Высшая математика

Г.И.Архипов В.А.Садовничий
В.Н.Чубариков

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ВЫСШАЯ ШКОЛА

Г.И.Архипов В.А.Садовничий
В.Н.Чубариков

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации
в качестве учебника
для студентов университетов
и педагогических вузов

Москва
«Высшая школа» 1999

УДК 517
ББК 22.161
А87

**Федеральная целевая
программа книгоиздания России**

Р е ц е н з е н т:
академик РАН С.М. Никольский (МИАН им. В.А. Стеклова)

Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.
А87 Лекции по математическому анализу.: Учебник для университетов и пед. вузов / Под ред. В. А. Садовничего — М.: Высш. шк. 1999. — 695 с.

ISBN 5-06-003596-4

Книга является учебником по курсу математического анализа и посвящена дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и нескольких переменных. В ее основу положены лекции, прочитанные авторами на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова.

В учебнике предложен новый подход к изложению ряда основных понятий и теорем анализа, а также и к самому содержанию курса.

Для студентов университетов, педагогических вузов и вузов с углубленным изучением математики.

ISBN 5-06-003596-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

В России исторически сложилось так, что представление об образовании включает в себя органичное единство школы как системы приобретения знаний, фундаментальной науки как показателя уровня подготовки специалистов и гуманитарной культуры как основы духовного богатства человека.

Формулируя задачи образования, академик А. Н. Крылов говорил: "Школа не может дать вполне законченного знания; главная задача школы — дать общее развитие, дать необходимые навыки, одним словом... главная задача школы — научить учиться, и для того, кто в школе *научится учиться*, практическая деятельность всю его жизнь будет наилучшей школой."

Отметим, что особенность отечественной школы состоит в сочетании четкости рассуждений с глубиной содержания и простотой, доступностью, конкретностью изложения материала, которые всегда предпочитаются формальным конструкциям. Практическое воплощение данных идей подразумевает наличие высококвалифицированных и творчески мыслящих преподавателей.

Математическое образование и математическая культура составляют стержень научного знания и значение математики как основы фундаментальных исследований постоянно возрастает.

Для решения этих задач требуются учебники, отражающие в определенной полноте современное состояние исследований и мировоззренческие принципы данной области науки.

Предлагаемые к публикации избранные учебники по математике реализуют указанный выше подход. Они написаны, в основном, профессорами Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Книга Г. И. Архипова, В. А. Садовничего, В. Н. Чубарикова "Лекции по математическому анализу" является учебником по курсу математического анализа и посвящена дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и нескольких переменных. В ее основу положены лекции, прочитанные авторами на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова. В учебнике предложен новый подход к изложению ряда основных понятий и теорем анализа, а также и к самому содержанию курса. Она доступна широкому кругу читателей, а первая ее часть может быть использована при изучении ряда тем по алгебре и началам математического анализа в математических школах.

Предполагается также издать учебники И. М. Виноградова "Элементы высшей математики (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел)", И. И. Привалова "Введение в теорию функций комплексного переменного", В. А. Садовничего

“Теория операторов”, С. Б. Гашкова, В. Н. Чубарикова “Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений” и др.

Надеюсь, что данные книги положат начало новой серии базовых учебников по высшей математике для вузов с повышенным уровнем математической подготовки.

Кроме практической ценности эта серия призвана подвести некоторые итоги работы российских ученых и педагогов-математиков по созданию базовых учебников по математике на рубеже второго и третьего тысячелетий. Серия не ограничивается указанными книгами. В дальнейшем предполагается продолжить отбор и издание как современных, так и классических учебников, которые отвечают изложенной выше концепции, не потеряли своей новизны и актуальности и пользуются заслуженной популярностью и авторитетом у студентов и педагогов.

Академик
Российской академии наук
В. А. Садовничий

ЧАСТЬ I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Изложение предмета математического анализа ставит задачу определения содержания курса в объеме, допускающем усвоение аудиторией основных его элементов. Многое здесь зависит от формы, в которой преподносится материал курса, поскольку слово, идущее от ощущений к представлениям, от представлений к понятиям, от понятий к суждениям, от суждений к умозаключениям будет гораздо интереснее, доступнее и удобнее для восприятия, чем изложение, опирающееся на сухие суждения и отвлеченные умозаключения.

В основу данной части книги положены лекции первого из четырех семестров основного курса математического анализа, читаемого авторами в течение последних лет на механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Ее содержание охватывает дифференциальное исчисление функций одной переменной.

Следует обратить внимание на существенное различие между стилем изложения в учебнике и конспекте лекций. Дело в том, что в учебнике, как правило, доказательство утверждений подготавливается предварительными разъяснениями и примерами, в то время как конспект, в основном, включает в себя формулировки и доказательства. В связи с этим при подготовке курса лекций среди прочих решается и задача выделения необходимого минимума сопутствующего материала, обеспечивающего усвоение основного содержания. Мы стремились соединить доступность изложения, свойственную учебнику, с краткостью конспекта. С математического анализа как учебной дисциплины начинается процесс обучения высшей математике в вузе. Обилие и сложность новых понятий при этом часто подавляют творческое восприятие содержания курса. Для того чтобы правильно сориентировать читателя, мы сознательно допускаем определенную категоричность суждений, имея в виду, что в процессе обучения он сам разберется во всем многообразии связей между различными аспектами предмета.

Преподавание математического анализа в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова подчинено особым требованиям, обусловленным необходимостью подготовки высококвалифицированных специалистов, способных в будущем не только получать новые научные результаты, но и в значительной степени определять мировое развитие математики. В силу этого курс математического анализа, как основа всего математического образования, должен характеризоваться широтой охвата материала, строгостью и полнотой доказательств. Он должен учитывать современные тенденции развития математики и в то же время отличаться определенным консерватизмом, продолжая традиции преподавания, которые обеспечивают преемственность в сохранении передовых позиций отечественной математической школы. Курс анализа также призван подготовить учащихся к восприятию более глубоких математических понятий.

Авторы стремились прежде всего облегчить процесс усвоения знаний за счет доступного изложения и упрощения доказательств. Здесь следует заметить, что краткость доказательства не всегда говорит о его простоте. Иногда более короткое доказательство бывает малодоступно и, по существу, затрудняет усвоение материала. В то же время, мы исходим из того, что доказательство утверждений и примеры должны отличаться живостью, интересом, убедительностью и особенно краткостью. Для более краткой записи рассуждений и утверждений часто используют символику кванторов. Однако она затрудняет непосредственное восприятие материала и ограничивает возможность следить за логикой рассуждений. Мы стараемся не злоупотреблять этой символикой, чтобы упростить сопоставление отвлеченных понятий со сходными явлениями из внешнего, доступного нашим чувствам, мира, сделать понятия более наглядными.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Первые лекции по каждому из предметов, с которых начинается преподавание высшей математики на первом курсе университета (как правило, это математический анализ, алгебра и аналитическая геометрия), бывают посвящены изложению основ теории множеств. Подобный параллелизм создает у части студентов неверное впечатление о предмете математики в целом и затрудняет восприятие материала. К тому же положение усугубляется непривычной абстрактностью этих новых понятий. К сожалению, выделение их в рамки одного предмета представляется нецелесообразным, поскольку в каждой дисциплине факты из теории множеств приводятся в расчете на излагаемый материал. Обычно в той или иной форме на эту особенность обращается внимание.

Мы выражаем глубокую благодарность Ф. М. Малышеву и А. М. Полосуеву за многочисленные полезные замечания по содержанию первой части книги.

Глава I
ВВЕДЕНИЕ

Лекция 1

§ 1. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ. ДЕКАРТОВО ПРОИЗВЕДЕНИЕ МНОЖЕСТВ. ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Мы приступаем к изучению курса математического анализа. Под термином “математический анализ” подразумевается прежде всего дифференциальное и интегральное исчисление, созданное Ньютоном и Лейбницем в XVII в., хотя некоторые основные понятия анализа сформировались гораздо раньше. Сейчас его в значительной степени рассматривают как устоявшуюся учебную дисциплину. Однако из сказанного не следует делать вывод, что в математическом анализе не осталось тем для научных исследований и глубоких открытий. Дело в том, что составные части математического анализа настолько разрослись, что давно превратились в отдельные математические дисциплины, такие, как теория функций действительного переменного (ТФДП), теория функций комплексного переменного (ТФКП), теория вероятностей, дифференциальные уравнения, математическая статистика, уравнения в частных производных, уравнения математической физики, вычислительная математика и т.д. В широком смысле математический анализ включает в себя все эти области, т. е. почти всю математику.

В узком же смысле, как учебная дисциплина, математический анализ представляет собой составную и, пожалуй, бóльшую долю той части математического знания, которая сейчас является общей для всех современных математических дисциплин. И потому понятна та совершенно исключительная роль, которую играет математический анализ в математическом образовании. Он, по существу, является фундаментом математических знаний.

Не будет преувеличением сказать, что стержневое понятие всего курса анализа — это понятие предела во всевозможных его проявлениях. В общих чертах вы с ним уже знакомы из школьной математики. Тем не менее получить совершенно ясное и отчетливое представление о пределе — самая большая трудность при изучении всего курса анализа и самый важный его момент. Так как понятие предела является начальным понятием анализа, то к его изучению мы приступим очень скоро.

Каждый должен и может овладеть этим понятием. Тот, кто этого не сделает, освоить курс не сможет, так как вся оставшаяся часть курса анализа будет представлять собой использование понятия предела в различных ситуациях. Для тех, кто овладеет этим понятием, в дальнейшем при изучении основного курса потребуется в большей степени усердие, чем способности.

Понятие предела является главным, но, разумеется, не единственным понятием анализа. Оно само опирается на понятия множества, отображения и функции. Наше изучение мы и начнем с этих понятий.

Определение 1. Множество — *это совокупность объектов любой природы.*

Посмотрим на это определение внимательно. На первый взгляд, оно никуда не годится, поскольку вводимое понятие, т.е. "множество", определяется через четыре (!) других понятия, никак нами не определенных. Однако это не совсем так. Дело в том, что назначение определений — это вовсе не наведение логической строгости как таковой. Устанавливать логическую строгость требуется только там, где *нестрого* введенные понятия приводят к недоразумениям.

А как решить, что ведет к недоразумениям, а что нет? У современной математики есть только такие средства: логический анализ, практика и интуиция.

Имеется два типа определений: 1) логически строгое сведение определяемого объекта к уже введенным понятиям; 2) описательное определение с помощью слов разговорного языка.

Определение *множества* есть определение второго типа. В математике предпочитается, конечно, первый тип определений, но, увы, начальные понятия, к которым и относится понятие множества, приходится вводить описательно. Это плохо по многим причинам, и прежде всего потому, что приводит к противоречиям (есть так называемые парадоксы теории множеств). Однако иного подхода не найдено и приходится доверяться интуиции. Здравый смысл подсказывает, что по-другому и вообще нельзя сделать ([19]. С. 352–403).

Определение 2. *Объекты, образующие в своей совокупности данное множество, называются его* **элементами** *или* **точками**.

Для обозначения различных множеств мы чаще всего будем использовать заглавные (прописные) буквы латинского алфавита, а для обозначения элементов этих множеств — малые (строчные) буквы.

Определение 3. *Два множества X и Y называются* **равными**, *если они состоят из одних и тех же элементов.*

Это записывают так:

$$X = Y \quad \text{или} \quad Y = X.$$

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут:

$$a \in A \quad (\text{или} \quad A \ni a).$$

Если a не принадлежит A, то этот факт записывают в виде:

$$a \notin A \quad (\text{или} \quad a \bar{\in} A).$$

Определение 4. *Если все элементы множества B принадлежат множеству A, то B называется* **подмножеством** *множества A и пишут:*

$$B \subset A \quad (\text{или} \quad A \supset B).$$

Очевидно, что если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$.

Обычно удобнее рассматривать все множества, участвующие в каком-либо рассуждении, как подмножества некоторого фиксированного множества E, которое мы будем называть **универсальным.** Таким образом,

$$A \subset E \text{ для любого множества } A.$$

Для того чтобы с определенностью говорить о каком-либо множестве A (являющемся, как мы договорились, подмножеством E), мы должны иметь четкий критерий, правило, условие, свойство, которое дает возможность установить, какие именно элементы входят в A. Если обозначить это условие через α, то тот факт, что условие α порождает множество A, будем записывать следующим образом:

$$A = \{a \in E | \alpha\}.$$

Читается это так: множество A совпадает с множеством тех элементов (из множества E), которые удовлетворяют условию α.

Может оказаться, что для некоторого свойства α во всем множестве E вообще нет элементов, ему удовлетворяющих. Для единообразия считают, что и в этом случае запись

$$A = \{a \in E | \alpha\}$$

определяет особое множество, называемое **пустым множеством**. Пустое множество не содержит ни одного элемента. Оно обозначается символом $\varnothing$. В наших обозначениях можно записать, например, так:

$$\varnothing = \{a \in E | a \neq a\}.$$

Здесь α — это свойство, что $a \neq a$.

Для краткости вместо некоторых часто употребляемых выражений общепринято использовать особые математические значки, называемые **кванторами**:

$\exists$ — "существует";

$\exists!$ — "существует строго один элемент" или "существует единственный элемент";

$\forall$ — "для всякого", "для всех";

$\Rightarrow$ — "справедливо", "следует", "имеет место".

В качестве примера в этих обозначениях запишем следующее утверждение:

$$\forall A \subset E \Rightarrow \varnothing \subset A.$$

Здесь утверждается, что пустое множество является подмножеством любого множества из E. Это утверждение следует из наших определений, так как оно означает, что если элемент принадлежит $\varnothing$, то он принадлежит A, что действительно так, поскольку в пустом множестве $\varnothing$ вообще нет ни одного элемента и для доказательства справедливости этого утверждения его не надо проверять ни для одного элемента.

Определение 5. *Множество C называется* **объединением** (*или* **суммой**) *множеств A и B, если оно состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из указанных множеств.*

Объединение C множеств A и B обозначается так:

$$C = A \cup B.$$

Свойства: $A \cup B = B \cup A$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Определение 6. Пересечением *множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих одновременно и A, и B, т.е. элементов, общих для этих множеств.*

Свойства: $A \cap B = B \cap A$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

Заметим, что доказать равенство двух множеств — это значит доказать, что всякий элемент x, принадлежащий правой части равенства, принадлежит и левой, и наоборот.

Для произвольной совокупности множеств A_α, где α пробегает все элементы некоторого множества I, пишут

$$C = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} A_\alpha,$$

если C есть объединение всех множеств $A\alpha$, $\alpha \in I$.

Аналогично, $C = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$, если C — пересечение всех множеств A_α.

Определение 7. Разностью $C = A \setminus B$ *двух множеств* A *и* B *называется множество, состоящее из всех элементов* A, *не принадлежащих* B.

Множество $A' = E \setminus A$ называется **дополнением** A или **дополнением до** E **множества** A. Если множество индексов I — есть просто множество натуральных чисел, т.е. натуральный ряд $1, 2, 3, \ldots$, то его обозначают $I = \mathbb{N}$, а вместо $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ и $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ пишут $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определение 8. Симметрической разностью $C = A \triangle B$ *двух множеств* A *и* B *назовем множество*

$$C = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Свойства операций над множествами

$1^0. A \subset A.$

$2^0. A \subset B,\ B \subset A \ \Rightarrow\ A = B.$

$3^0. A \subset B,\ B \subset C \ \Rightarrow\ A \subset C.$

$4^0. \varnothing \subset A \ \forall A.$

$5^0. \left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup\limits_{\alpha} (A_\alpha \cap B).$

$6^0. \left(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha\right) \cup B = \bigcap\limits_{\alpha} (A_\alpha \cup B).$

$7^0. A \subset B \ \Rightarrow\ A \cup B = B,\ A \cap B = A.$

$8^0. A \cup A' = E,\ A \cap A' = \varnothing.$

$9^0. \varnothing' = E, E' = \varnothing.$

$10^0. \left(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha\right)' = \bigcap\limits_{\alpha} A'_\alpha.$

$11^0. \left(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha\right)' = \bigcup\limits_{\alpha} A'_\alpha.$

$12^0. A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$

Все эти свойства доказываются весьма просто. Покажем для примера, каким образом доказывается последнее свойство. Нам надо доказать, что если

$$C_1 = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{и} \quad C_2 = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

то $C_1 = C_2$. Это значит, что надо доказать утверждения:

1) $\forall a \in C_1 \ \Rightarrow\ a \in C_2$, откуда имеем $C_1 \subset C_2$;

2) $\forall a \in C_2 \ \Rightarrow\ a \in C_1$, т.е. $C_2 \subset C_1$.

