нататък, ако $k\in B$, то очевидно $M_k^*-m_k^*\leq 2C$. Да запишем



Фиг. 9.4

сега разликата S^*-s^* (S^* и s^* са съответно голямата и малката сума на функцията h за разглежданото деление $\{x_k\}$):

$$S^*-s^*=\sum_{k=1}^{n}(M_k^*-m_k^*)\Delta x_k=\sum_{k\in A}(M_k^*-m_k^*)\Delta x_k$$

$$+\sum_{k\in B}(M_k^*-m_k^*)\Delta x_k\leq\varepsilon_1(b-a)+2C\sum_{k\in B}\Delta x_k.$$

Остава да направим оценка на величината $\sum_{k\in B}\Delta x_k$. Имаме

$\delta\sum_{k\in B}\Delta x_k\leq\sum_{k\in B}(M_k-m_k)\Delta x_k\leq\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k$, тъй като разликата $M_k-m_k\geq 0$, $\Delta x_k>0$, то събираемите в последната сума са само неотрицателни. Отчитайки, че при даденото деление $\{x_k\}$ имаме $\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k=S-s<\delta^2$, получаваме $\delta\sum_{k\in B}\Delta x_k\leq\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k<\delta^2$, т. е. $\sum_{k\in B}\Delta x_k<\delta$. Понеже $\delta<\varepsilon_1$, окончателно намираме

$$S^*-s^*\leq\varepsilon_1(b-a)+2C\sum_{k\in B}\Delta x_k\leq\varepsilon_1(b-a)+2C\delta$$

$$<\varepsilon_1(b-a+2C)=\varepsilon.$$

Следователно функцията h е интегруема. □

Следствие. *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, то при всяко положително число α функцията $|f|^\alpha$ е интегруема в този сегмент.*

Наистина достатъчно е да разгледаме непрекъснатата функция $\varphi(t)=|t|^\alpha$ и да приложим предишната теорема.

Примери:

1. Пример за интегруема функция с безкрайно много точки на прекъсване. Нека в сегмента $[0, 2/\pi]$ е дадена функцията (фиг. 9.4)

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\sin x^{-1}), & 0<x\leq\frac{\pi}{2},\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Тази функция има прекъсване от 1-ви род във всички точки $x_k=1/k\pi$, $k=1, 2, \ldots$, а също така и прекъсване от 2-ри род в точката 0. Фиксираме числото $\varepsilon>0$. Покриваме точката $x=0$ с интервала $(-\varepsilon/4, \varepsilon/4)$. Вън от този интервал има само краен брой p точки на прекъсване на функцията. Числото p зависи от избраното $\varepsilon>0$. Покриваме всяка от тези точки с интервал с дължина, по-малка от $\varepsilon/2p$. Тогава всички точки на прекъсване на функцията f ще бъдат покрити с краен брой интервали, сумата от дължините на които не надминава $\varepsilon/2+p\,.\,\varepsilon/2p=\varepsilon$. Според теорема 9.2 функцията f е интегруема в сегмента $[0, 2/\pi]$.

2. От интегруемостта на функцията $|f|$ не следва изобщо интегруемостта на f. Наистина да разгледаме функцията D_1, равна на единица за рационални x, и на минус единица за ирационални x. Тогава $|D_1(x)|=1$ е интегруема. Също както и за функцията на Дирихле D, се показва, че функцията D_1 не е интегруема (вж. пример 3 от 9.1).

9.4. Свойства на определения интеграл

9.4.1. Свойства на интеграла. Ще изясним основните свойства на интеграла на Риман.

а) *Нека функциите f и g са интегруеми в сегмента $[a, b]$. Тогава функцията $f\pm g$ е също интегруема в този сегмент и*

$$\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)\,dx.$$

Наистина при произволно деление на сегмента $[a, b]$ и при произволен избор на междинните точки ξ_k е изпълнено равенството

$$\sum_{k=1}^{n}[f(\xi_k)\pm g(\xi_k)]\,\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\,\Delta x_k\pm\sum_{k=1}^{n}g(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

Затова, ако съществува границата на дясната страна, когато диаметърът на делението клони към нула, то ще съществува и границата на лявата страна. Поради линейните свойства на този вид граница получаваме исканото. □

б) *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, то функцията $C.f$, където $C=\text{const}$, е също интегруема в този сегмент и*

$$\int_a^b C\,.\,f(x)\,dx=C\int_a^b f(x)\,dx.$$

Наистина за всяко деление на сегмента $[a, b]$ и всеки избор на междинните точки ξ_k е изпълнено съотношението

$$\sum_{k=1}^{n}C\,.\,f(\xi_k)\,\Delta x_k=C\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

откъдето, както по-горе, получаваме твърдението б). □

Следствие. *Линейна комбинация $\sum_{i=1}^{n}C_if_i$ на интегруеми функции f_i е интегруема функция.*

в) *Нека функциите f и g са интегруеми в сегмента $[a, b]$. Тогава $f\,.\,g$ е интегруема в този сегмент.*

Написваме очевидното тъждество

$$4f(x)\,.\,g(x)=(f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2.$$

Разглеждаме функцията $\varphi(t)=t^2$. Съгласно теорема 9.4 от интегруемостта на коя да е функция следва интегруемостта на нейния квадрат. Тъй като функциите $f+g$ и $f-g$ според свойство а) са интегруеми, то са интегруеми и квадратите им, а следователно (поради тъждеството) функцията $f.g$ е интегруема. □

г) *Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$. Тогава тази функция е интегруема и във всеки сегмент $[c, d]$, съдържащ се в сегмента $[a, b]$.*

Избираме произволно число $\varepsilon>0$ и такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, че $S-s<\varepsilon$. Добавяме към точките на делението $\{x_k\}$ точките c и d. За големите суми S' и малките суми s' на новото деление $\{x'_k\}$ съгласно лема 3 от 9.2 също ще бъде вярна оценката: $S'-s'<\varepsilon$. Да разгледаме делението $\{x_k\}$ на сегмента $[c, d]$, образувано от точките на делението $\{x'_k\}$ от целия сегмент

$[a, b]$. За големите и малките суми $\bar{S}$ и $\bar{s}$ на делението $\{\bar{x}_k\}$ е изпълнено очевидното съотношение $\bar{S}-\bar{s}<S'-s'$, тъй като всяко неотрицателно събираемо $(M_k-m_k)\Delta x_k$ в израза $\bar{S}-\bar{s}$ е събираемо и в израза $S'-s'$, така че $\bar{S}-\bar{s}<\varepsilon$ и функцията f е интегруема в сегмента $[c, d]$. □

Ще считаме по определение, че *интеграл на Риман от функция* в граници от точката a до точката a е равен на нула, т. е.* $\int_a^a f(x)\,dx=0$. Това свойство трябва да се разглежда като уговорка. Ще се условим също така, че по определение $-\int_a^b f(x)\,dx = +\int_b^a f(x)\,dx$ *при* $a<b$ *за всяка интегруема функция*. Тази формула трябва също да се разглежда като уговорка.

д) *Ако функцията f е интегруема в сегментите* $[a, c]$ *и* $[c, b]$ *то f е интегруема и в сегмента* $[a, b]$ *и*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

При $a=b$ твърдението е вярно съгласно казаното по-горе.

Ще предположим най-напред, че $a<c<b$. Избираме произволно число $\varepsilon>0$. Нека $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$ са такива деления на сегментите $[a, c]$ и $[c, b]$, че във всеки от тези сегменти $S-s<\varepsilon/2$. Нека $\{x_k\}$ е деление на сегмента $[a, b]$, образувано от точките на деленията $\{x_k'\}$ и $\{x_k''\}$. Очевидно разликата между голямата и малката сума на делението $\{x_k\}$ няма да надминава ε. Интегруемостта на функцията f в сегмента $[a, b]$ е доказана. Нека сега $\{x_k\}$ е произволно деление на сегмента $[a, b]$, съдържащо точката c. Тогава

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k=\sum{}' f(\xi_k)\,\Delta x_k+\sum{}'' f(\xi_k)\,\Delta x_k,$$

където $\sum{}'$ отговаря на делението на сегмента $[a, c]$, а $\sum{}''$ – на сегмента $[c, b]$. Тъй като това е вярно за всяко деление, то като

* Функцията е дефинирана и има крайна стойност в точката a.

минем към граница при клонене на диаметъра на делението към нула, получаваме

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Ако точката $c\notin[a, b]$, то сегментът $[a, b]$ се съдържа или в $[c, b]$, или в $[a, c]$. Нека например $c<a<b$. Съгласно свойство г) функцията f е интегруема в $[a, b]$. Наистина f е интегруема в $[c, b]$ по условие, а $[a, b]\subset[c, b]$. По-нататък, понеже $c<a<b$, то

$$\int_c^a f(x)\,dx+\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^b f(x)\,dx.$$

Но, както казахме вече, $\int_c^a f(x)\,dx=-\int_a^c f(x)\,dx$. □

Ще отбележим, че формулата, изразяваща свойство д), може да се запише и така:

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx+\int_b^a f(x)\,dx=0.$$

9.4.2. Оценки за интегралите.

а) *Ако функцията f е интегруема в сегмента* $[a, b]$ *и* $f(x)\geqq 0$ *за всяко* $x\in[a, b]$, *то интегралът от f в този сегмент е неотрицателен.*

Доказателството следва от това, че за всяко деление $\{x_k\}$ и всеки избор на ξ_k интегралната сума

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\geqq 0.$$

В този случай границата на интегралните суми също ще бъде неотрицателна. □

б) Интегриране на неравенства. *Ако функциите f и g са интегруеми в сегмента* $[a, b]$ *и* $f(x)\leqq g(x)$ *за всяко* $x\in[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqq\int_a^b g(x)\,dx.$$

Действително функцията $g-f$ е интегруема и неотрицателна в $[a, b]$, така че

$$\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx \geqq 0.$$

Но тогава от свойство *а*) на 9.4.1 следва $\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geqq 0.$ □

в) *Нека функцията f е непрекъсната и неотрицателна в сегмента $[a, b]$. Ако съществува поне една точка $x_0 \in [a, b]$, за която $f(x_0)>0$, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \alpha > 0.$$

Наистина нека $f(x_0)=\beta>0$. Тогава поради непрекъснатостта на функцията f в точката x_0 съществува такава околност на точката x_0, че за всеки сегмент $[c, d]$, $c \neq d$, изцяло лежащ в тази околност, да е изпълнено неравенството $f(x) > \beta/2$. Но тогава според оценката от б) $\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_c^d f(x)\,dx \geqq \int_c^d (\beta/2)\,dx = \beta(d-c)/2 = \alpha > 0.$ □

г) *Ако функцията f е интегруема по Риман в сегмента $[a, b]$, то и функцията $|f|$ е интегруема в този сегмент и*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Разглеждаме непрекъснатата функция $\varphi(t)=|t|$. Съгласно теорема 9.4 от интегруемостта на f следва интегруемостта на $\varphi(f(x)) = |f(x)|$. Да изберем сега числото $\alpha=\pm 1$, така че $\alpha \int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$.

Очевидно $\alpha f(x) \leqq |\alpha f(x)| = |f(x)|$. Тогава $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \alpha \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \alpha f(x)\,dx \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx.$ □

д) Първа формула за средните стойности. *Нека всяка от функциите f и g е интегруема в сегмента $[a, b]$ и освен това g е неотрицателна (или неположителна) в този сегмент.*

Означаваме с M и m точните граници на f в сегмента $[a, b]$. Тогава съществува такова число μ, удовлетворяващо неравенствата $m \leqq \mu \leqq M$, че е в сила следната формула:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{9.1}$$

При допълнителното предположение за *непрекъснатост на f в сегмента $[a, b]$* може да се твърди, че *съществува такава точка ξ от този сегмент, че е изпълнено равенството*

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx. \tag{9.2}$$

Формула (9.2) се нарича ***първа формула за средните стойности.*** *Формула (9.1) също се нарича* ***първа формула*** *за средните стойности.*

Формулата (9.2) следва непосредствено от формулата (9.1) и от това, че непрекъснатата в сегмента $[a, b]$ функция f достига в този сегмент точните си граници M и m и приема всяка междинна стойност μ $(m<\mu<M)$.

