4. Непрекъснатост на функция

В тази глава ще бъде разгледано важното понятие непрекъснатост на функция. При това, както и в глава 3, ще разглеждаме функция f на една реална променлива. В глава 12 понятието непрекъснатост ще бъде въведено в общия случай на изображение на едно метрично пространство в друго.

4.1. Понятие за непрекъснатост на функция

4.1.1. Определение за непрекъснатост на функция. Нека точката a принадлежи на дефиниционната област на функцията f и всяка δ-околност на точката a съдържа точки от дефиниционната област на f, различни от a.

Формално определение за непрекъснатост в точката a. *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** *a, ако в тази точка тя има граница и тази граница е равна на стойността $f(a)$ на функцията f в точката a.*

Като използваме определенията за граница на функцията f в точката a по Хайне и по Коши, ще стигнем до определение за непрекъснатост на функция в дадена точка по Хайне и по Коши.

Определение 1 (непрекъснатост в точка a по Хайне). *Функцията $f(x)$ се нарича* ***непрекъсната*** *в точката a, ако за всяка клоняща към a редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, съответната редица $\{f(x_n)\}$ от стойности на функцията е сходяща и има граница $f(a)$.*

Забележка 1. В сравнение с определение 1 за граница на функция по Хайне (вж. 3.4.2) в определението за непрекъснатост по Хайне няма изискване всички членове на редицата $\{x_n\}$ да бъдат различни от a. Това е така, защото прибавянето на произволен брой нови членове, равни на $f(a)$, към членовете на редицата

$\{f(x_n)\}$, клоняща към $f(a)$, не изменя сходимостта на тази редица и границата ѝ е $f(a)$.

Определение 1′ (непрекъснатост в точка a по Коши). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната*** *в точката a, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, удовлетворяващи условието $|x-a|<\delta$, е изпълнено неравенството $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.*

Забележка 2. В сравнение с определение 1′ за граница на функция по Коши (вж. 3.4.2) в определението за непрекъснатост по Коши не се иска всички стойности на аргумента x да удовлетворяват неравенството $0<|x-a|$, т. е. да са различни от x. Това е така, защото за стойности $x=a$ разликата $f(x)-f(a)$ е равна на нула и удовлетворява неравенството $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ при всяко $\varepsilon>0$.

Условието за непрекъснатост на функцията f в точката a се записва:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Тъй като $a=\lim\limits_{x\to a} x$, то това равенство се записва и във формата

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(\lim_{x\to a} x).$$

Следователно за непрекъснатата в точката a функция символът „$\lim\limits_{x\to a}$" за граничен преход и символът „f" за характеристиката на функцията могат да сменят местата си.

От теоремата за еквивалентност на определенията за граница по Хайне и по Коши (вж. теорема 3.19) следва, че определенията за непрекъснатост на функция по Хайне и по Коши (определения 1 и 1′) са еквивалентни.

Ще формулираме сега определение за едностранна непрекъснатост на функция f в точката a, т. е. непрекъснатост на f в точката a или само отдясно, или само отляво.

От множеството $\{x\}$, което е дефиниционна област на функцията f, ще трябва да поискаме този път да включва точката a и за всяко $\delta>0$ да има поне един елемент от интервала $(a, a+\delta)$ (съответно от $(a-\delta, a)$).

Формално определение за непрекъснатост в точка a отдясно (отляво). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката a отдясно (отляво)****, ако дясната (лявата) граница на функцията в точката a съществува и е равна на стойността $f(a)$ на функцията $f(x)$ в точката a.*

Като използваме определенията за дясна (лява) граница на функция $f(x)$ в точка a по Хайне и по Коши, идваме до определенията за непрекъснатост на функция f в точка a отдясно (отляво) по Хайне и по Коши.

Определение 2 (непрекъснатост на функция в точка a отдясно (отляво) по Хайне). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** a ***отдясно (отляво),*** *ако за всяка клоняща към a редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$, членовете на която удовлетворяват условието $x_n>a$ $(x_n<a)$, съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ е сходяща и клони към $f(a)$.*

Ще отбележим, че в това определение условието $x_n>a$ $(x_n<a)$ може да се замени с по-слабото условие $x_n\geq a$ $(x_n\leq a)$, тъй като, ако добавим към редицата $\{f(x_n)\}$, клоняща към $f(a)$, произволен брой нови членове, равни на $f(a)$, ще получим редица, която също клони към $f(a)$.

Определение 2' (непрекъснатост на функция в точка a отдясно (отляво) по Коши). *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** a ***отдясно (отляво),*** *ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x, които удовлетворяват условието $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$, да е изпълнено неравенството*

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Ще отбележим, че и в това определение условието $a<x<a+$ $(a-\delta<x<a)$ може да се замени с по-слабото условие $a\leq x<a+$ $(a-\delta<x\leq a)$.

Еквивалентността на определения 2 и 2' следва от еквивалентността на съответните определения за граница на функция.

Непрекъснатостта на функцията f в точка a отдясно (отляво) се записва така:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a) \quad \text{или} \quad f(a+0)=f(a)$$

$$[\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a) \quad \text{или} \quad f(a-0)=f(a)].$$

Забележка 3. Ако функцията f е непрекъсната в точката a отляво и отдясно, то тя е непрекъсната в тази точка. Действително съгласно твърдението, доказано в 3.4.2, в този случай съществува граница на функцията в точката a и тя е равна на $f(a)$. Точки, в които функцията не притежава свойството непрекъснатост, се наричат ***точки на прекъсване*** за тази функция.

Примери:

1. Степенната функция $f(x)=x^n$, където n е естествено число, е непрекъсната във всяка точка a на безкрайната права $-\infty<x<+\infty$.

Наистина в глава 3 беше установено, че границата на тази функция във всяка точка a от безкрайната права е равна на a^n.

2. Полиномите и рационалните дроби имат граница във всяка точка от дефиниционната си област, равна на стойността им в тази точка (вж. 3.4.3). Затова те са непрекъснати функции във всяка точка от дефиниционната си област.

3. Функцията sgn е прекъсната в точката $x=0$ и непрекъсната във всички останали точки от числовата ос. Наистина в точката $x=0$, както беше показано в глава 3, съществуват дясна граница (равна на $+1$) и лява граница (равна на -1) на функцията sgn. Тъй като тези едностранни граници не са равни помежду си, функцията sgn x е прекъсната в точката нула. В останалите точки от числовата ос тя притежава граница, равна съответно на стойността ѝ в тези точки, и следователно е непрекъсната.

4. Функцията на Дирихле D (вж. 3.4.1) е прекъсната във всяка точка от числовата ос, понеже няма граница в нито една точка.

Ще отбележим обаче, че функцията $f(x)=xD(x)$, където D е функцията на Дирихле, е непрекъсната в точката $x=0$ и прекъсната във всички останали точки от безкрайната права. Прекъснатостта на f във всяка точка $x_0\neq 0$ се установява също както за функцията D (за всяка сходяща към x_0 редица $\{x_n\}$ от рационални точки съответната редица $\{f(x_n)\}$ клони към $x_0\neq 0$, а за всяка сходяща към x_0 редица $\{x_n'\}$ от ирационални точки съответната редица $\{f(x_n')\}$ клони към нула).

Ще се убедим, че функцията $f(x)=xD(x)$ е непрекъсната в точката $x=0$. За всяка безкрайно малка редица от стойности на аргумента $\{x_n\}$ редицата $\{D(x_n)\}$ е ограничена и затова (според теорема 3 от глава 3) редицата $f(x_n)=x_nD(x_n)$ е безкрайно малка, т. е. има за граница числото нула, равно на $f(0)$.

Ще казваме, че дадена функция е ***непрекъсната в множеството*** $\{x\}$, *ако тя е непрекъсната във всяка точка на това множество.*

Например функция, непрекъсната във всяка точка на даден интервал, се нарича непрекъсната в този интервал.

Специално ще *наричаме функцията f* ***непрекъсната в сегмента*** $[a, b]$, *ако е непрекъсната във всяка вътрешна точка на този сегмент, непрекъсната отдясно в точката a и непрекъсната отляво в точката b.*

По-рано, когато дадохме определение за непрекъснатост на функция f в точката a, предположихме, че във всяка δ-околност на точката a се съдържат точки от дефиниционната област на функцията, различни от a. Формално можехме да минем без това предположение, т. е. да включим и случая, когато в някоя δ-околност на точката a не се съдържат точки от дефиниционната област на функцията, различни от a. В този случай можем да приемем, че f е непрекъсната в точката a. Разбира се, понятието непрекъснатост на функция е съдържателно, когато a е точка на сгъстяване за дефиниционната област на функцията.

Определението за непрекъснатост на функция може да се даде и в следната еквивалентна форма.

Определение 1''. *Функцията f се нарича* ***непрекъсната в точката*** *a, ако за всяка околност на точката $f(a)$ съществува околност на точката a, образът на която при изображението f се съдържа в избраната околност на точката $f(a)$.*

В глава 12 ще бъде показано (даже и в по-общи случаи), че последното определение за непрекъснатост е еквивалентно на предишните. За упражнение читателят може сам да провери това.

Като използваме въведеното в 3.5 общо определение за граница на функция по база, можем да обединим понятията непрекъснатост в точката a, непрекъснатост в точката a отдясно и непрекъснатост в точката a отляво.

Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, което съдържа точката a и има база B от вида $x\to a$, $x\to a+0$ или $x\to a-0$.

Функцията f се нарича непрекъсната в точката a, ако границата ѝ по базата B на дефиниционната ѝ област съществува и е равна на $f(a)$.

4.1.2. Аритметични операции с непрекъснати функции. В сила е следната теорема:

Основна теорема 4.1. *Нека функциите f и g имат една и съща дефиниционна област и са непрекъснати в точката a. Тогава и функциите $f+g$, $f-g$, $f.g$ и f/g са непрекъснати в точката a (в случая на частно е нужно допълнителното изискване $g(a)\neq 0$).*

Доказателство. Тъй като функциите f и g са непрекъснати в точката a, границите им в тази точка са съответно $f(a)$ и $g(a)$ и съгласно теорема 3.21 границите на функциите $f+g$, $f-g$, $f.g$ и f/g съществуват и са съответно равни на $f(a)+g(a)$, $f(a)-g(a)$, $f(a).g(a)$ и $f(a)/g(a)$. Но тъй като тези са стойностите на тези функции в точката a, то по определение те са непрекъснати в тази точка. □

4.1.3. Сложна функция. Непрекъснатост. Функция, получена в резултат от суперпозиция на две или повече функции, ще наричаме *сложна (съставна) функция.*

Ще определим понятието суперпозиция на две функции, тъй като обобщението за суперпозиция на повече функции е очевидно.

Нека функцията $x=\varphi(t)$ е дефинирана в множеството $\{t\}$ и нека $\{x\}$ е множеството от стойностите ѝ, а функцията $y=f(x)$ е дефинирана в множеството $\{x\}$. Тогава функцията $y=f(\varphi(t))=F(t)$ е суперпозиция на функциите $f(x)$ и $\varphi(t)$, т. е. $f(\varphi(t))$ е сложна (съставна) функция.

В сила е следната теорема.

Теорема 4.2. *Нека функцията φ е непрекъсната в точката a, а функцията f е непрекъсната в точката $b=\varphi(a)$. Тогава сложната функция $F(t)=f(\varphi(t))$ е непрекъсната в точката a.*

Доказателство. Нека $\{t_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента на сложната функция. Тъй като функцията $x=\varphi(t)$ е непрекъсната в точката a, то (според определение 1 за непрекъснатост по Хайне) съответната редица от стойности на функцията $x_n=\varphi(t_n)$ е сходяща с граница $b=\varphi(a)$. Но функцията f е непрекъсната в точката $b=\varphi(a)$, а редицата $\{x_n\}$ от стойности на аргумента ѝ клони към $b=\varphi(a)$. Следователно съответната редица от стойностите на функцията

$$f(x_n)=f(\varphi(t_n))=F(t_n)$$

(според определение 1 за непрекъснатост по Хайне) клони към $f(b)=f(\varphi(a))=F(a)$.

И така за всяка редица $\{t_n\}$, клоняща към a, от стойности на аргумента на сложната функция съответната редица от стойностите на функцията $\{f(\varphi(t_n))\}=\{F(t_n)\}$ е сходяща и има за граница числото $f(\varphi(a))=F(a)$. Съгласно определение 1 за непрекъснатост по Хайне сложната функция е непрекъсната в точката a. □

4.2. Свойства на монотонните функции

4.2.1. Монотонни функции. Ще дадем следното определение:

Определение 1. *Функцията f се нарича* ***ненамаляваща (нерастяща) в множеството*** *$\{x\}$, ако за произволни точки x_1 и x_2 от това множество, такива, че $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството $f(x_1)\leqq f(x_2)$ ($f(x_1)\geqq f(x_2)$).*

Ненамаляващите и нерастящите функции се наричат *монотонни функции.*

Определение 2. *Функцията f се нарича* ***растяща (намаляваща)*** *в множеството $\{x\}$, ако за произволни точки x_1 и x_2 от това множество, такива, че $x_1<x_2$, е изпълнено неравенството $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$).*

Растящите и намаляващите функции се наричат *строго монотонни.*

Примери:

1. Функцията $f(x)=x$ е строго монотонна, по-точно растяща върху цялата числова ос.

2. Функцията $f(x)=x^2$ е растяща върху полуоста $x\geqq 0$ и намаляваща за $x\leq 0$.

3. Функцията $f(x)=\operatorname{sgn} x$ е ненамаляваща върху цялата числова ос.

4. Функцията $f(x)=1/x$ е намаляваща при $x<0$ и $x>0$.

4.2.2. Понятието обратна функция. *Нека функцията f е дефинирана в сегмента $[a, b]$ и нека множеството $\{v\}$ от стойностите на тази функция е сегментът $[\alpha, \beta]$. Нека освен това на всяко y от сегмента $[\alpha, \beta]$ съответствува само една стойност на x от сегмента $[a, b]$, за която $f(x)=y$. При тези условия в сегмента $[\alpha, \beta]$ може да се дефинира функция, която на всяко y от $[\alpha, \beta]$ съпоставя тази стойност на x от $[a, b]$, за която $f(x)=y$. Тази функция се означава със символа f^{-1} и се нарича* ***обратна функция*** *на функцията f.*

Нека $\{x\}$ и $\{y\}$ са произволни множества и f е взаимно еднозначно изображение на множеството $\{x\}$ в множеството $\{y\}$ (биективно изображение, вж. 2.7). Тогава може да се определи обратното на f изображение f^{-1} на множеството $\{y\}$ в множеството $\{x\}$. В този случай уравнението $y=f(x)$ има, и то единствено решение относно x, т. е. за даден елемент y еднозначно се определя x и f^{-1}.

Ще отбележим, че ако $x=f^{-1}$ е обратната функция на f, то очевидно функцията f е обратна на функцията f^{-1}. Затова функциите f и f^{-1} се наричат *взаимно обратни*. Очевидно е, че

$$f(f^{-1}(y))=y, \quad f^{-1}(f(x))=x.$$

Примери:

1. Нека функцията $y=2x$ е дефинирана в сегмента $[a, b]$. Множеството от стойности на тази функция е сегментът $[2a, 2b]$. Функцията $x=f^{-1}(y)=\frac{1}{2}y$, дефинирана в сегмента $[2a, 2b]$, ще бъде обратна на дадената функция $y=2x$.

2. Да разгледаме функцията $y=x^2$ в сегмента $[0, 2]$. Множеството от стойности на тази функция е сегментът $[0, 4]$. В този сегмент е дефинирана функцията $x=\sqrt{y}$, обратна на дадената функция.

3. Да разгледаме в сегмента $[0, 1]$ функцията

$$y=\begin{cases} x, & \text{ако } x \text{ е рационално число,} \\ 1-x, & \text{ако } x \text{ е ирационално число.} \end{cases}$$

Не е трудно да се убедим, че дефинираната в сегмента функция

$$x=\begin{cases} y, & \text{ако } y \text{ е рационално число,} \\ 1-y, & \text{ако } y \text{ е ирационално число} \end{cases}$$

е обратна на дадената функция.

Ще докажем няколко твърдения за монотонни функции.

Ще започнем с доказателство на една лема, която е вярна за всяка монотонна (не е задължително строго монотонна) функция.

Лема. *Ако функцията f е монотонна в сегмента $[a, b]$, то тя има дясна и лява граница във всяка вътрешна точка на сегмента $[a, b]$ и освен това има дясна граница в точката a и лява граница в точката b.*

Доказателство. За доказателството на лемата е достатъчно да се докаже: 1) съществуването на дясна граница във всяка точка c при $a \leq c<b$; 2) съществуването на лява граница във всяка точка c при $a<c \leq b$.

Ще докажем само първото твърдение, тъй като второто се доказва аналогично. При това ще разгледаме случая, когато функцията f е ненамаляваща в сегмента $[a, b]$ (случаят на нерастяща функция се разглежда аналогично).

И така нека функцията f е ненамаляваща в $[a, b]$ и c е произволна точка, за която $a \leq c<b$. Разглеждаме множеството $\{f(x)\}$ от всички стойности на функцията f за стойности на аргумента x, удовлетворяващи неравенствата $c<x \leq b$. Множеството $\{f(x)\}$ не е празно (тъй като $c<b$) и е ограничено отдолу (понеже функцията f е ненамаляваща в полусегмента $c<x \leq b$ и $f(c)$ ще бъде долната граница на това множество). От теорема 2.1 следва, че разглежданото множество има точна долна граница, която ще означим с γ. Ще докажем, че γ е дясна граница на функцията f в точката c, т. е. че $\gamma=f(c+0)$.

Избираме произволно положително число ε. От определението на точна долна граница следва, че съществува такова положително число δ, ненадминаващо $b-c$, че стойността $f(c+\delta)$ на функцията да удовлетворява неравенството $f(c+\delta)<\gamma+\varepsilon$.