Мы ограничимся только доказательством утверждения 1, т. е. что $C_1 \subset C_2$. Пусть $a \in C_1$. Тогда $a \in A \cup B$, но $a \notin A \cap B$. Но если $a \in A \cup B$, то или $a \in A$, или $a \in B$. Рассмотрим первый случай, т.е. $a \in A$. В этом случае $a \notin B$, так как иначе было бы $a \in A \cap B$, что неверно. Тогда $a \in A \setminus B$, откуда $a \in C_2 = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, что и требовалось доказать. В первом случае справедливость соотношения

$C_1 \subset C_2$ мы доказали. Второй случай разбирается точно так же, только A и B меняются местами. Поэтому всегда имеем $C_1 \subset C_2$.

Следующим после множества и тоже важнейшим понятием математики является понятие отображения, а также эквивалентное ему понятие функции. Но сначала мы дадим определение декартова произведения множеств.

Определение 9. Декартовым произведением *$C = A \times B$ множеств A и B называют множество всех возможных пар (x, y), где первый элемент x каждой пары принадлежит A, а второй ее элемент y принадлежит B.*

Определение 10. *Подмножество F декартова произведения двух множеств $A \times B$ называется* **отображением** *множества A в множество B, если выполнено следующее условие:*

$$\forall x \in A \quad \exists! \text{ пара } (x, y) \in F.$$

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Тогда подмножество $F = \{(1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$ множества $A \times B$ является отображением, а подмножество $\Phi = \{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$ не является отображением.

Понятия "отображение" и "функция" — синонимы. Они несколько отличаются только буквенной символикой и сферами употребления. Мы будем гораздо чаще употреблять термин "функция". Тот факт, что F является отображением A в B, записывают так:

$$F : A \to B \quad \text{или} \quad A \xrightarrow{F} B.$$

Определение 11. *Пусть отображение $F : A \to B$ определяется следующим образом: $\forall x \in A \ \exists! \ y \in B$, такое, что $(x, y) \in F$. Тогда элемент $y \in B$ называется* **образом x при отображении** *F и это записывается так:*

$$y = F(x).$$

Элемент x называется **прообразом** (одним из возможных) **элемента** y.

Множество $F(A)$ всех элементов $F(x)$ $\forall x \in A$ называется **образом множества** A при отображении F, т. е.

$$F(A) = \{y \in B | y = F(x), \ x \in A\}.$$

Для множества $C = F(A)$ само множество A при отображении F называется **(полным) прообразом** множества C.

Как уже говорилось, термины "отображение" и "функция" — синонимы, но при употреблении слова "функция" вся терминология обычно меняется. Множество A называется **областью определения**, а множество $F(A) \subset B$ — **множеством** (или **областью**) **значений**. Каждый элемент $x \in A$ называется **значением аргумента** (или просто аргументом), а элемент $y = F(x)$ — **значением функции в точке** x.

Для того чтобы конкретно задать какое-либо отображение, т. е. функцию, надо, вообще говоря, определить способ (правило), как из всего декартова произведения $A \times B$ выбрать множество F с нужными свойствами. Указание этого способа, по существу, и задает функцию. Поэтому для функции очень часто дается следующее определение:

Определение 12. Функцией F *называется правило, по которому каждому элементу* $x \in A$ *ставится в соответствие строго один элемент* y *множества* B. *При этом пишут* $y = F(x)$.

Недостатком этого определения является то обстоятельство, что функцией оказывается правило, а не множество, как в предыдущем случае, что неестественно, так как из школьного курса математики известно, что функции можно складывать, умножать и выполнять с ними другие арифметические операции.

Считается, что употребление термина "отображение" больше свойственно геометрическому стилю изложения, а термина "функция" — аналитическому стилю.

Некоторые типы отображений. Обратная функция. Взаимно однозначное соответствие

1. Отображение F называется **сюръективным**, или **отображением "на"** (т.е. отображением A на B), **накрытием**, если $F(A) = B$.

2. Отображение F называется **инъективным**, или **вложением**, если у каждой точки $y = F(x)$ существует строго один прообраз, т.е. из условия $y = F(x_1) = F(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$.

3. Отображение F называется **биективным**, или **взаимно однозначным**, если оно является накрытием и вложением одновременно. В этом случае отображению $F : A \to B$ можно поставить в соответствие обратное отображение $F^{-1} : B \to A$ по правилу: вместо пар (x, y) в декартовом произведении $A \times B$ надо рассмотреть соответствующие пары (y, x) из $B \times A$, поменяв x и y местами. Очевидно, что F^{-1} — это также отображение. Кроме того,
$F^{-1}(F(x)) = x \ \forall x \in A$ и $F(F^{-1}(y)) = y \ \forall y \in B$.

Биективное отображение называется еще **взаимно однозначным соответствием** или **биективным соответствием**.

Лекция 2

§ 2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА. СЧЕТНЫЕ И НЕСЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА. МОЩНОСТЬ КОНТИНУУМА

Понятие взаимно однозначного соответствия играет большую роль при перенесении представления о "количестве" элементов множества с конечных множеств на бесконечные. Это необходимо, поскольку мы постоянно имеем дело с бесконечными множествами. Вот некоторые из них.

$\mathbb{N}$ — множество всех чисел натурального ряда;

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел (положительные, отрицательные целые числа и нуль);

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел на прямой;

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — множество точек на координатной плоскости.

О количестве точек множества можно говорить только для конечных множеств, а для бесконечных — нельзя. В этом случае говорят о мощности множества. Таким образом, *мощность множества* — это понятие, которое обобщает понятие "количество элементов" на случай бесконечных множеств. Если же множество конечно, то термины "мощность множества" и "количество элементов множества" — синонимы.

Определение 1. *Множества A и B называются* **эквивалентными** *или* **равномощными**, *если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Это обозначается так: $A \sim B$.*

Свойства: 1) $A \sim A$; 2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$; 3) $A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Другими словами, можно биективно отобразить одно множество на другое. Если A и B эквивалентны, то говорят еще, что они имеют одинаковую мощность.

Приведем важный пример эквивалентности бесконечных множеств.

Утверждение 1. *Множество $\mathbb{N}$ (натуральных чисел) и множество $\mathbb{Q}$ (рациональных чисел, т.е. всех дробей $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $(m,n) = 1$) эквивалентны.*

Здесь символом (m,n) обозначен наибольший общий делитель чисел m и n.

Доказательство. Достаточно показать, как присвоить собственный номер каждому рациональному числу. Для этого представим каждое рациональное число в виде несократимой дроби:

$$r = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}, \ (p,q) = 1.$$

Такое представление единственно. Высотой рационального числа $r = p/q$ назовем величину $|p| + q = h$. Эта высота сама является натуральным числом, т.е. принимает значения 1,2,3, ... и т.д. При фиксированном $h > 1$ существует не более $2h$ различных несократимых дробей, так как тогда знаменатель q может принимать значения $1, 2, \ldots, h-1$ (число которых равно $h-1$), а для данного q числитель p числа r может принимать не более двух значений: $\pm(h-q)$ (точнее, либо два, если дробь p/q получается несократимой, либо ноль, если она — сократима, так как тогда она имеет другое значение q в представлении в виде несократимой дроби). Таким образом, с данной высотой h число рациональных чисел не более $2(h-1) < 2h$.

Будем нумеровать дроби в порядке возрастания h; при фиксированном h в порядке возрастания q, а при фиксированных h и q — в порядке возрастания p. Тогда получим

$$
\begin{array}{lll}
r_1 = \dfrac{0}{1} = 0 & & (h=1), \\[2mm]
r_2 = \dfrac{-1}{1} = -1, & r_3 = \dfrac{1}{1} = 1 & (h=2), \\[2mm]
\left.\begin{array}{l} r_4 = \dfrac{-2}{1} = -2, \\[2mm] r_6 = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} r_5 = \dfrac{2}{1} = 2, \\[2mm] r_7 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} & (h=3), \\[2mm]
\left.\begin{array}{l} r_8 = \dfrac{-3}{1} = -3, \\[2mm] r_{10} = \dfrac{-1}{3} = -\dfrac{1}{3}, \end{array}\right. & \left.\begin{array}{l} r_9 = \dfrac{3}{1} = 3, \\[2mm] r_{11} = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\} & (h=4)
\end{array}
$$

и т.д. Ясно, что каждое рациональное число когда-нибудь получит свой порядковый номер. При этом все номера $1, 2, 3, \ldots$ будут использованы и разные рациональные числа получат разные номера. Тем самым построено взаимно однозначное соответствие множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$. Утверждение 1 доказано полностью.

Определение 2. *Всякое множество, эквивалентное (равномощное) множеству натуральных чисел, называется* **счетным** *множеством.*

Таким будет, как мы показали, множество рациональных чисел.

Утверждение 2. *Всякое непустое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

Доказательство. Занумеруем элементы счетного множества и перенумеруем затем элементы подмножества в порядке возрастания этих номеров. Если мы исчерпаем все подмножество на конечном шаге, то оно конечно, иначе — счетно.

Утверждение 3. *Сумма конечного или счетного числа счетных множеств счетна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем нумерацию элементов суммы множеств по следующей схеме:

$$\begin{array}{llllll}
A_1 := (& a_{11}, & a_{12}, \rightarrow & a_{13}, & \ldots), \\
 & \downarrow & \nearrow \quad \swarrow & & \nearrow \\
A_2 := (& a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots), \\
 & \swarrow & & \nearrow & \swarrow \\
A_3 := (& a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & \ldots), \\
 & \downarrow & \nearrow \quad \swarrow & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

и т.д. (при этом пропускаем уже встречавшиеся элементы). За $2r^2$ шагов будут заведомо занумерованы все элементы $a_{k,l}$, $k + l \leq r$. Доказательство закончено.

Обратим внимание, что бесконечные множества, рассмотренные в утверждениях 1 – 3, оказались равномощными, точнее, счетными. Но не все бесконечные множества равномощны. Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Совокупность $Z = \Omega(X)$ всех подмножеств любого множества X сама образует множество, не эквивалентное X.*

Эта теорема (точнее, ее модификация: $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$) была доказана Г. Кантором (1845–1918) в 1874 г.

Д о к а з а т е л ь с т в о будем вести от противного. Пусть $Z \sim X$. Значит, имеется биективное соответствие $X \xrightarrow{F} Z$. Тогда, если $a \in X$, то ему однозначно соответствует $A \in Z$, т.е. $F(a) = A$, $F^{-1}(A) = a$. Теперь всякую точку $a \in X$ назовем *правильной,* если она принадлежит своему образу, т.е., если $a \in F(a)$. В противном случае эту точку a мы будем называть *особой* точкой. Назовем *дефектом* множество $D \subset X$, состоящее из всех особых точек $a \in X$. Тогда ясно, что D является элементом множества Z. В силу наличия взаимно однозначного соответствия F между X и Z найдется такая точка $d \in X$, что $F(d) = D$. При этом сама точка d обязана быть либо правильной, либо особой. Но первое не имеет места, поскольку тогда бы по определению правильной точки она принадлежала бы $D = F(d)$, что невозможно, так как ко множеству D по построению отнесены только особые точки. Но второй случай приводит к противоречию, так как тогда по определению особой точки $d \notin F(d) = D$, а, с другой стороны, тогда точка d как особая точка должна войти в дефект D по его построению.

Таким образом, предположение о существовании биекции между Z и X во всех случаях ведет к противоречию, т.е. $Z \not\sim X$. Доказательство закончено.

Следует отметить, что как результат, так и доказательство теоремы 1 справедливы и в том частном случае, когда X есть пустое множество $\varnothing$. Тогда мощность множества X равна 0, а множество $Z = \Omega(X)$ состоит ровно из одного элемента, т.е. самого X и поэтому его мощность равна $1 = 2^0$. Заметим еще, что для конечного множества X, состоящего из k элементов, мощность множества $Z = \Omega(X)$ равна в точности 2^k.

Определение 3. *Бесконечное множество называется* **несчетным**, *если оно не эквивалентно* $\mathbb{N}$.

По теореме 1 несчетным множеством, например, является множество подмножеств $\mathbb{N}$, а значит, множество последовательностей, составленных из 0 и 1 (k-й член последовательности равен 1 или 0, в зависимости от того, принадлежит или не принадлежит число k подмножеству).

Прием, с помощью которого мы доказали теорему 1, называется *канторов диагональный процесс*. Впервые он был применен Г. Кантором в 1874 г. при доказательстве несчетности точек на отрезке. Этот процесс называется диагональным, потому что если в теореме 1 в качестве X взять натуральный ряд $\mathbb{N}$, то получится, что множество подмножеств, т.е. совокупность последовательностей, составленных из нулей и единиц, не эквивалентно X. Доказательству теоремы 1 в этом случае можно придать такой вид.

Предположим, что $\mathbb{N} \sim Z = \Omega(\mathbb{N})$. Тогда имеем взаимно однозначное соответствие

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow H_1 = (h_{11}, h_{12}, h_{13}, \ldots), \\ 2 &\leftrightarrow H_2 = (h_{21}, h_{22}, h_{23}, \ldots) \end{aligned}$$

и т.д. (здесь символами $H_1, H_2, \ldots$ обозначены некоторые различные последовательности из нулей и единиц).

Возьмем последовательность, составленную из "диагональных" элементов: $(h_{11}, h_{22}, h_{33}, \ldots)$, и поменяем все разряды на противоположные, т.е. единицы заменим на нули, а нули — на единицы. Получим

$$H = (\bar{h}_{11}, \bar{h}_{22}, \bar{h}_{33}, \ldots).$$

Этот элемент не совпадает ни с одним из H_m, т.е. он не занумерован. Имеет место противоречие.

Определение 4. *Мощность множеств, эквивалентных множеству всех последовательностей, составленных из нулей и единиц, называется мощностью* **континуума**.

Утверждение 4. *Множество I точек отрезка $[0,1]$ имеет мощность континуума.*

Доказательство. В двоичной записи каждая точка единичного отрезка $[0,1]$ может быть записана в виде

$$0,h_1h_2h_3,\ldots,\quad h_k=\left\{\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right.,\ k=1,2,3,\ldots$$

Такая запись единственна, за исключением чисел вида $n/2^k, k,n\in\mathbb{N}$. А числам такого вида соответствуют в точности две записи (у одной, начиная с некоторого номера, все цифры равны 0, а у другой — все единицы). Для всех точек, за исключением точек вида $n/2^k$, установим соответствие так:

$$x=(x_1,x_2,\ldots)\leftrightarrow 0,x_1,x_2,\ldots\,.$$

А так как множество точек вида $n/2^k$ счетно, то счетным множеством является также множество последовательностей, им соответствующих. Следовательно, между ними можно установить взаимно однозначное соответствие и тем самым будет установлено взаимно однозначное соответствие между точками отрезка $[0,1]$ и множеством последовательностей, составленных из нулей и единиц, т.е. множество точек отрезка имеет мощность континуума.

Лекция 3

§ 3. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

В этом семестре и далее мы преимущественно будем иметь дело с числовыми функциями, областью определения и множеством значений которых являются числовая ось, отрезки, интервалы, промежутки на этой оси или какие-нибудь другие ее подмножества. При этом потребуется более глубокое представление о вещественных числах, чем то, с которым имеет дело школьная программа по математике. Подчеркнем, однако, что мы будем целиком на нее опираться и уточним только то, что действительно требует большей ясности.

В отношении рациональных чисел мы ничего уточнять не будем. Рациональные числа — это обыкновенные дроби. Вещественные числа, которые рациональными не являются, как известно, называются иррациональными.