Следователно достатъчно е да докажем само формулата (9.1). Съгласно определението за долна и горна граница за всяко x от $[a, b]$ са изпълнени неравенствата

$$m \leqq f(x) \leqq M.$$

Като предположим за определеност, че g е неотрицателна в $[a, b]$, и умножим последните неравенства с $g(x)$, ще получим, че за всяко x от $[a, b]$ имаме

$$m\cdot g(x) \leqq f(x)\cdot g(x) \leqq M\cdot g(x). \tag{9.3}$$

Тъй като освен това според свойства б) и в) от 9.4.1 всяка от функциите $m\cdot g$, $M\cdot g$ и $f\cdot g$ е интегруема в $[a, b]$, то оценката (9.3) показва, че са верни следните неравенства:

$$\int_a^b m\cdot g(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqq \int_a^b M\cdot g(x)\,dx,$$

* Функция, интегруема в $[a, b]$, е ограничена в $[a, b]$ и затова съществуват точните ѝ граници в $[a, b]$.

или, че

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leqq \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \leqq M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{9.4}$$

Възможни са два случая: 1) $\int_a^b g(x)\,dx=0$; 2) $\int_a^b g(x)\,dx>0$.

В първия случай от неравенството (9.4) следва, че $\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=0$, и затова формула (9.1) е вярна за всяко μ.

Във втория случай, като разделим неравенствата (9.4) на $\int_a^b g(x)\,dx$, получаваме

$$m<\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\Big/\int_a^b g(x)\,dx \leqq M.$$

За да завършим доказателството на формула (9.1), остава да означим с μ числото

$$\mu=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\Big/\int_a^b g(x)\,dx.\ \square$$

Ще формулираме отделно доказаната теорема за частния случай $g(x)\equiv 1$.

Следствие. *Нека функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, а M и m са точните граници на f в този сегмент. Тогава съществува такова число μ, удовлетворяващо неравенствата $m\leqq\mu\leqq M$, че е в сила формулата*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\mu(b-a).$$

При допълнителното предположение за непрекъснатост на f в сегмента $[a, b]$ може да се твърди, че съществува такава точка ξ от този сегмент, че е в сила формулата

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(\xi).$$

Тази формула се нарича ***формула за средните стойности.***

е) ***Втора формула за средните стойности.*** *Нека функцията f е интегруема, а функцията g е монотонна в сегмента $[a, b]$. Тогава съществува такова число ξ от този сегмент, че*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx+g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx.$$

Ще установим отначало следното твърдение:

Лема на Абел*. *Нека числата p_i удовлетворяват условията $p_i\geqq p_j\geqq 0$ при $i\leqq j$, а числата $S_i=\sum_{k=1}^{i} q_k$, $i=1, 2, 3, \dots, n$, удовлетворяват неравенствата $m\leqq S_i\leqq M$, където q_k, m, M са също някакви числа. Тогава $mp_1\leqq \sum_{k=1}^{n} p_k q_k\leqq Mp_1$.*

Доказателство. Лесно се проверява, че

$$\sum_{k=1}^{n} p_k q_k=\sum_{k=1}^{n} p_k(S_k-S_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} S_k(p_k-p_{k+1}),$$

където $S_0=0$, $p_{n+1}=0$. Тъй като $p_k\geqq 0$, $p_k-p_{k+1}\geqq 0$, то като заменим в последното равенство всяко S_i най-напред с m, а после с M, получаваме

$$m\sum_{k=1}^{n}(p_k-p_{k+1})\leqq\sum_{k=1}^{n} p_k q_k\leqq M\sum_{k=1}^{n}(p_k-p_{k+1}),$$

но

$$\sum_{k=1}^{n}(p_k-p_{k+1})=p_1-p_{n+1}=p_1.\ \square$$

Ще установим сега втората формула за средните стойности.

Да допуснем, че функцията g не расте в $[a, b]$ и е неотрицателна. Функцията fg е интегруема като произведение на две интегруеми функции. Нека M_k и m_k са точните граници на f в частичните сегменти $[x_{k-1}, x_k]$. Тогава очевидно

$$\sum_{k=1}^{n} m_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k\leqq\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k\leqq\sum_{k=1}^{n} M_k\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k.$$

* Нилс Хенрик Абел — норвежки математик (1802—1829).

Поради монотонността на $g(x)$ е вярна оценката

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,g(x_{k-1})\,\Delta x_k \leqq g(a)\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\,\Delta x_k.$$

Понеже f е интегруема, сумата в лявата страна на последното неравенство клони към нула, когато диаметърът d на делението клони към нула. Следователно за всички числа μ_k, за които $m_k \leqq \mu_k \leqq M_k$, сумите

$$\sum_{k=1}^{n} m_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k,\quad \sum_{k=1}^{n}\mu_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k,\quad \sum_{k=1}^{n} M_k g(x_{k-1})\,\Delta x_k$$

клонят към интеграла $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ при $d \to 0$. Това следва от двустранните оценки за интегралната сума на функцията $f\,.\,g$.

Съгласно свойство д) числата μ_k, където $m_k \leqq \mu_k \leqq M_k$, могат да се изберат така, че $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = \mu_k \Delta x_k$.

Ще отбележим сега, че функцията $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тъй като

$$\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = \mu\,.\,\Delta x,$$

$$\inf\{f(t) : t \in [x,\ x+\Delta x]\} \leqq \mu \leqq \sup\{f(t) : t \in [x,\ x+\Delta x]\}$$

и следователно $\Delta F \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Да разгледаме числата $S_i = \sum_{=1}^{i}\mu_k \Delta x_k = \int_a^{x_i} f(t)\,dt.$

Ясно е, че $m \leqq S_i \leqq M$, където m и M са точните граници на функцията F в сегмента $[a, b]$. Въвеждаме следните означения:

$$p_k = g(x_{k-1}),\quad q_k = \mu_k \Delta x_k,\quad k = 1,\ 2,\ 3, \cdots, n.$$

Поради монотонността и неотрицателността на функцията g имаме $p_i \geqq p_j \geqq 0$ при $i \leqq j$. Числата p_k, S_k, q_k удовлетворяват условията на лемата на Абел. Затова

$$mg(a) \leqq \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\,\mu_k \Delta x_k \leqq Mg(a).$$

Сумата $\sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\,\mu_k \Delta x_k$ е заключена между $mg(a)$ и $Mg(a)$. Ако оставим сега диаметърът d на делението да клони към нула, то и границата на тази сума ще бъде заключена между $m.g(a)$ и $M.g(a)$, т. е. ще са в сила неравенствата

$$m\,.\,g(a) \leqq \int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx \leqq M\,.\,g(a).$$

Непрекъснатата функция $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ приема всяка стойност, заключена между точните ѝ граници m и M. Тъй като

$$m \leqq \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \leqq M,$$

съществува такава точка ξ, че

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(t)\,dt = \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx.$$

Следователно в случая, когато g не расте и е неотрицателна, е доказано, че:

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^{\xi} f(t)\,dt.$$

Ще разгледаме сега общия случай на нерастяща функция g. Тогава функцията $h(x)=g(x)-g(b)$ е нерастяща и неотрицателна. Като я поставим вместо g в равенството по-горе, имаме

$$\int_a^b f(x)(g(x)-g(b))\,dx = (g(a)-g(b))\int_a^{\xi} f(x)\,dx.$$

Окончателно получаваме

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_a^b f(x)\,dx - g(b)\int_a^\xi f(x)\,dx$$

$$= g(a)\int_a^\xi f(x)\,dx + g(b)\int_\xi^b f(x)\,dx. \square$$

Примери:

1. Да разгледаме функцията $f(x)=\begin{cases} x^x, & x\in(0,\ 1], \\ 1, & x=0. \end{cases}$ Тя е непрекъсната в сегмента $[0,\ 1]$. Като пресметнем производната ѝ, лесно се убеждаваме, че тази функция има локален минимум при $x_0=1/e$. При това $f(1/e)=e^{-1/e}$ и тази стойност е най-малката ѝ стойност в сегмента $[0,\ 1]$. Като използваме свойство б) от тази точка, намираме, че $e^{-1/e}\leqq\int_0^1 x^x dx\leqq 1$ $(e^{-1/e}=0{,}692\cdots)$. Ще отбележим, че в този случай стойностите на интеграла не могат да бъдат определени чрез стойности на елементарни функции.

2. Ако функцията f не е непрекъсната, формулата за средните стойности може да не бъде вярна. Да разгледаме функцията

$$f(x)=\begin{cases} 1/2, & 0\leqq x\leqq 1/2, \\ 3/4, & 1/2<x\leqq 1. \end{cases}$$

Тогава $\int_0^1 f(x)\,dx=5/8$. Функцията $f(x)$ не приема стойността 5/8 в нито една точка $\xi\in[0,\ 1]$. Следователно не съществува число $\xi\in[0,\ 1]$, за което $\int_0^1 f(x)\,dx=f(\xi)$.

9.5. Примитивна на непрекъсната функция. Правила за интегриране на функции

Досега достатъчно пълно бяха изучени свойствата на римановия интеграл. По-специално беше показано, че като се използва определението за интеграл, могат да бъдат пресметнати интеграли от някои елементарни функции. Разбира се, пресмятането на интеграли с помощта на граничен преход в интегралните суми е неудобно и води до значителни трудности. Затова е важно да се намерят прости правила за пресмятане на определени интеграли на Риман. По-нататък ще бъде дадено едно такова правило, а именно ще бъде доказана основната формула на интегралното смятане (формулата на Нютон — Лайбниц).

9.5.1. Примитивна. Да разгледаме функцията f, интегруема в сегмента $[a,\ b]$. Нека $p\in[a,\ b]$. Тогава за всяко $x\in[a,\ b]$ функцията f е интегруема в $[p,\ x]$ и затова в сегмента $[a,\ b]$ е дефинирана функцията $F(x)=\int_p^x f(t)\,dt$, която се нарича интеграл с променлива горна граница. Аналогично се дефинира функция F, ако f е интегруема във всеки сегмент $[c,\ d]\subset(a,\ b)$, като в този случай $p\in(a,\ b)$.

Теорема 9.5. *Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a,\ b]$ и $p\in[a,\ b]$, то производната на функцията $F(x)=\int_p^x f(t)\,dt$ съществува във всяка точка на непрекъснатост x_0 на подинтегралната функция и $F'(x_0)=f(x_0)$.**

Доказателство. Поради непрекъснатостта на функцията f в точката x_0 за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$, ако $|x-x_0|<\delta$. За всяко $t\in[x_0,\ x]$ е изпълнено неравенството $|t-x_0|\leqq|x-x_0|<\delta$. Затова

$$f(x_0)-\varepsilon\leqq f(t)\leqq f(x_0)+\varepsilon.$$

Съгласно свойство б) от 9.4.2 независимо от знака на разликата $x-x_0$ имаме

$$f(x_0)-\varepsilon\leqq\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt\leqq f(x_0)+\varepsilon,\quad |x-x_0|<\delta.$$

(Стойността $\mu=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt$ не се изменя при размяна на границите на интегриране, тъй като при това едновременно се сменят знаците на $x-x_0$ и на интеграла $\int_{x_0}^x f(t)\,dt$.)

Но $\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt=\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$, следователно при $|x-x_0|<\delta$ имаме

* Ако точката x_0 съвпада с един от краищата на сегмента $[a,\ b]$, то под производна в точката x_0 на функцията $F(x)$ се разбира съответно лява или дясна производна. При това доказателството на теоремата не се изменя.

$$f(x_0)-\varepsilon \leq \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \leq f(x_0)+\varepsilon,$$

т. е. $F'(x_0)$ съществува и $F'(x_0)=f(x_0)$. □

Следствие. *Всяка непрекъснатата в сегмента $[a, b]$ функция f има в този сегмент примитивна. Една от примитивните е функцията* $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

Забележка 1. Теоремата остава вярна, ако f е непрекъсната в интервала (a, b). В този случай за долна граница трябва да се вземе точка $p \in (a, b)$. Всички разсъждения се запазват.

Забележка 2. Може да се разглежда и функцията на долната граница на интеграла от f, т. е. функцията $\Phi=\int_x^q f(t)\,dt$. За такава функция

$$\Phi'(x)=-f(x).$$

Забележка 3. Ако функцията f е интегруема във всеки сегмент, съдържащ се в интервала (a, b), то интегралът с променлива горна граница е непрекъсната в (a, b) функция на горната граница.

Действително нека $F(x)=\int_p^x f(t)\,dt$, $p \in (a, b)$. Тогава

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\mu\Delta x, \text{ където}$$

$$\inf\{f(t): t \in [x, x+\Delta x]\} \leq \mu \leq \sup\{f(t): t \in [x, x+\Delta x]\}$$

съгласно първата формула за средните стойности. Ако функцията f е интегруема, то тя е ограничена и затова за всички достатъчно малки Δx е ограничена и величината μ, зависеща от x и Δx. Точно $\inf\{f(x): x \in [c, d]\} \leq \mu \leq \sup\{f(x): x \in [c, d]\}$*. Затова $\Delta F \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Забележка 4. Интеграли с променлива горна (или долна) граница могат да се използват за дефиниране на нови функции, които не се изразяват чрез елементарни функции.