Но тогава поради монотонността на функцията f за всяко x от интервала $c<x<c+\delta$ ще имаме $f(x)<\gamma+\varepsilon$. Тъй като за всяко x от този интервал е изпълнено и неравенството $\gamma \leq f(x)$, то за всяко x от интервала $c<x<c+\delta$ ще са изпълнени и неравенствата

$$\gamma \leq f(x)<\gamma+\varepsilon \quad \text{или} \quad |\gamma-f(x)|<\varepsilon,$$

а това означава (според определението за дясна граница по Коши), че числото γ е дясна граница на функцията f в точката c. □

Забележка към лемата. При предположенията на лемата и при условие, че f е ненамаляваща функция, за всяко c и всяко x, удовлетворяващи съотношенията $a \leq c<x \leq b$, ще са изпълнени неравенствата

$$f(a) \leq f(c) \leq f(c+0) \leq f(x) \leq f(b), \tag{4.1}$$

а за всяко c и всяко x, удовлетворяващи съотношенията $a \leq x<c \leq b$, ще бъдат изпълнени

$$f(a) \leq f(x) \leq f(c-0) \leq f(c) \leq f(b). \tag{4.2}$$

При условие, че функцията f е нерастяща, знаците в неравенствата (4.1) и (4.2) се сменят с противоположни.

Нека например f е ненамаляваща в $[a, b]$ и $a \leq c < x \leq b$. Тогава $f(a) \leq f(c) \leq f(x) \leq f(b)$. От последните неравенства веднага следва, че $f(a) \leq f(c) \leq f(c+0) \leq f(b)$. За да завършим доказателството на неравенствата (4.1), трябва да се убедим, че $f(c+0) \leq f(x) \leq f(b)$ за всяко x от полусегмента $c < x \leq b$, но то следва непосредствено от това, че числото $\gamma = f(c+0)$ е (както е доказано в лемата) точна долна граница на множеството от стойности на функцията f в полусегмента $c < x \leq b$. Верността на неравенствата (4.2) се проверява аналогично.

Сега ще докажем три теореми за строго монотонни функции.

Теорема 4.3. *Нека функцията f расте (намалява) в сегмента $[a, b]$ и нека $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Ако множеството от всички стойности на функцията е сегментът $[\alpha, \beta]$ (съответно сегментът $[\beta, \alpha]$), то в сегмента $[\alpha, \beta]$ е дефинирана функцията f^{-1}, обратна на функцията f, която е също растяща (намаляваща) в този сегмент.*

Доказателство. Ще проведем всички разсъждения при предположението, че функцията f е растяща в сегмента $[a, b]$ (за намаляваща функция разсъжденията са аналогични).

Функцията f осъществява взаимно еднозначно съответствие между сегментите $a \leq x \leq b$ и $\alpha \leq y \leq \beta$. Наистина това, че на всяко x от $[a, b]$ съответствува само една стойност y от $[\alpha, \beta]$, следва от определението на функция, а това, че на всяко y от $[\alpha, \beta]$ съответствува само едно x от $[a, b]$, следва от условието, че функцията f е растяща.

Да покажем сега, че ако f расте в $[a, b]$, то и f^{-1} също расте в $[\alpha, \beta]$. Нека $y_1 < y_2$, където y_1 и y_2 са произволни числа от $[\alpha, \beta]$. Тогава $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$, тъй като в противен случай при $x_1 \geq x_2$ от това, че функцията $y = f(x)$ е растяща, ще следва, че $y_1 \geq y_2$, което противоречи на условието $y_1 < y_2$. □

Забележка 1. Съвсем аналогично се доказва едно по-общо твърдение: Нека f е дефинирана и растяща (намаляваща) в множеството $\{x\}$, а $\{y\}$ е множеството от всички стойности на функцията. Тогава в множеството $\{y\}$ е дефинирана функцията f^{-1}, обратна на функцията f, и тя е също растяща (намаляваща) в множеството $\{y\}$.

Теорема 4.4. *Нека функцията f е растяща (намаляваща) в сегмента $[a, b]$ и нека $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Необходимо и достатъчно условие функцията f да бъде непрекъсната в сегмента $[a, b]$ е всяко число γ, заключено между α и β, да бъде стойност на тази функция.*

Доказателство. Всички разсъждения ще проведем за растяща функции, тъй като за намаляваща функция те са аналогични.

1. Необходимост. Нека функцията f е растяща и непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Трябва да се докаже, че всяко число γ, удовлетворяващо условията $\alpha < \gamma < \beta$, е стойност на функцията в някоя точка c от сегмента $[a, b]$.

Нека $\{x\}$ е множеството от онези стойности на x от сегмента $[a, b]$, за които $f(x) \leq \gamma$. Множеството $\{x\}$ не е празно (то съдържа точката a, понеже $f(a) = \alpha < \gamma$) и е ограничено отгоре (например от числото b). Според основната теорема 2.1 множеството $\{x\}$ има точна горна граница, която ще означим с c: $c = \sup\{x\}$. Остава да се докаже, че $f(c) = \gamma$.

Най-напред ще се убедим, че $f(x) \leq \gamma$ за всяко x от $[a, b]$, лежащо наляво от c, и $f(x) > \gamma$ за всяко x, лежащо надясно от c.

Действително, ако $x < c$, то според определението на точна горна граница съществува x' от полуинтервала $x < x' \leq c$, принадлежащо на множеството $\{x\}$, т. е. такова, че $f(x') \leq \gamma$. Но понеже f е растяща, ще следва, че $f(x) \leq \gamma$ (тъй като $f(x) < f(x')$).

Освен това всяко x, лежащо надясно от c, не принадлежи на множеството $\{x\}$ и затова за него ще бъде изпълнено неравенството $f(x) > \gamma$.

Сега ще се убедим, че c е вътрешна точка на сегмента $[a, b]$. Ще докажем, че $c < b$. Да предположим, че това не е така, т. е. допускаме, че $c = b$. Да вземем произволна клоняща към $c = b$ растяща редица $\{x_n\}$ от точки на сегмента $[a, b]$. Тъй като всичките ѝ членове x_n са наляво от c, то $f(x_n) \leq \gamma$ за всеки номер n и (теорема 3.13) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq \gamma$. Но понеже функцията f е непрекъсната в точката $c = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(b) = \beta$. Така получаваме неравенството $\beta \leq \gamma$, което противоречи на условието $\gamma < \beta$. Полученото противоречие доказва, че $c < b$.

Съвършено аналогично се доказва, че $a < c$.

И така доказахме, че c е вътрешна точка на сегмента $[a, b]$.

За да докажем, че $f(c) = \gamma$, ще разгледаме две клонящи към c от различни страни редици от точки на сегмента $[a, b]$ — растяща редица $\{x_n'\}$ и намаляваща редица $\{x_n''\}$. Тъй като функцията f е непрекъсната в точката c, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = f(c).$$

От друга страна, тъй като $x_n' < c < x_n''$ за всеки номер n, то $f(x_n') \leq \gamma$, $f(x_n'') \geq \gamma$ (за всеки номер n). Но тогава от теорема 3.13

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = f(c) \leq \gamma, \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = f(c) \geq \gamma,$$

т. е. $f(c) = \gamma$. □

2. *Достатъчност.* Нека функцията f е растяща в сегмента $[a, b]$ и нека всяко число γ от сегмента $[\alpha, \beta]$ е стойност на тази функция. Ще докажем, че функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Достатъчно е да докажем, че f е непрекъсната отдясно във всяка точка c, удовлетворяваща условията $a \leq c < b$, и непрекъсната отляво във всяка точка c, удовлетворяваща условията $a < c \leq b$.

Ще се ограничим с доказателството за непрекъснатост отдясно във всяка точка c, която удовлетворява условията $a \leq c < b$, тъй като втората част на твърдението се доказва аналогично.

Да предположим, че функцията f не е непрекъсната отдясно в някоя точка c, удовлетворяваща условията $a \leq c < b$. Тогава нейната дясна граница $f(c+0)$, която съществува въз основа на доказаната по-горе лема, ще се различава от стойността $f(c)$ и съгласно забележката към същата лема неравенствата (4.1) ще приемат вида

$$\alpha = f(a) \leq f(c) < f(c+0) \leq f(x) \leq f(b) = \beta \tag{4.2'}$$

(за всички x от полуинтервала $c < x \leq b$).

Неравенствата (4.2′) показват, че съдържащият се в $[\alpha, \beta]$ сегмент $[f(c), f(c+0)]$ не съдържа стойности на функцията $f(x)$, което противоречи на това, че всяко число γ от сегмента $[\alpha, \beta]$ е стойност на тази функция. □

Теорема 4.5. *Нека функцията f е растяща (намаляваща) и непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и нека $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Тогава в сегмента $[\alpha, \beta]$ (съответно в $[\beta, \alpha]$) е дефинирана функцията f^{-1}, обратна на функцията f, и тя е също растяща (намаляваща) и непрекъсната в посочения сегмент.*

Накратко от строгата монотонност и непрекъснатост на една функция в сегмента $[a, b]$ следва съществуването на строго монотонна и непрекъсната обратна функция в съответния сегмент.

Доказателство. Ще проведем всички разсъждения за растяща функция, тъй като за намаляваща функция те са аналогични.

Тъй като f е растяща и непрекъсната в сегмента $[a, b]$, множеството от всичките ѝ стойности е сегментът $[\alpha, \beta]$ (теорема 4.4, необходимост). Но тогава от теорема 4.3 следва, че в сегмента $[\alpha, \beta]$ съществува обратната ѝ функция f^{-1}, която е растяща. Остава да се докаже, че обратната функция е непрекъсната в сегмента $[\alpha, \beta]$. Това следва непосредствено от теорема 4.4, като се вземе пред вид, че множеството от всички стойности на обратната функция f^{-1} е сегментът $[a, b]$, където $a = f^{-1}(\alpha)$ и $b = f^{-1}(\beta)$. □

Забележка 2. Може да се докаже, че от съществуването на обратна функция на функцията f, непрекъсната в сегмента $[a, b]$, следва, че $f(x)$ е строго монотонна в този сегмент (вж. 4.6.2).

4.3. Основни елементарни функции

Основни елементарни функции се наричат функциите: $y = x^a$, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arc\,tg} x$, $y = \operatorname{arc\,ctg} x$.

Ще разгледаме въпроса за непрекъснатост на основните елементарни функции, като се спрем на въпросите за дефинирането и някои свойства на тези функции.

4.3.1. Показателна функция. Ще започнем с дефинирането на рационална степен на положително число. За да се повдигне реалното число x в цяла положителна степен n, трябва да се умножи това число само на себе си n пъти.

Следователно при цяло n можем да считаме, че функцията $y = x^n$ е определена за всяко реално число x. Ще установим някои от най-простите свойства на тази функция.

Лема 1. *Степенната функция $y = x^n$ при $x \geq 0$ и цяло положително n е растяща и непрекъсната.*

Доказателство. Ще покажем, че функцията $y = x^n$ е растяща. Нека $0 \leq x_1 < x_2$. Тогава $x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_1 + \ldots + x_1^{n-1})$. Двата множителя в дясната страна са положителни поради избора на x_1 и x_2. Затова и лявата страна на равенството е положителна, т. е. $x_2^n > x_1^n$, а това означава, че функцията $y = x^n$ е растяща при $x \geq 0$.

Непрекъснатостта на функцията $y = x^n$ във всяка точка a на безкрайната права $-\infty < x < +\infty$ беше установена в пример 1 на 4.1.1. □

Да разгледаме степенната функция $y = x^n$ в сегмента $[0, N]$, където N е произволно положително число. Тъй като функцията е непрекъсната и растяща в този сегмент, то според теорема 4.5 тя има непрекъсната и растяща обратна функция в сегмента $[0, N^n]$, която ще означим с $x = y^{1/n}$. Тъй като N може да се избере произволно голямо, то и N^n може да се направи произволно голямо. Следователно функцията $x = y^{1/n}$ е дефинирана за всички неотрицателни стойности на y. Ако сменим в тази функция означението на аргумента y с x, а означението на функцията x с y, ще получим степенната функция $y = x^{1/n}$, дефинирана за всяко реално $x \geq 0$.

Сега можем да дефинираме всяка рационална степен r на положителното число a. Определяме най-напред $a^{1/n}$ като реално число b, равно на стойността на функцията $y = x^{1/n}$ в точката a. По-нататък, ако $r = m/n$, където m и n са цели положителни числа, полагаме

$$a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m.$$

Освен това по определение полагаме

$$a^0 = 1,\ a^{-r} = (1/a)^r \text{ (при } r>0).$$

Така дефинирахме произволна рационална степен на положително реално число a.

Рационалните степени на положителните реални числа имат следните свойства:

$$(a^r)^s = a^{rs},\ a^r.b^r = (ab)^r,\ a^r a^s = a^{r+s}.$$

Ще докажем най-напред първото свойство. Ще отбележим, че при цяло положително p равенството $(a^{m/n})^p = a^{mp/n}$, където m и n са произволни цели положителни числа, е очевидно вярно, тъй като лявата и дясната му страна се получават чрез умножаване на числото $a^{1/n}$ само на себе си $m.p$ пъти.

Ще докажем равенството $(a^r)^s = a^{rs}$ за всички положителни рационални r и s. Нека $r=m_1/n_1$ и $s=m_2/n_2$. Полагаме $c_1=(a^{m_1/n_1})^{m_2/n_2}$, $c_2=a^{m_1m_2/n_1n_2}$. Ако допуснем, че $c_1 \neq c_2$, то и $c_1^{n_2} \neq c_2^{n_2}$, тъй като функцията $y=x$ е растяща и оттук поради верността на равенството $(a^{m/n})^p = a^{mp/n}$ за цели стойности на p ще получим $(a^{m_1/n_1})^{m_2} \neq a^{m_1m_2/n_1}$. Но това противоречи на доказаното вече равенство $(a^{m_1/n_1})^{m_2} = a^{m_1m_2/n_1}$ при цели m_1, n_1 и m_2. Така $c_1=c_2$, с което първото свойство е доказано за произволни положителни рационални числа r и s.

Валидността на това равенство лесно може да се разшири за неположителни r и s, като се има пред вид, че по определение

$$a^0=1,\ a^{-r}=(1/a)^r \text{ при } r>0.$$

Второто равенство $a^r.b^r=(ab)^r$ е също така достатъчно да се докаже само за положителни рационални числа r. Полагаме $r=m/n$, където m и n са цели положителни числа. Ще отбележим, че е достатъчно да се докаже равенството $a^{1/n}b^{1/n}=(a.b)^{1/n}$, тъй като общото равенство $a^r.b^r=(a.b)^r$ се получава от това чрез умножаването му само на себе си m пъти.

За доказване на равенството $a^{1/n}.b^{1/n}=(a.b)^{1/n}$ ще вземем пред вид, че от свойствата на взаимно обратните функции $y=x^{1/n}$ и $x=y^n$ следва $(b^{1/n})^n=b$, $(a^{1/n})^n=a$, $((ab)^{1/n})^n=ab$. Ако положим $c_1=a^{1/n}.b^{1/n}$, $c_2=(ab)^{1/n}$ и предположим $c_1 \neq c_2$, ще получим, че $c_1^n \neq c_2^n$, което противоречи на равенството $ab=ab$.

Ще докажем сега последното свойство $a^r.a^s=a^{r+s}$, отчитайки, че първите две са вече доказани. Нека $r=m_1/n_1$, $s=m_2/n_2$; тогава $r=m_1n_2/n_1n_2$, $s=m_2n_1/n_1n_2$ и стигаме до следните равенства:

$$a^r a^s = (a^{1/n_1n_2})^{m_1n_2}(a^{1/n_1n_2})^{m_2n_1}=(a^{1/n_1n_2})^{m_1n_2+m_2n_1}.$$

Последното равенство е вярно, защото m_1n_2 и m_2n_1 са цели числа.

По такъв начин

$$a^r.a^s=a^{(m_1n_2+m_2n_1)/n_1n_2}=a^{m_1/n_1+m_2/n_2}=a^{r+s},$$

което трябваше да докажем.

При $a>1$ и рационално $r>0$ е изпълнено неравенството $a^r>1$. Наистина нека $r=m/n$ и $a^r=a^{m/n}\leq 1$. Умножавайки почленно n пъти горното неравенство, ще получим $a^m\leq 1$. Но това неравенство противоречи на неравенството $a^m>1$, получено от почленното умножение на неравенството $a>1$ само на себе си m пъти.

Ще отбележим също, че ако рационалната дроб $r=m/n$ има нечетен знаменател n, то определението за рационална степен може да се разшири и за отрицателни числа, като при $a>0$ положим

$$(-a)^r=a^r, \text{ ако } m \text{ е четно,}$$

$$(-a)^r=-a^r, \text{ ако } m \text{ е нечетно.}$$

Да се убедим, че функцията $y=a^x$ при $a>1$, дефинирана в множеството на рационалните числа, е монотонно растяща в това множество.

Наистина нека r_1 и r_2 са две такива рационални числа, че $r_2>r_1$. Тогава

$$a^{r_2}-a^{r_1}=a^{r_1}(a^{r_2-r_1}-1). \tag{4.3}$$

Понеже $r_2-r_1>0$ и $a>1$, от доказаното по-рано имаме $a^{r_2-r_1}>1$, така че дясната страна на равенството (4.3) е положителна. Следователно

$$a^{r_2}-a^{r_1}>0, \text{ т. е. } a^{r_2}>a^{r_1},$$

което трябваше да докажем.

Ще дефинираме накрая функцията $y=a^x$ не само за рационални стойности на x, но и за всички реални стойности. Нека x е произволно реално число. Ще разгледаме всички двойки рационални числа α и β, които удовлетворяват неравенствата

$$\alpha<x<\beta. \tag{4.4}$$

Ще дефинираме a^x за $a>1$ като реално число y, удовлетворяващо неравенствата

$$a^\alpha\leq y\leq a^\beta \tag{4.5}$$

за всички двойки рационални числа α и β, които удовлетворяват неравенствата (4.4).

Оказва се, че такова число съществува и то е само едно. Следователно функцията $y=a^x$ ще бъде дефинирана в множеството на всички реални числа x.

Ще покажем, че тази функция е растяща и непрекъсната върху цялата реална права. Тези твърдения се съдържат в следващите леми.

Лема 2. *За всеки две фиксирани реални числа x и $a>1$ и всички възможни двойки рационални числа α и β, удовлетворяващи неравенствата* (4.4), *съществува, и то само едно реално число y, което удовлетворява неравенствата* (4.5).