Следует отметить, что вещественные числа — как рациональные, так и иррациональные — в природе не существуют. Они — абстракция и придуманы для практических нужд, о чем говорит здравый смысл. Можно сказать, что они породили саму математику, а в дальнейшем она предъявила к числам свои требования. И оказалось, в частности, что одни только рациональные числа этим требованиям не отвечают.

Самое простое и естественное назначение чисел в математике — измерение длин отрезков. Это означает, что длина каждого отрезка должна измеряться вещественным числом. С другой стороны, заметим, например, что *диагональ единичного квадрата на координатной плоскости не может измеряться рациональным числом* α.

Действительно, если это число рациональное, то $\alpha = \frac{m}{n}$, $(m,n) = 1$, и по теореме Пифагора имеем

$$\alpha^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2.$$

Следовательно, $m^2 = 2n^2$. Рассмотрим возможные случаи: 1) m нечетно; 2) m четно.

1. Если m нечетно, то $m = 2k+1$, $m^2 = 4k^2 + 4k + 1$ нечетно и потому равенство $m^2 = 2n^2$ невозможно.

2. Если m четно, то $m = 2k$, $m^2 = 4k^2$ и $2k^2 = n^2$. Но тогда, рассуждая аналогично, получим, что n тоже четно. А это значит, что оба числа m и n делятся на 2, откуда $(m,n) \geq 2$, что противоречит условию. Значит, α — не рациональное число, что и требовалось доказать.

Задача измерения длины отрезка (относительно заранее заданного "эталонного" единичного отрезка) решается полностью с помощью бесконечных десятичных дробей. Их-то мы и будем называть вещественными (действительными) числами.

Итак, **вещественное число** — *это бесконечная десятичная дробь, взятая со знаком "плюс" или "минус".*

Замечания. 1. Знак "плюс" в записи можно опустить.

2. Десятично-рациональные числа, т.е. числа вида $h/10^k$ имеют при этом два представления, которые нами отождествляются, и мы можем считать, что нет десятичных дробей, имеющих цифру 9 на всех местах, начиная с некоторого.

3. Мы отождествляем вещественные числа и точки вещественной числовой оси, служащей изображением множества вещественных чисел.

4. Множество всех вещественных чисел обозначается буквой $\mathbb{R}$.

Основные свойства вещественных чисел.

1^0. $\forall a, b$ имеем: или $a = b$, $b = a$, или $a > b$, $b < a$, или $a < b$, $b > a$.

2^0. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$. Если $a = b$, $b = c$, то $a = c$.

3^0. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\exists!$ число $c \in \mathbb{R}$, такое, что $a + b = c$.

4^0. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ имеем $(a + b) + c = a + (b + c)$.

5^0. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ имеем $a + b = b + a$.

6^0. $\exists!$ число $0 \in \mathbb{R}$ такое, что $a + 0 = 0 + a = a$.

7^0. $\forall a \in \mathbb{R}$ $\exists!$ $(-a) \in \mathbb{R}$ такое, что $a + (-a) = 0$.

8^0. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $\exists!$ $c \in \mathbb{R}$ такое, что $ab = c$.

9^0. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ имеем $(ab)c = a(bc)$.

10^0. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ имеем $ab = ba$.

11^0. $\exists!$ число $1 \neq 0$ такое, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

12^0. $\forall a \neq 0$ $\exists!$ a^{-1} такое, что $aa^{-1} = 1$.

13^0. $(a + b)c = ac + bc$.

14^0. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

15^0. Если $a > b$, $c > 0$, то $ac > bc$.

Указанные свойства вещественных чисел призваны отражать количественные характеристики простейших математических объектов, таких, например, как длины отрезков, площади прямоугольников и объемы прямоугольных параллелепипедов, а также изменения этих величин при различных преобразованиях.

Запись числа в виде бесконечной дроби, которую мы отождествили с самим числом, можно было бы рассматривать как одно из подобных свойств. С другой стороны, свойствам $1^0 - 15^0$ обязаны отвечать рекуррентные процедуры определения последовательности десятичных знаков для результатов арифметических операций над двумя вещественными числами, заданными бесконечными десятичными дробями. Эти процедуры могут быть заданы на основе правила сравнения величин бесконечных десятичных дробей, которое будет рассмотрено далее при доказательстве полноты множества вещественных чисел.

Априорность свойств вещественных чисел, т.е. тот факт, что они рассматриваются в качестве исходных для построения дальнейшей теории, наводят на мысль считать их аксиомами, которые определяют (вместе с двумя другими свойствами) само множество вещественных чисел. Однако подобный подход нас не вполне устраивает, поскольку понятие натурального числа неявно присутствует в законах логики, на которые мы опираемся в своих рассуждениях ([19], с. 372-378).

Подчеркнем однако исключительную плодотворность аксиоматического метода для обоснования исходных принципов в других областях математики. Прекрасным примером этого является идущая от Евклида аксиоматика элементарной геометрии.

Есть еще несколько важных свойств вещественных чисел. К ним прежде всего относится **аксиома Архимеда** (287–212 гг. до н.э.), он сформулировал ее для отрезков:

16^{0}. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha n \geq 1$.

Доказательство. Если $\alpha \geq 1$, то можно взять $n = 1$ и доказывать больше нечего. Если же $0 < \alpha < 1$, то

$$\alpha = 0,0\ldots\bar{\alpha}_k\bar{\alpha}_{k+1}\ldots\ , \quad \bar{\alpha}_1 = \cdots = \bar{\alpha}_{k-1} = 0, \quad \bar{\alpha}_k \neq 0.$$

Тогда имеем

$$10^k\alpha = \bar{\alpha}_k,\bar{\alpha}_{k+1}\cdots \geq \bar{\alpha}_k \geq 1,$$

т.е. свойство 16^0 имеет место при $n = 10^k$, что и требовалось доказать.

Свойство 17^0 сформулируем и докажем позже.

Рассмотрим теперь только неотрицательные числа. Договоримся, что для десятично-рациональных чисел рассматривается только запись, заканчивающаяся нулями. Число, стоящее перед запятой в десятичной записи числа x, будет целым, и оно называется *целой частью* x или *антье от* x. Пишется так: $[x]$. Число, стоящее после запятой, называется дробной частью x. Пишется так: $\{x\}$. Очевидно, $[x]+\{x\} = x$. Имеем, что $[x]$ есть наибольшее целое, не превосходящее x. Это свойство берется в качестве определения значения символа $[x]$ при отрицательных x.

Примеры: $[1,5] = 1$; $[0,3] = 0$; $[-0,7] = -1$; $[-3,5] = -4$.

Далее, при $x < 0$ символу $\{x\}$ дробной части числа x мы приписываем значение: $\{x\} = x - [x]$. Таким образом, при всех x значение символа $\{x\}$ удовлетворяет условию $0 \leq \{x\} < 1$.

Определим **модуль**, или **абсолютную величину**, числа x:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

($|x|$ выражает расстояние от нуля до точки x на вещественной оси). Имеет место следующее неравенство (*неравенство треугольника*):

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Докажем это неравенство. Имеем:

1) если $ab \geq 0$, то $|a + b| = |a| + |b|$;

2) если $ab < 0$, то $|a + b| < |a| + |b|$.

Множество M точек x, удовлетворяющих неравенствам:

$a < x < b$, называется **интервалом** (пишут: $M = (a, b)$);

$a < x \leq b$ или $a \leq x < b$ — **полуинтервалом** ($M = (a, b]$ или $M = [a, b)$);

$a \leq x \leq b$ — **отрезком или сегментом** ($M = [a, b]$);

каждое из них называется **промежутком**.

Множество L точек x, определяемое соответствующим условием, называется:

$x < a$ или $x > a$ — **открытый луч** (обозначения: $L = (-\infty, a)$ или $L = (a, +\infty)$);

$x \leq a$ или $x \geq a$ — **замкнутый луч** (обозначения: $L = (-\infty, a]$ или $L = [a, +\infty)$);

a — вершина луча.

Здесь символ $+\infty$ читается **плюс бесконечность**, а символ $-\infty$ — **минус бесконечность**.

Лекция 4

§ 4. ПОЛНОТА МНОЖЕСТВА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Определение 1. *Непустое множество A на вещественной оси $\mathbb{R}$ называется* **ограниченным сверху**, *если существует число $b \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $a \in A$ выполнено неравенство $a \le b$. Другими словами,*

$$\forall a \in A \;\Rightarrow\; a \le b.$$

Число b называется **верхней гранью** множества A. У ограниченного сверху множества существует бесконечно много верхних граней, например $b+1$, $b+2{,}5$ и т.д.

Аналогично определяем **нижнюю грань** d непустого множества A:

$$\forall a \in A \;\Rightarrow\; d \le a.$$

Непустое множество A называется **ограниченным**, если существует $b \ge 0$, такое, что для всех $a \in A$ имеем $|a| \le b$.

Множество B всех верхних граней b непустого ограниченного сверху множества A является ограниченным снизу. Действительно, каждая верхняя грань $b \in B$ удовлетворяет неравенству $a \le b$ при любом фиксированном a из множества A. Это и означает, что a есть нижняя грань для B.

Сформулируем теперь **свойство полноты** множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ (свойство, упомянутое в лекции 3.)

17^0. *Для всякого непустого ограниченного сверху множества A множество B его верхних граней b содержит минимальный элемент b', т.е. существует единственный элемент $b' \in B$ такой, что:*

1) b' — верхняя грань множества A, т.е. для всех $a \in A$ имеем $b' \ge a$;

2) b' — наименьший элемент множества B, т.е. для всех $b \in B$ справедливо неравенство $b' \le b$.

Элемент b' называется **точной верхней гранью или супремумом** множества A. Обозначение: $b' = \sup A$.

Прежде чем доказывать это свойство, следует сказать, что точно так же обстоит дело и с множеством нижних граней D ограниченного снизу множества A, а именно: существует единственный элемент $d' \in D$ такой, что:

1) $\forall a \in A \;\Rightarrow\; d' \le a$;

2) $\forall d \in D \;\Rightarrow\; d' \ge d$; $d' = \inf A$ (читается: *точная нижняя грань*, или *инфимум*).

Доказательство свойства 17^0. Мы построим число b' конструктивно. Можно считать $0 \in A$, и тогда для всех $b \in B$ имеем $b \geq 0$. Действительно, возьмем какое-нибудь $a_1 \in A$. Заметим, что для любой верхней грани $b \in B$ выполнено неравенство $b \geq a_1$, откуда

$$b - a_1 \geq 0.$$

Теперь вместо множества A рассмотрим множество A' чисел вида $a - a_1$. Если нам удастся доказать, что существует число $b'_1 = \sup A'$, то тогда очевидно, что будет существовать и число $b' = \sup A$, причем

$$b' = b'_1 + a_1.$$

Договоримся десятично-рациональные числа записывать только с нулями на бесконечности. Заметим, что справедливо следующее **правило сравнения чисел между собой**. Если $a > b$, то выполнено одно из двух условий:

1) $[a] > [b]$;

2) $[a] = [b]$, $\{a\} > \{b\}$, причем, если $\{a\} = 0, \bar{a}_1\bar{a}_2 \ldots \bar{a}_k \ldots$ и $\{b\} = 0, \bar{b}_1\bar{b}_2 \ldots \bar{b}_k \ldots$, то найдется номер k такой, что

$$\bar{a}_1 = \bar{b}_1, \ldots, \bar{a}_{k-1} = \bar{b}_{k-1}, \quad \text{но} \quad \bar{a}_k > \bar{b}_k.$$

В множестве A возьмем подмножество A_0, состоящее из всех $a \in A$ с условием $a \geq 0$, т.е.

$$A_0 = \{a \in A \mid a \geq 0\}.$$

Для каждого из чисел $a \in A_0$ рассмотрим его целую часть $[a] = n_0(a)$.

Так как $0 \leq [a] \leq a \leq b$, то функция $[a]$ при $a \in A_0$ принимает лишь *конечное* число значений. Наибольшее из этих значений обозначим через x_0. Рассмотрим множество $A_1 \subset A_0$, состоящее только из тех чисел $a \in A_0$, для которых $[a] = x_0$. Заметим попутно, что для всех $a \notin A_1$ имеем неравенство $a < x_0$.

На множестве A_1 определим функцию $n_1(a)$, равную числовому значению первого десятичного знака после запятой у числа a. Всего она принимает не более 10 значений. Наибольшее из них обозначим через x_1. Образуем множество A_2, состоящее из чисел, принадлежащих A_1, у которых $n_1(a) = x_1$. Обозначим через $s_1(a)$ число, получаемое из a заменой всех, начиная со второго, десятичных знаков числа a нулями, т.е. если $a = n_0, \bar{n}_1 \ldots$, то $s_1(a) = n_0, \bar{n}_1$. Тогда для любого $a \in A_2$ имеем $s_1(a) = x_0, \bar{x}_1$, но при всех $a \notin A_2$ выполнено неравенство $a < x_0, \bar{x}_1$. Для всех $a \in A_2$ определим функцию $n_2(a)$, равную значению ее 2-го десятичного знака. Наибольшее его значение выразим через x_2. Образуем множество $A_3 \subset A_2$ такое, что $\forall a \in A_3$

$n_2(a) = x_2$. Тогда для $s_2(a)$, т.е. для числа, полученного заменой всех, начиная с третьего, десятичных знаков числа a нулями, справедливы соотношения $s_2(a) = x_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \quad \forall a \in A_3$; $\quad a < x_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \quad \forall a \notin A_3$. Продолжая этот процесс далее, на k-м шаге, будем иметь

$$s_k(a) = x_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k \quad \forall a \in A_{k+1};$$
$$a < x_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_k \quad \forall a \notin A_{k+1}.$$

Таким образом, мы получили последовательность знаков, которые определяют число b', имеющее десятичную запись вида $b' = x_0, \bar{x}_1\bar{x}_2 \ldots$.

Докажем, теперь что b' является точной верхней гранью множества A, т.е. что $b' = \sup A$. Для этого надо проверить следующие условия:

1) b' — верхняя грань, т.е. для всех $a \in A$ имеем $a \leq b'$;

2) b' — наименьшая из всех верхних граней, т.е. если $b < b'$, то существует $a \in A$ такое, что $a > b$.

Докажем условие 1). Допустим противное. Это значит, что существует $a \in A$, такое, что $a > b'$. Тогда из правила сравнения чисел имеем, что существует номер k такой, что

$$s_k(a) > x_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k = s_k(b').$$

А это противоречит построению числа b'.

Теперь докажем условие 2). Если $b < b'$, то по правилу сравнения вещественных чисел существует номер $k \in \mathbb{N}$ такой, что

$$b_0, \bar{b}_1 \ldots \bar{b}_k = s_k(b) < s_k(b') = x_0, \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_k.$$

Но по построению найдется элемент $a \in A_{k+1}$ такой, что $s_k(a) = s_k(b')$.

Отсюда имеем $s_k(b) < s_k(a)$, $b < a$. Тем самым свойство 17^0 доказано полностью.

Заметим, что число $b' = \sup A$ может принадлежать A, а может и не принадлежать.

В качестве примера рассмотрим множество A рациональных чисел a с условием $a \leq 0$ или $a^2 < 2$ и множество $B = \mathbb{Q} \setminus A$, составленное из положительных рациональных чисел b с условием $b^2 > 2$.

В силу того, что не существует рационального числа, квадрат которого равен двум, имеем: 1) $A \cup B = \mathbb{Q}$; 2) $A \cap B = \varnothing$; 3) $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$; 4) для любых чисел $a \in A$ и любых чисел $b \in B$ справедливо неравенство $a < b$.

Определение 2. *Любое разбиение рациональных чисел на два множества со свойствами 1) – 4) называется* **сечением** (**дедекиндовым сечением**).

Ясно, что множество B "ограничивает сверху" множество A, т.е. при любом фиксированном $b \in B$ выполняется условие 4), и множество B исчерпывает все множество верхних граней множества A.

Покажем, что множество B не имеет наименьшего элемента, а множество A, являющееся множеством всех нижних граней для множества B, не имеет наибольшего элемента. Это означает, что множество Q рациональных чисел не является "полным", т.е. для него не выполнено свойство 17^0.