* Тук $[c, d]$ е произволен фиксиран сегмент, съдържащ се в интервала (a, b) и такъв, че $x \in [c, d]$, $x+\Delta x \in [c, d]$.

Както вече отбелязахме, интегралът $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ се нарича интеграл на Поасон, интегралът $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, $0<k<1$, се нарича елиптичен интеграл, интегралът $\int_0^x t^{-1}\sin t\,dt$ — интегрален синус, $\int_0^x t^{-1}\cos t\,dt$ — интегрален косинус, $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ — интегрален логаритъм и т. н.

9.5.2. Основна формула на интегралното смятане. Знаем, че всеки две примитивни на функцията $f(x)$, дефинирана в сегмента $[a, b]$, се различават с константа. Затова, ако $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, а Φ е произволна примитивна на непрекъснатата функция f, то $F-\Phi=C=\text{const}$, т. е. $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C$ (вж. теорема 9.5). Полагаме в последната формула отначало $x=a$, а след това $x=b$. Тъй като $\int_a^a f(t)\,dt=0$ за всяка функция, приемаща крайни стойности в точката a, то

$$\Phi(a)=C, \quad \Phi(b)=\int_a^b f(x)\,dx+C.$$

Оттук $\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)$ и така получихме основната формула на интегралното смятане.

Ще я формулираме във вид на теорема.

Теорема (основна теорема на интегралното смятане). *За да се пресметне определеният интеграл от непрекъснатата функция $f(x)$ в сегмента $[a, b]$, трябва да се пресметнат стойностите на произволна нейна примитивна в точката b и в точката a и от първата да се извади втората.*

Задачата за пресмятане на определен интеграл се сведе до задачата за намиране на примитивна на непрекъсната функция.

Естествено не е лесно да се намери примитивна на всяка функция. Ние нееднократно посочвахме функции, чиито примитивни не се изразяват с елементарни функции. В тези случаи естествено възниква въпросът за приближено пресмятане на определени интеграли, за което ще стане дума по-нататък.

Основната формула на интегралното смятане се записва често във формата

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(x)\Big|_a^b,$$

където

$$\Phi(x)\Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

9.5.3. Важни правила за пресмятане на определени интеграли
При пресмятането на определени интеграли и при други въпроси често се използва правилото за смяна на променливата под знака на определения интеграл.

Нека функцията g има непрекъсната производна в сегмента $[m, M]$ и $\min\{g(t) : t \in [m, M]\} = a$, $\max\{g(t) : t \in [m, M]\} = b$, при което $g(m) = a$, $g(M) = b$. Тогава, ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

Тази формула се нарича ***формула за смяна на променливата под знака на определения интеграл.***

Доказателство. Нека Φ е някоя примитивна на функцията f. Функциите Φ и g са диференцируеми съответно в сегментите $[a, b]$ и $[m, M]$. Затова съгласно правилото за пресмятане на производна на сложна функция

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = \Phi'(g(t))\,g'(t).$$

Ще отбележим, че производната Φ' в израза отдясно е относно аргумента x: $\Phi'(g(t)) = \Phi'(x)$, $x = g(t)$. Ще отбележим също, че $\Phi'(x) = f(x)$. Като заместим в дясната страна на формулата за $\frac{d}{dt}\Phi(g(t))$, получаваме

$$\frac{d}{dt}\Phi(g(t)) = f(g(t))\,g'(t).$$

По такъв начин функцията $\Phi(g(t))$, $t \in [m, M]$, е примитивна на функцията $f(g(t))\,g'(t)$, т. е.

$$\int_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt = \Phi(g(M)) - \Phi(g(m)) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

съгласно условието. Следователно, от една страна, $\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a)$, а, от друга, $\Phi(b) - \Phi(a) = \int_m^M f(g(t))\,g'(t)\,dt$. □

Сега ще формулираме и установим правилото за интегриране по части.

Нека функциите f и g са непрекъснато диференцируеми в сегмента $[a, b]$. Тогава

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,f'(x)\,dx.$$

Наистина $\frac{d}{dx}(f\cdot g) = f.g' + f'.g$. Затова функцията $f.g$ е примитивна на функцията $f.g' + f'.g$. Следователно

$$\int_a^b (f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x))\,dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b. \ \square$$

Последната формула е удобно да се записва във вида

$$\int_a^b f\,dg = f\cdot g\Big|_a^b - \int_a^b g\,df.$$

9.5.4. Остатъчният член на формулата на Тейлор в интегрална форма.

Нека функцията f има в някоя околност на точката a непрекъсната $(n+1)$-ва производна. Нека x принадлежи на тази околност. Разглеждаме равенството

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Като положим $u(t) = f'(t)$, $v(t) = -(x-t)$ и приложим към интеграла

$\int_a^x f'(t)\,dt=\int_a^x u(t)\,dv(t)$ формулата за интегриране по части, получаваме

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt=-f'(t)(x-t)\Big|_a^x+\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt$$

$$=(x-a)f'(a)+\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt.$$

По такъв начин чрез последователно интегриране по части намираме

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt=(x-a)f'(a)+\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$$

$$=(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2f'''(t)\,dt$$

$$=\dots=(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)+\dots+\frac{1}{n!}(x-a)^nf^{(n)}(a)$$

$$+\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k!}(x-a)^kf^{(k)}(a)+R_{n+1}(x),$$

където $R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt.$

Виждаме, че R_{n+1} е остатъчният член в разлагането на Тейлор на функцията f в околност на точката a. Тази форма на ***остатъчния член*** се нарича ***интегрална форма.***

Ако приложим първата формула за средните стойности (вж. д) от 9.4.2), то

$$R_{n+1}(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^nf^{(n+1)}(t)\,dt=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x (x-t)^n\,dt$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_a^x=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi),$$

където $\xi\in[a,x]$. Следователно при същите предположения ще получим остатъчния член във форма на Лагранж. Действително лесно се вижда (като се използва теоремата на Дарбу, според която производната приема всички междинни стойности), че равенството $R_{n+1}(x)=(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!$ е в сила само при условието за съществуване и интегруемост на $f^{(n+1)}(x)$.

Примери:

1. Пресметнете интегралите, като използвате основната формула на интегралното смятане:

а) $\int_a^b x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_a^b=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1},\ n\neq-1.$

б) $\int_a^b \sin x\,dx=-\cos x\Big|_a^b=\cos a-\cos b,\ \int_a^b \cos x\,dx=\sin b-\sin a.$

в) $\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arc\,tg} x\Big|_0^a=\operatorname{arc\,tg} a.$

г) $\int_0^a \frac{x^2}{a^3+x^3}\,dx=\frac{1}{3}\ln(a^3+x^3)\Big|_0^a=\frac{1}{3}\ln 2,\ a>0.$

2. Изчислете интегралите с помощта на правилото за смяна на променливата (с помощта на субституции):

а) $\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^4x}{\cos^6x}\,dx=\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}^4x}{\cos^2x}\,dx=\int_0^1 t^4dt=\frac{1}{5}t^5\Big|_0^1=1/5,$

където е положено $t=\operatorname{tg} x$.

б) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_1^{\sqrt{2}} t^2dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_1^{\sqrt{2}}=(2\sqrt{2}-1)/3,\ t=\sqrt{1+x^2}.$

3. Да се пресметне интегралът, като се приложи правилото за интегриране по части:

$$I_m=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,dx=-\frac{\cos x\sin^{m-1}x}{m}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{m-1}{m}\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}x\,dx$$

$$=\frac{m-1}{m}I_{m-2},$$

$m\geq2$, m е естествено число.

Лесно се вижда, че $I_0=\pi/2$, $I_1=1$. По индукция получаваме, че

$$I_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot1=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

4. Да се докаже, че за функцията $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ остатъчният член $R_{n+1}(x)$ в интегрална форма клони към нула при $n\to\infty$, когато $|x|<1$. Имаме

$$R_{n+1}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int_0^x (1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,dt.$$

От очевидните неравенства $t/x\geqq 0$, $1+x>0$ следва, че

$$t/x+t=\frac{t}{x}(1+x)\geqq 0 \quad\text{или}\quad \frac{x-t}{x}=1-\frac{t}{x}\leqq 1+t.$$

По-нататък, тъй като x и $x-t$ са числа с еднакъв знак, то $\left|\frac{x-t}{x}\right|=1-\frac{t}{x}\leqq 1+t=|1+t|$, или $\left|\frac{x-t}{1+t}\right|\leqq|x|$.

Следователно

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^n}(1+t)^{\alpha-1}dt\right|\leqq|x|^n\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}dt=C(x,\alpha)\,.\,|x|^n,$$

където $C(x,\alpha)$ не зависи от n. С други думи,

$$|R_{n+1}|\leqq C(x,\alpha)\,|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|\,|x|^n/n!=p_n.$$

Разглеждаме произволно число q, удовлетворяващо условието $|x|<q<1$. Тъй като

$$\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{|\alpha-n-1|\,|x|}{n+1}\to|x|\ (n\to\infty),$$

то съществува такъв номер N, че $p_{n+1}/p_n<q$ при $n\geqq N$. Оттук следва, че $p_n\leqq p_N q^{n-N}$ при $n\geqq N$. Като оставим в това неравенство n да расте неограничено, се убеждаваме, че p_n, а следователно и R_{n+1} клонят към нула.

9.6. Неравенства за суми и интеграли

9.6.1. Неравенство на Юнг*. *Да разгледаме две неотрицателни числа a и b и две числа p и q, по-големи от единица и такива, че $1/p+1/q=1$. Ще докажем следното неравенство на Юнг:*

$$ab\leqq a^p/p+b^q/q.$$

Доказателство. Разглеждаме функцията $f(x)=x^{1/p}-x/p$ при $x\geqq 0$. Понеже $f'(x)=\frac{1}{p}(x^{-1/q}-1)$, то $f'(x)>0$ при $0<x<1$, $f'(x)<0$ при $x>1$. В точката $x=1$ функцията f приема най-голямата си стойност, при това $f(1)=1-1/p=1/q$. Следователно $x^{1/p}-x/p\leqq 1/q$ за всяко $x\geqq 0$. В последното неравенство полагаме $x=a^p/b^q$, $b\neq 0$. С това неравенството на Юнг е доказано при $b\neq 0$. При $b=0$ то е очевидно. □

* Уилям Хенри Юнг — английски математик (1882—1946).

9.6.2. Неравенство на Хьолдер за суми.** *Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ са произволни неотрицателни числа. Тогава*

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqq\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q},$$

където $1/p+1/q=1$, $p>1$, $q>1$.

Това неравенство се нарича неравенство на Хьолдер за суми. То е хомогенно в смисъл, че ако е изпълнено за числата a_i, b_i, то е изпълнено и за числата ta_i, tb_i. Затова е достатъчно да установим, че $\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqq 1$ при условия $\sum_{i=1}^n a_i^p=1$, $\sum_{i=1}^n b_i^q=1$, тъй като винаги можем да разделим числата a_i и b_i съответно на $\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}$ и $\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$ ***. Записвайки неравенството на Юнг за такива числа a_i и b_i и сумирайки тези неравенства по i, получаваме

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqq\frac{1}{p}\sum_{i=1}^n a_i^p+\frac{1}{q}\sum_{i=1}^n b_i^q.$$

Затова $\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqq 1/p+1/q=1$. □

Забележка. В случая $p=2$, $q=2$ неравенството на Хьолдер се превръща в неравенството

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqq\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{1/2}.$$

** О. Хьолдер — немски математик (1859—1937).

*** Предполагаме, че поне едно от числата a_i и поне едно от числата b_i е различно от нула. В противен случай неравенството е очевидно.

наречено ***неравенство на Коши — Буняковски* за суми***

9.6.3. Неравенство на Минковски за суми.** *Нека $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ са произволни неотрицателни числа и $p>1$. Тогава е изпълнено следното неравенство на Минковски за суми:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1/p} \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}$$

Доказателство. Записваме равенството

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p = \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1}.$$

Към всяка от сумите в дясната страна прилагаме неравенството на Хьолдер. Ако $1/p+1/q=1$, $p>1$, $q>1$, то $(p-1)q=p$, $\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$. Затова

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \leqq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{(p-1)/p}.$$

Като разделим последното неравенство на $\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{(p-1)/p}$, ще получим исканото неравенство.

9.6.4. Неравенство на Хьолдер за интеграли. *Нека $f(x)$ и $g(x)$ са две произволни интегруеми в сегмента $[a, b]$ функции; нека p и q са две числа, по-големи от единица, и $1/p+1/q=1$. Тогава е изпълнено неравенството на Хьолдер за интеграли:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx\right| \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,d\right)^{1/q}$$

* Виктор Яковлевич Буняковски — руски математик (1804—1889).
** Херман Минковски — немски математик и физик (1864—1909).