Доказателство. Ще докажем най-напред съществуването на такова число y. Фиксираме произволно рационалното число β, така че да удовлетворява дясното неравенство (4.4), и разглеждаме всевъзможните рационални числа α, удовлетворяващи лявото неравенство (4.4). Тъй като $\alpha<\beta$ и показателната функция, дефинирана в множеството на рационалните числа, е растяща, то $a^\alpha<a^\beta$. Тогава множеството $\{a^\alpha\}$ е ограничено отгоре и числото a^β е негова горна граница. От основната теорема 2.1 следва, че множеството $\{a^\alpha\}$ има точна горна граница, която ще означим с y. Ще покажем, че y удовлетворява неравенствата (4.5). От определението за точна горна граница следва верността на лявото неравенство (4.5), а верността на дясното неравенство (4.5) следва от това, че a^β е една горна граница и y е точната горна граница за множеството $\{a^\alpha\}$.

Ще докажем сега, че това число y е само едно. За това е достатъчно да се покаже, че за всяко $\varepsilon>0$ съществуват рационални числа α и β, удовлетворяващи неравенствата (4.4), за които $a^\beta-a^\alpha<\varepsilon$. Тогава всеки две числа y_1 и y_2, удовлетворяващи неравенствата (4.5), трябва да съвпадат, тъй като разликата между тях по абсолютна стойност е по-малка от всяко отнапред избрано число $\varepsilon>0$.

Фиксираме произволно положително число ε и рационално число β_0, удовлетворяващо дясното неравенство (4.4). Тогава, тъй като $a^\alpha<a^{\beta_0}$, то

$$a^\beta-a^\alpha=a^\alpha(a^{\beta-\alpha}-1)<a^{\beta_0}(a^{\beta-\alpha}-1).$$

Неравенството $a^\beta-a^\alpha<\varepsilon$ ще бъде доказано, ако установим съществуването на такива рационални α и β, че $a^{\beta-\alpha}-1<\varepsilon/a^{\beta_0}$.

В глава 2 беше доказано, че за всяко естествено число n съществуват такива рационални числа α и β, удовлетворяващи неравенството (4.4), че разликата им $\beta-\alpha$ да е по-малка от $1/n$. Следователно достатъчно е да се докаже съществуването на такова естествено число n, че $a^{1/n}-1<\varepsilon^{\beta_0}$. Нека $a^{1/n}=1+\delta_n$. Тъй като $a^{1/n}>1$, то δ_n е положително. Използвайки първите два члена в развитието на бинома на Нютон, получаваме

$$a=(a^{1/n})^n=(1+\delta_n)^n>1+n\,\delta_n.$$

Оттук $a-1>n\,.\,\delta_n$, т. е. $0<\delta_n<(a-1)/n$. И така $a^{1/n}-1=\delta_n<(a-1)/n$. Да изберем сега естествено число n, което да удовлетворява неравенството $(a-1)/n<\varepsilon/a^{\beta_0}$, т. е. $n>(a-1)\,a^{\beta_0}/\varepsilon$. Тогава $a^{1/n}-1<(a-1)/n<\varepsilon a^{\beta_0}$. С това доказателството за единствеността на числото y, удовлетворяващо неравенствата (4.5), е завършено. □

Ще отбележим, че ако x е рационално число и a^x е стойността на показателната функция в точката x, първоначално дефинирана само в множеството на рационалните числа, то a^x е това единствено число y, което удовлетворява неравенствата (4.5).

Лема 3. *Показателната функция $y=a^x$ при $a>1$ е растяща върху цялата безкрайна права.*

Доказателство. Нека x_1 и x_2 са такива произволни числа, че $x_1<x_2$. Винаги съществуват такива рационални числа α и β, че $x_1<\alpha<\beta<x_2$ (вж. лема 2 от 2.3). Тъй като $x_1<\alpha$ и $\beta<x_2$, то от определението на показателната функция следват неравенствата $a^{x_1}\leq a^\alpha$, $a^\beta\leq a^{x_2}$. От друга страна, тъй като $\alpha<\beta$ и показателната функция е растяща в множеството на рационалните числа, е изпълнено неравенството $a^\alpha<a^\beta$. От неравенствата $a^{x_1}<a^\alpha$, $a^\alpha<a^\beta$, $a^\beta<a^{x_2}$ и свойството транзитивност на знаците $<$ и $=$ получаваме $a^{x_1}<a^{x_2}$, а това показва, че функцията $y=a^x$ е растяща. □

Лема 4. *Показателната функция $y=a^x\,(a>1)$ е непрекъсната във всяка точка на безкрайната права.*

Доказателство. Нека x е произволно реално число, а $\{x_n\}$ е клоняща към x редица. Съгласно определението за непрекъснатост по Хайне е достатъчно да се докаже, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такъв номер N, че $|a^{x_n}-a^x|<\varepsilon$ за всяко $n\geqq N$. Избираме произволно $\varepsilon>0$ и такива рационални числа α и β, че $\alpha<x<\beta$ и $a^\beta-a^\alpha<\varepsilon$. Възможността за всяко $\varepsilon>0$ да се изберат такива числа α и β беше доказана в лема 2. Тъй като редицата $\{x_n\}$ клони към x и $\alpha<x<\beta$, то съществува такъв номер N, че за всяко $n\geqq N$ да са изпълнени неравенствата $\alpha<x_n<\beta$. Понеже показателната функция е монотонно растяща, то $a^\alpha<a^x<a^\beta$, $a^\alpha<a^{x_n}<a^\beta$ при всички $n\geqq N$.

Следователно двете числа a^x и a^{x_n} при $n\geqq N$ са заключени между числата a^α и a^β, разликата между които $a^\beta-a^\alpha$ е по-малка от ε. Оттук следва, че при $n\geqq N$ е изпълнено неравенството $|a^{x_n}-a^x|<\varepsilon$, което показва, че показателната функция е непрекъсната в произволна точка x. □

Ще получим сега някои следствия от доказаните свойства на показателната функция. Преди това ще отбележим, че ако $0<a<1$, то $a=1/b$, където $b>1$. Затова функцията $y=a^x$ при $0<a<1$ може да се дефинира като функция $y=b^{-x}$ при $b>1$.

Следствие 1. *Показателната функция $y=a^x$ е положителна за всички стойности на x.*

Ако x е произволна точка от числовата ос, а r е такова рационално число, че $r<x$, то според определението на показател

ната функция в множеството на рационалните числа имаме $a^r>0$, а от лема 3 — че $a^r<a^x$. Следователно $a^x>0$.

Следствие 2. *Показателната функция* $y=a^x$ *при* $a>1$ *удовлетворява условията*: $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$.

Наистина, тъй като $a>1$, то $a=1+\delta$, където $\delta>0$ и $a^n=(1+\delta)^n>1+n\delta$. Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=+\infty$. От монотонността на функцията $y=a^x$ получаваме, че и $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$. Понеже $a^{-n}=1/a^n$, то $\lim\limits_{n\to-\infty} a^n=0$, откъдето $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$.

Следствие 3. *Стойностите на функцията* $y=a^x$ *запълват изцяло положителната полуправа* $y>0$.

Действително функцията $y=a^x$ приема само положителни стой-
ности (следствие 1) — както произволно малки, така и произволно
големи (следствие 2). От непрекъснатостта и строгата монотонност
на функцията a^x и от теорема 4.4 следва, че всяко положително
число е стойност на функцията $y=a^x$.

Следствие 4. *За всеки две реални числа* x_1 *и* x_2 *са изпълнени съотношенията*

$$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2},\ a^{x_1}.\,b^{x_1}=(a\,.\,b)^{x_1},\ a^{x_1}.\,a^{x_2}=a^{x_1+x_2}.$$

Наистина тези съотношения вече бяха установени при рационални
показатели. Оттук следва и верността им при произволни реални
показатели. Ще се убедим в това например за първото съотноше-
ние. Нека $\{r'_n\}$ и $\{r''_n\}$ са редици от рационални числа, клонящи

съответно към x_1 и x_2. Тогава $(a^{r'_n})^{r''_n}=a^{r'_nr''_n}$.

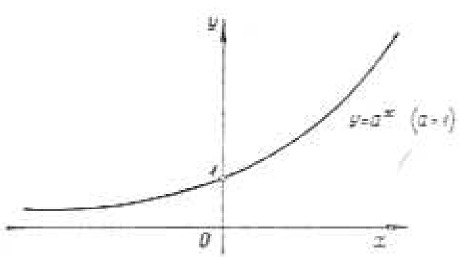
Граничният преход при $n\to\infty$, като използваме свойството
непрекъснатост на показателната функция, ни дава $(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$.
Аналогично се установява верността и на останалите съотношения.

Ако $0<a<1$, като положим $b=1/a$, то $b>1$ и определяме $a^x=b^{-x}$.

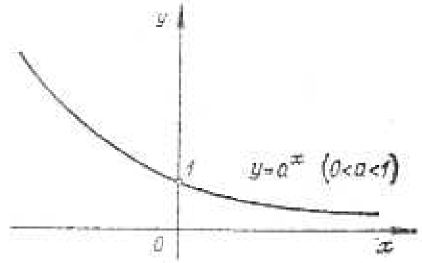
Ще отбележим, че досега фактически изучихме и свойствата
на показателната функция $y=a^x$ при $0<a<1$. Наистина непрекъс-
натостта ѝ следва от самото определение. От определението следва
също така, че тази функция е монотонно намаляваща върху без-
крайната права. Следствия 1, 3 и 4 са верни и за функцията $y=a^x$
при $0<a<1$, а следствие 2 очевидно ще изглежда така:

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty} a^x=0.$$

На фиг. 4.1 и 4.2 са изобразени графиките на функцията $y=a^x$ за случаите $a>1$ и $0<a<1$.



Фиг. 4.1



Фиг. 4.2

Забележка. Показателната функция може да се определи и като решение на функционално уравнение, удовлетворяващо определени условия. Може да се докаже, че съществува, и то единствена функция f, дефинирана върху безкрайната права и удовлетворяваща следните три условия:

1) за всеки две реални числа x_1 и x_2 е изпълнено равенството $f(x_1+x_2)=f(x_1)\,.\,f(x_2)$;

2) $f(0)=1$*, $f(1)=a$ при $a>1$;

3) функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката $x=0$.

Такава функция е построената по-горе функция a^x при $a>1$.

4.3.2. Логаритмична функция. Логаритмичната функция ще определим като обратна на показателната. Нека $[c, d]$ е произволен сегмент от безкрайната права. В този сегмент функцията $y=a^x$ при $a>1$ е непрекъсната и растяща. Затова според теорема 4.5 функцията $y=f(x)=a^x$ има растяща и непрекъсната обратна функция $x=f^{-1}(y)$ в сегмента $[a^c, a^d]$, която се нарича логаритмична функция и се означава така:

$$x=f^{-1}(y)=\log_a y.$$

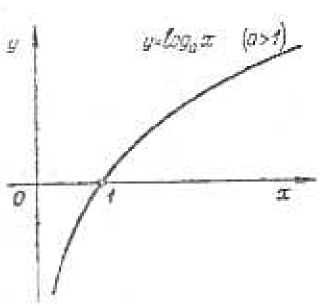
Като заменим означението на аргумента y с x, а означението на функцията x с y, ще запишем функцията в обичайния ѝ вид

$$y=\log_a x.$$

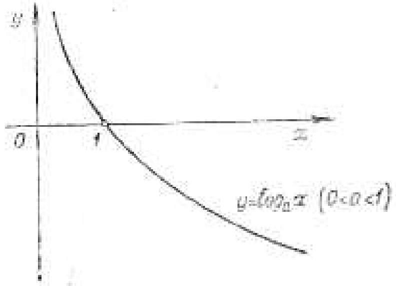
Случаят $0<a<1$ се разглежда аналогично. Ще отбележим някои свойства на логаритмичната функция, следващи непосредствено от определението ѝ.

1. *Логаритмичната функция е дефинирана за всички положителни стойности на* x. Наистина стойности на аргумента на лога-

* Може да се докаже, че условието $f(0)=1$ е следствие от останалите (и затова може да се изпусне).



Фиг. 4.3



Фиг. 4.4

ритмичната функция са стойностите на показателната функция, които, както видяхме, са само положителни и запълват полуправата $x>0$.

2. *Логаритмичната функция е непрекъсната и растяща върху цялата полуправа $x>0$ при $a>1$ и непрекъсната и намаляваща върху цялата полуправа $x>0$ при $0<a<1$; при това*

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty, \lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty \text{ при } a>1;$$

$$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = +\infty, \lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty \text{ при } 0<a<1.$$

Тези свойства следват от свойствата на показателната функция.

3. *За произволни положителни числа x_1 и x_2*

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

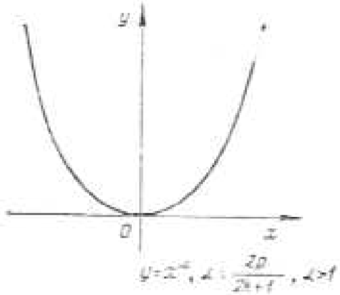
Това свойство също така следва от свойствата на показателната функция.

Забележка. Специално ще отделим логаритмичната функция $y=\log_e x$, където $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. За тази функция се използва означението $y=\ln x$. Логаритъм при основа e се нарича натурален логаритъм.

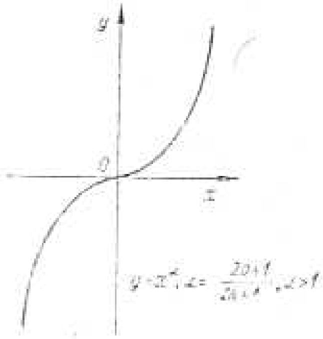
На фиг. 4.3 и 4.4 са дадени графиките на логаритмичната функция $\log_a x$ за случаите $a>1$ и $0<a<1$.

4.3.3. Степенна функция. Степенната функция при произволен реален показател α може да се дефинира и като суперпозиция на логаритмична и показателна функция. Нека $x>0$. Тогава степенната функция се представя така:

$$y=x^\alpha = (a^{\log_a x})^\alpha = a^{\alpha \log_a x},$$



Фиг. 4.5



Фиг. 4.6

където a е произволно фиксирано число и за определеност ще го вземем по-голямо от единица.

От това представяне и от факта, че при $a>1$ логаритмичната функция е растяща върху цялата полуправа $x>0$, а показателната функция е растяща върху цялата безкрайна права следва, че степенната функция $y=x^\alpha = a^{\alpha\log_a x}$ е растяща при $\alpha>0$ и намаляваща при $\alpha<0$ върху полуправата $x>0$.

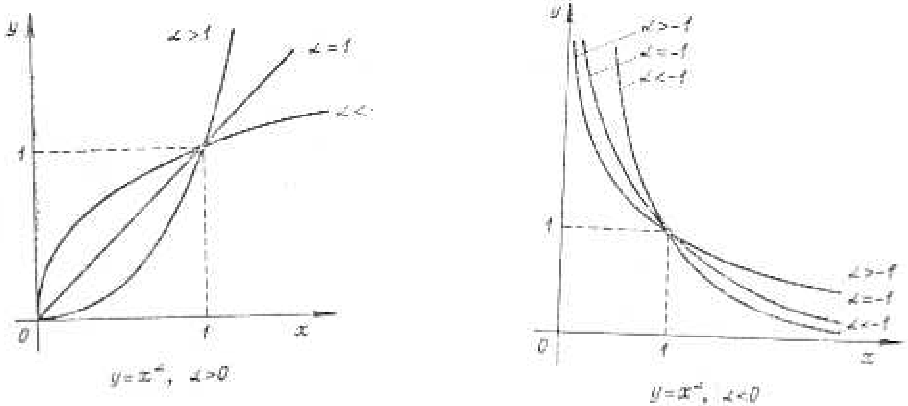
Степенната функция има следните свойства:

1. *За степенната функция са изпълнени съотношенията* $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\alpha=0$ *при* $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\alpha=+\infty$ *при* $\alpha<0$. Наистина нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща отдясно към нула редица от стойности на аргумента x_n. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a x_n = -\infty$, то от свойствата на показателната функция следва, че $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha\log_a x_n} = 0$ при $\alpha>0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\alpha\log_a x_n} = +\infty$ при $\alpha<0$. По дефиниция полагаме $0^\alpha=0$ при $\alpha>0$ и ще считаме този израз за неопределен при $\alpha\leq 0$.

2. *Степенната функция $y=x^\alpha = a^{\alpha\log_a x}$ е непрекъсната във всяка точка x на отворената полуправа $x>0$.*

Това следва непосредствено от теорема 4.2 за непрекъснатост на сложна функция, като се вземе пред вид, че функцията $u=\alpha\log_a x$ е непрекъсната във всяка точка $x>0$, а функцията $y=a^u$ е непрекъсната във всяка точка от безкрайната права.

Забележка. Ако показателят α на степенната функция е рационално число m/n, където n е нечетно цяло число, то степенната функция $y=x^\alpha$ може да се дефинира върху цялата числова ос чрез формулите:



Фиг. 4.7

$$y=|x|^{\alpha}, \text{ ако } \alpha=m/n \text{ и } m \text{ е четно,}$$

$$y=-|x|^{\alpha}, \text{ ако } \alpha=m/n \text{ и } m \text{ е нечетно.}$$

На фиг. 4.5 и 4.6 са дадени графиките на степенната функция $y=x^{\alpha}$ за различни стойности на α.

4.3.4. Тригонометрични функции. Вече имаме представа за тригонометричните функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ и функциите, които се изразяват чрез тях:

$$y=\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad y=\sec x=\frac{1}{\cos x},$$

$y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$. Определенията на функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$ чрез нагледни геометрични съображения е логически несъвършено. Логически безупречно тези функции могат да се определят като решения на система функционални уравнения. По-точно може да се докаже следното твърдение: *Съществува и при това единствена двойка функции f и g, определени за всички реални стойности на аргумента x и удовлетворяващи условията*:

$$\begin{aligned} 1)\quad & f(x_1+x_2)=f(x_1)g(x_2)+g(x_1)f(x_2),\\ & g(x_1+x_2)=g(x_1)g(x_2)-f(x_1)f(x_2),\\ (4.6)\qquad & f^2(x)+g^2(x)=1;\\ 2)\quad & f(0)=0,\ g(0)=1,\ f(\pi/2)=1,\ g(\pi/2)=0; \end{aligned}$$

$$3)\quad \text{ако } 0<x<\pi/2, \text{ то } 0<f(x)<x<f(x)/g(x)^{*}.$$

Първата от тези функции наричаме **синус** *и я означаваме със символа* sin, *а втората —* **косинус** *и я означаваме със символа* cos.

Доказателството на това твърдение може да се види в допълнението към глава 4 на книгата на В. А. Ильин и Э. Г. Позняк „Основы математического анализа, I".