Действительно, предположим противное, т.е. существует минимальное число b_0 в множестве B. Рассмотрим число $b_0 - k$, $k \in \mathbb{Q}$ такое, что $0 < k < \frac{b_0^2-2}{2b_0}$. Тогда имеем

$$(b_0 - k)^2 = b_0^2 + k(k - 2b_0) > b_0^2 - k \cdot 2b_0 > b_0^2 - \frac{b_0^2 - 2}{2b_0} \cdot 2b_0 = 2.$$

Следовательно, $b_0 - k \in B$, что противоречит минимальности числа b_0.

Допустим теперь, что a_0 — максимальное число множества A. Рассмотрим неотрицательное число $h < 1$ с условием $h < \frac{2-a_0^2}{2a_0+1}$. Тогда имеем

$$(a_0 + h)^2 = a_0^2 + h(2a_0 + h) < a_0^2 + h(2a_0 + 1) < a_0^2 + (2 - a_0^2) = 2.$$

Таким образом, число $a_0 + h \in A$, что противоречит предположению о максимальности числа a_0 в множестве A.

Понятие сечений в множестве рациональных чисел было введено Ю. В. Р. Дедекиндом (1831 - 1916) для построения теории вещественных чисел. Хотя в нашем курсе эта же задача решается с помощью бесконечных десятичных дробей, следует отметить, что дедекиндовы сечения оказываются полезными и в других вопросах. В частности, на них фактически опирается строгое определение степенной и показательной функций при произвольных значениях показателя степени и аргумента.

Определение 3. *Функции $s_k(a)$ будем называть* **округлением** *числа a до k-го знака после запятой.*

Свойство точной верхней грани. *Если $b = \sup A$, то*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in A \quad \text{такое, что } a > b - \varepsilon.$$

Доказательство проведем от противного. Предположим, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $a \in A$ выполняется неравенство $b - a \geq \varepsilon$. Но тогда $b' = b - \varepsilon$ является верхней гранью множества A, которая меньше, чем b, а это невозможно, поскольку b есть наименьшая из верхних граней, что и требовалось доказать.

Докажем еще одно свойство вещественных чисел.

Л е м м а 1. *Для любых вещественных $x, y \in \mathbb{R}$ с условием $x < y$ существует рациональное число $m/n \in \mathbb{Q}$ такое, что $x < \frac{m}{n} < y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу аксиомы Архимеда (свойство 16^0) для положительного вещественного числа $y - x$ существует натуральное число n такое, что справедливо неравенство $n(y-x) > 2$. Отсюда следует, что интервал $(nx,\ ny)$ имеет длину, превосходящую 2. Следовательно, на этом интервале найдется целое число m такое, что $nx < m < ny$ (например, $m = [ny] - 1$). Согласно свойству 15^0 из последнего неравенства получим искомое неравенство.

Лемма 1 доказана.

Замечание. Так же просто показывается, что между любыми числами $x < y$ найдется иррациональное число. Действительно, в силу леммы 1 между числами $x/\sqrt{2}$ и $y/\sqrt{2}$ лежит некоторое рациональное число m/n. Но тогда иррациональное число $m\sqrt{2}/n$ находится на интервале (x, y).

§ 5. ЛЕММЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ МНОЖЕСТВ, О СИСТЕМЕ ВЛОЖЕННЫХ ОТРЕЗКОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СТЯГИВАЮЩИХСЯ ОТРЕЗКОВ

Л е м м а 1 (об отделимости множеств). *Пусть A и B — непустые множества на вещественной прямой, т.е. $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$. Пусть также для любых $a \in A$ и для любых $b \in B$ выполнено неравенство $a \leq b$.*

Тогда существует число x такое, что для всех $a \in A$ и для всех $b \in B$ справедливо неравенство $a \leq x \leq b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения множества B следует, что каждая его точка является верхней гранью множества A. Положим $x = \sup A$. Тогда, поскольку x — это верхняя грань, для всех $a \in A$ имеем неравенство $a \leq x$, и так как x — точная верхняя грань A, то $x \leq b$ для любого $b \in B$, т.е. для всех $a \in A$ и для всех $b \in B$ имеем $a \leq x \leq b$. Лемма 1 доказана.

Определение 1. Системой вложенных отрезков *называется множество M, элементами которого являются отрезки, причем для любых $\Delta_1, \Delta_2 \in M$ выполнено одно из условий: $\Delta_1 \subset \Delta_2$ или $\Delta_2 \subset \Delta_1$, т.е. все точки одного отрезка принадлежат другому отрезку.*

Л е м м а 2 (о системе вложенных отрезков). *Пусть M — система вложенных отрезков. Тогда существует число x такое, что для любого отрезка $\Delta \in M$ имеем, что $x \in \Delta$. Это значит, что все отрезки Δ из множества M имеют общую точку x.*

Доказательство. Пусть A — множество левых концов отрезков, принадлежащих M, B — множество их правых концов. Тогда для всех $a \in A$ и для всех $b \in B$ имеем $a \le b$. Действительно, пусть a — левый конец отрезка $[a, b'] \in M$ и b — правый конец другого отрезка $[a', b] \in M$.

Возможны два случая: 1) $[a', b] \subset [a, b']$; 2) $[a', b] \supset [a, b']$.

В случае 1) имеем $a \le a' < b \le b'$, а в случае 2) имеем $a' \le a < b' \le b$.

Тогда в силу леммы об отделимости существует число x такое, что для любого отрезка $[a, b] \in M$ справедливо неравенство $a \le x \le b$. Лемма 2 доказана.

Замечание. С помощью леммы 2 (о системе вложенных отрезков) можно доказать несчетность множества точек отрезка. (*Указание.* Предполагаем, что все точки пересчитаны. Отрезок делим на три части. Тогда точка с номером один не принадлежит одному из этих отрезков. Делим его на три части. Точка с номером два не принадлежит одному из получившихся отрезков деления и т.д. По лемме 2 существует точка x, принадлежащая сразу всем отрезкам, но эта точка не занумерована.)

Определение 2. *Система M вложенных отрезков называется* **последовательностью вложенных отрезков,** *если все эти отрезки занумерованы, причем любой отрезок с бо́льшим номером содержится в любом отрезке с меньшим номером.*

Определение 3. *Последовательность вложенных отрезков называется* **стягивающейся**, *если среди отрезков, в нее входящих, имеются отрезки сколь угодно малой длины. Другими словами, каково бы ни было положительное число ε, в последовательности стягивающихся отрезков содержится и такой отрезок, длина которого меньше ε.*

Лемма 3. *Последовательность стягивающихся отрезков содержит общую точку и притом только одну.*

Доказательство. Первая часть утверждения следует из леммы 2.

Докажем его вторую часть. Если бы все отрезки содержали одновременно две различные точки a и b (где $a < b$), то тогда длина каждого отрезка из M была бы больше, чем $b - a > 0$, но это не так, поскольку по определению в M есть отрезки и меньшей длины. Теперь лемма 3 доказана полностью.

Глава II
ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Лекция 5

§ 1. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ. БИНОМ НЬЮТОНА И НЕРАВЕНСТВО БЕРНУЛЛИ

Для обоснования метода математической индукции мы будем использовать следующее свойство натуральных чисел: *в любом непустом подмножестве множества натуральных чисел существует наименьшее число.*

Убедимся в том, что данное свойство действительно имеет место. Для этого возьмем какой-нибудь его элемент (это можно сделать, так как данное подмножество не пусто). Если окажется, что выбранный элемент минимален, то свойство доказано. В противном случае натуральных чисел, меньших данного числа, конечно. Рассматривая их последовательно, мы найдем требуемый минимальный элемент.

Метод математической индукции состоит в следующем: для справедливости любого утверждения, высказанного для всех натуральных чисел $n \geq 1$, достаточно:

1) доказать это утверждение для $n = 1$;
2) предположить его справедливость при $n = k$ и $k \geq 1$;
3) доказать, что оно верно при $n = k + 1$.

Действительно, отсюда следует, что высказанное утверждение верно для всех натуральных n. Допустим противное. Тогда множество тех n, для которых утверждение неверно, содержит наименьший элемент m. Число $m \neq 1$, поскольку утверждение верно для $n = 1$. Число m не может быть больше 1, так как утверждение в этом случае было бы верно для $m - 1$ и в силу п. 3 оно было бы справедливо и для m, что противоречит выбору числа m.

Замечание. Методом математической индукции можно доказывать утверждения, справедливые и при $n \geq m$, где $m \geq 1$. В ходе доказательства надо заменить *первый шаг*: доказать утверждение при $n = m$, а все остальное оставить, как и прежде, при необходимости пользуясь тем, что $n \geq m$.

Перейдем к рассмотрению формулы бинома Ньютона. Сначала определим величину

$$n! = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

($n!$ читается: эн-факториал). В частности, имеем

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2 \cdot 1 = 2, \quad 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \quad \text{и т.д.}$$

Теорема 1. *Имеет место равенство (формула бинома Ньютона)*

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n.$$

(Коротко эту формулу можно записать так:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k,$$

где $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальный коэффициент.)

Доказательство проведем методом математической индукции.

1. При $n = 1$ формула верна: $1 + x = 1 + x$, поскольку

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1.$$

2. Пусть формула бинома Ньютона справедлива при $n = t$, $t \geq 1$.

3. Докажем, что она верна при $n = t + 1$. Сначала докажем вспомогательное утверждение о биномиальном коэффициенте: при $0 \leq k \leq n - 1$ имеем

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Действительно,

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) = \binom{n+1}{k+1}.$$

Далее имеем

$$(1+x)^{t+1} = (1+x)^t(1+x) =$$

$$= \binom{t}{0} + \binom{t}{1}x + \dots + \binom{t}{t}x^t + \binom{t}{0}x + \dots + \binom{t}{t-1}x^t + \binom{t}{t}x^{t+1} =$$

$$= \binom{t+1}{0} + \binom{t+1}{1}x + \dots + \binom{t+1}{t}x^t + \binom{t+1}{t}x^{t+1}.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Подобным образом доказывается и формула для *полинома Ньютона* от s неизвестных вида

$$(x+y+\cdots+z)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_s=n} \frac{n!}{k_1!\ldots k_s!} x^{k_1} y^{k_2} \ldots z^{k_s},$$

где $k_1, \ldots, k_s$ — целые положительные числа.

При изложении теории предела последовательности нам потребуется приводимое далее неравенство Бернулли.

Теорема 2. *При $x > -1$, $x \neq 0$ и при целом $n \geq 2$ справедливо неравенство (неравенство Бернулли)*

$$(1+x)^n > 1+xn.$$

Доказательство (по индукции). Сначала убедимся, что при $n = 2$ оно верно. Действительно,

$$(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x.$$

Предположим, что для номера $n = k$ оказалось, что утверждение справедливо:

$$(1+x)^k > 1+kx,$$

где $k \geq 2$. Докажем его при $n = k+1$. Имеем

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x) > (1+kx)(1+x) = \\ &= 1+(k+1)x+x^2 > 1+(k+1)x.\end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Следует отметить, что метод математической индукции допускает многочисленные, иногда неожиданные, модификации. В качестве примера приведем доказательство одной теоремы из книги известного норвежского математика Т. Нагелля [34].

Под методом *мультипликативной индукции* мы будем понимать доказательство, которое проводится по следующей схеме.

1. Опытным или каким-либо другим путем выдвигается гипотеза о том, что для каждого номера $n(> 1)$ выполнено свойство E.

2. Проверяется, что свойством E обладают все простые числа p.

3. Предполагается, что некоторое натуральное число m обладает свойством E.

4. Исходя из предположения индукции доказывается, что числа вида mp тоже обладают этим свойством.

5. Отсюда по теореме об однозначности разложения на простые сомножители натуральных чисел, больших единицы, вытекает, что свойством E обладают все натуральные числа, и тем самым установлена справедливость гипотезы из пункта 1 ([34], с. 16).

Докажем этим методом свойство мультипликативности *функции Мёбиуса,* определяемой на множестве натуральных чисел следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & , \text{ если } \quad n = 1, \\ 0 & , \text{ если } \quad p^2 \quad \text{делит} \quad n, \\ (-1)^r & , \text{ если } \quad n = p_1 \dots p_r,\ p_k \neq p_l, k \neq l, 1 \leq k, l \leq r. \end{cases}$$

Будем говорить, что функция $f(n)$ натурального аргумента является *мультипликативной,* если для любых взаимно простых чисел m и n справедливо равенство $f(mn) = f(m)f(n)$.

Достаточно доказать утверждение о мультипликативности функции Мёбиуса только для чисел m и n, не делящихся на квадрат простого числа, т.е. *бесквадратных* чисел. Зафиксируем произвольное m. Покажем, что утверждение имеет место для $n = p$, где p — произвольное простое число. Действительно, поскольку $(m, n) = 1$, то $\mu(mp) = (-1)^{r+1}$, если $m = p_1 \dots p_r$ и $p_1, \dots, p_r$ — различные простые числа. Следовательно,

$$\mu(mp) = \mu(m)\mu(p).$$

Пусть утверждение верно для $n = k$. Докажем его для $n = kp$, где p — произвольное простое число. Так как n — бесквадратное число, то $(k, p) = 1$. По условию $(m, n) = 1$, поэтому $(mk, p) = 1$. Тогда по доказанному утверждению для простых чисел и по предположению индукции имеем цепочку равенств

$$\mu(mn) = \mu(mkp) = \mu(mk)\mu(p) =$$

$$= \mu(m)\mu(k)\mu(p) = \mu(m)\mu(kp) = \mu(m)\mu(n).$$

Тем самым мультипликативность функции Мёбиуса доказана.

Заметим, кстати, что функция Мёбиуса возникает во многих областях математики, играя важную роль при изучении ее дискретных объектов.

§ 2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

Определение 1. *Функция, определенная на множестве натуральных чисел* $\mathbb{N}$ *и принимающая числовые значения, называется* **числовой последовательностью** *или просто последовательностью.*

Обозначения: $x_1, x_2, x_3 \ldots$, или, коротко, $\{x_n\}$, или, если это не вносит путаницы, просто x_n.

Примеры. 1. Последовательность δ_n длин вложенных отрезков (см. определение 2 §5) $\{\Delta_n\}$, $\Delta_n \subset \mathbb{R}$, $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

2. $x_n = c$ при всех натуральных n (постоянная последовательность).

Определение 2. *Если* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *— две числовые последовательности, то* $\{x_n + y_n\}$ *называется* **суммой** *двух числовых последовательностей,* $\{x_n - y_n\}$ *—* **разностью** *двух числовых последовательностей,* $\{x_n y_n\}$ *—* **произведением** *двух числовых последовательностей, при* $y_n \neq 0$ *последовательность* $\{x_n/y_n\}$ *называется* **частным** *двух числовых последовательностей.*

Замечание. Обычно мы подразумеваем, что запись a/b сама по себе предполагает выполнение условия $b \neq 0$.

Последовательности бывают:

1) ограниченными сверху, если найдется a такое, что для всех членов последовательности выполняется $x_n \leq a$;

2) ограниченными снизу, если существует b такое, что $x_n \geq b$ при всех $n \in \mathbb{N}$;

3) ограниченными, если существует c такое, что для каждого номера $n \in \mathbb{N}$ имеем $|x_n| \leq c$.

Определение 3. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* **бесконечно большой**, *если для любого* $c > 0$ *множество тех членов последовательности, которые удовлетворяют неравенству* $|x_n| \leq c$, *конечно.*

Другими словами, это значит, что для всякого $c > 0$ существует номер $n_0 = n_0(c)$, такой, что все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами, большими чем n_0, удовлетворяют неравенству $|x_n| > c$.

Коротко это определение записывается так:

$$\forall\ c > 0\ \exists\ n_0 = n_0(c) \text{такое, что } \forall\ n > n_0 \text{ имеем } |x_n| > c.$$

Пример. Последовательности $\{y_n = n\}$, $\{z_n = -n\}$ — бесконечно большие последовательности.

Определение 4. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* **бесконечно малой**, *если для всякого* $\varepsilon > 0$ *множество членов последовательности* $\{x_n\}$, *удовлетворяющих неравенству*

$$|x_n| \geq \varepsilon,$$

конечно.