(всички написани интеграли съществуват според следствието от теорема 9.4).

Доказателство. Ще отбележим, че както и в 9.6.2, достатъчно е да разгледаме случая, когато $\int_a^b |f(x)|^p dx = 1$ и $\int_a^b |g(x)|\,dx=1$, и да докажем неравенството $\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqq 1.$ Записваме неравенството на Юнг за произволна точка x за функциите $|f(x)|$ и $|g(x)|$. Имаме

$$|f(x)|\,.\,|g(x)| \leqq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Като интегрираме това неравенство, получаваме

$$\int_a^b |f(x)|\,.\,|g(x)|\,dx \leqq 1.$$

Но съгласно свойство г) от 9.4.2

$$\left|\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,.\,|g(x)|\,dx. \quad \square$$

Както и при извода на неравенството на Хьолдер за суми, предполагаме, че $\int_a^b |f(x)|dx \neq 0$ и $\int_a^b |g(x)|\,dx \neq 0$. В противен случай неравенството е очевидно.

Забележка. В случая, когато $p=2$, $q=2$, неравенството на Хьолдер се превръща в неравенството

$$\left|\int_a^b f(x)\,.\,g(x)\,dx\right| \leqq \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

което се нарича ***неравенство на Коши — Буняковски за интеграли.***

9.6.5. Неравенство на Минковски за интеграли. *Нека f и g са две произволни неотрицателни и интегруеми върху сегмента $[a, b]$ функции и числото $p \geqq 1$. Тогава е в сила неравенството на Минковски за интеграли:*

$$\left\{\int_a^b (f(x)+g(x))^p\,dx\right\}^{1/p} \leqq \left\{\int_a^b f^p(x)\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b g^p(x)dx\right\}^{1/p}.$$

Ще отбележим, че съгласно следствието от теорема 9.4 всички подинтегрални функции са интегруеми.

Доказателство. Точно както и при доказателството на неравенството на Минковски за суми, тръгваме от

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^p\,dx=\int_a^b f(x)(f(x)+g(x))^{p-1}dx+\int_a^b g(x)(f(x)+g(x))^{p-1}\,dx.$$

По-нататък, прилагайки към интегралите в дясната страна неравенството на Хьолдер, както и в 9.6.3 получаваме исканияя резултат. □

По индукция може да се докаже и по-общо неравенство за n функции $f_1, f_2, \dots, f_n$, неотрицателни и интегруеми в сегмента $[a, b]$:

$$\left\{\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+\dots+f_n(x))^p\,dx\right\}^{1/p}$$

$$\leq\left\{\int_a^b f_1^p(x)dx\right\}^{1/p}+\left\{\int_a^b f_2^p(x)\,dx\right\}^{1/p}+\dots+\left\{\int_a^b f_n^p(x)\,dx\right\}^{1/p}.$$

9.7. Критерий на Лебег* за интегруемост на функция върху сегмент

9.7.1. Множества с мярка нула и с жорданова мярка нула. В тази точка ще въведем някои понятия, необходими за доказателството на критерия на Лебег.

Определение 1. *Множеството $A=\{x\}$, принадлежащо на сегмента $[a, b]$, ще наричаме* ***множество с мярка нула (лебегова мярка нула)****, ако за всяко число $\varepsilon>0$ съществува най-много изброимо покритие на множеството $A=\{x\}$ със сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \dots$, такова, че*

* Анри Лебег — френски математик (1875—1941).

$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\varepsilon$*. Обстоятелството, че множеството A има мярка нула, обикновено се записва така: $\mu(A)=0$.

Очевидно в определението за множество с мярка нула сегментите $[a_k, b_k]$ могат да се заменят с интервалите (a_k, b_k).

Ще докажем следните твърдения:

Твърдение 1. *Нека A и B са две подмножества на сегмента $[a, b]$ и $B\subset A$. Тогава, ако $\mu(A)=0$, то и $\mu(B)=0$.*

Доказателство. Тъй като $\mu(A)=0$, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува най-много изброима система от сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \dots$, такава, че $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ и $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\varepsilon$.

Понеже $B\subset A$, то $B\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ и следователно $\mu(B)=0$.

Твърдение 2. *Нека множествата A_k, $k=1, 2, 3, \dots$, принадлежат на сегмента $[a, b]$ и $A\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. Тогава, ако $\mu(A_k)=0$, $k=1, 2, 3, \dots$, то и $\mu(A)=0$.*

Доказателство. Тъй като множеството A_k има мярка нула, то за всяко положително число ε и всеки номер $k=1, 2, 3, \dots$ съществува съвкупност от такива сегменти $I_{k,n}=[a_{k,n}, b_{k,n}]$, че

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}\supset A_k \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}(b_{k,n}-a_{k,n})<2^{-k}\varepsilon. \text{ Понеже } A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,$$

$$\text{то } A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}\right).$$

Системата от сегменти $I_{k,n}$ $k, n=1, 2, 3, \dots$, е най-много изброима. Да я преномерираме с помощта на един индекс и да означим с $I_1=[a_1, b_1]$ сегмента $I_{1,1}$, с $I_2=[a_2, b_2]$ — сегмента $I_{1,2}$, с $I_3=[a_3, b_3]$ — сегмента $I_{2,1}$ и т. н. С други думи, сегментите

* Това неравенство може да се запише и така: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)<\varepsilon$, където под символа $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)$ се разбира $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{N}(b_k-a_k)$.

$I_{k,n}$ номерираме в естествените числа по реда на нарастване на $k+n$, а за еднаквите $k+n$ — по реда на нарастване на k. Очевидно за всяко естествено число $N \geqq 1$ е изпълнено неравенството

$$\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m) \leqq \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=1}^{N}(b_{k,n}-a_{k,n})\right),$$

където $[a_m, b_m]=I_m$ е сегментът с номер m при новата номерация.

Тъй като съгласно избора на сегментите $[a_{k,n}, b_{k,n}]$ за всеки номер k са изпълнени неравенствата

$$\sum_{n=1}^{N}(b_{k,n}-a_{k,n}) \leqq \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(b_{k,n}-a_{k,n})<2^{-k}\varepsilon,\ k=1, 2, 3, \ldots,$$

то за всяко $N \geqq 1$ имаме

$$\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m) \leqq \varepsilon\sum_{k=1}^{N}2^{-k}<\varepsilon.$$

Следователно

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m)=\sup_{N}\sum_{m=1}^{N}(b_m-a_m) \leqq \varepsilon.$$

Затова $\mu(A)=0$. □

Следствие. *Ако множеството A се състои от изброим или краен брой точки на сегмента $[a, b]$, то $\mu(A)=0$. По-специално множеството на рационалните числа, принадлежащи на сегмента $[a, b]$, има мярка нула.*

Определение 2. *Ще казваме, че множеството $A=\{x\}$, принадлежащо на сегмента $[a, b]$, има жорданова мярка нула, ако за всяко число $\varepsilon>0$ съществува такова крайно покритие на множеството A със сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \ldots$,*

$$N=N(\varepsilon),\ \text{че}\ \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}(b_k-a_k)<\varepsilon.$$

Очевидно в определението за множество с жорданова мярка нула сегментите $[a_k, b_k]$ могат да се заменят с интервалите (a_k, b_k), а системата $\{I_k\}$ може да се избере от два по два непресичащи се сегмента.

Непосредствено от определението следва, че всяко подмно-

жество на сегмента $[a, b]$, състоящо се от краен брой точки, има жорданова мярка нула.*

Ще отбележим също, че ако множеството A има жорданова мярка нула, то има също така и лебегова мярка $\mu(A)$, равна на нула.

Твърдение 3. *Да разгледаме сегмента $[a, b]$ и произволно негово покритие със сегменти $I_k=[a_k, b_k]$, $k=1, 2, 3, \ldots, m$. Тогава*

$$\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k) \geqq (b-a)>0.$$

Доказателство. Ще докажем твърдението индуктивно. При $m=1$ то е вярно, тъй като $I_1=[a_1, b_1]\supset[a, b]$ и $b_1-a_1 \geqq b-a>0$. Допускаме, че твърдението е вярно за покрития, съставени от m сегмента $I_1, I_2, \ldots, I_m$. Като изменим, ако е необходимо, номерацията на сегментите, ще приемем, че $a\in[a_1, b_1]=I_1$. Тогава $a_1 \leqq a \leqq b_1$. Ако $b \leqq b_1$, то $b_1-a_1 \geqq b-a>0$ и всичко е доказано. Нека $b_1<b$. Тогава системата $I_2, I_3, \ldots, I_{m+1}$ образува покритие на сегмента $[b_1, b]$, състоящо се от m сегмента, и съгласно индуктивното допускане $\sum_{k=2}^{m}(b_k-a_k) \geqq b-b_1>0$. Но тогава $\sum_{k=1}^{m}(b_k-a_k) \geqq (b_1-a)+(b-b_1)=b-a>0$, което трябваше да се докаже.

Следствие 1. *Сегментът $[a, b]$ не може да има жорданова мярка нула.*

Следствие 2. *Нека $\{x_k\}$ е едно деление на сегмента $[a, b]$ и $I_k=[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, 3, \ldots, n$, са частичните сегменти на това деление. Нека $\{P_m\}$, $m=1, 2, 3, \ldots, p$, е такава крайна система от сегменти $P_m=[a_m, b_m]$, че $\bigcup_{m=1}^{p}P_m\supset\bigcup_{j=1}^{l}I_{k_j}$. Тогава*

$$\sum_{m=1}^{p}(b_m-a_m) \geqq \sum_{j=1}^{l}(x_{k_j}-x_{k_{j-1}}).$$

Твърдение 4. *Нека K е компактно множество, принадлежащо на сегмента $[a, b]$, и $\mu(K)=0$. Тогава K има и жорданова мярка нула.*

Доказателство. Тъй като множеството K има мярка нула, то за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова най-много изброимо покритие на множеството K с интервали $\mathring{I}_k=(a_k, b_k)$, че $\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathring{I}_k$

* Не е трудно да се убедим, че всяко изброимо затворено подмножество на сегмента $[a, b]$ е също множество с жорданова мярка нула.

$=\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,\ b_k)\supset K$, при което $\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(b_k-a_k)<\varepsilon$.

Поради компактността на множеството K от покритието $\{\overset{\circ}{I}_k\}$ може да се отдели крайно подпокритие $\{\overset{\circ}{I}_{k_j}\}$, $j=1, 2, 3, \ldots, m$, за което $\bigcup_{j=1}^{m}\overset{\circ}{I}_{k_j}\supset K$. Очевидно $\sum_{j=1}^{m}(b_{k_j}-a_{k_j})<\varepsilon$. □

Като следствие получаваме, че всяко изброимо затворено множество от елементи на сегмента $[a, b]$ (то е компактно) има жорданова мярка нула.

9.7.2. Осцилация на функция в точка. Изследване на множеството от точки на прекъсване на функция. В 4.8 осцилация $\omega(f;\ x_0)$ на функцията f в точката x_0 нарекохме разликата $M(x_0)-m(x_0)=\omega(f,\ x_0)$ между горната и долната функция на Бер за функцията f в точката x_0.

Ще докажем едно обобщение на теорема 4.16 за случая на прекъснати функции.