Не е трудно да се докаже, че от свойствата 1), 2) и 3) могат да се получат като следствия всички други свойства на функциите sin и cos, известни от средния курс по математика и доказани там с помощта на нагледни геометрични съображения. Впрочем то следва от това, че свойствата 1), 2) и 3) определят единствена двойка функции f и g и че въведените в средния курс чрез нагледни геометрични съображения функции $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$ притежават тези свойства.

За пример ще установим с помощта на свойствата 1), 2) и 3) някои свойства на функциите $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$, които ще ни бъдат необходими при доказателството на непрекъснатостта на тези функции и при определяне на интервалите им на монотонност.

а) От третото равенство на 1), а именно $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, непосредствено следва, че $\sin^2 x\leq 1$ и $\cos^2 x\leq 1$, т. е.

$$(4.7)\qquad |\sin x|\leq 1,\ |\cos x|\leq 1.$$

б) С помощта на първите две равенства от 1) и първите две равенства от 2) получаваме

$$\sin 0=\sin(x+(-x))=\sin x\,.\cos(-x)+\cos x\,.\sin(-x)=0,$$
$$\cos 0=\cos(x+(-x))=\cos x\,.\cos(-x)-\sin x\,.\sin(-x)=1.$$

Получените две равенства са система от две уравнения относно двете неизвестни $\cos(-x)$ и $\sin(-x)$. Като решим тази система и вземем пред вид, че $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получаваме

$$(4.8)\qquad \cos(-x)=\cos x,\ \sin(-x)=-\sin x,$$

т. е. $g(x)=\cos x$ е четна функция, а $f(x)=\sin x$ е нечетна функция.**

в) От равенствата в 1) на свой ред следват равенствата

$$(4.9)\qquad \begin{aligned}\sin(x_1-x_2)&=\sin(x_1+(-x_2))=\sin x_1\,.\cos(-x_2)\\ &+\cos x_1\,.\sin(-x_2)=\sin x_1\,.\cos x_2-\cos x_1\,.\sin x_2,\end{aligned}$$

* Верността на неравенството $x<f(x)/g(x)$ за $0<x<\pi/2$ следва от останалите условия.

** Функцията h, дефинирана за всички реални стойности на x, се нарича четна, ако $h(-x)=h(x)$ (за всяка стойност на x), и нечетна ако $h(-x)=-h(x)$ (също за всяка стойност на x).

$$\cos(x_1-x_2)=\cos(x_1+(-x_2))=\cos x_1\,.\,\cos(-x_2)$$
$$-\sin x_1\,.\,\sin(-x_2)=\cos x_1\,.\,\cos x_2+\sin x_1\,.\,\sin x_2.$$

г) От първото равенство на 1) и първото равенство на (4.9) получаваме, че

$$\sin x_2=\sin\left(\frac{x_2+x_1}{2}+\frac{x_2-x_1}{2}\right)=\sin\frac{x_2+x_1}{2}\,.\,\cos\frac{x_2-x_1}{2}$$
$$+\cos\frac{x_2+x_1}{2}\,.\,\sin\frac{x_2-x_1}{2},$$

$$\sin x_1=\sin\left(\frac{x_2+x_1}{2}-\frac{x_2-x_1}{2}\right)=\sin\frac{x_2+x_1}{2}\,.\,\cos\frac{x_2-x_1}{2}$$
$$-\cos\frac{x_2+x_1}{2}\,.\,\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

Като съберем и извадим получените две равенства, намираме

(4.10) $$\sin x_2+\sin x_1=2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\,.\,\cos\frac{x_2-x_1}{2},$$

$$\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\,.\,\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

д) По-нататък от първото равенство на (4.9) и от последните две равенства на 2) получаваме

$$\sin(\pi/2-x)=\sin\frac{\pi}{2}\,.\,\cos x-\cos\frac{\pi}{2}\,.\,\sin x=\cos x,$$

т. е.

(4.11) $$\cos x=\sin(\pi/2-x).$$

е) Ще се убедим накрая в периодичността на функциите $g(x)=\cos x$ и $f(x)=\sin x$ с период 2π. От първите две равенства на 1) при $x=x_1=x_2$ ще получим

(4.12) $$\sin 2x=2\sin x\,.\,\cos x,\quad \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

От 2) имаме $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$. Използваме (4.12) при $x=\pi/2$ и получаваме, че $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$. Като използваме повторно (4.12), при $x=\pi$ имаме $\sin 2\pi=0$, $\cos 2\pi=1$.

От последните две равенства и първите две равенства на 1) следва

$$\sin(x+2\pi)=\sin x\,.\,\cos 2\pi+\cos x\,.\,\sin 2\pi=\sin x,$$

$$\cos(x+2\pi)=\cos x\,.\,\cos 2\pi-\sin x\,.\,\sin 2\pi=\cos x,$$

а това означава, че функциите $\sin x$ и $\cos x$ са периодични с период 2π.

ж) В заключение ще усилим малко неравенствата от условие 3). Ще установим валидността на следното по-общо неравенство:

(4.13) $$|\sin x|\leqq|x|.$$

При $0<x<\pi/2$ неравенството (4.13) следва от неравенството в условие 3).

При $-\pi/2<x<0$ неравенството (4.13) следва от $\sin(-x)=-\sin x$ и от неравенствата

$$0<\sin(-x)<-x \text{ при } -\pi/2<x<0,$$

а тези неравенства са изпълнени вследствие на това, че $(-x)$ е в интервала $(0,\pi/2)$. При $x=0$ имаме $\sin x=x$.

При $\pi/2\leqq|x|$ имаме $|\sin x|\leqq 1<\pi/2\leqq|x|$, т. е. $|\sin x|\leqq|x|$.

Ще преминем към установяване на две основни свойства на функциите $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\cos x$.

1°. *Функциите $\sin x$ и $\cos x$ са непрекъснати във всяка точка x на безкрайната права.*

Доказателство. Достатъчно е да установим непрекъснатостта на функцията $f(x)=\sin x$ във всяка точка x, тъй като непрекъснатостта на функцията $g(x)=\cos x$ във всяка точка x ще следва от (4.11).

Най-напред ще докажем, че функцията $\sin x$ е непрекъсната в точката $x=0$. Понеже съгласно 2) $\sin 0=0$, то според определението за непрекъснатост по Хайне е достатъчно да докажем, че за всяка безкрайно малка редица $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $\{\sin x_n\}$ е също безкрайно малка.

От неравенството (4.13) и от условието $|\sin x|\geqq 0$ имаме

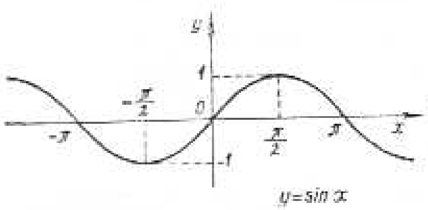
(4.13′) $$0\leqq|\sin x|\leqq|x|;$$

следователно

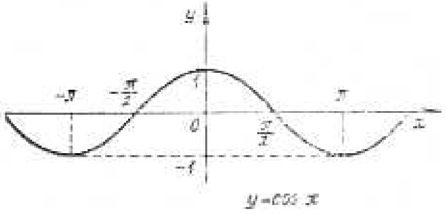
$$0\leqq|\sin x_n|\leqq|x_n|.$$

От последното неравенство (вж. теорема 3.14) следва, че редицата $\{|\sin x_n|\}$, а оттук и редицата $\{\sin x_n\}$ е безкрайно малка. Непрекъснатостта на функцията sin в точката $x=0$ е доказана.

Ще докажем сега, че функцията sin е непрекъсната във всяка точка x на безкрайната права. Нека $\{x_n\}$ е произволна редица, клоняща към x. Трябва да докажем, че съответната редица $\{\sin x\}$ клони към $\sin x$.



Фиг. 4.8



Фиг. 4.9

Като използваме второто равенство от (4.10) при $x_1=x$ и $x_2=x_n$, получаваме

$$\sin x_n-\sin x=2\cos\frac{x_n+x}{2}\cdot\sin\frac{x_n-x}{2}. \tag{4.14}$$

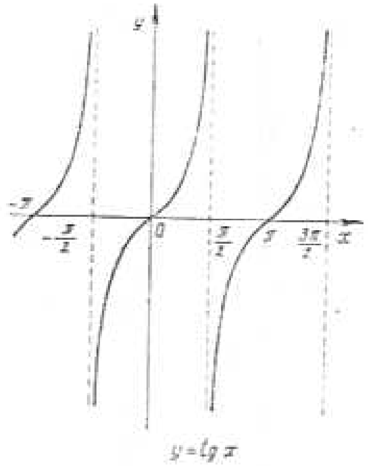
Остава да покажем, че дясната страна на (4.14) е член на безкрайно малка редица, което непосредствено следва от това, че редицата $\left\{\sin\frac{x_n-x}{2}\right\}$ е безкрайно малка поради непрекъснатостта на синуса в точката нула, а редицата $\left\{2\cos\frac{x_n+x}{2}\right\}$ е ограничена (вж (4.7)).

2°. *Функцията* sin *е растяща във всеки от сегментите* $[2k\pi-\pi/2,\ 2k\pi+\pi/2]$ *и намаляваща във всеки от сегментите* $[(2k+1)\pi-\pi/2,\ (2k+1)\pi+\pi/2]$, *а функцията* cos *е намаляваща във всеки от сегментите* $[2k\pi,\ 2k\pi+\pi]$ *и растяща във всеки от сегментите* $[2k\pi-\pi,\ 2k\pi]$ (навсякъде тук $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$).

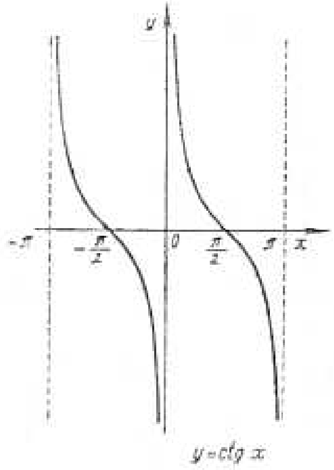
Доказателство. Достатъчно е да проведем всички разсъждения само за функцията sin, тъй като след намирането на всички интервали на монотонност на функцията sin интервалите на монотонност на функцията cos могат да бъдат получени от равенствата (4.11).

Понеже sin е периодична функция с период 2π, ще намерим интервалите на монотонност само в рамките на един период например за сегмента $[-\pi/2,\ 2\pi-\pi/2]$. Най-напред ще докажем, че функцията sin расте в сегмента $[0,\ \pi/2]$. Нека x_1 и x_2 са произволни числа от този сегмент и $x_2>x_1$. Тогава очевидно числата $\frac{x_2+x_1}{2}$ и $\frac{x_2-x_1}{2}$ принадлежат на интервала $(0,\ \pi/2)$ и от второто равенство на (4.10) следва

$$\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}. \tag{4.15}$$



Фиг. 4.10



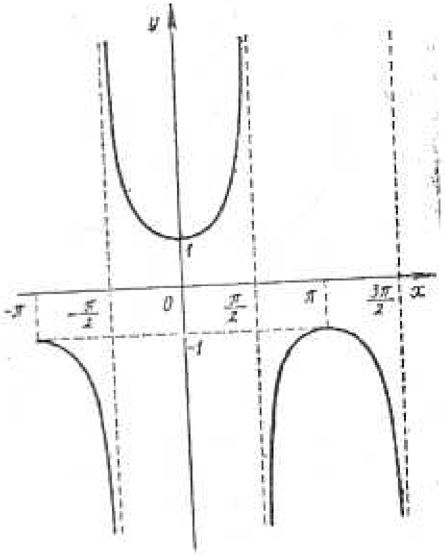
Фиг. 4.11

Но функцията sin има в интервала $(0,\ \pi/2)$ положителни стойности (условие 3)). Функцията cos има също положителни стойности в интервала $(0,\ \pi/2)$ (следва от (4.11)). Следователно дясната страна на (4.15) е положително число.

И така доказахме, че функцията sin е растяща в сегмента $[0,\ \pi/2]$. От нечетността на функцията sin (съотношение (4.81)) следва, че тя е растяща и в сегмента $[-\pi/2,\ 0]$.

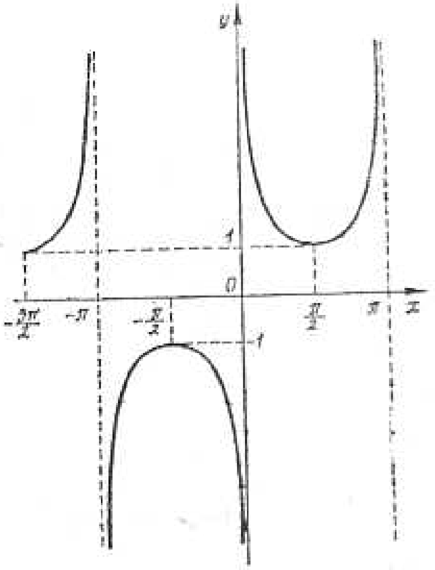
С това е доказано, че функцията sin е растяща в сегмента $[-\pi/2,\ \pi/2]$. Остава да се изследва поведението на функцията sin в сегмента $[\pi/2,\ \pi+\pi/2]$. В точка е) се убедихме, че $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$, а оттук и от първото равенство на 1) следва $\sin(x+\pi)=\sin x\cdot\cos\pi+\cos x\cdot\sin\pi=-\sin x$. От полученото равенство заключаваме, че функцията sin е намаляваща в сегмента $[\pi/2,\ \pi+\pi/2]$, понеже е растяща в сегмента $[-\pi/2,\ \pi/2]$. □

От представянията $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$, $\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$ и от теорема 4.1 за случая на частно следва, че функцията tg е дефинирана и непрекъсната във всяка точка x, различна от $k\pi+\pi/2$, а функцията ctg е дефинирана и непрекъсната във всяка точка $x\neq k\pi$. Като използваме равенствата $\sin(x+\pi)=-\sin x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$, ще получим $\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg}x$ и аналогично $\operatorname{ctg}(x+\pi)=\operatorname{ctg}x$. Това показва, че tg и ctg са периодични функции с период π. За да



$y=\sec x$

Фиг. 4.12



$y=\operatorname{cosec} x$

Фиг. 4.13

определим областите на монотонност на тези функции, достатъчно е да изследваме интервал с дължина π. От равенствата

$$\operatorname{tg} x_2-\operatorname{tg} x_1=\frac{\sin x_2}{\cos x_2}-\frac{\sin x_1}{\cos x_1}=\frac{\sin (x_2-x_1)}{\cos x_2 \,.\, \cos x_1} \tag{4.16}$$

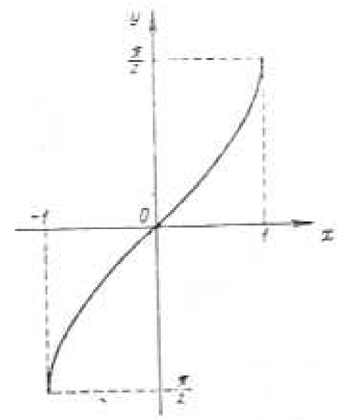
и от това, че sin има също положителни стойности в интервала $(0, \pi)$, а cos има също само положителни стойности в интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, следва, че функцията tg е растяща в интервала $(-\pi/2, \pi/2)$. (При всеки x_1 и x_2 от интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, за които $x_2>x_1$, дясната страна на (4.16) е положителна величина.)

Аналогично се установява, че функцията ctg е намаляваща в интервала $(0, \pi)$.

Няма да се спираме на функциите $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ и $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$.

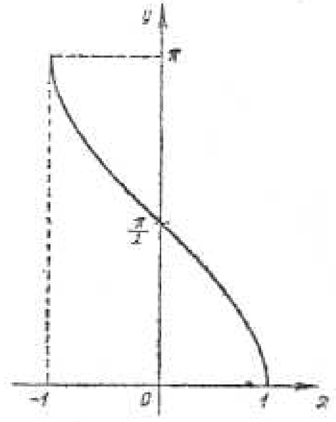
Графиките на всички тригонометрични функции са дадени на фиг. 4.8—4.13.

4.3.5. Обратни тригонометрични функции. Ще дефинираме обратните тригонометрични функции и ще се спрем на въпроса за тяхната непрекъснатост и монотонност.



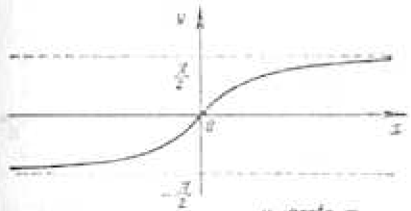
$y=\arcsin x$

Фиг. 4.14



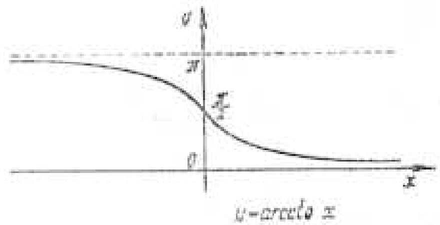
$y=\arccos x$

Фиг. 4.15



$y=\operatorname{arctg} x$

Фиг. 4.16

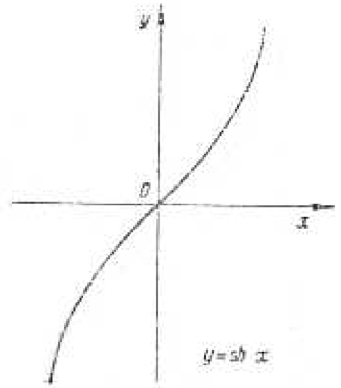


$y=\operatorname{arcctg} x$

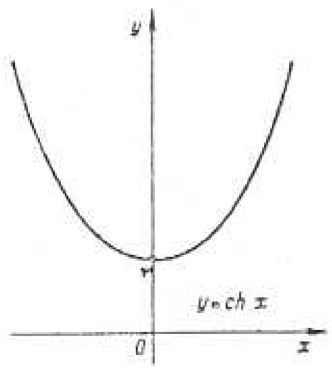
Фиг. 4.17

За дефиниране на функцията arcsin ще разгледаме функцията sin в сегмента $[-\pi/2, \pi/2]$. В този сегмент функцията sin е растяща и непрекъсната (вж. 4.3.4). Множеството от стойностите ѝ е сегментът $[-1, 1]$. Според теорема 4.5 съществува непрекъсната, растяща обратна функция в сегмента $[-1, 1]$, приемаща стойности $-\pi/2$ в точката -1 и $\pi/2$ в точката 1. Тази функция се означава със символа arcsin. По същия начин в сегмента $[-1, 1]$ се дефинира функцията arccos — обратна на функцията cos, намаляваща и непрекъсната в сегмента $[0, \pi]$.