Коротко это определение записывается так:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon) \quad \text{такое, что}\ \forall\ n > n_0 \ \Rightarrow |x_n| < \varepsilon.$$

Примеры. 1. Длины отрезков из последовательности стягивающихся отрезков (см. определение 3 §5) образуют бесконечно малую последовательность.

2. $x_n = 1/n$ — бесконечно малая последовательность.

Чтобы это доказать, надо для всякого $\varepsilon > 0$ найти хотя бы одно натуральное число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\forall\ n > n_0 \ \text{имеем}\ |x_n| < \varepsilon.$$

В качестве такого $n_0 = n_0(\varepsilon)$ возьмем число $[1/\varepsilon] + 1$. Тогда для каждого n с условием

$$n > n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

имеем $\frac{1}{n} < \varepsilon$, что и требуется.

И вообще, если надо доказать, что $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то, по существу, надо *найти хотя бы одно* $n_0(\varepsilon)$ с нужными свойствами, т.е. такое, что если $n > n_0(\varepsilon)$, то выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$, или хотя бы каким-либо образом *доказать его существование.*

Теорема 1. *Бесконечно малая последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Тогда, например, неравенству $|x_n| \geq 1$ удовлетворяет лишь конечное множество ее членов. Сумму модулей таких членов обозначим через c_0. При этом считаем, что $c_0 = 0$, если таких членов вообще нет. Очевидно, тогда для каждого члена x_n имеем неравенство

$$|x_k| < c = c_0 + 1.$$

Следовательно, бесконечно малая последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Если $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность и $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, и наоборот, если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ — бесконечно большая последовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся рассмотрением только прямого утверждения. В этом случае при любом $\varepsilon > 0$ неравенство $|1/x_k| \geq \varepsilon$ равносильно неравенству $|x_n| \leq c = 1/\varepsilon$, которому, в свою очередь, удовлетворяет лишь конечное множество членов, поскольку $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Это значит, что $\{1/x_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *1. Если $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\{|x_n|\}$ — бесконечно малая последовательность, и наоборот.*

2. Сумма (разность) двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы непосредственно следует из определения бесконечно малая последовательность. Докажем второе утверждение.

Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют номера $n_1(\varepsilon/2)$ и $n_2(\varepsilon/2)$ такие, что

$$\forall n > n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \forall n > n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, полагая $n_0 = \max(n_1(\varepsilon/2), n_2(\varepsilon/2))$, имеем

$$\forall n > n_0 \Rightarrow |x_n \pm y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\{x_n \pm y_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно.

Т е о р е м а 4. *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{x_k\}$ — бесконечно малая последовательность, а последовательность $\{y_k\}$ ограничена. Тогда при некотором $c > 0$ имеем $|y_n| < c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Далее, так как $\{x_k\}$ — бесконечно малая последовательность, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_1(\varepsilon_1)$ с условием, что $|x_n| < \varepsilon_1 = \varepsilon/c$ для всех $n > n_1(\varepsilon_1)$. Поэтому, полагая $n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon/c)$, будем иметь

$$\forall n > n_0(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |x_n \cdot y_n| \le |x_n| \cdot c < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c = \varepsilon.$$

Другими словами, $\{x_n y_n\}$ есть бесконечно малая последовательность. Теорема 4 доказана.

Следствие 1. *Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Согласно теореме 1 одну из двух бесконечно малая последовательность мы можем рассматривать как ограниченную последовательность. Тогда их произведение будет бесконечно малой последовательностью в силу предыдущей теоремы. Следствие доказано.

Следствие 2. *Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство получается очевидным последовательным применением предыдущего утверждения. Следствие доказано.

Теорема 5. *Если $\{x_n\}$ — постоянная и бесконечно малая последовательность, то $x_n = 0$.*

Действительно, если $x_n = c \ne 0$, то в $|c|/2$-окрестности нуля нет ни одной точки нашей последовательности, и это значит, что $\{x_n\}$ не является бесконечно малой последовательностью. Теорема 5 доказана.

Примеры. 1. $\{q^n\}$ — бесконечно малая последовательность при $|q| < 1$.

Действительно, если $0 < q < 1$, то $q = \dfrac{1}{1+h}$, где $h > 0$. В силу неравенства Бернулли

$$(1+h)^n > 1 + nh \text{ при } n \ge 2.$$

Отсюда имеем

$$q^n \le \frac{1}{1+nh} < \frac{1}{nh}.$$

Зададим теперь $\varepsilon > 0$. Нам надо выбрать $n_0 = n_0(\varepsilon)$ так, чтобы для каждого $n > n_0$ выполнялось неравенство $q^n < \varepsilon$. Для этого достаточно, чтобы было справедливо такое неравенство:

$$\frac{1}{nh} < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; nh > \frac{1}{\varepsilon} \;\Leftrightarrow\; n > \frac{1}{h\varepsilon}.$$

Положим
$$n_0 = n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{h\varepsilon}\right] + 1.$$
Покажем, что для всех $n > n_0$ имеем $q^n < \varepsilon$. Это следует из цепочки неравенств
$$q^n < \frac{1}{nh+1} < \frac{1}{n_0 h} < \frac{1}{1/h\varepsilon \cdot h} = \varepsilon,$$
следовательно, $\{q^n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

2. nq^n — бесконечно малая последовательность при $|q| < 1$.

Рассмотрим случай $0 < q < 1$. Тогда $q = \dfrac{1}{1+h}$, где $h > 0$. Из формулы бинома Ньютона имеем
$$(1+h)^n > \frac{n(n-1)}{2}h^2 \text{ при } n \geq 2.$$

Отсюда получим
$$nq^n = \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{2}{(n-1)h^2} < \varepsilon, \quad n-1 > \frac{2}{\varepsilon h^2}, \quad n > \frac{2}{\varepsilon h^2} + 1.$$

Положим
$$n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon h^2}\right] + 2.$$

Тогда для всех $n > n_0$ будем иметь $nq^n < \varepsilon$.

Лекция 6

§ 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. *Последовательность $\{a_n\}$ называется* **сходящейся**, *если существует число $l \in \mathbb{R}$ такое, что последовательность $\alpha_n = a_n - l$ является бесконечно малой последовательностью.*

В этом случае говорят, что $\{a_n\}$ сходится или что $\{a_n\}$ имеет предел и этот предел равен l. Записывают это так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l \text{ или } a_n \to l \text{ при } n \to \infty.$$

Это определение на "ε-языке" можно записать следующим образом:

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists \ n_0 = n_0(\varepsilon), \text{ такое, что } \forall n > n_0 \text{ имеем } |a_n - l| < \varepsilon.$$

Будем говорить также, что последовательность $\{a_n\}$ расходится к "плюс бесконечности", если для любого $c > 0$ лишь для конечного числа членов ее выполняется неравенство

$$a_n < c.$$

Обозначается это так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \text{ или } a_n \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Последовательность $\{a_n\}$ расходится к "минус бесконечности", если для любого $b < 0$ лишь для конечного числа членов её выполняется неравенство

$$a_n > b.$$

Обозначается это так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ или } a_n \to -\infty \text{ при } n \to \infty.$$

И, наконец, последовательность $\{a_n\}$ расходится к "бесконечности", если для любого $c > 0$ лишь для конечного числа членов ее выполняется неравенство

$$|a_n| < c.$$

Обозначается это так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ или } a_n \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Утверждение 1. *Если $\{a_n\}$ сходится, то она имеет единственный предел.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда существуют числа $l_1 \neq l_2$ такие, что последовательности $\alpha_n = a_n - l_1$ и $\beta_n = a_n - l_2$ обе являются бесконечно малыми последовательностями. Отсюда $\alpha_n + l_1 = a_n = \beta_n + l_2$, поэтому $l_1 - l_2 = \beta_n - \alpha_n$ есть бесконечно малая последовательность. Но тогда по теореме 5 § 2 имеем $l_1 - l_2 = 0$, т.е. $l_1 = l_2$.

Утверждение 2. *Если $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Действительно, при $l = 0$ имеем $a_n - 0 = a_n$ есть бесконечно малая последовательность, т.е. предел $\{a_n\}$ при $n \to \infty$ равен 0.

Утверждение 3. *Если $\{a_n\}$ сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Если $\{a_n\}$ сходится, то найдется число l такое, что $\alpha_n = a_n - l$ — бесконечно малая последовательность. Значит, существует $c > 0$ такое, что при всех натуральных n имеем $|\alpha_n| < c$. Но $a_n = l + \alpha_n$, откуда

$$|a_n| = |l + \alpha_n| \leq |l| + |\alpha_n| \leq |l| + c = c_1,$$

т.е. $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, что и требовалось доказать.

Утверждение 4. *Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$ и $a_n \neq 0$, $l \neq 0$, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $n > n_0$ имеем $|a_n| > |l|/2$ (или, что то же самое, $1/|a_n| < 2/|l|$).*

Это означает, что последовательность $\{1/a_n\}$, составленная из обратных величин, ограничена.

Доказательство. В силу условия имеем, что $\alpha_n = a_n - l$ — бесконечно малая последовательность. Тогда вне $|l|/2$-окрестности нуля лежит только конечное число членов последовательности $\{\alpha_n\}$. Пусть n_0 — самое большое значение номера таких членов; тогда при всех $n > n_0$ имеем $|\alpha_n| < |l|/2$. Отсюда при этих n получим $(l = a_n - \alpha_n)$

$$|l| = |a_n - \alpha_n| \leq |a_n| + |-\alpha_n| = |a_n| + |\alpha_n|.$$

Следовательно,

$$|a_n| \geq |l| - |\alpha_n| > |l| - \frac{|l|}{2} = \frac{|l|}{2},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 5. *Если $a_n \to l_1$, $b_n \to l_2$ при $n \to \infty$, то $c_n = a_n \pm b_n \to l_1 \pm l_2$ при $n \to \infty$. Другими словами, для сходящихся последовательностей предел их суммы равен сумме их пределов.*

Доказательство. Из условия имеем $\alpha_n = a_n - l_1$, $\beta_n = b_n - l_2$ — бесконечно малые последовательности. Следовательно,

$$c_n - (l_1 \pm l_2) = (a_n \pm b_n) - (l_1 \pm l_2) = \alpha_n \pm \beta_n = \gamma_n \;—$$

бесконечно малая последовательность. Значит, из определения предела имеем

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l_1 \pm l_2,$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 6. *Если $a_n \to l_1$, $b_n \to l_2$ при $n \to \infty$, то $c_n = a_n b_n \to l_1 l_2$ при $n \to \infty$ (предел произведения равен произведению пределов).*

Доказательство. Имеем $a_n = l_1 + \alpha_n$, $b_n = l_2 + \beta_n$, $c_n = a_n b_n = l_1 l_2 + \alpha_n l_2 + \beta_n l_1 + \alpha_n \beta_n = l_1 l_2 + \gamma_n$. Но γ_n — бесконечно малая последовательность, так как она есть сумма трех последовательностей, каждая из которых есть бесконечно малая последовательность. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l_1 l_2.$$

Доказательство закончено.

Утверждение 7. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$, $l_2 \neq 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{l_1}{l_2}$, т.е. если предел знаменателя не равен нулю, то предел отношения равен отношению пределов.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ и

$$\gamma_n = c_n - \frac{l_1}{l_2} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{a_n l_2 - b_n l_1}{b_n l_2}, \quad a_n = l_1 + \alpha_n = a_n - l_1, \; \beta_n = b_n - l_2.$$

Из условия вытекает, что α_n, β_n есть бесконечно малая последовательность . Нам достаточно доказать, что тоже является бесконечно малая последовательность. Для этого запишем γ_n в виде

$$\gamma_n = \frac{(l_1 + \alpha_n) l_2 - (l_2 + \beta_n) l_1}{b_n l_2} = \frac{\alpha_n l_2 - \beta_n l_1}{l_2} \cdot \frac{1}{b_n}.$$

Теперь заметим, что последовательность $\dfrac{\alpha_n l_2 - \beta_n l_1}{l_2}$ является бесконечно малой в силу утверждений 5 и 6, а последовательность $1/b_n$ ограничена в силу утверждения 4. Но тогда по теореме 4 §2 последовательность γ_n является бесконечно малой. Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l_1/l_2$, что и требовалось доказать.

Пример. *Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.* Пусть $s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1}$. Тогда

$$qs_n = aq + \cdots + aq^{n-1} + aq^n, \quad s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Так как при $|q| < 1$ имеем $\{q^n\}$ — бесконечно малая последовательность, то

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

Доказательство закончено.

Заметим, что величину s можно представить в виде

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}.$$

где $s_n = \sum_{k=1}^{n} aq^{k-1}$ называется **n-й частичной суммой ряда**, а величина $r_n = s - s_n$ — **остатком ряда.**

§ 4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД В НЕРАВЕНСТВАХ

Утверждение 1. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$; тогда, если для всякого n имеет место неравенство $a_n > c$ (или $a_n \geq c$), то $l \geq c$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия имеем, что $\alpha_n = a_n - l$ — бесконечно малая последовательность, причем $\alpha_n = a_n - l \geq c - l$. Если допустить, что $c - l > 0$, то тогда при $\varepsilon = \dfrac{c-l}{2}$ получим, что ε-окрестность нуля вообще не содержит ни одной точки последовательности $\{\alpha_n\}$. Это противоречит тому, что $\{\alpha_n\}$ есть бесконечно малая последовательность. Значит, $c - l \leq 0$, $l \geq c$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$; тогда, если $a_n < c$ (или $a_n \leq c$) при всех $n \in \mathbb{N}$, то $l \leq c$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $b_n = -a_n$, то $b_n \to -l$ при $n \to \infty$, $b_n > -c$ (или $b_n \geq -c$). Тогда из утверждения 1 имеем, что $-l \geq -c$, т.е. $l \leq c$, что и требовалось доказать.

Утверждение 3. *Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l_2$. Тогда:*

1) для $a_n < b_n$ имеем $l_1 \leq l_2$;

2) для $a_n \leq b_n$ имеем $l_1 \leq l_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $c_n = b_n - a_n$. По условию $c_n > 0$ (или $c_n \geq 0$) при всех n и $c_n \to \delta = l_2 - l_1$ при $n \to \infty$.

Согласно утверждению 1 в обоих случаях имеем $\delta \geq 0$, т.е. $l_2 \geq l_1$, что и требовалось доказать.

Утверждение 4. *Если $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность и при всех натуральных n имеем $|\beta_n| \le \alpha_n$, то β_n — тоже бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Из условия следует, что любая ε-окрестность нуля вместе с точкой α_n содержит и точку β_n, так что вне этой ε-окрестности могут находиться β_n только с такими номерами, для которых $|\alpha_n| \ge \varepsilon$. Но так как $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то их число конечно, и поэтому $\{\beta_n\}$ — тоже бесконечно малая последовательность. Доказательство закончено.

Утверждение 5. *Пусть $a_n \le c_n \le b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, $\lim_{n\to\infty} b_n = l$. Тогда существует предел $\lim_{n\to\infty} c_n$ существует и равен l.*

Доказательство. Из условия следует, что $0 \le c_n - a_n \le b_n - a_n$. Но справедливо соотношение $(b_n - a_n) \to 0$, т.е. $b_n - \alpha_n$ — бесконечно малая последовательность . Но тогда по утверждению 4 $(c_n - a_n)$ — тоже бесконечно малая последовательность, т.е. $(c_n - a_n) \to 0$. Следовательно, $c_n = (c_n - a_n) + a_n \to 0 + l = l$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

Примеры. 1. Если $a > 1$, то $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
Действительно, $\sqrt[n]{a} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$. Тогда

$$a = (1 + \alpha_n)^n > 1 + n\alpha_n, \quad 0 < \alpha_n < \frac{a-1}{n}.$$

По утверждению 5 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Действительно, положим $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$. Тогда

$$n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \cdots > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2, \quad 0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

По утверждению 5 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

Действительно, пусть $b_n = a_n - a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, и достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = 0.$$

Так как $\{b_n\}$ — бесконечно малая последовательность , то существует $c > 0$ такое, что при всех n имеем

$$|b_n| < c \quad \text{при всех } n.$$

Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_0$ справедливо неравенство $|b_n| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\left|\frac{b_1 + \cdots + b_{n_0} + b_{n_0+1} + \cdots + b_n}{n}\right| \leq \frac{cn_0}{n} + \frac{(n-n_0)\varepsilon}{n} < 2\varepsilon,$$

если только $cn_0/n < \varepsilon$, $n > cn_0/\varepsilon$, т.е. $n > \max\Big(n_0, cn_0/\varepsilon\Big)$. Отсюда уже легко следует требуемый результат. Доказательство закончено.