Твърдение 5. *Нека функцията f е дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. Нека съществува такова число $\omega\geq 0$, че $0\leq\omega(f;\ x)\leq\omega$ за всяка точка x от сегмента $[a, b]$. Тогава за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова деление $\{x_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, на сегмента $[a, b]$, че*

$\omega_k=M_k-m_k=\sup\{f(x): x\in[x_{k-1},\ x_k]\}-\inf\{f(x): x\in[x_{k-1},\ x_k]\}<\omega+\varepsilon$*

за всяко $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

Доказателство. Нека ε е произволно фиксирано положително число. По условие $0\leq\omega(f;\ x)\leq\omega$ за всяка точка x от сегмента $[a, b]$. Тъй като $\omega(f;\ x)=M(x)-m(x)=\lim_{\delta\to 0+0}\{M_\delta(x)-m_\delta(x)\}$ (вж. 4.8), то за всяка точка x_0 от сегмента $[a, b]$ съществува такъв интервал $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, че

$$\omega(f;\ [x_0-\delta,\ x_0+\delta])<\omega+\varepsilon.$$

Ще отбележим, че е налице включването $[a, b]\subset\bigcup_{x\in[a,\ b]}(x-\delta(x),\ x+\delta(x))$. Поради компактността на сегмента $[a, b]$ можем да изберем крайно подпокритие на сегмента $[a, b]$ с интервали $(a_1,\ b_1)=(x_1-\delta(x_1),\ x_1+\delta(x_1)), \ldots, (a_N,\ b_N)=(x_N-\delta(x_N),\ x_N+\delta(x_N))$ така, че $[a, b]\subset\bigcup_{m=1}^{N}(a_m,\ b_m)$. Нека $\{x_k\}$ е едно такова деление на сегмента $[a, b]$, че всички точки $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N$, принадлежащи на сегмента $[a, b]$, да участвуват в това деление и всеки частичен сегмент $[x_{k-1},\ x_k]$ от делението $\{x_k\}$ да се съдържа в някой сегмент $[a_p,\ b_p]$, $p=1, 2, 3, \ldots, N$. Тогава очевидно $\omega(f;\ [x_{k-1},\ x_k])<\omega+\varepsilon$ за всяко $k=1, 2, 3, \ldots, n$. □

Следствие. *Нека са изпълнени условията на твърдение 5. Тогава съществува такова деление $\{x_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, на сегмента $[a, b]$, че за това деление е изпълнено $\Omega=S-s<(\omega+\varepsilon)(b-a)$.*

Наистина

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})$$

$$<(\omega+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=(\omega+\varepsilon)(b-a).$$

Нека функцията f е дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. Означаваме с

$$R(\varepsilon)=\{x\in[a,\ b]:\omega(f;\ x)\geq\varepsilon>0\}$$

множеството от точки x в сегмента $[a, b]$, за които осцилацията на функцията f е по-голяма или равна на числото $\varepsilon>0$.

Вярно е следното твърдение:

Твърдение 6. *За всяко $\varepsilon>0$ множеството $R(\varepsilon)$ е затворено.*

Доказателство. Ще напомним, че осцилацията на функция в дадена точка x_0 е долната граница на осцилациите на тази функция във всички симетрични интервали, които съдържат точката x_0 (x_0 е среда на интервала). В случая, когато x_0 е край на интервала, се вземат интервалите, които имат за край x_0 и лежат в сегмента $[a, b]$.

Нека x_0 е контурна точка за $R(\varepsilon)$. Ще покажем, че тя принадлежи на $R(\varepsilon)$. Очевидно всеки интервал, който съдържа x_0, съдържа и някоя точка от $R(\varepsilon)$ и затова осцилацията на f в този интервал (или в сегмента, получен чрез присъединяване на краищата на интервала) е не по-малка от ε, т. е. точката x_0 принадлежи на $R(\varepsilon)$. Тъй като всяка контурна точка на $R(\varepsilon)$ принадлежи на множеството $R(\varepsilon)$, то това множество е затворено. □

За да бъде една дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$ функция f непрекъсната в точката x, е необходимо и достатъчно осцилацията $\omega(f;\ x)$ в точката x да бъде равна на нула (или, което е същото, $M(x)=m(x)$). Затова, ако осцилацията $\omega(f;\ x)>0$, то точката x е точка на прекъсване за функцията f.

Нека R е множеството от всички точки на прекъсване на

* Числото ω_k се означава още и с $\omega(f,\ [x_{k-1},\ x_k])$ и се нарича осцилация на функцията $f(x)$ в сегмента $[x_{k-1},\ x_k]$ (вж. 4.6.2).

функцията $f(x)$, дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. Тогава очевидно

$$R=\bigcup_{m=1}^{\infty} R(1/m)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{x\in[a, b]:\omega(f; x)\geqq 1/m\}.$$

9.7.3. Критерий за интегруемост на функция.

Теорема 9.6 (критерий на Лебег). *За да бъде ограничената в сегмента $[a, b]$ функция f интегруема по Риман в този сегмент, е необходимо и достатъчно множеството от точки на прекъсване на тази функция да има мярка нула.*

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е дефинирана и интегруема в сегмента $[a, b]$ и R е множеството от точките ѝ на прекъсване в този сегмент. Тъй като $R=\bigcup_{m=1}^{\infty} R(1/m)$, то съгласно твърдение 2 е достатъчно да докажем, че $\mu(R(1/m))=0$ за $m=1, 2, 3, \ldots$ Ще покажем, че жордановата мярка на всяко множество $R(1/m)$ е равна на нула, толкова повече $\mu(R(1/m))=0$.

Понеже функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$, то за всяко $\varepsilon>0$ и за всяко естествено число m съществува според основната теорема от 9.3 такова деление $\{x_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots, m$, на сегмента $[a, b]$, че $0\leqq\Omega=S-s=\varepsilon/2m$. Разглеждаме съвкупността $\{I_k\}$, $I_k=[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, 3, \ldots, m$, от всички частични сегменти на даденото деление. Нека $\mathring{I}_k=(x_{k-1}, x_k)$ е съответстващият на частичния сегмент интервал, а $\partial I_k=\{x_{k-1}, x_k\}$ е множеството от двете точки x_{k-1} и x_k, $k=1, 2, 3, \ldots, n$.

Разглеждаме двете множества $R'(1/m)$ и $R''(1/m)$, определени по следния начин:

$$R'(1/m)=R(1/m)\cap\bigcup_{k=1}^{n}\mathring{I}_k;\quad R''(1/m)=R(1/m)\cap\bigcup_{k=1}^{n}\partial I_k.$$

Очевидно множеството $\bigcup_{k=1}^{n}\partial I_k$ има жорданова мярка нула, понеже се състои от краен брой точки.

По-нататък $R''(1/m)\subset\bigcup_{k=1}^{n}\partial I_k$, затова и множеството $R''(1/m)$ има жорданова мярка нула. Следователно за избраното по-горе $\varepsilon>0$ съществува такава крайна система $\{P_l\}$, $l=1, 2, 3, \ldots$, $L=L(\varepsilon)$, от сегменти $P_l=[a_l, b_l]$, че

$$\sum_{l=1}^{L}(b_l-a_l)<\varepsilon/2,\quad R''(1/m)\subset\bigcup_{l=1}^{L}P_l. \tag{9.5}$$

Ще докажем, че множеството $R'(1/m)$ също има жорданова мярка нула. Нека $x_0\in R'(1/m)\neq\varnothing$. Тогава съществува такова k_0, че $x_0\in\mathring{I}_{k_0}=(x_{k_0-1}, x_{k_0})$, и затова съществува $\delta>0$, за което $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subset I_{k_0}$. Следователно

$$\omega_{k_0}=\omega(f; I_{k_0})\geqq\omega(f; (x_0-\delta, x_0+\delta))\geqq\omega(f; x_0)\geqq 1/m>0.$$

По този начин установихме, че

$$R(1/m)\subset\bigcup_{k\in Q_m} I_k,$$

където $Q_m=\{k: 1\leqq k\leqq m,\ \omega(f; I_k)\geqq 1/m\}$.

Ще запишем следните очевидни неравенства:

$$\frac{1}{m}\sum_{k\in Q_m}(x_k-x_{k-1})\leqq\sum_{k\in Q_m}\omega_k(x_k-x_{k-1})$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{n}\omega(f; [x_{k-1}, x_k])(x_k-x_{k-1})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})=S-s<\varepsilon/2m.$$

Неравенството $S-s<\varepsilon/2m$ следва от избора на делението $\{x_k\}$.

Следователно получаваме

$$\sum_{k\in Q_m}(x_k-x_{k-1})<\varepsilon/2. \tag{9.6}$$

Окончателно имаме

$$R(1/m)=R'(1/m)\cup R''(1/m)\subset\left(\bigcup_{k\in Q_m} I_k\right)\cup\left(\bigcup_{l=1}^{L}P_l\right),$$

където поради (9.5) и (9.6) сумата от дължините на крайния брой сегменти I_k и P_l не надминава ε. Понеже ε е произволно избрано, множеството $R(1/m)$ има жорданова мярка нула. □

Достатъчност. Нека R е множеството от точките на прекъсване на функцията f, дефинирана и ограничена в сегмента $[a, b]$. За всяко $\varepsilon>0$ имаме

$$R(\varepsilon)=\{x\in[a, b]:\omega(f; x)\geqq\varepsilon\}\subset R\subset[a, b]$$

и следователно $R(\varepsilon)$ е ограничено. Съгласно твърдение 6 множеството $R(\varepsilon)$ е затворено. Затова според определението от 4.6.3 множеството $R(\varepsilon)$ е компактно. Тъй като $\mu(R)=0$ и $R(\varepsilon)\subset R$, то от твърдение 1 следва, че $\mu(R(\varepsilon))=0$, а от твърдение 4 — че и жордановата мярка на множеството $R(\varepsilon)$ е равна на нула. С други думи, за всяко $\varepsilon>0$ съществува такава крайна система от сегменти $P_l=[a_l, b_l]$, $l=1, 2, \ldots, N$, че системата от интервали $\mathring{P}_l=(a_l, b_l)$ покрива $R(\varepsilon)$, т. е.

$$\bigcup_{l=1}^{N} P_l \supset \bigcup_{l=1}^{N} \mathring{P}_l \supset R(\varepsilon),$$

при което $\sum_{l=1}^{N}(b_l-a_l)<\varepsilon$.

Нека $\{x_k\}$, $k=1, 2, 3, \ldots, n$, е деление на сегмента $[a, b]$, състоящо се от точките a, b и всички краища на сегментите P_l, $l=1, 2, \ldots, N$, които се съдържат в $[a, b]$. Нека $I_k=[x_{k-1}, x_k]$, $k=1, 2, \ldots, n$, е частичен сегмент от делението $\{x_k\}$. По построение интервалът $\mathring{I}_k=(x_{k-1}, x_k)$ не съдържа краищата на сегментите $\{P_l\}$. Възможни са два случая:

а) Съществува такъв индекс l_0, че $I_k\subset P_{l_0}$. Означаваме тази група от сегменти с $I'=\{I_{k'}\}$.

б) За всеки номер l сечението $(x_{k-1}, x_k)\cap P_l=\varnothing$. В този случай точката x_{k-1} (или x_k) може да бъде край на някой сегмент от системата $\{P_l\}$. Означаваме тази група от сегменти с $I''=\{I_{k''}\}$. Ще покажем, че в случая б) нито точката x_{k-1}, нито точката x_k принадлежи на $R(\varepsilon)$. Наистина, ако например $x_{k-1}\in R(\varepsilon)$, то понеже системата от интервали $\{\mathring{P}_l\}$ покрива множеството $R(\varepsilon)$, ще съществува индекс l_1, за който $x_{k-1}\in \mathring{P}_{l_1}\neq\varnothing$, и тогава очевидно $(x_{k-1}, x_k)\cap P_{l_1}\neq\varnothing$ въпреки избора на делението $\{x_k\}$. И така в този случай $I_k\cap R(\varepsilon)=\varnothing$.

Ще подчертаем, че всеки от сегментите I_k на делението $\{x_k\}$ се съдържа или в групата I', или в групата I''.

Тъй като f е ограничена в сегмента $[a, b]$: $|f(x)|\le M$ за всяко $x\in[a, b]$, то $\omega_k=\omega(f; [x_{k-1}, x_k])\le 2M$ за $k=1, 2, 3, \ldots, n$. Поспециално, ако $I_{k'}\in I'$ и $I_{k'}=[x_{k'-1}, x_{k'}]$, то

$$\sum_{(k')}\omega_{k'}(x_{k'}-x_{k'-1})\le 2M\sum_{l=1}^{N}(b_l-a_l)<2M\varepsilon.$$

Нека сега $I_{k''}\in I''$. Тогава $I_{k''}\cap R(\varepsilon)=\varnothing$ и затова осцилацията

$\omega(f; x)<\varepsilon$ за всяко $x\in I_{k''}$. Ще приложим следствието на твърдение 5 към сегмента $I_{k''}=[x_{k''-1}, x_{k''}]$, като за ω ще изберем числото ε. Може да се твърди, че съществува такова деление $\{y_k\}$ на сегмента $I_{k''}$, $x_{k''-1}=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{n(k'')}=x_{k''}$ с частични сегменти $[y_{k-1}, y_k]$, че

$$\sum_{k=1}^{n(k'')}\omega(f;[y_{k-1}, y_k])(y_k-y_{k-1})<2\varepsilon(x_{k''}-x_{k''-1}).$$

Образуваме сега делението $\{z_r\}$ като обединение на делението $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$ и деленията $\{y_k\}$ на сегментите $I_{k''}$ и означаваме със $[z_{r-1}, z_r]$ неговите частични сегменти. За делението $\{z_r\}$ имаме

$$0\le S-s=\sum_{r\in Q'}\omega_r(z_r-z_{r-1})+\sum_{r\in Q''}\omega_r(z_r-z_{r-1})$$

$$\le 2\varepsilon M+2\varepsilon\sum_{(k'')}(x_{k''}-x_{k''-1})<2\varepsilon(M+(b-a)),$$

където $Q'=\{r:[z_{r-1}, z_r]\subset I_{k'}\in I'\}$, $Q''=\{r:[z_{r-1}, z_r]\subset I_{k''}\in I''\}$. От произволния избор на ε и основната теорема от 9.3.1 следва интегруемостта по Риман на функцията f в сегмента $[a, b]$.