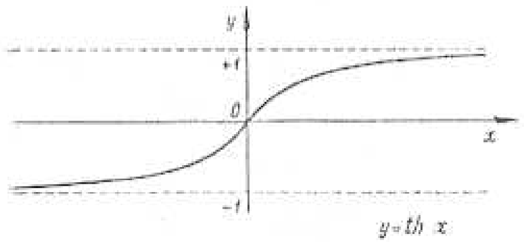
Функцията arccos е намаляваща и непрекъсната в сегмента $[-1, 1]$ и приема в точките $x=-1$ и $x=1$ съответно стойностите π и 0.



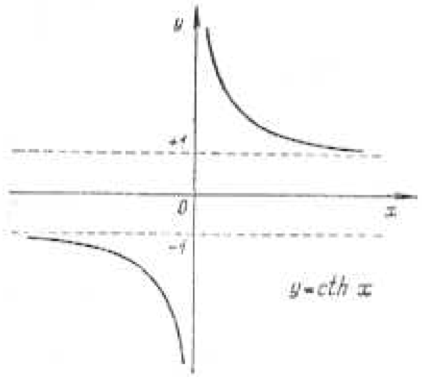
Фиг. 4.18 а



Фиг. 4.18 б



Фиг. 4.18 в



Фиг. 4.18 г

Функциите arctg и arcctg се дефинират като обратни функции на тангенс и котангенс, разглеждани в интервалите $(-\pi/2, \pi/2)$ и $(0, \pi)$. Тези функции са дефинирани и монотонни върху цялата безкрайна права. На фиг. 4.14—4.17 са изобразени графиките на обратните тригонометрични функции.

4.3.6. Хиперболични функции. Функциите $\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ и $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ се наричат съответно *хиперболичен косинус* и *хиперболичен синус* и се означават ch и sh:

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

Хиперболичният тангенс и хиперболичният котангенс се определят съответно от формулите

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}.$$

От определението за хиперболични функции следва, че хиперболичният косинус, хиперболичният синус и хиперболичният тангенс са дефинирани върху цялата числова ос, а хиперболичният котангенс — върху цялата числова ос с изключение на точката $x=0$. На фиг. 4.18 а) — 4.18 г) са дадени графиките на тези функции.

Хиперболичните функции са непрекъснати във всяка точка от дефиниционната си област (това следва от непрекъснатостта на показателната функция и от теорема 4.1).

Те притежават редица свойства, аналогични на свойствата на тригонометричните функции. Например за хиперболичните функции са в сила теореми за събиране, аналогични на теоремите за събиране при тригонометричните функции:

$$\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x+y)=\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y+\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Непосредствено се проверяват и формулите $\operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$, $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$. Епитетът „хиперболичен" е свързан с обстоятелството, че формулите $x=a\operatorname{ch} t$, $y=a\operatorname{sh} t$ определят хипербола, както формулите $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ определят окръжност. Наистина в първия случай имаме $x^2-y^2=a^2$, т. е. уравнение на хипербола, а във втория $x^2+y^2=a^2$ — уравнение на окръжност.

4.4. Две забележителни граници

4.4.1. Първа забележителна граница. Най-напред ще докажем една теорема, функционален аналог на теорема 3.14.

Теорема 4.6 (функционален аналог на принципа за двустранните ограничения). *Нека в някоя прободена δ-околност Ω на точката a са зададени функциите f, h и g, двете от които f и g имат в точката a обща граница, равна на b. Тогава, ако за всяко $x \in \Omega$ са изпълнени неравенствата*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \tag{4.17}$$

то и функцията h има граница в точката a, равна на b.

Доказателство. Нека $\{x_n\}$ е произволна клоняща към a редица от стойности на аргумента, всички членове на която са различни от a. Тогава съгласно определението на граница по Хайне двете редици от съответните стойности на функциите $\{f(x_n)\}$

и $\{g(x_n)\}$ клонят към b и според (4.17) за всички n са изпълнени неравенствата

$$f(x_n) \leqq h(x_n) \leqq g(x_n).$$

Съгласно теорема 3.14 редицата $\{h(x_n)\}$ е сходяща и клони също към b. Това означава, че числото b е граница на функцията h в точката a. □

Теорема 4.7. *Границата на функцията* $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ *в точката* $x=0$ *съществува и*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказателство. Ще тръгнем от неравенствата

$$0<\sin x<x<\operatorname{tg} x \qquad (\text{при } 0<x<\pi/2), \tag{4.18}$$

разгледани в 4.3.4. Чрез деление на $\sin x>0$ от (4.18) получаваме следните неравенства:

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{при } 0<x<\pi/2.$$

За реципрочните величини очевидно са изпълнени обратните неравенства

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad \text{при } 0<x<\pi/2. \tag{4.19}$$

Ще отбележим, че (4.19) са изпълнени и при $-\pi/2<x<0$, понеже функциите $\cos x$, $\frac{\sin x}{x}$ и 1 са четни.

Установихме, че неравенствата (4.19) са изпълнени за всички стойности на x от интервала $-\pi/2<x<\pi/2$ с изключение на точката $x=0$, т. е. навсякъде в една прободена δ-околност на точката $x=0$. Тъй като двете функции $f(x)=\cos x$ и $g(x)=1$ имат в точката $x=0$ еднаква граница, равна на единица, то от теорема 4.6 следва, че и функцията $h(x)=\frac{\sin x}{x}$ има в точката $x=0$ граница, равна на единица. □

4.4.2. Втора забележителна граница.

Теорема 4.8. *Границата на функцията* $f(x)=(1+x)^{1/x}$ *в точката* $x=0$ *съществува и е равна на числото* e.*

Доказателство. Достатъчно е да се докаже, че дясната и лявата граница на функцията $f(x)=(1+x)^{1/x}$ в точката $x=0$ съществуват и са равни на e.

* Числото e бе въведено в 3.2.3 като граница на редицата $\{(1+1/n)^n\}$, когато $n\to\infty$.

1. Първо ще докажем, че дясната граница на тази функция в точката $x=0$ съществува и е равна на e.

Ще използваме определението за дясна граница по Коши и ще покажем, че за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta>0$, че за всяко $x\in(0,\delta)$ да е изпълнено неравенството

$$|(1+x)^{1/x}-e|<\varepsilon. \tag{4.20}$$

Избираме произволно $\varepsilon>0$ и разглеждаме двете редици $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ с членове $a_n=(1+1/(1+n))^n$, $b_n=(1+1/n)^{n+1}$. Ще се убедим, че тези две редици клонят към e. Като използваме, че $\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$, и теоремите за граница на частно и произведение на две сходящи редици, получаваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+1/(n+1))^{n+1}}{1+1/(n+1)}=\frac{\lim_{n\to\infty}(1+1/(n+1))^{n+1}}{\lim_{n\to\infty}(1+1/(n+1))}=\frac{e}{1}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}((1+1/n)^n(1+1/n))=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n\lim_{n\to\infty}(1+1/n)=e\,.\,1=e.$$

Тъй като редиците $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ клонят към e, то за избраното по-горе $\varepsilon>0$ съществуват такива номера N_1 и N_2, че $|a_n-e|<\varepsilon$ при $n>N_1$, $|b_n-e|<\varepsilon$ при $n\geqq N_2$. Нека N е по-голямото от числата N_1 и N_2. Тогава при $n\geqq N$ ще са изпълнени и двете неравенства

$$|a_n-e|<\varepsilon \text{ и } |b_n-e|<\varepsilon. \tag{4.21}$$

Нека x е произволно число от интервала $0<x<\delta=1/N$. Тогава $1/x>N$. Означаваме с n цялата част на числото $1/x$, т. е. полагаме $n=[1/x]$. Поради $1/x>N$ имаме $n\geqq N$ и са изпълнени неравенствата

$$n\leqq 1/x<n+1. \tag{4.22}$$

От (4.22) следват неравенствата

$$1+\frac{1}{n+1}<1+x\leqq 1+\frac{1}{n}. \tag{4.23}$$

От неравенствата (4.22), (4.23) и от това, че показателната функция е растяща при основа по-голяма от единица, следва

$$(1+1/(n+1))^n<(1+x)^{1/x}<(1+1/n)^{n+1}, \text{ или } a_n<(1+x)^{1/x}<b_n.$$

И така доказахме, че за всяко x от интервала $0<x<\delta=1/N$ при някое $n\geqq N$ (зависещо, разбира се, от x) са изпълнени неравенствата $a_n<(1+x)^{1/x}<b_n$ и неравенствата

$$a_n-e<(1+x)^{1/x}-e<b_n-e. \tag{4.24}$$

Като съпоставим (4.24) с неравенствата (4.21), върни за всяко $n\geqq N$, окончателно се убеждаваме, че за всяко x от интервала $0<x<\delta=-1/N$ са изпълнени неравенствата (4.20).

2. Ще докажем сега, че и лявата граница на функцията $f(x)=(1+x)^{1/x}$ в точката $x=0$ съществува и е равна на e.

Съгласно определението за лява граница по Хайне достатъчно е да докажем, че за всяка безкрайно малка редица от отрицателни числа $\{x_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $f(x_n)=(1+x_n)^{1/x_n}$ клони към e.

Нека $\{x_n\}$ е безкрайно малка редица от отрицателни числа. Ще разглеждаме членовете на редицата от този номер N нататък, от който всички елементи x_n са по модул по-малки от единица.

Полагаме $y_n=-x_n/(1+x_n)$. Тогава $x_n=-y_n/(1+y_n)$. Очевидно $\{y_n\}$ ще е безкрайно малка редица, състояща се само от положителни числа и

$$f(x_n)=(1+x_n)^{1/x_n}=(1-y_n/(1+y_n))^{-(1+y_n)/y_n}$$
$$=(1/(1+y_n))^{-(1/y_n+1)}=(1+y_n)^{1+1/y_n}.$$

Следователно

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(1+y_n)^{1/y_n}\,.\,\lim_{n\to\infty}(1+y_n)=e\,.\,1=e. \tag{4.25}$$

Тъй като редицата $\{y_n\}$ клони към нула и има само положителни членове, то $\lim_{n\to\infty}(1+y_n)^{1/y_n}=e$ (вече доказахме съществуването на дясна граница, равна на e), а $\lim_{n\to\infty}(1+y_n)=1$. □

Следствие. *Границата на функцията $f(t)=(1+1/t)^t$ при $t\to\infty$ съществува и е равна на e.*

Съгласно определението на граница при $t\to\infty$ по Хайне трябва да се докаже, че за всяка безкрайно голяма редица $\{t_n\}$ съответната редица от стойности на функцията $f(t_n)=(1+1/t_n)^{t_n}$ клони към e. Ще разгледаме безкрайно голямата редица $\{t_n\}$ от този член с номер N нататък, от който всички нейни членове t_n са по модул по-големи от единица. Полагаме $x_n=1/t_n$, така че $t_n=1/x_n$. Според теорема 3.6 редицата $\{x_n\}$ е безкрайно малка и $f(t_n)=(1+1/t_n)^{t_n}=(1+x_n)^{1/x_n}$.

Остава да отбележим, че съгласно теорема 4.8

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n)=\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{1/x_n}=e.$$

4.5. Точки на прекъсване на функция и тяхната класификация

4.5.1. Класификация на точките на прекъсване на функция. В § 1 нарекохме точки на прекъсване на функцията f онези точки, в които функцията не е непрекъсната. Предполагахме, че функцията е дефинирана в разглежданите точки.

Ще разширим нашите разглеждания, като включим и тези точки, в които функцията f не е дефинирана, но те са точки на сгъстяване за дефиниционната област на функцията.

Ще изясним възможните видове точки на прекъсване.

1°. Отстранимо прекъсване. *Точката a се нарича* ***точка на отстранимо прекъсване*** *на функцията f, ако съществува $\lim_{x\to a} f(x)$, но или функцията f не е дефинирана в точката a, или е дефинирана, но $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$.*

Пример: *Функцията*

$$f(x)=\begin{cases} x^{-1}\sin x & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

има в точката $x=0$ отстранимо прекъсване.

Наистина границата на функцията в точката $x=0$, както показахме в 4.4.1, е равна на 1, но стойността ѝ $f(0)$ в точката 0 е равна на 0.

Ако функцията f има в точката a отстранимо прекъсване, това прекъсване може да се отстрани, без да се изменят стойностите на функцията в точките, различни от a. Достатъчно е да положим стойността на функцията в точката a равна на границата ѝ стойност в тази точка. Така в разглеждания пример трябва да положим $f(0)=1$ и тогава $\lim_{x\to 0} x^{-1}\sin x=f(0)=1$, т. е. функцията f ще бъде непрекъсната в точката $x=0$.

2°. Прекъсване от първи род. *Точката a се нарича* ***точка на прекъсване от първи род*** *на функцията f, ако в тази точка функцията f има дясна и лява граница, но различни една от друга:*

$$\lim_{x\to a+0} f(x)\neq\lim_{x\to a-0} f(x).$$

Образно казано, прекъсването от първи род може да се нарече краен скок.

Примери:

1. Функцията

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1 & \text{при } x>0, \\ 0 & \text{при } x=0, \\ -1 & \text{при } x<0 \end{cases}$$

има в точката $x=0$ прекъсване от първи род. Действително

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sgn} x=1, \quad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sgn} x=-1.$$

2. За функцията $f(x)=|x|^{-1}\sin x$ имаме

$$\lim_{x\to 0+0} |x|^{-1}\sin x=1, \quad \lim_{x\to 0-0} |x|^{-1}\sin x=-1.$$

Точката $x=0$ е точка на прекъсване от първи род.

3. Функцията $f(x)=1/(1+2^{1/(x-1)})$, дефинирана навсякъде освен в точката $x=1$, има в точката $x=1$ прекъсване от първи род. Действително, ако $\{x_n\}$ клони към 1 и се състои от членове $x_n>1$, то $\{1/(x_n-1)\}$ е безкрайно голяма редица с положителни членове. Затова $\{1+2^{1/(x_n-1)}\}$ е безкрайно голяма редица и следователно редицата с общ член $f(x_n)=1/(1+2^{1/(x_n-1)})$ е безкрайно малка, т. е. $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=0$.

Ако пък $\{x_n\}$ клони към 1 и се състои от членове $x_n<1$, то $\{1/(x_n-1)\}$ е безкрайно голяма редица с отрицателни членове. Затова $\{2^{1/(x_n-1)}\}$ клони към нула и следователно редицата с общ член $f(x_n)=1/(1+2^{1/(x_n-1)})$ клони към единица, т. е. $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=1$.

3°. Прекъсване от втори род. *Точката a се нарича **точка на прекъсване от втори род** на функцията f, ако функцията f няма поне една от едностранните граници в тази точка или поне една от едностранните граници е безкрайна.*

Примери:

1. Функцията

$$f(x)=\begin{cases} x\cos x^{-1} & \text{при } x<0, \\ 0 & \text{при } x=0, \\ \cos x^{-1} & \text{при } x>0 \end{cases}$$

има лява граница в точката $x=0$, равна на нула: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=0$.

Наистина, ако $\{x_n\}$ е редица, клоняща към нула с членове $x_n<0$, то

$$0\leqq |f(x_n)|=|x_n||\cos x_n^{-1}|\leqq |x_n|.$$

И понеже $|x_n|\to 0$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x_n)=0$.

Разглежданата функция няма дясна граница в точката $x=0$. Наистина да вземем две редици с положителни членове, клонящи към нула: $x_n=1/(\pi/2+\pi n)$ и $x_n'=1/2\pi n$. Ако функцията имаше дясна граница в точката $x=0$, двете редици $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x_n')\}$ щяха да клонят към едно и също число.

Обаче $f(x_n')=\cos 2\pi n=1$, а $f(x_n)=\cos(\pi/2+\pi n)=0$, т. е. $1=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n')\neq \lim f(x_n)=0$.

Следователно разглежданата функция има в точката $x=0$ прекъсване от втори род.

2. Функцията $f(x)=\operatorname{tg} x$ очевидно има прекъсване от втори род във всяка точка $x_k=\pi/2+k\pi$, където $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, тъй като във всяка такава точка

$$\lim_{x\to x_k-0} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to x_k+0} f(x)=-\infty.$$

Образно казано, функцията $\operatorname{tg} x$ има във всяка точка x_k безкраен скок.

3. Функцията

$$f(x)=\begin{cases} \sin x^{-1} & \text{при } x\neq 0, \\ 1 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

има прекъсване от втори род в точката $x=0$, тъй като в тази точка тя няма нито дясна, нито лява граница. Понеже $\sin(-1/x)=-\sin(1/x)$, достатъчно е да покажем, че тя няма дясна граница в точката $x=0$, което следва непосредствено от това, че на двете редици от стойности на аргумента $x_n=1/\pi n$ и $x_n'=1/(\pi/2+2\pi n)$ отговарят съответно редиците от стойности на функцията $f(x_n)=\sin \pi n=0$ и $f(x_n')=\sin(\pi/2+2\pi n)=1$, първата от които клони към нула, а втората — към единица.

Ще въведем понятието частично непрекъсната функция, което често се среща в математиката и нейните приложения.

*Една функция се нарича **частично непрекъсната** в сегмента $[a, b]$, ако е дефинирана навсякъде в този сегмент, непрекъсната е във всяка вътрешна точка с изключение евентуално на краен брой точки, в които има прекъсване от първи род, и има дясна граница в точката a и лява граница в точката b.*

*Една функция се нарича **частично непрекъсната в интервал (или върху безкрайната права)**, ако е частично непрекъсната във всеки сегмент, принадлежащ на интервала (безкрайната права).*

Например функцията $f(x)=[x]$ е частично непрекъсната както във всеки сегмент, така и върху безкрайната права.

4.5.2. За точките на прекъсване на монотонна функция. Следващото твърдение хвърля светлина върху характера на точките на прекъсване на монотонните функции.

Теорема 4.9. *Ако функцията f, дефинирана в сегмента $[a, b]$, е монотонна в този сегмент, тя може да има само точки на прекъсване от първи род и множеството от точките ѝ на прекъсване е най-много изброимо множество.*

Доказателство. Според лемата, доказана в 4.2.1, една монотонна функция има крайни десни и леви граници във всички вътрешни точки на сегмента $[a, b]$ и освен това крайна дясна граница в точката a и крайна лява граница в точката b. Оттук следва, че точките на прекъсване на монотонна функция могат да бъдат само от първи род.