Теорема 1 (теорема Штольца). *Пусть: 1)* $y_{n+1} > y_n > 0$, *2)* $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, *3) существует* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l$. *Тогда существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Доказательство. Из условия теоремы вытекает, что $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = l + \alpha_n$, где α_n — бесконечно малая последовательность. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n \geq N$ имеем $|\alpha_n| < \varepsilon/2$.

Полагая значение номера равным последовательно $N, \ldots, n$, получим следующую систему равенств:

$$x_{n+1} - ly_{n+1} = x_n - ly_n + \alpha_n(y_{n+1} - y_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{N+1} - ly_{N+1} = x_N - ly_N + \alpha_N(y_{N+1} - y_N).$$

Сложим эти равенства:

$$x_{n+1} - ly_{n+1} = x_N - ly_N + \alpha_n(y_{n+1} - y_n) + \cdots + \alpha_N(y_{N+1} - y_N).$$

Заметим, что все разности вида $y_{k+1} - y_k$, $k = 1, \ldots, N$ в этом равенстве положительны. Поэтому выполняя очевидные арифметические преобразования и переходя к неравенствам, получим

$$|x_{n+1} - ly_{n+1}| \leq |x_N - ly_N| + |\alpha_n||y_{n+1} - y_n| + \cdots + |\alpha_N||y_{N+1} - y_N|,$$

$$|x_{n+1} - ly_{n+1}| \leq |x_N - ly_N| + |\varepsilon/2|(y_{n+1} - y_n) + \cdots + |\varepsilon/2|(y_{N+1} - y_N),$$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l\right| < \frac{|x_N - ly_N|}{y_{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{y_{n+1} - y_N}{y_{n+1}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, то существует $n_1 = n_1(\varepsilon)$, такое, что для всех $n > n_1$ справедлива оценка

$$\frac{|x_N - l y_N|}{y_{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $n_0 = \max(n_1, N)$. Тогда для любого $n > n_1$ будем иметь

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - l\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ имеем $x_n/y_n \to l$. Теорема 1 доказана.

Лекция 7

§ 5. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА. ЧИСЛО "e" И ПОСТОЯННАЯ ЭЙЛЕРА

Определение 1. *Последовательность называется*

невозрастающей, *если $x_{n+1} \le x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (обозначение: $x_n \downarrow$);*

неубывающей, *если $x_{n+1} \ge x_n$ для всех натуральных n (обозначение: $x_n \uparrow$);*

убывающей, *если $x_{n+1} < x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (обозначение: $x_n \downarrow\downarrow$);*

возрастающей, *если $x_{n+1} > x_n$ (обозначение: $x_n \uparrow\uparrow$).*

Теорема 1 (теорема Вейерштрасса). *Пусть $\{a_n\}$ — неубывающая и ограниченная сверху последовательность. Тогда $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.*

Доказательство. Так как $\{a_n\}$ ограничена сверху, то существует $\sup\{a_n\}$. Пусть $l = \sup\{a_n\}$. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. Другими словами, требуется доказать, что

$$\alpha_n = a_n - l$$

есть бесконечно малая последовательность, т.е. что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при для всех $n > n_0$ имеем $|\alpha_n| < \varepsilon$. Но $\sup\{\alpha_n\} = 0$. Это значит, что:

1) $\alpha_n \le 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется число k такое, что $-\varepsilon < \alpha_k \le 0$.

Но a_k не убывает, поэтому при всех $n > k$ имеем

$$-\varepsilon < \alpha_k \le \alpha_n \le 0, \quad |\alpha_n| \le |\alpha_k| < \varepsilon.$$

Таким образом, в качестве $n_0 = n_0(\varepsilon)$ можно взять указанное выше число k.

Теорема 2. *Невозрастающая, ограниченная снизу последовательность имеет предел, равный $\inf\{a_n\}$.*

Доказательство. Вместо $\{a_n\}$ рассмотрим последовательность $\{b_n\}$, $b_n = -a_n$. Тогда $\inf\{a_n\} = -\sup\{b_n\}$ и теорема 2 следует из теоремы 1.

Пример. *Итерационная формула Герона.*

Пусть

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

где a — фиксированное положительное число, x_1 — любое положительное число. Докажем, что $\{x_n\}$ — убывающая последовательность при $n \geq 2$, ограниченная снизу величиной $\sqrt{a}$, и что $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Действительно, имеем:

1) $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} > 0$;

2) $x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} > 0$.

Из предыдущих формул получим $x_2 > \cdots > x_n > \sqrt{a}$.

Далее, в силу теоремы Вейерштрасса для монотонной последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geq \sqrt{a} > 0$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}\right),$$

т. е.

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right); \quad x = \sqrt{a}.$$

При вычислении квадратного корня из положительного числа по итерационной формуле Герона число верных десятичных знаков быстро растет. Важно отметить, что если в процессе вычислений допущена ошибка, то в дальнейшем она будет автоматически исправлена (саморегулирующийся итерационный процесс).

Дадим другое доказательство того, что $x_n \to \sqrt{a}$ при $n \to \infty$. Из равенства

$$x_{n+1} \pm \sqrt{a} = \frac{(x_n \pm \sqrt{a})^2}{2x_n}$$

имеем

$$\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}\right)^2.$$

Положим

$$\frac{x_1 - \sqrt{a}}{x_1 + \sqrt{a}} = q.$$

При $x_1 > 0$ имеем $|q| < 1$. Далее получим

$$\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} = q^{2^{n-1}},$$

откуда

$$x_n = \sqrt{a}\,\frac{1 + q^{2^{n-1}}}{1 - q^{2^{n-1}}},$$

$$\Delta_n = x_n - \sqrt{a} = \frac{2q^{2^{n-1}}}{1 - q^{2^{n-1}}}\sqrt{a}.$$

Заметим, что величина Δ_n определяет скорость сходимости данного итерационного процесса.

Далее так как $q^{2^{n-1}}$ — бесконечно малая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Число e.

Теорема 3. *Последовательность*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

имеет предел.

Доказательство. Сначала заметим, что при $k \geq 1$

$$k! = k(k-1)\ldots 2 \cdot 1 \geq 2^{k-1}.$$

По формуле бинома Ньютона получим

$$a_n = 1 + \frac{1}{n}\binom{n}{1} + \frac{1}{n^2}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n^n}\binom{n}{n} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \sigma;$$

$$\sigma = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \ldots \frac{n-k+1}{n}.$$

Но тогда

$$a_n \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Кроме того, в выражении σ при $k \geq 2$ с ростом n возрастает k-й член суммы и число членов всякий раз увеличивается на единицу, т.е. a_n не убывает и $\{a_n\}$ ограничена.

По теореме Вейерштрасса последовательность $\{a_n\}$ сходится. Теорема 3 доказана.

Следуя Эйлеру, предел этой последовательности обозначают через e. Известно, что

$$e = 2{,}7\,1828\,1828\,4590\,45\ldots$$

Постоянную e называют *неперовым числом* или *числом Д. Непера* (1550-1617). Логарифм числа a по основанию e называется *натуральным логарифмом* числа a и обозначается символом $\ln a$.

Рассмотрим далее последовательность $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Имеем

$$b_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e.$$

Последовательность $\{b_n\}$ убывает. Действительно, из неравенства Бернулли при $n \geq 1$ имеем

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} > \left(1+\frac{n+2}{n(n+1)}\right) \cdot \frac{n+1}{n+2} =$$

$$= \frac{(n+1)^3+n(n+1)}{n(n+2)^2} > 1.$$

Следовательно, $b_n > e$. Так как $b_n > e > a_n$, то

$$0 < r_n = e - a_n < b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{3}{n}.$$

Величина r_n характеризует скорость сходимости последовательности $\{a_n\}$.

Поскольку число e играет важную роль в анализе, дадим для него другое выражение.

Т е о р е м а 4. *Пусть*

$$c_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем, что последовательность $\{c_n\}$ является монотонно возрастающей и ограниченной. Действительно,

$$c_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Следовательно, существует предел $\lim_{n\to\infty} c_n = e_1$. Далее, так как

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sigma < c_n,$$

то $e \le e_1$.

Тогда при фиксированном $s \le n$ имеем

$$a_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \ge d_s(n) = 2 + \sum_{k=2}^{s} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Отсюда

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \ge \lim_{n\to\infty} d_s(n) = c_s,$$

т.е. e — верхняя грань для $\{c_s\}$. Но так как

$$\lim_{s\to\infty} c_s = \sup_s \{c_s\} = e_1,$$

то $e \ge e_1$. Следовательно, $e = e_1$. Теорема 4 доказана.

Заметим еще, что если $e = c_n + r_n$, то

$$0 < r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \le \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots\right) =$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - 1/(n+2)} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Т е о р е м а 5. *Число e — иррациональное.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное. Тогда $e = p/q$, $(p,q) = 1$, и с учетом сделанного выше замечания имеем

$$0 < e - c_q < \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Домножая обе части неравенства на $q!$, получим, что $A = q!(e - c_q)$ есть целое число и в то же время $0 < A < 1/q$, что невозможно. Доказательство закончено.

Дадим определение еще одной известной константы, играющей важную роль в математическом анализе.

Т е о р е м а 6. *Пусть*

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Тогда существует предел $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательность $\{\gamma_n\}$ монотонно убывает. Действительно,

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

так как

$$1 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad \text{поскольку} \quad e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n,$$

что было уже доказано выше.

Далее покажем, что последовательность $\{\gamma_n\}$ ограничена снизу числом 0. Из доказательства теоремы 3 имеем

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1, \quad \text{т.е.} \quad \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

Поэтому

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \dots + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n =$$

$$= \ln\frac{n+1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0.$$

Следовательно, по теореме Вейерштрасса последовательность $\{\gamma_n\}$ имеет предел, что и требовалось доказать.

Данный предел называется **постоянной Л. Эйлера** и обычно обозначается буквой γ или буквой C. Для этой константы Эйлер вычислил 15 десятичных знаков после запятой, а именно:

$$\gamma = 0{,}5\,7721\,5664\,9015\,32\dots$$

Отметим, что с арифметической природой постоянной Эйлера связан ряд старых математических проблем. В частности, до сих пор неизвестно, является ли константа γ алгебраическим или трансцендентным числом. Попытки выразить эту константу через известные величины, например, через π, e или логарифмы алгебраических чисел, пока тоже не имели успеха. Поясним, что число называется **алгебраическим,** если оно является корнем алгебраического многочлена с целыми коэффициентами. Заметим также, что если у этого многочлена коэффициент при старшей степени неизвестной равен единице, то данное число называется **целым алгебраическим числом.** Очевидно, что к алгебраическим числам относятся все рациональные числа. Если же число не является алгебраическим, то оно называется **трансцендентным.**

В качестве еще одного приложения теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности приведем пример последовательности, задаваемой с помощью простой формулы и принимающей только значения простых чисел.

Т е о р е м а 7(теорема Миллера). *Существует такое вещественное число $\alpha > 1$, что если*

$$\alpha = \alpha_0,\ 2^{\alpha_0} = \alpha_1, \ldots, 2^{\alpha_n} = \alpha_{n+1}, \ldots,$$

то $[\alpha_n]$ — простое число при всех $n \geq 1$. Другими словами, существует вещественное число $\alpha > 1$ такое, что при всех $n \geq 1$ натуральные числа

$$p_n = \left[2^{2^{\cdot^{\cdot^{\alpha}}}}\right]$$

являются простыми числами при всех $n \geq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 7 опирается на знаменитую теорему П. Л. Чебышёва, известную так же как "постулат Бертрана" (см., например, [18]): для любого $x > 1$ существует простое число p такое, что $x < p < 2x$.

Построим последовательность $p_n = [\alpha_n]$ по индукции. Положим $p_1 = 3$. По теореме П. Л. Чебышёва существует простое число p_{n+1}, удовлетворяющее условиям

$$2^{p_n} < p_{n+1} < p_{n+1} + 1 \leq 2^{p_n+1}.$$

Если $p_{n+1} + 1 = 2^{p_n+1}$, то $p_{n+1} = 2^{p_n+1} - 1$ не может быть простым, так как оно имеет делитель $2^{\frac{1}{2}(p_n+1)} - 1$. Следовательно,

$$2^{p_n} < p_{n+1} < p_{n+1} + 1 < 2^{p_n+1}.$$

Положим

$$u_n = \underbrace{\log_2 \ldots \log_2}_{n} p_n,\ v_n = \underbrace{\log_2 \ldots \log_2}_{n} (p_n + 1).$$

Очевидно, из неравенств

$$p_n < \log_2 p_{n+1} < \log_2 (p_{n+1} + 1) < p_n + 1$$

имеем $u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$, так что u_n, v_n — монотонные последовательности. Следовательно, по теореме Вейерштрасса существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \alpha$ и $u_n < \alpha < v_n$.

$$\alpha = \underbrace{\log_2 \ldots \log_2}_{n} \alpha_n,$$

то в силу монотонности функции $y = \log_2 x$ получим $p_n < \alpha_n < p_n + 1$, т.е. $p_n = [\alpha_n]$. Доказательство теоремы 7 закончено.

Лекция 8

§ 6. ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО–ВЕЙЕРШТРАССА О СУЩЕСТВОВАНИИ ЧАСТИЧНОГО ПРЕДЕЛА У ОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определение 1. *Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность и пусть $\{k_n\}$ — некоторая строго возрастающая последовательность, состоящая из натуральных чисел. Тогда последовательность $b_n = a_{k_n}$ называется* **подпоследовательностью** *последовательности a_n.*

Определение 2. *Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$, то l называется* **частичным пределом** *или* **предельной точкой** *последовательности $\{a_n\}$.*

Теорема 1 (теорема Больцано–Вейерштрасса). *Из всякой ограниченной последовательности $\{a_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. По условию имеем, что найдется $c > 0$ такое, что $|a_n| \le c$ для всех n. Разделим отрезок $I_0 = [-c, c]$ пополам. Один из получившихся отрезков содержит бесконечное число членов последовательности. Назовем его I_1 и в качестве первого члена в искомой подпоследовательности возьмем какой-либо элемент $a_{n_1} \in I_1$, т.е. положим $b_1 = a_{n_1}$. Затем отрезок I_1 снова разобьем на два и обозначим через I_2 ту его половину, которая содержит бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$. Среди них выберем такой член a_{n_2}, номер которого n_2 превосходит число n_1, и положим $b_2 = a_{n_2}$. Повторяя описанную процедуру применительно к отрезку I_2, получим отрезок $I_3 \subset I_2$ и член $b_3 = a_{n_3}$ с условием $n_3 > n_2$. Далее таким же образом найдем $b_4 = a_{n_4} \in I_4 \subset I_3$, $b_5 = a_{n_5} \in I_5 \subset I_4$ и т.д. В результате мы получим числовую последовательность $\{b_k\}$ и последовательность вложенных отрезков $\{I_k\}$, причем $b_k \in I_k$, $b_k = a_{n_k}$, $n_k < n_{k+1}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Другими словами, $\{b_k\}$ будет подпоследовательностью для $\{a_k\}$.

Осталось показать, что $\{b_k\}$ сходится. Для этого заметим, что длина δ_k отрезка I_k равна $c \cdot 2^{-k+1}$, откуда $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Это значит, что последовательность вложенных отрезков $\{I_k\}$ стягивается и все отрезки I_k имеют единственную общую точку l. Именно это число l и будет пределом для $\{b_k\}$. Действительно, если $I_k = [s_k, t_k]$, то $s_k \le l \le t_k$, $t_k - s_k = \delta_k$, $\alpha_k = l - s_k \le \delta_k$, $\beta_k = t_k - l \le \delta_k$. Но так как $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\alpha_k \to 0$ и $\beta_k \to 0$, откуда $s_k = l + \alpha_k \to l$, $t_k = l + \beta_k \to l$. И так как $b_k = a_{n_k}$, $s_k \le a_{n_k} \le t_k$, то $b_k = a_{n_k} \to l$ при $k \to \infty$, что и требовалось доказать.