9.8. Несобствени интеграли

При изученото в глава 9 понятие за определен интеграл на Риман съществено се използват две обстоятелства: 1) че интервалът $[a, b]$ на интегриране е краен; 2) че подинтегралната функция f е ограничена в разглеждания интервал.

Сега ще обобщим понятието определен интеграл на Риман за следните два случая: 1) когато интервалът на интегриране е безкраен*; 2) когато подинтегралната функция f е неограничена в околност на някои точки от областта на интегриране.

Понятието интеграл при едно такова обобщение е прието да се нарича несобствен интеграл съответно от първи и втори род.

9.8.1. Понятие за несобствен интеграл от първи род. Ще въведем понятието определен интеграл в случая, когато областта, върху която се интегрира, е безкрайна. Върху правата $-\infty<x<\infty$ има три вида безкрайни свързани области: 1) полуправата

* Т. е. представлява полуправа или цялата безкрайна права.

$-\infty < x \leq b$; полуправата $a \leq x < +\infty$; 3) цялата права $-\infty < x < \infty$.

За определеност ще разгледаме подробно една от тези области, а именно полуправата $a \leq x < +\infty$.

Ще предполагаме, че функцията f е дефинирана върху полуправата $a \leq x < +\infty$ и за всяко число A, удовлетворяващо неравенството $A \geq a$, съществува определеният интеграл на Риман

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx. \tag{9.7}$$

Възниква въпросът за съществуването на граница на $F(A)$ при $A \to +\infty$:

$$\lim_{A \to +\infty} F(A) = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx. \tag{9.8}$$

Определение. *Границата* (9.8) *в случая, когато съществува, се нарича* ***несобствен интеграл от първи род*** *на функцията f върху полуправата $[a, +\infty)$ и се означава със символа*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{9.9}$$

При това се казва, че несобственият интеграл (9.9) е ***сходящ***, и това се записва с равенството

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\,dx.$$

Впрочем символът (9.9) се употребява и в случая, когато границата (9.8) не съществува, но тогава се казва, че несобственият интеграл (9.9) е ***разходящ***.

Аналогично се определят несобствените интеграли върху полуправата $-\infty < x \leq b$ и върху безкрайната права $-\infty < x < +\infty$. Първият от тези интеграли се определя като граница $\lim\limits_{A \to -\infty} \int_A^b f(x)\,dx$ и се означава със символа $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$.

Що се касае до интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, то той се определя

като границата

$$\lim_{\substack{A' \to +\infty \\ A'' \to -\infty}} \int_{A''}^{A'} f(x)\,dx,$$

където A' клони към $+\infty$ независимо от клонението на A'' към $-\infty$. От тези определения следва, че ако за някое реално число a всеки от несобствените интеграли $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ, то и несобственият интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ и е в сила равенството

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Ако несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ и b е число, по-голямо от a, то и несобственият интеграл $\int_b^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ и е изпълнено равенството

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Това следва непосредствено от определението за сходимост на несобствен интеграл.

Примери:

1. Ще изучим въпроса за сходимост на несобствения интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Тъй като функцията $f(x) = 1/(1+x^2)$ е интегруема в сегмента $[0, A]$ за всяко $A > 0$ и за нея

$$F(A) = \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x \Big|_0^A = \operatorname{arc\,tg} A,$$

то

$$\lim_{A\to+\infty} F(A)=\lim_{A\to+\infty} \operatorname{arctg} A=\pi/2.$$

Следователно несобственият интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ е сходящ и

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}=\pi/2.$$

2. Ще разгледаме въпроса за сходимостта на несобствения интеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^\lambda\, dx$, където a и λ са произволни реални числа, първото от които е положително ($a>0$).

Тъй като функцията $f(x)=x^\lambda$ е интегруема в сегмента $[a, A]$ при всяко $A>0$ и

$$F(A)=\int\limits_a^A x^\lambda\, dx=\begin{cases} x^{\lambda+1}/(\lambda+1)\,\big|_a^A=(A^{\lambda+1}-a^{\lambda+1})/(\lambda+1) & \text{при } \lambda\neq-1,\\ \ln x\,\big|_a^A=\ln A-\ln a & \text{при } \lambda=-1,\end{cases}$$

то за $\lambda<-1$ границата на $F(A)$ при $A\to+\infty$ съществува и е равна на $-a^{\lambda+1}/(\lambda+1)$, а за $\lambda\geqq-1$ тази граница не съществува.

Следователно при $\lambda<-1$ несобственият интеграл $\int\limits_a^{+\infty} x^\lambda\, dx$ е сходящ и е равен на $-a^{\lambda+1}/(\lambda+1)$, а при $\lambda\geqq-1$ той е разходящ.

9.8.2. Критерий на Коши за сходимост на несобствени интеграли от първи род. Достатъчни условия за сходимост. Сходимостта на несобствен интеграл от първи род е еквивалентна на съществуването на граница на функцията

$$F(A)=\int\limits_a^A f(x)\, dx \text{ при } A\to+\infty.$$

Както е известно, за съществуването на граница на функцията $F(A)$ при $A\to\infty$ е необходимо и достатъчно тя да удовлетворява следното условие на Коши: За всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова число B, че за произволни A_1 и A_2, по-големи от B, да е изпълнено неравенството

$$|F(A_2)-F(A_1)|=\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\, dx\right|<\varepsilon.$$

Следователно в сила е следното твърдение:

Твърдение 1 (критерий на Коши за сходимост на несобствен интеграл). *Необходимо и достатъчно условие несобственият интеграл (9.9) да бъде сходящ е за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова $B>a$, че при всеки избор на числата A_1 и A_2, по-големи от B, да е изпълнено*

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\, dx\right|<\varepsilon.$$

Забележка. От сходимостта на несобствения интеграл не следва дори ограниченост на подинтегралната функция. Например интегралът $\int\limits_0^{\infty} f(x)\, dx$, където функцията f е равна на нула за всички нецели x и е равна на n при $x=n$ (n е цяло число), очевидно е сходящ, въпреки че подинтегралната функция не е ограничена.

Ще докажем следното твърдение:

Твърдение 2 (общ критерий за сравнение). *Нека върху полуправата $a\leqq x<+\infty$ имаме*

(9.10) $$|f(x)|\leqq g(x).$$

Тогава от сходимостта на интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ следва сходимостта на интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Доказателство. Нека $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ е сходящ. Тогава съгласно критерия на Коши за всяко $\varepsilon>0$ ще се намери такова $B>a$, че при всеки избор на числата $A_1>B$ и $A_2>B$ да е изпълнено неравенството

(9.11) $$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)\, dx\right|<\varepsilon.$$

От известните неравенства за интеграли и неравенството (9.10) получаваме

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| \leqq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\,dx \leqq \int_{A_1}^{A_2} g(x)\,dx.$$

Оттук и от неравенството (9.11) следва, че за всеки две числа $A_1>B$ и $A_2>B$ е вярно неравенството $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right|<\varepsilon$. Следователно интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ.□

Твърдение 3 (частен критерий за сравнение). *Нека функцията f удовлетворява върху полуправата $0<a\leqq x<+\infty$ съотношението $|f(x)|\leqq cx^{\lambda}$, където c и λ са константи, $\lambda<-1$. Тогава интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е сходящ. Ако съществува такава константа $c>0$, че върху полуправата $0<a\leqq x<+\infty$ да е в сила съотношението $f(x)\geqq cx^{\lambda}$, в което $\lambda\geqq-1$, то интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ.*

Това твърдение следва от твърдение 2 и примера, разгледан в предишната точка (достатъчно е да се положи $g(x)=cx^{\lambda}$).

Следствие (частен критерий за сравнение в гранична форма). *Ако при $\lambda<-1$ съществува крайната граница $\lim_{x\to+\infty} x^{-\lambda}|f(x)|=c$, то интегралът $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ е сходящ. Ако при $\lambda\geqq-1$ съществува положителната граница $\lim_{x\to+\infty} x^{-\lambda}f(x)=c>0$, то интегралът $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ е разходящ.*

Ще се убедим във верността на първата част от следствието. За тази цел ще отбележим, че от съществуването на границата при $x\to+\infty$ следва ограниченост на функцията $x^{-\lambda}|f(x)|$, т. е. има константа $c_0>0$, за която е изпълнено неравенството $|f(x)|\leqq c_0x^{\lambda}$.

След това прилагаме първата част на твърдение 3. Верността на втората част на следствието се получава от следните разсъждения: Понеже $c>0$, може да се намери толкова малко $\varepsilon>0$, че $c-\varepsilon>0$. На това ε отговаря такова B, че при $x>B$ да е изпълнено неравенството $x^{-\lambda}f(x)>c-\varepsilon$ (това неравенство следва от определението за граница). Тогава $f(x)>(c-\varepsilon)\,x^{\lambda}$ и можем да приложим втората част на твърдение 3.

9.8.3. Абсолютна и условна сходимост на несобствените интеграли. Ще въведем понятията за абсолютна и условна сходимост на несобствените интеграли. Нека f е интегруема във всеки сегмент $[a, A]$.*

Определение 1. *Несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ се нарича* ***абсолютно сходящ,*** *ако е сходящ $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.*

Определение 2. *Несобственият интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ се нарича* ***условно сходящ,*** *ако той е сходящ, но интегралът $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ е разходящ.*

Забележка. Като положим в твърдение 2 $g(x)=|f(x)|$, получаваме, че от абсолютната сходимост на несобствения интеграл следва неговата сходимост.

Ще отбележим, че твърдения 2 и 3 позволяват да се установи само абсолютната сходимост на изследваните несобствени интеграли.

Ще дадем още един критерий за сходимост на несобствени интеграли от първи род, годен за установяване и на условна сходимост.

Твърдение 4 (критерий на Дирихле — Абел). *Нека са изпълнени следните условия:*

1) *функцията f е непрекъсната върху полуправата $a\leqq x<+\infty$ и има върху тази полуправа ограничена примитивна F;*

2) *функцията g е дефинирана и монотонно нерастяща върху полуправата $a\leqq x<+\infty$ и има граница, равна на нула, при $x\to+\infty$;*

* Тогава и функцията $|f(x)|$ е интегруема във всеки сегмент $[a, A]$.

3) *производната* $g'(x)$ *на функцията* g *съществува и е непрекъсната във всяка точка от полуправата* $a \leq x < +\infty$.

Тогава несобственият интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx \tag{9.12}$$

е сходящ.

Доказателство. Ще използваме критерия на Коши за сходимост на несобствени интеграли. Предварително ще интегрираме по части интеграла $\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx$ върху произволен сегмент $[A_1, A_2]$, $A_2 > A_1$, от полуправата $a \leq x < +\infty$. Получаваме

$$\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,g(x)\Big|_{A_1}^{A_2} - \int_{A_1}^{A_2} F(x)\,g'(x)\,dx. \tag{9.13}$$

Съгласно условието на теоремата F е ограничена: $|F(x)| \leq k$. Тъй като g не е растяща и клони към нула при $x \to +\infty$, то $g(x) \geq 0$, а $g'(x) \leq 0$. Като оценим съотношението (9.13), получаваме следното неравенство:

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq K(g(A_1)+g(A_2)) + K\int_{A_1}^{A_2}(-g'(x))\,dx.$$

Тъй като интегралът в дясната страна на това неравенство е равен на $g(A_1)-g(A_2)$, то очевидно

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx\right| \leq 2K\,g(A_1). \tag{9.14}$$

Нека ε е произволно положително число. Понеже $g(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то в зависимост от ε може да се избере число B така, че при $A_1 > B$ да е изпълнено $g(A_1) < \varepsilon/2K$. Оттук и от неравенството (9.14) следва, че за всеки две A_1 и A_2, по-големи от B, е изпълнено неравенството $\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\,g(x)\,dx\right| < \varepsilon$, което съгласно критерия на Коши гарантира сходимостта на интеграла (9.12).□

Забележка. Условие 3) на твърдение 4 е излишно и е предизвикано само от метода на доказателство (прилагането на интегриране по части). За да се докаже твърдение 4 без условието 3), за оценката на интеграла $\int_{A_1}^{A} f(x)\,g(x)\,dx$ трябва да се приложи втората формула за средните стойности (вж. свойство в) 9.4.2.