За да докажем втората част на теоремата — че точките на прекъсване са най-много изброимо множество, — ще приемем за определеност, че функцията f е ненамаляваща в сегмента $[a, b]$. Достатъчно е да се докаже, че точките на прекъсване в интервала (a, b), т. е. точките, които са вътрешни за сегмента $[a, b]$, са най-много изброимо много. Ще отбележим, че във всяка такава точка на прекъсване x за дясната и лявата граница е изпълнено неравенството $f(x+0)>f(x-0)$ (вж. забележката към посочената по-горе лема). Според лема 2 от глава 2 за всеки две различни реални числа съществува рационално число, заключено между тях.

Тъй като във всяка точка на прекъсване x е изпълнено неравенството $f(x+0)>f(x-0)$, то на всяка точка на прекъсване x може да се съпостави едно рационално число $r(x)$, удовлетворяващо неравенствата $f(x+0)>r(x)>f(x-0)$.

Ще отбележим, че при това на различните точки на прекъсване ще бъдат съпоставени различни рационални числа. Наистина, ако x_1 и x_2 са две точки на прекъсване, за които $x_1<x_2$, то понеже функцията е ненамаляваща, имаме $f(x_1+0)\leqq f(x_2-0)$, откъдето $r(x_1)<r(x_2)$.

По такъв начин множеството от всички точки на прекъсване на функцията f, разположени вътре в сегмента $[a, b]$, е подмножество на множеството на рационалните числа, което, както видяхме в 2.7, е изброимо. □

4.6. Локални и глобални свойства на непрекъснатите функции

Локални свойства на една функция са тези, които са валидни в достатъчно малки околности на дадена точка от дефиниционната ѝ област. Тези свойства характеризират поведението на функцията, когато аргументът се приближава към изследваната точка. Например непрекъснатостта на функция в някоя точка на дефиниционната ѝ област е локално свойство на тази функция.

Глобални свойства са тези свойства, които функцията притежава в цялата си дефиниционна област. Например монотонността на функцията f в сегмента $[a, b]$ е нейно глобално свойство.

4.6.1. Локални свойства на непрекъснати функции. Ще въведем някои нови понятия. Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$.

Определение 1. *Функцията f се нарича* ***ограничена отгоре (отдолу)*** *в множеството $\{x\}$, ако съществува такова реално число M (реално число m), че за всяко $x\in\{x\}$ е изпълнено неравенството $f(x)\leqq M$ $(f(x)\geqq m)$. Числото M (числото m) се нарича* ***горна (долна) граница*** *на функцията f в множеството $\{x\}$.*

Определение 2. *Функцията f се нарича* ***ограничена от двете страни*** *(или просто* ***ограничена****) в множеството $\{x\}$, ако в това множество тя е ограничена и отгоре, и отдолу, т. е. ако съществуват такива реални числа m и M, че за всяко $x\in\{x\}$ е изпълнено неравенството $m\leqq f(x)\leqq M$.*

Ограничеността на функцията f в множеството $\{x\}$ фактически означава ограниченост на множеството $\{f(x)\}$ от всички стойности на тази функция (отговарящи на стойностите на аргумента от множеството $\{x\}$).

Примери:

1. Функцията $f(x)=\operatorname{tg} x$ в интервала $(0, \pi/2)$ е ограничена отдолу (за долна граница може да се вземе число $m\leqq 0$) и неограничена отгоре.

2. Функцията на Дирихле, равна на нула в ирационалните точки и на единица в рационалните точки, е ограничена (от двете страни) върху всяко множество $\{x\}$.

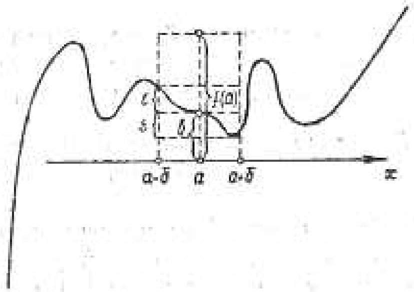
В сила е следната теорема за локална ограниченост на функции с крайни граници:

Теорема 4.10 (за локалната ограниченост на функции, имащи крайна граница). *Нека функцията f, дефинирана в множеството $\{x\}$, има крайна граница в точката a. Тогава съществува такова положително число δ, че функцията f е ограничена в множеството $B_\delta=\{x\}\cap(a-\delta, a+\delta)$.*

Доказателство. Нека границата на f в точката a е равна на b. Според определението на граница по Коши за положителното число $\varepsilon=1$ съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x от прободената δ-околност на точката a е изпълнено неравенството $|f(x)-b|<1$, или

$$b-1<f(x)<b+1. \tag{4.26}$$

Ако множеството $\{x\}$ не съдържа точката a, теоремата е доказана, тъй като в този случай неравенствата (4.26) показват, че за всяка точка от множеството B_δ стойностите на функцията f са заключени между числата $m=b-1$ и $M=b+1$.



Фиг. 4.19

Ако множеството $\{x\}$ съдържа точката a и стойността на функцията в тази точка е $f(a)$, то, като означим с m по-малкото от двете числа $b-1$ и $f(a)$, а с M по-голямото от $b+1$ и $f(a)$, ще получим, че за всички точки от множеството B_δ са изпълнени неравенствата

$$m \leq f(x) \leq M, \tag{4.27}$$

които показват, че функцията f е ограничена в множеството B_δ. □

Фиг. 4.19 илюстрира доказаната теорема.

Следствие. *Ако функцията f е непрекъсната в точката a, тя е ограничена върху множеството от всички стойности на аргумента си, принадлежащи на някоя δ-околност на точката a.*

Достатъчно е да отбележим, че функция, непрекъсната в точката a, има в тази точка крайна граница.

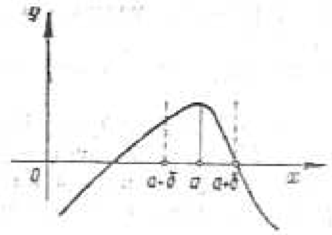
Теорема 4.11 (за неизменността на знака на функция, непрекъсната в точка). *Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, непрекъсната в точката $a \in \{x\}$ и стойността ѝ $f(a)$ е положителна (отрицателна). Тогава съществува такова положително число δ, че функцията f е положителна (отрицателна) навсякъде в множеството $B_\delta = \{x\} \cap (a-\delta, a+\delta)$.*

Доказателство. Според определението за непрекъснатост по Коши, каквото и да е положителното число ε, съществува такова положително число δ, че за всички стойности на аргумента x от δ-околността на точката a да е изпълнено неравенството $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, или

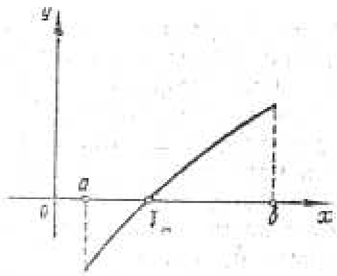
$$f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon. \tag{4.28}$$

Ако за ε вземем положителното число $|f(a)|/2$, то двете числа $f(a)-\varepsilon$ и $f(a)+\varepsilon$ ще са положителни при $f(a)>0$ и отрицателни при $f(a)<0$.

Затова неравенствата (4.28) означават, че за всички стойности на аргумента от δ-околността на точката a функцията f е положителна при $f(a)>0$ и отрицателна при $f(a)<0$. □



Фиг. 4.20



Фиг. 4.21

Фиг. 4.20 илюстрира теорема 4.11.

Теорема 4.11 лесно може да се формулира и за случаите, когато функцията f е непрекъсната в точката a само отдясно или само отляво.

Ще се уговорим да наричаме полусегмента $[a, a+\delta)$ *дясна δ-полуоколност на точката a*, а полусегмента $(a-\delta, a]$ — *лява δ-полуоколност на точката a.*

Теорема 4.11'. *Нека функцията f е дефинирана в множеството $\{x\}$, непрекъсната отдясно (отляво) в точката a от това множество и стойността ѝ $f(a)$ е различна от нула. Тогава съществува такова положително число $\delta>0$, че функцията f е различна от нула и има същия знак, както в точката a, за всички стойности на x от множеството $\{x\}$, принадлежащи на дясната (лявата) δ-полуоколност на точката a.*

За доказателството на тази теорема трябва дословно да се повтори доказателството на теорема 4.11, като се смени терминът „δ-околност на точката a" с термина „дясна (лява) δ-полуоколност на точката a".

Забележка 3. Към локалните свойства на непрекъснатите в дадена точка функции спадат и доказаните теореми 4.1 и 4.2 за непрекъснатост в дадена точка на сума, разлика, произведение и частно на две непрекъснати в тази точка функции и за непрекъснатост на сложна функция.

4.6.2. Глобални свойства на непрекъснати функции.

Теорема 4.12 (анулиране на непрекъсната функция при смяна на знака). *Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и стойностите ѝ в краищата на този сегмент $f(a)$ и $f(b)$ са числа с различни знаци. Тогава вътре в сегмента $[a, b]$ съществува точка ξ, за която $f(\xi)=0$.*

Доказателство. Без ограничение на общността можем да смятаме, че $f(a)<0$, $f(b)>0$. Нека $\{x\}$ е множеството от всички стойности на x от сегмента $[a, b]$, за които $f(x)<0$. Това множество не е празно (негов елемент е например точката $x=a$) и е ограничено отгоре (например от числото $x=b$).

Съгласно теорема 2.1 множеството $\{x\}$ има точна горна граница, която ще означим с ξ.

Точката ξ е вътрешна точка за сегмента $[a, b]$, тъй като от непрекъснатостта на функцията f в $[a, b]$ и от условията $f(a)<0$, $f(b)>0$ според теорема 4.11′ следва, че съществува дясна δ-полуоколност на точката a, в която $f(x)<0$, и лява δ-полуоколност на точката b, в която $f(x)>0$.

Ще се убедим, че $f(\xi)=0$. Ако това не е така, според теорема 4.11 ще съществува δ-околност $\xi-\delta<x<\xi+\delta$ на точката ξ, в която функцията f има един и същ знак. Но това е невъзможно, тъй като съгласно определението на точна горна граница съществува поне една стойност на x от полусегмента $\xi-\delta<x\leq\xi$, за която $f(x)<0$, а за всяка стойност x от интервала $\xi<x<\xi+\delta$ имаме $f(x)\geq 0$. Полученото противоречие доказва, че $f(\xi)=0$. □

Фиг. 4.21 илюстрира теорема 4.12.

Теорема 4.13 (преминаване на непрекъснатата функция през всяка междинна стойност). *Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$. Нека γ е произволно число между α и β. Тогава съществува точка ξ от сегмента $[a, b]$, за която $f(\xi)=\gamma$.*

Доказателство. Очевидно от доказателство се нуждае само случаят, когато $\alpha\neq\beta$ (в противен случай $\gamma=\alpha=\beta$ и например $\xi=a$). По същите причини отпадат и случаите, когато γ съвпада с едно от числата α или β.

Без ограничаване на общността можем да считаме, че $\alpha<\beta$, $\alpha<\gamma<\beta$. Да разгледаме функцията $\varphi(x)=f(x)-\gamma$. Тази функция е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ (като разлика на непрекъснати функции) и има в краищата му стойности с различни знаци:

$$\varphi(a)=f(a)-\gamma=\alpha-\gamma<0,\quad \varphi(b)=f(b)-\gamma=\beta-\gamma>0.$$

Според теорема 4.12 в сегмента $[a, b]$ съществува такава вътрешна точка ξ, че $\varphi(\xi)=f(\xi)-\gamma=0$, т. е. $f(\xi)=\gamma$. Теорема е доказана.

Като използваме току-що доказаната теорема, ще се убедим във верността на забележка 2 от 4.2.2.

Нека функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$ и съществува обратна функция на функцията f. Тогава f е строго монотонна в сегмента $[a, b]$.

Доказателство. От съществуването на обратна функция на f следва, че $f(a)\neq f(b)$. Нека $f(a)<f(b)$ $(f(a)>f(b))$. Ще покажем, че f строго монотонно расте (намалява) в сегмента $[a, b]$. Ще разгледаме случая $f(a)<f(b)$. (Ако $f(a)>f(b)$, разсъжденията са аналогични.) Най-напред ще установим верността на неравенството $f(x)<f(b)$ за всяко $x\in(a, b)$. Да допуснем противното — че съществува такова $x_1\in(a, b)$, че $f(x_1)>f(b)$. (Равенството $f(x_1)=f(b)$ е невъзможно поради съществуването на обратна функция на функцията f.) Като приложим теорема 4.13 за сегментите $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ и използваме следващите от $f(a)<f(b)<f(x_1)$ неравенства

$$f(a)<\frac{1}{2}(f(x_1)+f(b))<f(x_1),$$

$$f(x_1)>\frac{1}{2}(f(x_1)+f(b))>f(b),$$

се убеждаваме в съществуването на числа $\xi_1\in(a, x_1)$ и $\xi_2\in(x_1, b)$, за които $f(\xi_1)=f(\xi_2)=\frac{1}{2}(f(x_1)+f(b))$. И така $\xi_1\neq\xi_2$, но $f(\xi_1)=f(\xi_2)$, което противоречи на съществуването на обратна функция на функцията f в сегмента $[a, b]$.

Ще установим сега, че функцията $f(x)$ е строго монотонно растяща в сегмента $[a, b]$. Да допуснем противното — че съществуват две числа $x_1<x_2$ от полусегмента $[a, b)$, за които $f(x_1)>f(x_2)$. Ще покажем, че това допускане води до противоречие. Като приложим теорема 4.13 за сегментите $[x_1, x_2]$ и $[x_2, b]$ и използваме следващите от $f(x_1)>f(x_2)$, $f(x_1)<f(b)$ неравенства

$$f(x_1)>\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))>f(x_2),$$

$$f(x_2)<\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))<f(b),$$

се убеждаваме в съществуването на такива числа $\xi_3\in(x_1, x_2)$ и $\xi_4\in(x_2, b)$, че $f(\xi_3)=f(\xi_4)=\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$. И така $\xi_3\neq\xi_4$, а $f(\xi_3)=f(\xi_4)$, което противоречи на съществуването на обратна функция на функцията f в сегмента $[a, b]$. Понеже условието $f(x_1)=f(x_2)$ за $x_1<x_2$ е също невъзможно, стигаме до извода, че $f(x_1)<f(x_2)$ за всеки $x_1<x_2$ от сегмента $[a, b]$. □

Теорема 4.14 (теорема на Вайерщрас). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тя е ограничена в този сегмент.*

Доказателство. Ще докажем, че функцията f е ограничена отгоре в сегмента $[a, b]$ (ограничеността отдолу се доказва аналогично).

Да допуснем, че f не е ограничена отгоре в сегмента $[a, b]$. Тогава за всяко естествено число n съществува поне една точка x_n от $[a, b]$, за която $f(x_n)>n$. (В противен случай f би била ограничена в сегмента $[a, b]$.)

Намерихме такава редица $\{x_n\}$ от сегмента $[a, b]$, че съответната редица от стойности на функцията $\{f(x_n)\}$ е безкрайно голяма. Според теоремата на Болцано — Вайерщрас (вж. 3.3.1, следствие 3 от теорема 3.16) от редицата $\{x_n\}$ може да се избере сходяща подредица $\{x_{k_n}\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ с граница някакво число ξ. Тъй като всички членове на редицата $\{x_{k_n}\}$ са от сегмента $[a, b]$, то и точката ξ принадлежи на този сегмент. От непрекъснатостта на функцията f в точката ξ следва, че подредицата от стойности на функцията $\{f(x_{k_n})\}$ клони към $f(\xi)$. Но това ни води до противоречие, тъй като редицата $\{f(x_{k_n})\}$ е безкрайно голяма като подредица на безкрайно голямата редица $\{f(x_n)\}$. □

З а б е л е ж к а 1. За интервал (или полусегмент) твърдението от теорема 4.14 не е вярно, т. е. от непрекъснатостта на функция в интервал (или полусегмент) не следва нейната ограниченост.

Пример: Функцията $f(x)=1/x$ в интервала $(0, 1)$ (или в полусегмента $(0, 1]$). Тази функция е непрекъсната в посочените множества, но не е ограничена. Наистина редицата $x_n=1/n$, $n=2, 3, 4, \ldots$, принадлежи на интервала $(0, 1)$ (полусегмента $(0, 1]$), а редицата от стойности на функцията $\{f(x_n)\}=\{n\}$ е безкрайно голяма.

Определение. *Числото M (m) се нарича* ***точна горна (точна долна) граница на функцията*** *f в множеството $\{x\}$, ако са изпълнени двете условия: 1) за всяка стойност на x от множеството $\{x\}$ е изпълнено неравенството $f(x)\leqq M$ $(f(x)\geqq m)$; 2) за всяко число $\varepsilon>0$ съществува такава стойност на x от множеството $\{x\}$, че за съответната стойност на функцията f е изпълнено неравенството*

$$f(x)>M-\varepsilon \qquad (f(x)<m+\varepsilon).$$

В даденото определение условието 1) означава, че числото M (числото m) е една от горните (долните) граници за функцията f в множеството $\{x\}$, а условието 2) означава, че тази граница е най-малката (най-голямата).

Точната горна граница M на функцията f в множеството $\{x\}$ се означава:

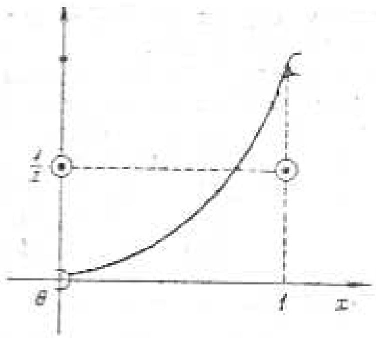
$$M=\sup_{\{x\}} f(x)=\sup\{f(x): x\in\{x\}\}.$$

Аналогично точната долна граница m на функцията $f(x)$ в множеството $\{x\}$ се означава със символа

$$m=\inf_{\{x\}} f(x)=\inf\{f(x): x\in\{x\}\}.$$

По-специално точната горна граница на функцията f в сегмента $[a, b]$ се означава по един от следните четири начина:

$$\sup_{a\leqq x\leqq b} f(x)=\sup_{x\in[a, b]} f(x)=\sup\{f(x): a\leqq x\leqq b\}=\sup\{f(x): x\in[a, b]\}.$$



Фиг. 4.22

Аналогично за точната долна граница:

$$\inf_{a\leqq x\leqq b} f(x)=\inf_{x\in[a, b]} f(x)=\inf\{f(x): a\leqq x\leqq b\}=\inf\{f(x): x\in[a, b]\}.$$

В сила са следните твърдения:

1. Ако функцията f е ограничена отгоре (отдолу) в множеството $\{x\}$, то тя има в това множество точна горна (точна долна) граница.