§ 7. КРИТЕРИЙ КОШИ ДЛЯ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Очевидно, что из теоремы 1 §6 прямо вытекает следующее необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

Определение 1. *Последовательность* $\{a_n\}$ *называется* **фундаментальной** *или* **последовательностью Коши**, *если выполнено условие:*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 = n_0(\varepsilon),\ \text{такое, что}\ \forall\ m, n > n_0\ \text{имеем}\ |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы последовательность* $\{a_n\}$ *сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. Необходимость. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такое, что для всякого $n > n_0$ имеем $|a_n - l| < \varepsilon/2$.

Следовательно, для любых $m, n > n_0$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - l) - (a_m - l)| \le |a_n - l| + |a_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поэтому $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность.

Достаточность. По условию последовательность $\{a_n\}$ является фундаментальной.

1. Докажем, что $\{a_n\}$ ограничена. В самом деле, возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда найдется $n_0 = n_0(1)$ такое, что для всех $n \ge n_0$ имеем $|a_n - a_{n_0}| < 1$. Но тогда

$$|a_n| \le |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| = h.$$

Отсюда

$$|a_n| \le \max(|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, h) = c.$$

2. В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}, \cdots \to a$ при $k \to \infty$.

Условие ее сходимости можно записать так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ k_1 = k_1(\varepsilon)\ \text{такое, что}\ \forall\ k > k_1\ \text{имеем}\ |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2.$$

Пусть $N_1 = n_{k_1}$ и $N = \max\left(n_0\left(\varepsilon/2\right), N_1\right)$. Тогда для всех $n > N$ и $n_k > N$ имеем

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{a_n\}$ сходится. Теорема 1 доказана полностью.

Важно отметить, что теорема 1 допускает следующую переформулировку, полезную для доказательства расходимости конкретных последовательностей.

Т е о р е м а 2. *Для расходимости последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы она не была фундаментальной, т.е. существовало число $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $n_0 \in \mathbb{N}$ нашлись бы номера $m \geq n_0$ и $n \geq n_0$, для которых выполнялось бы неравенство*

$$|a_m - a_n| \geq \varepsilon.$$

Примеры. 1. $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Возьмем $\varepsilon = 1/2$. Тогда при любом m имеем неравенство

$$x_{2m} - x_m = \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m} \geq \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}.$$

Последовательность $\{a_n\}$ расходится (здесь мы полагаем $m = n_0$, $n = 2m$).

2. Для решения *уравнения Кеплера*

$$x - \alpha \sin x = y \quad (0 < \alpha < 1)$$

используют *метод последовательных приближений:*

$$x_0 = y, \;\; x_1 = y + \alpha \sin x_0, \dots, \;\; x_n = y + \alpha \sin x_{n-1}.$$

Докажем, что существует $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и что $x = \xi$ является единственным корнем уравнения Кеплера.

Согласно критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_0$ и при всех $p \geq 1$ имеем $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Оценим модуль разности $|x_{n+p} - x_n|$. В силу неравенства $|\sin y| \leq |y|$ имеем

$$|x_{n+p} - x_n| = \alpha|\sin x_{n+p-1} - \sin x_{n-1}| \leq \alpha|x_{n+p-1} - x_{n-1}| \leq$$
$$\leq \alpha^2|x_{n+p-2} - x_{n-2}| \leq \alpha^n|x_p - x_0| = \alpha^{n+1}|\sin x_{p-1}| \leq \alpha^{n+1}.$$

Далее поскольку $|\alpha| < 1$, последовательность $\{\alpha^{n+1}\}$ является бесконечно малой последовательностью. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_1 = n_1(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_1$ имеем $|\alpha^{n+1}| < \varepsilon$.

Теперь в теореме 1 положим $n_0 = n_1$. В результате получим, что последовательность является фундаментальной и, следовательно, сходится к некоторому числу ξ. Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $x_n = y + \alpha \sin x_{n-1}$, получим $\xi = y + \alpha \sin \xi$, т.е. $x = \xi$ есть решение уравнения Кеплера. Далее, если ξ_1 — другое его решение, то тогда $|\xi_1 - \xi| = \alpha|\sin \xi_1 - \sin \xi| \leq \alpha|\xi_1 - \xi|$, и если $\xi_1 \neq \xi$, то отсюда имеем $1 \leq \alpha$, что не так по условию. Другими словами, $x = \xi$ — единственный корень уравнения, что и требовалось доказать.

Уравнение Кеплера ввел в рассмотрение И. Кеплер (1571-1630) при изучении движения планет по эллиптической орбите (задача двух тел).

Глава III
ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Лекция 9

§ 1. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ

Мы познакомились с понятием предела числовой последовательности. Последовательность — это функция, определенная на множестве натуральных чисел. Но еще большую роль в анализе играет понятие предела функции, определенной на всей числовой оси или на каком-либо ее промежутке либо луче. В дальнейшем мы будем рассматривать целый ряд понятий подобного рода. Эти понятия по своему духу близки как между собой, так и с уже рассмотренным нами понятием предела последовательности. Перечислим наиболее важные из них:

1) $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ — предел функции $f(x)$ в точке x_0;
2) $l = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ — правый предел функции $f(x)$ в точке x_0;
3) $l = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ — левый предел функции $f(x)$ в точке x_0;
4) $l = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \to \infty$;
5) $l = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ — предел функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$;

Будем считать, что функция $f(x)$, о пределе которой будем говорить, определена на всей числовой прямой $\mathbb{R}$ или на некотором множестве A, являющемся его подмножеством, т.е. $A \subset \mathbb{R}$. Этим множеством A, например, может быть интервал, отрезок, совокупность промежутков и вообще какое угодно бесконечное множество. Важно только, чтобы точка x_0, к которой устремляется аргумент функции $f(x)$ (т.е. $x \to x_0$), являлась *предельной точкой множества* A, а именно: чтобы в любой δ-окрестности точки x_0 содержалось бесконечно много точек из множества A. В случае $x \to \infty$ или $x \to \pm\infty$ это означает, что множество A должно быть: не ограничено, если $x \to \infty$; не ограничено сверху, если $x \to +\infty$; не ограничено снизу, если $x \to -\infty$.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

Определение. Множество точек x, принадлежащих A и удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, называется *проколотой δ-окрестностью точки* x_0 (относительно множества A).

При $A = \mathbb{R}$ проколотая δ-окрестность точки x_0 состоит из двух интервалов: $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

Определения предела .

<table>
<tr><th>Обозначения</th><th>По Коши</th><th>По Гейне</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to x_0$</td><td colspan="2">Число l называется пределом функции $f(x)$
при $x \to x_0$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A,\ 0 < |x - x_0| < \delta)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ последовательности
$\{x_n\}$: $x_n \neq x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$
$x_n \in A$ и $x_n \to x_0$
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to x_0+$</td><td colspan="2">Число l называется правым пределом функции $f(x)$
при $x \to x_0$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A,\ 0 < x - x_0 < \delta)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ последовательности
$\{x_n\}$: $x_n > x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$
$x_n \in A$ и $x_n \to x_0$
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to x_0-$</td><td colspan="2">Число l называется левым пределом функции $f(x)$
при $x \to x_0$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A,\ -\delta < x - x_0 < 0)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ последовательности
$\{x_n\}$: $x_n < x_0\ \forall n \in \mathbb{N}$
$x_n \in A$ и $x_n \to x_0$
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to \infty$</td><td colspan="2">Число l называется пределом функции $f(x)$
при $x \to \infty$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, c = c(\varepsilon) > 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A,\ |x| > c)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ бесконечно большой
последовательности $\{x_n\}$:
$x_n \in A$,
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to +\infty$</td><td colspan="2">Число l называется пределом функции $f(x)$
при $x \to +\infty$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, c = c(\varepsilon) > 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A,\ x > c)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ бесконечно большой последовательности $x_n > 0$:
$x_n \in A$,
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$l = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
или
$f(x) \to l$
при $x \to -\infty$</td><td colspan="2">Число l называется пределом функции $f(x)$
при $x \to -\infty$, если</td></tr>
<tr><td>$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, c = c(\varepsilon) < 0$
такое, что $\forall x$:
$(x \in A,\ x < c)$
$\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$</td><td>$\forall$ бесконечно большой последовательности $x_n < 0$:
$x_n \in A$,
при $n \to \infty$ имеем $f(x_n) \to l$</td></tr>
</table>

Для всех этих видов пределов справедливы теоремы, аналогичные теоремам о пределах последовательности. Например, если $f_1(x) \to l_1$, $f_2(x) \to l_2$ (при одном и том же виде стремления аргумента x), то:

1) $f_1(x) \pm f_2(x) \to l_1 \pm l_2$,
2) $f_1(x)f_2(x) \to l_1 l_2$,
3) $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \to \frac{l_1}{l_2}$ при $l_2 \neq 0$.

Если $c(x)$ — постоянная, т.е. $c(x) = l$ для любого $x \in A$, то $c(x) \to l$.

Доказательства этих теорем, по существу, повторяют доказательство утверждений для сходящихся последовательностей. Но тем не менее их надо провести, а это заняло бы у нас очень много времени. Для того чтобы этого избежать, мы дадим общее определение предела, под которое будут подходить все рассмотренные нами пределы, в том числе и предел последовательности. Речь идет о так называемом **пределе по базе множеств**.

§ 2. БАЗА МНОЖЕСТВ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ ПО БАЗЕ

Определение 1. *Пусть A есть область определения функции $f(x)$. Тогда совокупность множеств $\{b\} = B$, где $b \subset A$, называется* **базой множеств** *или просто* **базой** *для множества A, если для ее элементов выполняются следующие условия:*

1) B состоит из бесконечного числа непустых множеств $\{b\}$;

2) $\forall\ b_1, b_2 \in B\ \exists\ b_3 \in B$ такое, что $b_3 \subset b_1 \cap b_2$.

(Здесь надо помнить, что b_1, b_2, b_3 суть подмножества множества A.)

Элементы множества B называются **окончаниями** базы B. Само множество A будем называть **основным множеством** базы B. Далее для любых двух окончаний b_1 и b_2 базы B с условием $b_2 \subset b_1$ будем говорить, что b_2 следует за b_1, а b_1 предшествует b_2.

Определение 2. *Число l называется* **пределом функции** $f(x)$ **по базе** B, *если для любого $\varepsilon > 0$ существует окончание $b \in B$ такое, что при всех $x \in b$ имеем неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$.*

Обозначение:

$$\lim_B f(x) = l \quad \text{или} \quad f(x) \to l \ (\text{по базе } B).$$

В этом случае еще говорят, что $f(x)$ сходится к l по базе B. Аналогично определяются следующие пределы:

$$\lim_B f(x) = \infty \ (\pm\infty).$$

Следует заметить, что с точки зрения формальной корректности определения 2 предела функции по базе B, вообще говоря, требование бесконечности множества окончаний в базе B является избыточным.

В случае конечного количества окончаний данное определение малосодержательно и не отражает в достаточной степени существа понятия предела.

Важно отметить, что если вместо основного множества A базы B взять любое ее окончание b_0, то совокупность B' окончаний базы B, следующих за b_0, с учётом сделанного выше замечания, тоже образует базу множеств. При этом из существования предела $\lim\limits_{B} f(x) = l$ следует, что существует предел $\lim\limits_{B'} f(x) = l$ и наоборот. В силу этого свойства на практике между базами B и B' фактически не делается никакого различия.

Примеры баз.

1. $A = \mathbb{N}$. База B_0 (обозначение: $n \to \infty$) состоит из множеств $b = N_s$, $s \geq 1$, где N_s — множество натуральных чисел $\{s, s+1, s+2, \dots\}$. Тогда предел по базе B_0 — это предел последовательности $\{a_n\}$:

$$x = n, \quad f(x) = a_n \text{ и } \lim_{B_0} f(x) = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

2. $A = \mathbb{R}$. База B_1 состоит из всех проколотых δ-окрестностей точки x_0, $\delta > 0$ (обозначение: $x \to x_0$). Тогда $\lim\limits_{B_1} f(x)$ — это предел при $x \to x_0$, т.е.

$$\lim_{B_1} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

3. $A = \mathbb{R}$. База B_2 $(x \to x_0+)$ состоит из всех интервалов вида $(x_0, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$,

$$\lim_{B_2} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x).$$

4. $A = \mathbb{R}$. База B_3 $(x \to x_0-)$ состоит из всех интервалов вида $(x_0 - \delta, x_0)$, где $\delta > 0$,

$$\lim_{B_3} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x).$$

5. $A = \mathbb{R}$. База B_4 $(x \to \infty)$ состоит из всех множеств $\{b\}$, где b есть объединение двух лучей: $(-\infty, -c) \cup (c, +\infty)$, $c > 0$,

$$\lim_{B_4} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(x).$$

6. $A = \mathbb{R}$. База B_5 $(x \to +\infty)$ состоит из всех лучей вида $(c, +\infty)$, где $c > 0$,

$$\lim_{B_5} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

7. $A = \mathbb{R}$. База B_6 $(x \to -\infty)$ состоит из всех лучей вида $(-\infty, c)$, где $c < 0$,

$$\lim_{B_6} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Легко убедиться в том, что все эти совокупности множеств $B_1, B_2, \ldots, B_7$ действительно удовлетворяют определению базы. Проверка всех этих множеств на соответствие определению базы однотипна. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только множества B_2.

1) B_2 состоит из окончаний $b = b_\delta$ вида $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \neq \varnothing$, где δ — произвольное положительное число. Следовательно, B_2 является бесконечным множеством, и каждое его окончание b_δ не пусто.

2) При всех $\delta_1 \leq \delta_2$ имеем $b_{\delta_1} \cap b_{\delta_2} = b_{\delta_1}$, т.е. и второе условие базы выполнено.

Таким образом, множество B_2 является базой множеств.

Определение 3. *Пусть множество $D \subset A$ (где A — область определения $f(x)$) и пусть существует $c > 0$ такое, что $|f(x)| < c$ при всех $x \in D$. Тогда функция $f(x)$ называется* **ограниченной** *(числом c) на множестве D.*

Аналогично определяется ограниченность функции $f(x)$ на множестве D сверху и снизу.

Определение 4. *Функция, ограниченная (ограниченная сверху, снизу) на каком-либо окончании базы B, называется* **финально ограниченной(финально ограниченной сверху, снизу)** *относительно этой базы.*

Утверждение 1. а) *Пусть $f(x) = c$ при всех $x \in b$, где b — некоторое окончание базы B. Тогда $\lim\limits_B f(x) = c$.*

б) Если предел функции по базе B существует, то он единственен.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Для любого $\varepsilon > 0$ возьмем окончание $b \in B$. Тогда при всех $x \in b$ имеем $|f(x) - c| = 0 < \varepsilon$.

б) Допустим противное, т.е. что существуют $l_1 \neq l_2$ такие, что

$$\lim_B f(x) = l_1, \quad \lim_B f(x) = l_2.$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2}$. Тогда:

$$\exists\ b_1 = b_1(\varepsilon) \in B \text{ такое, что } \forall\ x \in b_1 \text{ имеем } |f(x) - l_1| < \varepsilon;$$

$$\exists\ b_2 = b_2(\varepsilon) \in B \text{ такое, что } \forall\ x \in b_2 \text{ имеем } |f(x) - l_2| < \varepsilon.$$

По определению базы существует b_3 такое, что $b_3 \subset b_1 \cap b_2$. Выберем какое-нибудь $x \in b_3$. Тогда имеем

$$|l_1 - l_2| = |(f(x) - l_2) - (f(x) - l_1)| \leq |f(x) - l_2| + |f(x) - l_1| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|,$$

что невозможно. Утверждение 1 доказано полностью.

Утверждение 2. *а) Если* $\lim\limits_B f(x) = l$, *то функция* $f(x)$ *финально ограничена числом* $|l| + 1$.

б) Если $\lim\limits_B f(x) = l$ *и* $l \neq 0$, *то функция* $g(x) = 1/f(x)$ *финально ограничена числом* $2/|l|$ *на окончании* $b(|l|/2)$, *а функция* $f(x)$ *на том же окончании имеет знак, совпадающий с* l.