Примери:

1. Да разгледаме интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\,dx, \quad \alpha > 0. \tag{9.15}$$

Като положим $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^{-\alpha}$, лесно се вижда, че за този интеграл са изпълнени условията на твърдение 3. Следователно интегралът (9.15) е сходящ.

2. Да разгледаме интеграла на Френел $\int_0^{+\infty} \sin x^2\,dx$. Съгласно т. 1 на това допълнение от сходимостта на интеграла $\int_1^{+\infty} \sin x^2\,dx$ следва сходимостта на изследвания интеграл. Затова ще изследваме сходимостта на интеграла

$$\int_1^{+\infty} \sin x^2\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\cdot x\sin x^2\,dx.$$

Като положим $f(x) = x\sin x^2$, $g(x) = 1/x$, виждаме, че са изпълнени всички условия на твърдение 4. Следователно интегралът на Френел е сходящ.

9.8.4. Смяна на променливите под знака на несобствения интеграл и формула за интегриране по части. В тази точка ще формулираме условията, при които са в сила формулите за смяна на променливите и интегриране по части за несобствени интеграли от първи род. Най-напред ще разгледаме въпроса за смяна на променлива под знака на несобствен интеграл.

Ще предполагаме, че са изпълнени следните условия:

1) функцията f е непрекъсната върху полуоста $a \leq x < +\infty$;

2) полуоста $a \leq x < +\infty$ е множеството от стойностите на някоя строго монотонна функция g, зададена върху полуоста $\alpha \leq t < +\infty$ (или $-\infty < t \leq \alpha$), и g има върху тази полуос непрекъсната производна;

3) $g(\alpha) = a$.

При тези условия от сходимостта на някой от несобствените интеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_\alpha^{+\infty} f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(\text{или} \; -\int_{-\infty}^{\alpha} f(g(t))\,g'(t)\,dt \right) \tag{9.16}$$

следва сходимостта на другия и равенството им.

Формулираното твърдение се установява с помощта на следните разсъждения: Разглеждаме произволен сегмент $[a, A]$. На този сегмент поради строгата монотонност на функцията $g(t)$ отговаря такъв сегмент $[\alpha, \rho]$ (или $[\rho, \alpha]$) от оста t, че когато t обхожда сегмента $[\alpha, \rho]$, стойностите на функцията g обхождат сегмента $[a, A]$ и $g(\rho)=A$. По този начин за разглежданите сегменти са изпълнени всички условия от 9.4.3, при които е в сила формулата за смяна на променливата под знака на определения интеграл. Следователно е изпълнено равенството

$$\int_a^A f(x)\,dx = \int_\alpha^\rho f(g(t))\,g'(t)\,dt \left(\text{или} = -\int_\rho^\alpha f(g(t))\,g'(t)\,dt \right). \tag{9.17}$$

Поради строгата монотонност на функцията g имаме $A \to +\infty$ при $\rho \to +\infty$ и, обратно, $\rho \to \infty$ при $A \to +\infty$ (или $A \to +\infty$ при $\rho \to -\infty$ и $\rho \to -\infty$ при $A \to +\infty$). Затова от формула (9.17) следва верността на формулираното по-горе твърдение.

Ще преминем сега към въпроса за интегриране по части на несобствени интеграли от първи род.

Ще докажем следното твърдение:

Нека функциите u и v имат непрекъснати производни върху полуправата $a \leq x < +\infty$ и освен това съществува граничната стойност $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)\,v(x) = L$. При тези условия от сходимостта на единия от интегралите

$$\int_a^{+\infty} u(x)\,v'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} v(x)\,u'(x)\,dx \tag{9.18}$$

следва сходимостта на другия. В сила е също формулата

$$\int_a^{+\infty} u(x)\,v'(x)\,dx = L - u(a)\,v(a) - \int_a^{+\infty} v(x)\,u'(x)\,dx. \tag{9.19}$$

За доказателството на това твърдение ще разгледаме произволен сегмент $[a, A]$. В този сегмент е в сила обикновената формула за интегриране по части и следователно

$$\int_a^A u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^A - \int_a^A v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Тъй като при $A \to +\infty$ изразът $u(x)\,v(x)\Big|_a^A$ клони към $L - u(a)\,v(a)$, то от горното равенство следва едновременната сходимост на интегралите (9.18) и верността на формулата (9.19) в случая, когато единият от интегралите (9.18) е сходящ.

9.8.5. Несобствени интеграли от втори род

Нека в полусегмента $[a, b)$ е дефинирана функцията f. *Ще наричаме точката b* ***особена,*** *ако функцията не е ограничена в полусегмента, но е ограничена във всеки сегмент $[a, b-\alpha]$, $\alpha>0$, принадлежащ на полусегмента $[a, b)$.* Ще предполагаме също, че във всеки такъв сегмент функцията f е интегруема.

При тези предположения в полусегмента $(0, b-a]$ е зададена функция на аргумента α, дефинирана със съотношението

$$F(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Ще изследваме сега въпроса за дясна граница на функцията $F(\alpha)$ в точката $\alpha=0$:

$$\lim_{\alpha \to +0} \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx. \tag{9.20}$$

Определение. *Дясната граница (9.20), ако съществува, се нарича* ***несобствен интеграл от втори род*** *от функцията f в сегмента $[a, b]$ и се означава със символа*

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{9.21}$$

Казва се още, че несобственият интеграл (9.21) е ***сходящ,*** *и се записва*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to +0} \int_a^{b-\alpha} f(x)\,dx.$$

Символът (9.21) се употребява и в случая, когато границата (9.20) не съществува, но тогава се казва, че несобственият интеграл (9.21) ***е разходящ.***

Забележка. Понятието несобствен интеграл от втори род се пренася леко и в случая, когато функцията f има краен брой особени точки.

Пример:

Да разгледаме в полусегмента $[a, b)$ функцията $(b-x)^{\lambda}$, $\lambda<0$. Ясно е, че точката b е особена точка за тази функция. Освен това очевидно тази функция е интегруема във всеки сегмент $[a, b-\alpha]$, $\alpha>0$.

$$\int_a^{b-\alpha}(b-x)^{\lambda}\,dx=\begin{cases}-(b-x)^{\lambda+1}/(\lambda+1)\Big|_a^{b-\alpha}=\dfrac{(b-a)^{\lambda+1}-\alpha^{\lambda+1}}{\lambda+1} & \text{при } \lambda\neq-1,\\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\alpha}=\ln(b-a)-\ln\alpha & \text{при } \lambda=-1.\end{cases}$$

Очевидно границата $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha}(b-x)^{\lambda}\,dx$ съществува и е равна на $b-a)^{\lambda+1}/(\lambda+1)$ при $\lambda>-1$ и не съществува при $\lambda\leq-1$. Следователно разглежданият несобствен интеграл е сходящ при $\lambda>-1$ и разходящ при $\lambda\leq-1$.

Ще формулираме критерия на Коши за сходимост на несобствен интеграл от втори род. При това ще предполагаме, че функцията f е дефинирана в полусегмента $[a, b)$ и b е особена точка на функцията.

Твърдение 5 (критерий на Коши). *За да бъде несобственият интеграл от втори род (9.21) сходящ, е необходимо и достатъчно за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова число $\delta>0$, че при всеки избор на числата α' и α'', удовлетворяващи условията $0<\alpha''<\alpha'<\delta$, да е изпълнено неравенството*

$$\left|\int_{b-\alpha'}^{b-\alpha''}f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

Верността на тази теорема следва от това, че сходимостта на интеграл по определение е еквивалентна на съществуването на граница на функцията F, въведена в началото на тази точка. Няма да развиваме подробно теорията на несобствените интеграли от втори род, тъй като основните изводи за несобствени интеграли от първи род лесно се пренасят и за интегралите от втори род. Затова ще се ограничим само с някои бележки.

1°. При някои ограничения за подинтегралните функции интегралите от втори род се свеждат към интеграли от първи род. Именно нека функцията f е непрекъсната в полусегмента $[a, b)$ и b е нейна особена точка. При тези условия в интеграла $\int_a^{b-\alpha}f(x)\,dx$ можем да извършим смяна на променливите:

$$x=b-1/t,\quad dx=t^{-2}\,dt,\quad 1/(b-a)\leq t\leq 1/\alpha.$$

В резултат на тази смяна получаваме

$$\int_a^{b-\alpha}f(x)\,dx=\int_{1/(b-a)}^{1/\alpha}f(b-1/t)\,t^{-2}\,dt. \tag{9.22}$$

Нека интегралът $\int_a^b f(x)\,dx$ да е сходящ, т. е. границата $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha}f(x)\,dx$ да съществува. От равенството (9.22) се вижда, че и границата на израза в дясната страна на (9.22) при $1/\alpha\to\infty$ съществува. С това са доказани сходимостта на несобствения интеграл от първи род

$$\int_{1/(b-a)}^{+\infty}f(b-1/t)t^{-2}\,dt$$

и равенството му с интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Очевидно сходимостта на този интеграл от първи род влече сходимостта на интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ и равенството на тези два интеграла. И така от сходимостта на единия от интегралите

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad\text{и}\quad \int_{1/b-a}^{+\infty}f(b-1/t)\,t^{-2}\,dt$$

следват сходимостта на другия и равенството помежду им.

2°. За несобствените интеграли от втори род се доказват лесно твърдения, аналогични на твърденията в 9.8.2, които могат да се обединят под общото название „критерии за сравнение“. Ще отбележим, че във всички формулировки функцията f трябва да се разглежда в полусегмента $[a, b)$, където b е особена точка за тази функция.

Частният критерий за сравнение ще има следния вид:

Ако $|f(x)| \leq c(b-x)^{\lambda}$, където $\lambda > -1$, то несобственият интеграл (9.21) е сходящ. Ако $f(x) \geq c(b-x)^{\lambda}$, където $c>0$ и $\lambda \leq -1$, то несобственият интеграл (9.21) е разходящ. Доказателството следва от общия критерий за сравнение и от примера, разгледан в предишната точка.

В пълна аналогия с 9.8.4 могат да се формулират за несобствените интеграли от втори род и правилата за интегриране чрез смяна на променливите и интегриране по части.

9.9. Главна стойност на несобствен интеграл

Определение. *Нека функцията f е дефинирана върху правата $-\infty<x<\infty$ и е интегруема във всеки сегмент от тази права. Ще казваме, че функцията f е* ***интегруема по Коши,*** *ако съществува границата* $\lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$.

Тази граница ще наричаме ***главна стойност на несобствения интеграл от функцията $f(x)$ в смисъл на Коши*** и ще я означаваме със символа*

$$\text{V. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx.$$

За разлика от понятието несобствен интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, дефинирано като границата $\lim\limits_{\substack{A'\to-\infty\\ A''\to+\infty}} \int\limits_{A'}^{A''} f(x)\,dx$, когато A' клони към $-\infty$ независимо от клоненето на A'' към $+\infty$, интегралът на Коши

* V. p. са началните букви на „Valeur principal“, означаващо „главна стойност“.

се дефинира като граница на интеграла $\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx$ при $A\to+\infty$ в симетрични интеграционни граници.

Пример:

Ще намерим главната стойност на интеграла от функцията $f(x)=x$. Понеже $f(x)=x$ е нечетна функция, т. е.

$$\int\limits_{-A}^{A} x\,dx=0, \text{ то V. p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx=0.$$

По същия начин заключаваме, че и V. p. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = 0$.

Твърдение. *Ако функцията $f(x)$ е нечетна, то тя е интегруема по Коши главната стойност на интеграла ѝ е равна на нула.*

Ако функцията $f(x)$ е четна, тя е интегруема по Коши тогава и само тогава, когато е сходящ несобственият интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{9.23}$$

Първата част на това твърдение е очевидна. За доказателството на втората част е достатъчно да използваме равенството

$$\int\limits_{-A}^{A} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{A} f(x)\,dx,$$

което е вярно за произволна четна функция, и определението за сходимост на несобствения интеграл (9.23).

Понятието интегруемост по Коши може да се въведе и за несобствените интеграли от втори род в случая, когато особената точка е вътрешна за сегмента, в който се извършва интегрирането.

Определение. *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в сегмента $[a, b]$ с изключение евентуално на точката c, $a<c<b$, и интегруема във всеки подсегмент на $[a, b]$, несъдържащ c. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е* ***интегруема по Коши,*** *ако съществува границата*

$$\lim_{\alpha\to+0}\left(\int\limits_{a}^{c-\alpha} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\alpha}^{b} f(x)\,dx\right) = \text{V. p.} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

която ще наричаме ***главна стойност на интеграла в смисъл на Коши.***

Пример:

Функцията $1/(x-c)$ не е интегруема в сегмента $[a, b]$, $a<c<b$, в несобствен смисъл, но е интегруема по Коши. При това

$$\text{V. p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\alpha\to+0}\left(\int_a^{c-\alpha} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\alpha}^b \frac{dx}{x-c}\right) = \ln\frac{b-c}{c-a}.$$

9.10. Интеграл на Стилтес*

Понятието интеграл на Стилтес е непосредствено обобщение на понятието интеграл на Риман.