2. Ако функцията f е ограничена (от двете страни) в множеството $\{x\}$, то тя има в това множество както точна горна, така и точна долна граница.

Тези твърдения са пряко следствие от теорема 2.1, тъй като ограничеността отгоре (отдолу) на функцията f в множеството $\{x\}$ означава, че множеството от всички стойности на тази функция е ограничено отгоре (отдолу).

Следващият пример показва, че точните граници на една ограничена върху дадено множество функция в общия случай не се достигат.

Да разгледаме функцията f (вж. фиг. 4.22):

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } 0<x<1, \\ 1/2 & \text{при } x=0,\ x=1. \end{cases}$$

Тази функция е ограничена върху сегмента $[0, 1]$ и има в него точна горна граница $M=1$ и точна долна граница $m=0$. Обаче тези граници не се достигат: сред точките на сегмента $[0, 1]$ няма точки, в които стойностите на функцията да са равни на нула или единица.

Ще отбележим, че разглежданата функция f не е непрекъсната в сегмента $[0, 1]$ (тя има точки на прекъсване $x=0$ и $x=1$). Оказва се, че това обстоятелство не е случайно, тъй като е в сила следното твърдение:

Теорема 4.15 (втора теорема на Вайерщрас). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тя достига в този сегмент точната си горна и точната си долна граница, т. е. има такива точки x_1 и x_2 от сегмента $[a, b]$, че стойността $f(x_1)$ е равна на точната горна граница на f в сегмента $[a, b]$, а стойността $f(x_2)$ е равна на точната долна граница на f в сегмента $[a, b]$.*

Доказателство. Според първата теорема на Вайерщрас 4.14 функцията f е ограничена в сегмента $[a, b]$ и затова тя има в този сегмент точна горна граница M и точна долна граница m.

Ще се спрем на доказателството за достигане на точната горна граница M, тъй като достигането на точната долна граница m се доказва аналогично.

Да предположим, че функцията f не достига точната си горна граница, т. е. че във всички точки от сегмента $[a, b]$ функцията f има стойности, строго по-малки от M. Тогава да разгледаме функцията

$$F(x) = 1/(M-f(x)).$$

Знаменателят $M-f$ е непрекъсната и строго положителна в сегмента $[a, b]$ функция. Затова съгласно теорема 4.1 (за случая на частно) функцията F ще бъде непрекъсната в сегмента $[a, b]$. Но според първата теорема на Вайерщрас 4.14 функцията F е ограничена в сегмента $[a, b]$, т. е. съществува такова положително число A, че $F(x)=1/(M-f(x))\leq A$ за всички x от сегмента $[a, b]$. Тъй като функцията $M-f$ е строго положителна в $[a, b]$, то последното неравенство е еквивалентно на неравенството $f(x)\leq M-1/A$ за всички x от $[a, b]$. Но последното противоречи на това, че M е точна горна граница, т. е. най-малката от всички горни граници на функцията f в сегмента $[a, b]$.

Тъй като получихме противоречие, направеното предположение, че точната горна граница не се достига, не е вярно. □

Забележка 2. След като доказахме, че всяка непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция достига точната си горна и точната си долна граница, можем да наречем точната горна граница M максимална стойност, а точната долна граница m — минимална стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$. Теорема 4.15 може да се формулира и така: Всяка непрекъсната в сегмента $[a, b]$ функция f има в този сегмент максимална и минимална стойност.

Максималната стойност на функцията f в сегмента $[a, b]$ се означава с:

$$\max_{a\leq x\leq b} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x)$$
$$=\max\{f(x): a\leq x\leq b\}=\max\{f(x): x\in[a, b]\}.$$

Аналогично за минималната стойност:

$$\min_{a\leq x\leq b} f(x) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$
$$=\min\{f(x): a\leq x\leq b\}=\min\{f(x): x\in[a, b]\}.$$

Забележка 3. Функция, която не е непрекъсната в даден сегмент, може да достигне в този сегмент точната си горна и точната си долна граница. Като пример може да се вземе функцията на Дирихле D, чиито стойности са равни на нула за всички ирационални x и на единица за всички рационални стойности на x. Тази функция е прекъсната във всяка точка на сегмента $[0, 1]$, но очевидно достига в този сегмент точната си горна граница, равна на единица, и точната си долна граница, равна на нула.

Забележка 4. Твърдението в теорема 4.15 не е вярно, ако във формулировката ѝ заменим термина „сегмент" с термина „интервал" или „полусегмент".

Така функцията $f(x)=x$ е непрекъсната в интервала $(0, 1)$ или в полусегмента $[0, 1)$, но не достига точната си горна граница $M=1$ в този интервал или полусегмент.

Трябва да добавим, че за функция, която е непрекъсната в интервал или полусегмент, точните граници могат дори да не съществуват, тъй като тя може да не е ограничена в този интервал или полусегмент (вж. забележка 1).

4.6.3. Понятие за равномерна непрекъснатост на функция. Нека функцията f е дефинирана в множество $\{x\}$, всяка точка на което е точка на сгъстяване за това множество. Примери за такова множество са сегмент, интервал, полусегмент, полуправа, безкрайната права и множеството на всички рационални числа, принадлежащи на всяко от изброените по-горе множества.

Определение. *Функцията f се нарича* ***равномерно непрекъсната в множеството*** *$\{x\}$, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че за всеки две точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|<\delta$, е изпълнено неравенството*

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{4.29}$$

Забележка 1. Ако функцията f е равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$, то тя е непрекъсната във всяка точка x_0 на това множество. Наистина при $x''=x_0$ получаваме определението за непрекъснатост по Коши в точката x_0.

Забележка 2. В определението за равномерна непрекъснатост е основно изискването за всяко $\varepsilon>0$ да съществува универсално $\delta>0$, за което да е изпълнено неравенството (4.29) за всяка двойка точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$.

Ако поискаме непрекъснатост на функцията f във всяка точка x_0 от множеството $\{x\}$, то за всяко $\varepsilon>0$ и за всяка точка x_0 на множеството $\{x\}$ се гарантира съществуването на „собствено" положително число $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$, което зависи не само от ε, но и от x_0 и осигурява верността на неравенството $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ за всички x от множеството $\{x\}$, които удовлетворяват условието $|x-x_0|<\delta(\varepsilon, x_0)$. При това може и да не съществува положителна точна долна граница на числата $\delta(\varepsilon, x_0)$ по всички точки x_0 на множеството $\{x\}$, т. е. равномерната непрекъснатост на функция върху множеството $\{x\}$ не следва от непрекъснатостта на тази функция във всяка точка x_0 от множеството $\{x\}$.

Забележка 3. От даденото определение за равномерна непрекъснатост непосредствено следва, че ако функцията f е равномерно непрекъсната върху множеството $\{x\}$, то тя е равномерно непрекъсната и върху всяко подмножество на множеството $\{x\}$.

Примери:

1. Функцията $f(x)=1/x$ е равномерно непрекъсната върху полуправата $x\geq 1$. Наистина за всеки две точки x' и x'' от тази полуправа е изпълнено

$$|f(x')-f(x'')|=|1/x'-1/x''|=|(x''-x')/x'x''|$$
$$=|x'-x''|/x'x''\leq|x'-x''|.$$

Ако за всяко $\varepsilon>0$ вземем $\delta=\varepsilon$, ще получим, че за всеки две точки x' и x'' от полуправата $[1,+\infty)$, удовлетворяващи условието $|x'-x''|<\delta$, е изпълнено неравенството $|f(x')-f(x'')|\leq\delta=\varepsilon$.

2. Функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ не е равномерно непрекъсната в интервала $(0, 1)$, въпреки че е непрекъсната във всяка точка на интервала $(0, 1)$. За да се убедим в това, е достатъчно да докажем, че за н я к о е $\varepsilon>0$ и за п р о и з в о л н о м а л к о $\delta>0$ съществува поне една двойка точки x' и x'' от интервала $(0, 1)$, за които $|x'-x''|<\delta$, но $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$.

Да разгледаме две редици от точки $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$, принадлежащи на интервала $(0, 1)$, с членове $x_n'=1/\pi n$, $x_n''=1/(2\pi n+\pi/2)$, $n=1, 2, 3, \ldots$

Тези две редици, а така и също и тяхната разлика са безкрайно малки редици. Затова за всяко произволно малко $\delta>0$ съществува такъв номер n, че $|x_n'-x_n''|<\delta$. Заедно с това за всеки номер n имаме

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=|\sin\pi n-\sin(2\pi n-\pi/2)|=1.$$

Следователно за $\varepsilon=1/2$ и произволно малко $\delta>0$ съществува двойка точки x_n' и x_n'' от интервала $(0, 1)$, за които

$$|x_n'-x_n''|<\delta \text{ и } |f(x_n')-f(x_n'')|=1>\varepsilon=1/2,$$

а това означава, че разглежданата функция не е равномерно непрекъсната в интервала $(0, 1)$.

Ще отбележим, че ако разгледаме същата функция $f(x)=\sin x^{-1}$ не в интервала $(0, 1)$, а в интервала $(\gamma, 1)$, където γ е произволно число от интервала $(0, 1)$, проведените разсъждения вече не са валидни. По-нататък ще покажем, че тази функция е равномерно непрекъсната в интервала $(\gamma, 1)$ за $0<\gamma<1$.

3. Функцията $f(x)=x^2$ не е равномерно непрекъсната върху полуправата $x\geq 1$.

Ще покажем, че не само за н я к о е $\varepsilon>0$, а за всяко $\varepsilon>0$ и за всяко произволно малко $\delta>0$ съществува такава двойка точки x', x'' от полуправата $x\geq 1$, за която $|x'-x''|<\delta$, но $|f(x')-f(x'')|>\varepsilon$.

За всяка двойка точки x', x'' от полуправата $x\geq 1$ имаме

$$(4.30)\quad |f(x')-f(x'')|=|(x')^2-(x'')^2|=|x'-x''|\,.\,|x'+x''|>|x'-x''|x'.$$

Фиксираме произволни $\varepsilon>0$ и $\delta>0$, вземаме за x' произволно число, по-голямо от единица и от $2\varepsilon/\delta$, и полагаме $x''=x'+\delta/2$. За такива x' и x'' е изпълнено неравенството $|x''-x'|=\delta/2<\delta$. От друга страна, според (4.30) за същите x' и x'' ще бъде изпълнено и неравенството

$$|f(x')-f(x'')|\geq(\delta/2)(2\varepsilon/\delta)=\varepsilon.$$

Ако разглеждаме обаче функцията $f(x)=x^2$ не върху полуправата $[1, +\infty)$, а в произволен сегмент $[1, b]$, където $b>1$ е произволно число, проведените разсъждения нямат място.

Това ще стане ясно от следната основна теорема:

Основна теорема 4.16 (теорема на Кантор*). *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, тя е равномерно непрекъсната в този сегмент.*

Доказателство. Да предположим, че функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, но не е равномерно непрекъсната. Тогава за някое $\varepsilon>0$ и за произволно малко $\delta>0$ съществуват две такива точки x' и x'' от сегмента $[a, b]$, че $|x'-x''|<\delta$, но $|f(x')-f(x'')|\geq\varepsilon$. Да изберем безкрайно малка редица от положителни числа $\delta_n=1/n$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Можем да твърдим, че за избраното $\varepsilon>0$ и за всеки номер n съществуват точки x_n' и x_n'' от сегмента $[a, b]$, за които

* Георг Кантор — немски математик (1845—1918).

(4.31) $\qquad |x_n'-x_n''|<1/n$, но $|f(x_n')-f(x_n'')|\geq\varepsilon$.

Тъй като $\{x_n'\}$ е редица от точки на сегмента $[a, b]$, тя е ограничена и съгласно теоремата на Болцано — Вайерщрас (вж. следствие 3 от теорема 3.16) от нея може да се избере сходяща подредица $\{x_{k_n}'\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Границата ξ на тази подредица (според следствие 2 от теорема 3.13) също принадлежи на сегмента $[a, b]$. Лявото неравенство (4.31) показва, че съответната подредица $\{x_{k_n}''\}$ е също сходяща и има за граница точката ξ.

Понеже функцията f е непрекъсната във всяка точка на сегмента $[a, b]$, тя е непрекъсната и в точката ξ.* Но тогава според определението за непрекъснатост по Хайне двете подредици от съответните стойности на функцията $\{f(x_{k_n}')\}$ и $\{f(x_{k_n}'')\}$ са сходящи с граница $f(\xi)$, т. е. разликата на тези подредици $\{f(x_{k_n}')-f(x_{k_n}'')\}$ е безкрайно малка редица. Това противоречи на дясното неравенство (4.31), което е изпълнено за всички номера n и следователно и за всички номера k_n.

Полученото противоречие показва, че нашето допускане не е вярно. □

Ще се върнем сега към разгледания пример 2 и ще покажем, че функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ е равномерно непрекъсната в интервала $(\gamma, 1)$ при всяко γ от интервала $(0, 1)$. Действително при всяко такова γ функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ е непрекъсната в сегмента $[\gamma, 1]$. Следователно по теоремата на Кантор тя е равномерно непрекъсната в сегмента $[\gamma, 1]$. Съгласно забележка 3 към определението за равномерна непрекъснатост функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ е равномерно непрекъсната и в интервала $(\gamma, 1)$, който е подмножество на сегмента $[\gamma, 1]$.

Теоремата на Кантор се формулира удобно чрез понятието осцилация на функция.

Нека функцията f е ограничена върху сегмента $[c, d]$. ***Осцилация на функцията*** *f в сегмента $[c, d]$ ще наричаме разликата $\omega=M-m$ между точната горна и точната долна граница на функцията f в този сегмент.*

За непрекъсната функция f в сегмента $[c, d]$ осцилацията е равна на разликата между максималната и минималната ѝ стойност в този сегмент.

От теоремата на Кантор 4.16 непосредствено се получава следното твърдение:

* Ако ξ съвпада с един от краищата на сегмента $[a, b]$, под непрекъснатост трябва да се разбира едностранна непрекъснатост.

Следствие от теорема 4.16. *Ако функцията f е непрекъсната в сегмента $[a, b]$, то за всяко положително число ε съществува такова положително число δ, че осцилацията на функцията $f(x)$ във всеки сегмент с дължина, по-малка от δ, съдържащ се в сегмента $[a, b]$, е по-малка от ε.*

Забележка 4. Като анализираме доказателствата на теоремите 4.14 и 4.15 на Вайерщрас и 4.16 на Кантор, не е трудно да забележим, че в тези три теореми вместо сегмента $[a, b]$ може да се вземе произволно множество $\{x\}$, което удовлетворява условията: 1) множеството $\{x\}$ е ограничено; 2) множеството $\{x\}$ съдържа всичките си точки на сгъстяване (такова множество се нарича *затворено*).

Множество $\{x\}$, което удовлетворява посочените две условия, ще наричаме *компактно множество* или *компакт*. Следователно посочените три теореми (двете теореми на Вайерщрас и теоремата на Кантор) са в сила не само за функции, непрекъснати в сегмент, но и за функции, непрекъснати върху произволен компакт.

4.6.4. Модул на непрекъснатост на функция. Нека функцията f е дефинирана и непрекъсната в някакво множество $\{x\}$, всяка точка на което е точка на сгъстяване.

Определение. *За всяко $\delta>0$* ***модул на непрекъснатост на функцията*** *$f(x)$ в множеството $\{x\}$ ще наричаме точната горна граница на разликата $|f(x')-f(x'')|$ по всички точки x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|\leq\delta$.*

Модулът на непрекъснатост на функцията f в множеството $\{x\}$ е прието да се означава със символа $\omega(f;\delta)$, т. е.

(4.32) $\qquad \omega(f;\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|: |x'-x''|\leq\delta,\ x', x''\in\{x\}\}.$

Ще отбележим две свойства на модула на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$.

1°. Модулът на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$ е винаги неотрицателен.

Това свойство следва непосредствено от определението за модул на непрекъснатост (4.32).

2°. Модулът на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$ е ненамаляваща функция на δ върху полуправата $\delta>0$.

Действително при намаляване на δ множеството, по което се взема супремумът (4.32), се стеснява, а супремум върху част от множество не надминава супремума върху цялото множество.

Примери:

Ще пресметнем модулите на непрекъснатост на някои функции.

1. Ще сметнем модула на непрекъснатост на функцията $f(x)=x^2$ в сегмента $[0, 1]$.

Нека x' и x'' са такива две произволни точки от сегмента $[0, 1]$, че $|x'-x''|\leqq\delta$, където $0<\delta<1$. Тогава очевидно $x'-\delta\leqq x''\leqq x'+\delta$ и получаваме

$$|f(x')-f(x'')|=|(x')^2-(x'')^2|\leqq(x')^2-(x'-\delta)^2=2\delta x'-\delta^2 \leqq 2\delta-\delta^2.$$

От последното неравенство имаме

$$\omega(f;\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:|x'-x''|<\delta,\ x',x''\in\{x\}\}\leqq 2\delta-\delta^2.$$

От друга страна, като вземем $x'=1$ и $x''=1-\delta$, получаваме

$$f(x')-f(x'')=1-(1-\delta)^2=2\delta-\delta^2.$$

Следователно $\omega(f;\delta)=\omega(x^2;\delta)=2\delta-\delta^2\leqq 2\delta$.

2. Ще сметнем модула на непрекъснатост на функцията $f(x)=\sin x^{-1}$ в интервала $(0, 1)$.

Тъй като

$$|f(x')-f(x'')|=|\sin(1/x')-\sin(1/x'')|\leqq|\sin(1/x')|+|\sin(1/x'')|\leqq 2,$$

то $\omega(f;\delta)\leqq 2$.

От друга страна, като вземем две безкрайно малки редици $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ от точки в интервала $(0, 1)$ от вида

$$x_n'=1/(2\pi n+\pi/2),\quad x_n''=1/(2\pi n-\pi/2),$$

където $n=1, 2, 3, \ldots$, за всяко $\delta>0$ можем да изберем такъв номер n, че $0<x_n'<\delta$, $0<x_n''<\delta$ и $|x_n'-x_n''|\leqq\delta$, при което

$$f(x_n')-f(x_n'')=\sin(1/x_n')-\sin(1/x_n'')=2.$$

Оттук следва, че $\omega(f;\delta)=\omega(\sin x^{-1};\delta)=2$.

3. Модулът на непрекъснатост на функцията $f(x)=1/x$ в интервала $(0, 1)$ е равен на $+\infty$.

Фиксираме произволно $\delta>0$ и разглеждаме само тези точки x' и x'', които удовлетворяват съотношенията $0<x'\leqq\delta$, $x''=\delta$, така че $|x'-x''|\leqq\delta$. Очевидно

$$\omega(x^{-1};\delta)\geqq\sup\{1/x'-1/\delta:\ 0<x'<\delta\}=+\infty.$$

Ще докажем една теорема, която свързва равномерната непрекъснатост на функцията f върху множеството $\{x\}$ с модула на непрекъснатост на тази функция върху същото множество.

Теорема 4.17. *За да бъде функцията f равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$, е необходимо и достатъчно модулът ѝ на непрекъснатост $\omega(f;\delta)$ в това множество да удовлетворява съотношението*

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0. \tag{4.33}$$

Доказателство. *Необходимост.* Нека функцията f е равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$. Трябва да се докаже, че е изпълнено съотношението (4.33), т. е. че за всяко $\varepsilon>0$ може да се намери такова число $\delta_\varepsilon>0$, че за всяко δ, удовлетворяващо условието $0<\delta<\delta_\varepsilon$, да е изпълнено неравенството $\omega(f;\delta)<\varepsilon$.

Според определението за равномерна непрекъснатост за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta_\varepsilon>0$, че за всички x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|<\delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$. Но това означава, че за всяко δ от интервала $0<\delta<\delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството

$$\omega(f;\delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|:|x'-x''|\leqq\delta,\ x',x''\in\{x\}\}\leqq\varepsilon/2<\varepsilon.$$

Достатъчност. Нека е изпълнено съотношението (4.33), т. е. за всяко $\varepsilon>0$ съществува такова $\delta_\varepsilon>0$, че за всяко δ, удовлетворяващо условието $0<\delta<\delta_\varepsilon$, да е изпълнено неравенството $\omega(f;\delta)<\varepsilon$.

От определението на модул на непрекъснатост следва, че за всички x' и x'' от множеството $\{x\}$, за които $|x'-x''|\leqq\delta<\delta_\varepsilon$, е изпълнено неравенството $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, а това означава, че функцията f е равномерно непрекъсната в множеството $\{x\}$. □

По-рано пресметнахме модулите на непрекъснатост на три функции: функцията x^2 в сегмента $[0, 1]$ и функциите $\sin x^{-1}$ и $1/x$ в интервала $(0, 1)$.

Тъй като $\omega(x^2;\delta)=2\delta-\delta^2$, $\omega(\sin x^{-1};\delta)=2$, $\omega(1/x;\delta)=+\infty$, от теорема 4.17 следва, че функцията x^2 е равномерно непрекъсната в сегмента $[0, 1]$, а функциите $\sin x^{-1}$ и $1/x$ не са равномерно непрекъснати в интервала $(0, 1)$.

4.7. Понятието компактност на множество

4.7.1. Отворени и затворени множества. Нека $\{x\}$ е произволно множество от реални числа.

Определение 1. *Точката x на множеството $\{x\}$ се нарича* ***вътрешна точка*** *за това множество, ако съществува такова положително число δ, че δ-околността на точката x да се съдържа в множество $\{x\}$.*

Определение 2. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***отворено,*** *ако всяка негова точка е вътрешна точка за множеството.*

Примери за отворени множества са интервалите, отворената полуправа, безкрайната прав и обединението на няколко непресичащи се интервала.

Определение 3. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***затворено,*** *ако неговото допълнение (т. е. разликата $(-\infty,+\infty)\setminus\{x\}$) е отворено множество.*

Определение 3'. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***затворено,*** *ако съдържа всичките си точки на сгъстяване.*

Ще се убедим, че за произволни числови множества определенията 3 и 3' са еквивалентни.

1. Нека множеството $\{x\}$ е допълнение на отворено множество. Ще докажем, че всяка точка на сгъстяване на това множество $\{x\}$ му принадлежи.

Наистина, ако предположим, че точката на сгъстяване x не принадлежи на множеството $\{x\}$, то x ще принадлежи на допълнението на множеството $\{x\}$, което е отворено множество. Но тогава x ще принадлежи на това отворено множество заедно с някоя своя δ-околност, т. е. някоя δ-околност на точката x няма да съдържа точки от множеството $\{x\}$. Последното противоречи на това, че x е точка на сгъстяване за множеството $\{x\}$.

2. Нека сега всяка точка на сгъстяване x на множеството $\{x\}$ принадлежи на това множество. Ще докажем, че множеството $\{x\}$ е допълнение на отворено множество. Нека x е произволна точка от допълнението на множеството $\{x\}$. Трябва да се докаже, че в допълнението се съдържа и някоя δ-околност на точката x.

Ако това не е така, то всяка δ-околност на точката x ще съдържа точки от множеството $\{x\}$, т. е. точката x ще бъде точка на сгъстяване за множеството $\{x\}$ и по условие принадлежи към него, което противоречи на това, че x е точка от допълнението на множеството $\{x\}$.

4.7.2. Покритие на множество със система от отворени множества

Определение 1. *Ще казваме, че системата $\{\Sigma_\alpha\}$ от множества Σ_α е* ***покритие*** *на множеството $\{x\}$, ако всяко от множествата Σ_α е отворено и всяка точка x от множеството $\{x\}$ принадлежи на поне едно от множествата на системата $\{\Sigma_\alpha\}$.*

Ще докажем две забележителни леми за покритие на множество със системи от отворени множества.

Лема на Хайне — Борел* за сегмент. *От всяко покритие на сегмента $[a, b]$ може да се избере крайна подсистема, която също е покритие на този сегмент.*

Доказателство. Ако системата $\{\Sigma_\alpha\}$ е покритие на сегмента $[a, b]$ и не е безкрайна, лемата е доказана. Нека системата $\{\Sigma_\alpha\}$ е покритие на сегмента $[a, b]$ и е безкрайна.

Допускаме, че системата $I=[a, b]$ не може да се покрие от краен брой множества на системата $\{\Sigma_\alpha\}$. Ако разделим този сегмент наполовина, поне една от двете му половини също не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. Да означим тази половина с I_1. Разделяме I_1 наполовина и получаваме,

* Емил Борел — френски математик (1871—1956).

че поне едната от двете половини на I_1 (означаваме я с I_2) не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$.

Продължавайки така, ще получим система от включващи се сегменти $\{I_n\}$, всеки от които не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. Дължината на n-тия сегмент I_n е 2^{-n}-та част от дължината на основния сегмент и клони към нула при $n\to\infty$.

Съгласно следствието от теорема 3.15 (вж. 3.2.2) съществува, и то единствена точка c, съдържаща се във всички сегменти I_n. Понеже тази точка c се съдържа и в сегмента $I=[a, b]$, то в системата $\{\Sigma_\alpha\}$ има множество Σ_{α_0}, което съдържа точката c. От това, че множеството Σ_{α_0} е отворено, следва съществуването на такова $\delta>0$, че δ-околността на точката c, т. е. интервалът $(c-\delta, c+\delta)$, също принадлежи на множеството Σ_{α_0}.

Тъй като всички сегменти I_n съдържат точката c и дължината им клони към нула при $n\to\infty$, можем да твърдим, че съществува такъв номер n_0, че при $n\geq n_0$ всички сегменти I_n се съдържат в интервала $(c-\delta, c+\delta)$.

Но това означава, че всеки сегмент I_n при $n\geq n_0$ може да бъде покрит само от множеството Σ_{α_0} на сегмента $\{\Sigma_\alpha\}$. Така стигнахме до противоречие с това, че нито един от сегментите I_n не може да се покрие с краен брой множества от системата $\{\Sigma_\alpha\}$. □

Ще докажем сега едно по-общо твърдение.

Лема на Хайне — Борел за затворено ограничено множество. *От всяко покритие на затворено ограничено множество $\{x\}$ може да се избере крайна подсистема, също образуваща покритие на множеството $\{x\}$.*

Доказателство. Нека $\{x\}$ е затворено ограничено множество, а $\{\Sigma_\alpha\}$ — система от отворени множества, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.

Тъй като множеството $\{x\}$ е ограничено, има сегмент $[a, b]$, който го съдържа. Означаваме със Σ_β отвореното множество, което е допълнение на затвореното множество $\{x\}$. Тогава обединението на системата $\{\Sigma_\alpha\}$ с отвореното множество Σ_β образува покритие на сегмента $[a, b]$. Според лемата на Хайне — Борел за сегмент от това покритие може да се избере крайна подсистема, образуваща покритие на сегмента $[a, b]$.

Ако множеството Σ_β влиза в тази крайна подсистема, като го изключим от нея, ще получим крайна подсистема на системата $\{\Sigma_\alpha\}$, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.*

Ако множеството Σ_β не влиза в крайната подсистема, образуваща покритие на сегмента $[a, b]$, то тази крайна подсистема

* Множеството Σ_β е допълнение към множеството $\{x\}$ и не съдържа нито една точка от множеството $\{x\}$.

ще се състои от множества Σ_α на системата $\{\Sigma_\alpha\}$ и ще образува крайно покритие на множеството $\{x\}$, което се съдържа в сегмента $[a, b]$. □

4.7.3. Понятието компактност на множество. Нека $\{x\}$ е произволно множество от реални числа.

Определение 1. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***компактно множество*** (или ***компакт***), *ако от всяка система, образуваща покритие на множеството $\{x\}$, може да се избере крайна подсистема, която е също покритие на множеството $\{x\}$.*

В забележка 4 на 6.3 беше дадено друго определение за компактно множество. Ще напомним неговата формулировка.

Определение 1'. *Множеството $\{x\}$ се нарича* ***компактно,*** *ако е затворено и ограничено.*

Ще докажем, че за произволни числови множества определенията 1 и 1' са еквивалентни.

1. Нека множеството $\{x\}$ е затворено и ограничено. Тогава от лемата на Хайне — Борел следва, че от всяко покритие на множеството $\{x\}$ може да се избере крайна подсистема, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.

2. Нека множеството $\{x\}$ е такова, че от всяко негово покритие да може да се избере крайна подсистема, образуваща също покритие на $\{x\}$.

Ще докажем, че множеството $\{x\}$ е затворено и ограничено.

Най-напред ще докажем затвореността на множеството $\{x\}$. Достатъчно е да се докаже, че допълнението D на множеството $\{x\}$ е отворено множество.

Нека y е произволна точка от допълнението D. Трябва да се докаже, че съществува δ-околност на точката y, която се съдържа в допълнението D.

Нека x е произволна точка на множеството $\{x\}$. Тъй като $x \neq y$, то числото $\delta(x) = |x-y|/2$ е положително и $\delta(x)$-околностите на точките x и y

$$\Sigma_x = (x-\delta(x),\ x+\delta(x)),\quad \Psi_x = (y-\delta(x),\ y+\delta(x))$$

не се пресичат.

Понеже системата от отворени множества $\{\Sigma_x\}$, съответствуващи на всички точки x от множеството $\{x\}$, образува покритие на множеството $\{x\}$, то от тази система може да се избере крайна подсистема $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$, образуваща покритие на множеството $\{x\}$.

Означаваме с $\Psi_{x_1}, \Psi_{x_2}, \ldots, \Psi_{x_n}$ съответната крайна подсистема от δ-околности на точката y. Най-малката от тези δ-околности ще се съдържа във всички множества $\Psi_{x_1}, \Psi_{x_2}, \ldots, \Psi_{x_n}$ и няма да има общи точки нито с едно от множествата $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2},$

$\ldots, \Sigma_{x_n}$. Но тогава, тъй като подсистемата $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$ образува покритие на множеството $\{x\}$, посочената най-малка δ-околност на точката y няма да съдържа точки от множеството $\{x\}$, т. е. изцяло ще се съдържа в допълнението D на множеството $\{x\}$.

С това е доказано, че множеството D е отворено, и следователно множеството $\{x\}$ е затворено.

Сега ще докажем, че множеството $\{x\}$ е ограничено. Ако това не е така, ще съществува редица $\{x_n\}$ от точки на множеството $\{x\}$, удовлетворяващи условието

$$|x_n| > n,\quad n=1, 2, 3, \ldots$$

Тъй като тази редица няма крайна точка на сгъстяване, то всяка точка x_n има δ-околност Σ_{x_n}, несъдържаща други точки от редицата $\{x_n\}$.

Очевидно, че от системата отворени множества $\{\Sigma_{x_n}\}$, образуваща покритие на множеството от точки $\{x_n\}$, не може да се избере крайна подсистема, образуваща покритие на всички точки $\{x_n\}$.

Тъй като множеството $\{x_n\}$ е подмножество на $\{x\}$, то няма да може и от всяка система отворени множества, образуващи покритие на множеството $\{x\}$, да се избере крайна подсистема, покриваща множеството $\{x\}$. Полученото противоречие доказва ограничеността на множеството $\{x\}$.

4.8. Горна и долна функция на Бер*

Нека в сегмента $[a, b]$ е дефинирана функцията f, която приема както крайни, така и безкрайни стойности.

Избираме произволна точка x_0 от сегмента $[a, b]$ и произволно положително число δ и означаваме с $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$ съответно точната долна и точната горна граница функцията f в множеството от тези точки на сегмента $[a, b]$, които принадлежат на интервала $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, т. е. полагаме

$$m_\delta(x_0) = \inf\{f(x) : x \in [a, b],\ x_0-\delta < x < x_0+\delta\},$$

$$M_\delta(x_0) = \sup\{f(x) : x \in [a, b],\ x_0-\delta < x < x_0+\delta\}.$$

Очевидно, че за всяко $\delta > 0$

$$m_\delta(x_0) \leq f(x_0) \leq M_\delta(x_0). \tag{4.34}$$

Ако положителното число δ намалява, то $m_\delta(x_0)$ не намалява а $M_\delta(x_0)$ не нараства. Затова съществуват границите

$$m(x_0) = \lim_{\delta \to 0} m_\delta(x_0),\quad M(x_0) = \lim_{\delta \to 0} M_\delta(x_0),$$

* Р. Бер — френски математик (1874 — 1932).

при това очевидно са изпълнени неравенствата

$$m_\delta(x_0) \leqq m(x_0) \leqq f(x_0) \leqq M(x_0) \leqq M_\delta(x_0).$$

Определение 1. *Функциите M и m се наричат съответно* ***горна и долна функция на Бер*** *за функцията f.*

Теорема. *Нека функцията f е крайна* (т. е. приема крайна стойност) *в точката x_0. Тогава, за да бъде функцията f непрекъсната в точката x_0, е необходимо и достатъчно да е изпълнено равенството*

$$M(x_0) = m(x_0).$$

Доказателство. 1. *Необходимост.* Нека функцията f е непрекъсната в точката x_0. Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и намираме такова $\delta > 0$, че $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$. С други думи, ако $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Но оттук следва, че

$$f(x_0) - \varepsilon \leqq m_\delta(x_0) \leqq M_\delta(x_0) \leqq f(x_0) + \varepsilon$$

(тъй като $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$ са точната долна и точната горна граница на функцията f в интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$).

Следователно

$$f(x_0) - \varepsilon \leqq m(x_0) \leqq M(x_0) \leqq f(x_0) + \varepsilon.$$

От последните неравенства поради произволния избор на $\varepsilon > 0$ получаваме

$$M(x_0) = m(x_0) = f(x_0).$$

2. *Достатъчност.* Ако $M(x_0) = m(x_0)$, то очевидно $M(x_0) = m(x_0) = f(x_0)$ и общата стойност на функциите на Бер в точката x_0 е крайна.

Избираме произволно $\varepsilon > 0$ и вземаме такова $\delta > 0$, че

$$m(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0) \leqq m(x_0), \; M(x_0) \leqq M_\delta(x_0) < M(x_0) + \varepsilon.$$

Тези неравенства показват, че

$$f(x_0) - \varepsilon < m_\delta(x_0), \; M_\delta(x_0) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Ако точката x принадлежи на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то, както видяхме, стойността $f(x)$ лежи между $m_\delta(x_0)$ и $M_\delta(x_0)$. Затова, ако x принадлежи на $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

С други думи, за всички x от $[a, b]$, за които $|x - x_0| < \delta$, е изпълнено неравенството $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т. е. функцията f е непрекъсната в точката x_0. □

Забележка. За дефиниционна област на функцията f вместо сегмента $[a, b]$ може да се вземе произволно множество $\{x\}$, за което точката x_0 е точка на сгъстяване.

Определение 2. *Функцията f, дефинирана в сегмента $[a, b]$, се нарича* ***полунепрекъсната отгоре (отдолу)*** *в точката x_0 от сегмента $[a, b]$, ако**

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0) \quad \left(\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) = f(x_0)\right).$$

В това определение не се предполага крайност на функцията $f(x)$ нито в точката x_0, нито в другите точки от сегмента $[a, b]$. По-специално функцията $f(x)$ е полунепрекъсната отгоре (отдолу) във всяка точка x_0, където

$$f(x_0) = M(x_0) \quad [f(x_0) = m(x_0)].$$

Ако функцията $f(x)$ е непрекъсната в точката x_0, то тя е и полунепрекъсната и отгоре, и отдолу в тази точка. Обратно, ако функцията е крайна в точката x_0 и полунепрекъсната както отгоре, така и отдолу в точката x_0, тя е непрекъсната в тази точка.

Тези твърдения са друга формулировка на твърденията, съдържащи се в доказаната по-рано теорема за горната и долната функция на Бер.

* За всяка редица $\{x_n\}$ от стойности на аргумента, различни от x_0, която клони към x_0, разглеждаме $\overline{\lim_{n \to \infty}} f(x_n)$. Най-голямата от $\overline{\lim_{n \to \infty}} f(x_n)$ означаваме с $\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x)$. Аналогично се определя $\underline{\lim_{x \to x_0}} f(x)$. Например

$$\overline{\lim_{x \to 0}} \sin x^{-1} = 1, \quad \underline{\lim_{x \to 0}} \sin x^{-1} = -1,$$

$$\overline{\lim_{x \to 0}} (x^{-2} \sin x^{-1}) = +\infty, \quad \underline{\lim_{x \to 0}} (x^{-2} \sin x^{-1}) = -\infty.$$