Ще дадем основните сведения за интеграла на Стилтес.

9.10.1. Дефиниция на интеграл на Стилтес и условия за неговото съществуване. Нека функциите f и u са дефинирани и ограничени в сегмента $[a, b]$ и $\{x_k\}$ е едно деление на този сегмент:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b.$$

Сума от вида

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(u(x_i)-u(x_{i-1})), \tag{9.24}$$

където $x_{i-1}\leqq\xi_i\leqq x_i$, $i=1, 2, 3, \ldots, n$, се нарича ***интегрална сума на Стилтес.***

Числото I се нарича ***граница на интегралните суми*** (9.24) при $\max\{\Delta x_i: i=1, 2, \ldots, n\}\to 0$, ако при всеки избор на $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че при $\max\{\Delta x_i: i=1, 2, \ldots, n\}<\delta$ да е изпълнено неравенството $|\sigma-I|<\varepsilon$.

Определение. *Функцията f се нарича* ***интегруема относно функцията*** *u в сегмента $[a, b]$, ако съществува крайна граница на интегралните суми (9.24) при $\max\{\Delta x_i: i=1, 2, \ldots, n\}\to 0$. Тази граница се нарича* ***интеграл на Стилтес*** *(или* ***интеграл на Риман — Стилтес***) ***от функцията*** *f* ***по*** *u в сегмента $[a, b]$ и се означава със символа*

$$I=\int_a^b f(x)\,du(x). \tag{9.25}$$

Функцията u се нарича ***интегрираща функция.***

* Томас Йоанес Стилтес — холандски математик (1856 — 1894).

Стилтес идва до идеята за такъв интеграл при разглеждането на положително „разпределение на маси" върху права, което е зададено с растяща функция u, чиито точки на прекъсване съответствуват на масите, „концентрирани в една точка".

Интегралът на Риман е частен случай от интеграла на Стилтес, когато за интегрираща функция е взета функцията $x+c$, където c е константа.

Ще дадем няколко условия за съществуване на интеграла на Стилтес (т. е. условия, когато функцията f е интегруема относно функцията u).

Да предположим, че интегриращата функция u е растяща. Оттук следва, че от $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ имаме $\Delta u(x_i)=u(x_i)-u(x_{i-1})>0$. Това позволява, като заменим Δx_i с $\Delta u(x_i)$, да повторим всички разсъждения, проведени при разглеждане интеграла на Риман.

Аналогично на сумите на Дарбу за интеграла на Риман тук се въвеждат ***малка*** и ***голяма сума на Дарбу—Стилтес***

$$S=\sum_{i=1}^{n} M_i(u(x_i)-u(x_{i-1})),\quad s=\sum_{i=1}^{n} m_i(u(x_i)-u(x_{i-1})), \tag{9.26}$$

където M_i и m_i са точната горна и точната долна граница на функцията f в сегмента $[x_{i-1}, x_i]$.

Както при сумите на Дарбу (т. е. в най-простия случай $u=x+c$, $c=\text{const}$) при едно и също деление са изпълнени неравенствата $s\leqq\sigma\leqq S$, като s и S са точните граници за стилтесовите суми σ, взети по всички възможни вътрешни точки на частичните сегменти.

Сумите на Дарбу—Стилтес имат (както и в най-простия случай) следните свойства:

а) ако към точките на деление добивам нови точки, то малката сума на Дарбу—Стилтес евентуално може само да расте, а голямата сума — само да намалява;

б) всяка малка сума на Дарбу—Стилтес не надминава коя да е от големите суми, отговарящи на едно или друго деление на сегмента $[a, b]$.

Аналогично на начина, използван за построението на интеграла на Риман, се въвеждат горен и долен интеграл на Дарбу—Стилтес:

$$I^*=\inf\{S\},\quad I_*=\sup\{s\},$$

където долната и горната граница се вземат по всички възможни деления на сегмента $[a, b]$.

Лесно се проверява верността на съотношението

$$s\leqq I_*\leqq I^*\leqq S.$$

Както при интеграла на Риман, и при интеграла на Стилтес горният интеграл на Дарбу—Стилтес е долна граница на големите суми S, когато диаметърът на делението клони към нула. Аналогично долният интеграл на Дарбу—Стилтес е горна граница на малките суми s (вж. 9.2.2, основна лема на Дарбу).

Ще формулираме сега теоремата, която е обобщение на основната теорема от 9.3.1.

Основна теорема. *Необходимото и достатъчно условие функцията f, ограничена в сегмента $[a, b]$, да бъде интегруема в този сегмент относно растящата функция u е за всяко $\varepsilon>0$ да съществува такова деление $\{x_k\}$ на сегмента $[a, b]$, че $S-s<\varepsilon$.*

Доказателството на тази теорема (както впрочем и на дадените по-горе факти и свойства) е дословно повторение на разсъжденията, проведени за интеграла на Риман.

Ще изброим сега някои класове функции, интегруеми по Риман—Стилтес.

1°. *Ако функцията f е непрекъсната, а u е растяща в сегмента $[a, b]$, то интегралът на Стилтес $\int_a^b f(x)du(x)$ съществува.*

Доказателството на това твърдение е напълно аналогично на доказателството на теоремата 9.1.

Забележка. Даденото свойство е вярно и в случая, когато функцията u е с ограничена вариация.* За функцията с ограничена вариация е в сила следният основен критерий:

Необходимо и достатъчно условие функцията и да има ограничена вариация в сегмента $[a, b]$ е тя да може да се представи в този сегмент като разлика на две растящи и ограничени функции:

$$u=g-h.$$

Следователно, когато u е функция с ограничена вариация, сумата на Стилтес може да се запише така:

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta u(x_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta g(x_i)-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta h(x_i)=\sigma_1-\sigma_2,$$

* Така се нарича функция $u(x)$, дефинирана в сегмента $[a, b]$, за която числовото множество $V(\{x_k\})=\sum_{i=1}^{n}|u(x_i)-u(x_{i-1})|$ е ограничено отгоре, където $\{x_k\}$, $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, е произволно деление на сегмента $[a, b]$. Точната горна граница на множеството $V(\{x_k\})$ се нарича вариация на функцията $u(x)$ в сегмента $[a, b]$ и се означава със символа $V_a^b u=\sup\{V(\{x_k\})\}$.

където

$$\Delta u(x_i)=u(x_i)-u(x_{i-1}),\quad \Delta g(x_i)=g(x_i)-g(x_{i-1}),$$

$$\Delta h(x_i)=h(x_i)-h(x_{i-1}).$$

Сумите σ_1 и σ_2 клонят към крайни граници, когато диаметърът на делението клони към нула, тъй като g и h са растящи функции. Тогава съществува крайна граница и на сумите σ при клонене на диаметъра на деление към нула.

Следователно теорията на интеграла на Стилтес може да се построи и в случая, когато интегриращата функция u има ограничена вариация, напълно аналогично на случая на растяща функция u.

Ще отделим още един клас функции, за които интегралът на Стилтес съществува.

2°. *Интегралът на Стилтес (9.25) съществува при условие, че функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$ по Риман, а функцията u удовлетворява в този сегмент условието на Липшиц, т. е.*

$$|u(x')-u(x'')|\leqq c\,|x'-x''|$$

за всяко x' и x'' от $[a, b]$, където c е константа.

Тъй като всяка функция, удовлетворяваща условието на Липшиц, е функция с ограничена вариация, то за доказателството на този критерий е достатъчно очевидно да се разгледа само случаят на растяща липшицова функция и да се отбележи, че

$$S-s=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta u(x_i)\leqq c\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta x_i, \tag{9.27}$$

където $M_i=\sup\{f(x): x\in[x_{i-1}, x_i]\}$, $m_i=\inf\{f(x): x\in[x_{i-1}, x_i]\}$ и c е константата от условието на Липшиц. Стойността на израза $\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\,\Delta x_i$ в неравенството (9.27) поради интегруемостта на функцията f по Риман може да бъде направена произволно малка за сметка на избора на делението на сегмента $[a, b]$. Следователно величината $S-s$ може да бъде направена по-малка от отнапред зададено число $\varepsilon>0$, ако диаметърът на делението се избере достатъчно малък. Съгласно основната теорема функцията f е интегруема по Стилтес.

В общия случай за функцията u, която удовлетворява условието на Липшиц, също може да се разгледа представянето

$$u(x)=cx-(cx-u(x))=u_1(x)-u_2(x).$$

В него двете функции u_1 и u_2 са растящи и удовлетворяват условието на Липшиц и разсъжденията са същите, както по-горе.

Ще дадем накрая още един клас интегруеми по Стилтес функции.

3°. Ако функцията f е интегруема в сегмента $[a, b]$ по Риман, а функцията u допуска представяне във вид на интеграл с променлива горна граница:

$$u(x)=A+\int_a^x \varphi(t)\,dt,$$

където φ е интегруема по Риман функция в сегмента $[a, b]$, то интегралът (9.25) съществува.

Действително, понеже φ е интегруема по Риман, то тя е ограничена: $|\varphi(t)|\leqq K=\text{const}$. Следователно

$$|u(x')-u(x'')|=\left|\int_{x'}^{x''}\varphi(t)\,dt\right|\leqq K|x'-x''|.$$

Така верността на този критерий следва от верността на предишния критерий.

Ще отбележим, че ако са изпълнени формулираните в този критерий условия, интегралът на Стилтес $I=\int_a^b f(x)\,du(x)$ се свежда към интеграла на Риман по формулата

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{9.28}$$

По-специално равенството (9.28) е валидно в случая, когато $u(x)$ има ограничена и интегруема по Риман производна u' в сегмента $[a, b]$. В този случай $\varphi=u'$.

9.10.2. Свойства на интеграла на Стилтес. Ще формулираме някои свойства на интеграла на Стилтес, непосредствено следващи от определението му.

а) Линейно свойство относно интегруемата и относно интегриращата функция (при условие, че всеки от интегралите на Стилтес в дясната страна съществува):

$$\int_a^b(\alpha f_1+\beta f_2)\,du=\alpha\int_a^b f_1\,du+\beta\int_a^b f_2\,du,$$

$$\int_a^b f\,d(\alpha u_1+\beta u_2)=\alpha\int_a^b f\,du_1+\beta\int_a^b f\,du_2.$$

Тук α, β са произволни числа.

б) Ако е изпълнено условието $a<c<b$, то

$$\int_a^b f(x)\,du(x)=\int_a^c f(x)\,du(x)+\int_c^b f(x)\,du(x)$$

при предположение, че и трите интеграла съществуват.

Подчертаваме, че от съществуването на интегралите $\int_a^c f(x)\,du(x)$ и $\int_c^b f(x)\,du(x)$ не следва съществуването на интеграла $\int_a^b f(x)\,du(x)$. Ето такъв пример:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ако } -1\leqq x\leqq 0,\\ A\neq 0, & \text{ако } 0<x\leqq 1,\end{cases}\qquad u(x)=\begin{cases}0, & \text{ако } -1\leqq x<0,\\ B\neq 0, & \text{ако } 0\leqq x\leqq 1.\end{cases}$$

Интегралите $\int_{-1}^0 f(x)\,du(x)$, $\int_0^1 f(x)\,du(x)$ съществуват и са равни на нула, понеже съответствуващите им суми на Стилтес са равни на нула. Наистина в първия интеграл $f(x)=0$, $-1\leqq x\leqq 0$, във втория $\Delta u(x_i)=u(x_i)-u(x_{i-1})=0$ за всяко деление $\{x_k\}$ на сегмента $[0, 1]$. Обаче интегралът $\int_{-1}^1 f(x)\,du(x)$ не съществува. Действително нека $\{x_k\}$ е деление на сегмента $[a, b]$, което няма за елемент точката 0. Тогава в сумата на Стилтес

$$\sigma=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\,\Delta u(x_i)$$

остава само едно събираемо, а именно събираемото

$$f(\xi_k)(u(x_k)-u(x_{k-1}))=B\,f(\xi_k),\quad B\neq 0,$$

за което точката 0 се съдържа в сегмента $[x_{k-1}, x_k]$. В зависимост от това, дали $\xi_k\leqq 0$, или $\xi_k>0$, получаваме $\sigma=0$ или