Доказательство.

Для базы B_1 ($x \to x_0$)	В общем случае
а) Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда найдется $\delta = \delta(1)$ такое, что при всех x из проколотой δ-окрестности имеем $\lvert f(x) - l\rvert < 1$. Отсюда при всех x: $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ имеем $\lvert f(x)\rvert = \lvert (f(x) - l) + l\rvert \leq$ $\leq \lvert f(x) - l\rvert + \lvert l\rvert \leq 1 + \lvert l\rvert$, что и требовалось доказать.	а) Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда найдется $b = b(1)$ — окончание базы B такое, что при всех $x \in b$ имеем $\lvert f(x) - l\rvert < 1$. Отсюда при всех $x \in b$ получим $\lvert f(x)\rvert = \lvert (f(x) - l) + l\rvert \leq$ $\leq \lvert f(x) - l\rvert + \lvert l\rvert \leq 1 + \lvert l\rvert$, что и требовалось доказать.
б) Разберем только случай $l > 0$ (второй случай аналогичен). Возьмем $\varepsilon = l/2$. Тогда найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x: $0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ имеем $\lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon = l/2$. Следовательно, справедливы неравенства: $f(x) - l > -l/2$, $f(x) > l/2 > 0$, $0 < g(x) = 1/f(x) < 2/l$. Утверждение 2 доказано.	б) Разберем только случай $l > 0$ (второй случай аналогичен). Возьмем $\varepsilon = l/2$. Тогда найдется $b = b(\varepsilon) > 0$ — окончание базы B такое, что при всех $x \in b$ имеем $\lvert f(x) - l\rvert < \varepsilon = l/2$. Следовательно, справедливы неравенства: $f(x) - l > -l/2$, $f(x) > l/2 > 0$, $0 < g(x) = 1/f(x) < 2/l$. Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3. *Пусть существуют пределы*

$$\lim_B f(x) = l_1, \quad \lim_B g(x) = l_2.$$

Тогда справедливо равенство

$$\lim_B (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2.$$

Выражаясь не вполне строго, можно сказать, что предел суммы двух функций равен сумме их пределов.

Доказательство.

$x \to x_0$	В общем случае
В качестве радиуса искомой δ-окрестности возьмем $\delta = \min(\delta_1(\varepsilon/2), \delta_2(\varepsilon/2))$, где $\delta_1(\varepsilon/2)$ — это радиус проколотой δ_1-окрестности точки x_0, в которой $\lvert f(x) - l_1\rvert < \varepsilon/2$, а δ_2 — это радиус проколотой δ_2-окрестности точки x_0, где $\lvert g(x) - l_2\rvert < \varepsilon/2$. Тогда проколотая δ-окрестность точки x_0 содержится и в δ_1-окрестности, и в δ_2-окрестности точки x_0. Поэтому имеем $\forall x:\ 0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta$ $\lvert(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)\rvert \le$ $\le \lvert f(x) - l_1\rvert + \lvert g(x) - l_2\rvert < \varepsilon$, что и требовалось доказать.	В качестве окончания $b(\varepsilon)$ возьмем одно какое-либо окончание b_3 такое, что $b_3 \subset b_1(\varepsilon/2) \cap b_2(\varepsilon/2)$, где $b_1(\varepsilon/2)$ — окончание, на котором $\lvert f(x) - l_1\rvert < \varepsilon/2$, а $b_2(\varepsilon/2)$ — это окончание, на котором $\lvert g(x) - l_2\rvert < \varepsilon/2$. Тогда $\forall x \in b_3$ имеем $\lvert(f(x) + g(x)) - (l_1 + l_2)\rvert \le$ $\le \lvert f(x) - l_1\rvert + \lvert g(x) - l_2\rvert < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Утверждение 4. *Пусть $f(x) = g(x)$ при всех $x \in b$, где b — некоторое окончание базы B и $\lim\limits_B f(x) = l$. Тогда $\lim\limits_B g(x) = l$.*

Доказательство. Имеем $g(x) = f(x) + (g(x) - f(x))$. Так как при всех $x \in b$ имеем $g(x) - f(x) = 0$, то по утверждению 1 а) получим $\lim\limits_B (g(x) - f(x)) = 0$. Отсюда

$$\lim_B g(x) = \lim_B f(x) + \lim_B (g(x) - f(x)) = l + 0 = l,$$

что и требовалось доказать.

Определение 5. *Если $\lim\limits_B \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется* **бесконечно малой функцией** *по базе B.*

Замечание. Из утверждений 1 а) и 3 следует, что условие существования предела $\lim\limits_B f(x) = l$ эквивалентно условию, что функция

$$\alpha(x) = f(x) - l$$

есть бесконечно малая по базе B.

Утверждение 5. *Пусть функция $\alpha(x)$ является бескрнечно малой по базе B, $f(x)$ финально ограничена по той же базе,*

$$|\beta(x)| \le |\alpha(x) f(x)|.$$

Тогда функция $\beta(x)$ будет бесконечно малой по базе B.

Доказательство.

$x \to x_0$	В общем случае
Для любого $\varepsilon>0$ надо указать число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall x$: $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta \Rightarrow \lvert\beta(x)\rvert<\varepsilon$	Для любого $\varepsilon>0$ надо указать окончание $b=b(\varepsilon)$ базы B такое, что при всех $x\in b \Rightarrow \lvert\beta(x)\rvert<\varepsilon$.
В силу финальной ограниченности функции $f(x)$ существует $\delta_1>0$ такое, что $\forall x$:$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta_1$ $\lvert f(x)\rvert<C$.	В силу финальной ограниченности функции $f(x)$ окончание b_1 такое, что при всех $x\in b_1 \Rightarrow \lvert f(x)\rvert\leq C$.
Найдется $\delta_2=\delta_2(\varepsilon/C)>0$ такое, что $\forall x$: $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta_2$ имеем $\lvert\alpha(x)\rvert<\varepsilon_1$.	Найдется $b_2=b_2(\varepsilon_1)\in B$ такое, что при всех $x\in b_2 \Rightarrow \lvert\alpha(x)\rvert<\varepsilon/C$.
Положим $\delta=\min(\delta_1, \delta_2(\varepsilon))$.	Возьмем окончание b_3 из условия $b_3\subset b_1\cap b_2(\varepsilon_1)$.
Тогда $\forall x$: $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ имеем $\lvert\beta(x)\rvert\leq\lvert\alpha(x)\rvert\cdot\lvert f(x)\rvert<\varepsilon/C\cdot C=\varepsilon$, что и требовалось доказать.	Тогда при всех $x\in b(\varepsilon)$ имеем $\lvert\beta(x)\rvert\leq\lvert\alpha(x)\rvert\cdot\lvert f(x)\rvert<\varepsilon/C\cdot C=\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Утверждение 6. *Пусть* $\lim\limits_B f(x) = l_1$, $\lim\limits_B g(x) = l_2$. *Тогда*

$$\lim_B f(x)g(x) = l_1 l_2.$$

Доказательство. Имеем $f(x) = l_1 + \alpha(x)$, $g(x) = l_2 + \beta(x)$, где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые функции по базе B. Тогда получим

$$f(x)g(x) - l_1 l_2 = \alpha(x)l_2 + \beta(x)l_1 + \alpha(x)\beta(x) \text{ — б.м.},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 7. *Пусть* $\lim\limits_B f(x) = l_1$, $\lim\limits_B g(x) = l_2$, $l_2 \neq 0$. *Тогда*

$$\lim_B \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1 + \alpha(x)}{l_2 + \beta(x)} - \frac{l_1}{l_2} = \frac{\alpha(x)l_2 - \beta(x)l_1}{l_2} \cdot \frac{1}{g(x)} = \gamma(x).$$

Здесь $\dfrac{\alpha(x)l_2 - \beta(x)l_1}{l_2}$ — бесконечно малая функция по базе B, $1/g(x)$ — финально ограниченная функция по той же базе, поэтому $\gamma(x)$ есть бесконечно малая функция по базе B, что и требовалось доказать.

Лекция 10

§ 3. СВОЙСТВО МОНОТОННОСТИ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ

Утверждение 1. *Пусть $c \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{B} f(x) = l$ и, кроме того, $f(x) > c$ (или $f(x) \geq c$) на некотором окончании b базы B. Тогда $l \geq c$.*

Доказательство. По условию $\alpha(x) = f(x) - l$ — бесконечно малая функция, причем для всех $x \in b$

$$\alpha(x) = f(x) - l \geq c - l.$$

Допустим, что $c - l > 0$. Тогда для $\varepsilon = \frac{c-l}{2}$ найдется окончание $b_1 \in B$ такое, что при всех $x \in b_1$ имеет место неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Заметим, что найдутся окончание $b_2 \subset b \cap b_1$ и точка $x \in b_2$, для которой выполнены неравенства

$$\varepsilon > |\alpha(x)| \geq \alpha(x) \geq c - l = 2\varepsilon > 0.$$

Отсюда вытекает, что $0 < 2\varepsilon < \varepsilon$, что невозможно. Тем самым утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Пусть $\lim_B f(x) = l_1$, $\lim_B g(x) = l_2$,*

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{на некотором окончании } b \text{ базы } B.$$

Тогда $l_1 \leq l_2$.

Доказательство. Рассмотрим $h(x) = g(x) - f(x)$. По условию $h(x) \geq 0$, $\lim\limits_{B} h(x) = l = l_2 - l_1$. Из утверждения 1 имеем $l \geq 0$, т.е. $l_2 \geq l_1$, что и требовалось доказать.

Утверждение 3. *Пусть $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ на некотором окончании базы B,*

$$\lim_{B} f(x) = l, \quad \lim_{B} h(x) = l.$$

Тогда существует $\lim\limits_{B} g(x) = l$.

Доказательство. Из условия имеем

$$0 \leq g(x) - f(x) \leq h(x) - f(x),$$
$$\alpha(x) = h(x) - f(x) \to 0 \ \text{(по базе } B\text{)},$$

т.е. $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция по базе B.

Но так как $|g(x)-f(x)| \le \alpha(x)$, то по утверждению 5 § 2 $g(x)-f(x)$ — бесконечно малая функция по базе B. Тогда

$$\lim_B g(x) = \lim_B (g(x) - f(x)) + \lim_B f(x) = 0 + l = l,$$

что и требовалось доказать.

§ 4. КРИТЕРИЙ КОШИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ ПО БАЗЕ

Теорема (Критерий Коши). *Для существования предела функции $f(x)$ по базе B необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало окончание $b = b(\varepsilon)$ такое, что при всех $x, y \in b$ было справедливо неравенство*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\lim_B f(x) = l$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует окончание $b_1 = b_1(\varepsilon/2) \in B$ такое, что при всех $x, y \in b_1$ имеем

$$|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда при всех $x, y \in b_1$

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - l| + |f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Докажем, что $f(x)$ финально ограничена. Действительно, возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда существует $b(1) \in B$ такое, что при всех $x, y \in b(1)$ имеем $|f(x) - f(y)| < 1$. Зафиксируем y. Тогда при всех $x \in b(1)$

$$|f(x)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y)| \le 1 + |f(y)|.$$

В силу условия Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует $b(\varepsilon) \in B$ такое, что при всех $x, y \in b(\varepsilon)$ имеем $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Но это значит, что ε есть верхняя грань значений величины $|f(x) - f(y)|$ для всех $x, y \in b(\varepsilon)$. Используя также финальную ограниченность $f(x)$, получим

$$m(\varepsilon) = \inf_{x \in b(\varepsilon)} f(x) \in \mathbb{R}, \quad M(\varepsilon) = \sup_{x \in b(\varepsilon)} f(x) \in \mathbb{R},$$
$$\varepsilon \geq \sup_{x,y \in b(\varepsilon)} |f(x) - f(y)| = \sup_{x,y \in b(\varepsilon)} (f(x) - f(y)) =$$
$$= \sup_{x \in b(\varepsilon)} f(x) - \inf_{y \in b(\varepsilon)} f(y) = M(\varepsilon) - m(\varepsilon).$$

Положим $\varepsilon = \varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Тогда можно считать, что $b\left(\frac{1}{n_2}\right) \subset b\left(\frac{1}{n_1}\right)$ при всех $n_2 > n_1$. Действительно, если, например, $b\left(\frac{1}{2}\right) \not\subset b(1)$, то вместо $b\left(\frac{1}{2}\right)$ можно взять b_3 из условия $b_3 \subset b(1) \cap b\left(\frac{1}{2}\right)$ и т.д. В силу этого имеем

$$m\left(\frac{1}{n_1}\right) \leq m\left(\frac{1}{n_2}\right), \quad M\left(\frac{1}{n_1}\right) \geq M\left(\frac{1}{n_2}\right).$$

Кроме того, при всех $x \in b(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$m(\varepsilon) \leq f(x) \leq M(\varepsilon).$$

Каждому $\varepsilon = \varepsilon_n > 0$ соответствует свой отрезок $I_n = \left[m\left(\frac{1}{n}\right), M\left(\frac{1}{n}\right)\right]$. Вся совокупность отрезков I_n образует последовательность стягивающихся отрезков, так как при $\varepsilon_n > \varepsilon_s$

$$m(\varepsilon_n) \leq m(\varepsilon_s) \leq M(\varepsilon_s) \leq M(\varepsilon_n),$$

т.е. $I_s \subset I_n$.

По лемме о системе стягивающихся вложенных отрезков существует точка l такая, что для любого номера n имеем $l \in I_n$.

Докажем, что

$$\lim_B f(x) = l.$$

Для этого нам надо доказать, что для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует $b_1(\varepsilon_0) \in B$ такое, что при всех $x \in b_1(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$|f(x) - l| < \varepsilon_0.$$

В качестве $b_1(\varepsilon_0)$ возьмем $b\left(\frac{1}{n}\right)$, где $n > 2\varepsilon_0^{-1}$. Тогда при всех $x, y \in b_1(\varepsilon_0)$ по условию Коши выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

И при всех $x \in b_1(\varepsilon_0)$ имеем

$$m\left(\frac{1}{n}\right) \le f(x) \le M\left(\frac{1}{n}\right).$$

Кроме того, $l \in I\left(\frac{1}{n}\right)$. Это значит, что

$$m\left(\frac{1}{n}\right) \le l \le M\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда

$$|f(x) - l| \le M\left(\frac{1}{n}\right) - m\left(\frac{1}{n}\right) \le \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0.$$

Теорема доказана полностью.

Определение. *Две базы B_1 и B_2 называются* **эквивалентными**, *если любое окончание базы B_1 содержится в некотором окончании базы B_2, и наоборот.*

Заметим, что для эквивалентных баз утверждения о пределах будут выполняться одновременно.

§ 5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ СХОДИМОСТИ ПО КОШИ И ПО ГЕЙНЕ

Теорема. *Сходимости функции $f(x)$ по Коши и по Гейне при $x \to x_0$ эквивалентны. Другими словами, существование предела функции по Коши при $x \to x_0$ влечет за собой существование предела функции по Гейне по той же базе и наоборот, причем в обоих случаях значения пределов совпадают.*

Доказательство. 1. Пусть существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ по Коши. Докажем, что существует соответствующий предел по Гейне.

Действительно, из условия имеем, что

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ такое, что } \forall\ x:\ 0 < |x - x_0| < \delta$$

выполняется неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, стремящаяся к x_0 при $n \to \infty$ и $x_n \neq x_0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $\delta > 0$ существует $N_1 = N_1(\delta)$ такое, что при всех $n > N_1$

$$0 < |x_n - x_0| < \delta.$$

Так как δ можно взять любым, то и для $\delta = \delta(\varepsilon)$ справедливо то же утверждение.

Нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$\forall\ n > N(\varepsilon) \text{ имеем } |f(x_n) - l| < \varepsilon.$$

Положим $N(\varepsilon) = N_1(\delta(\varepsilon))$. Тогда, ввиду того, что

$$0 < |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon),$$

имеем $|f(x_n) - l| < \varepsilon$. Тем самым прямое утверждение доказано.

2. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть для любой последовательности $\{x_n\}$ с условиями $x_n \to x_0$ и $x_n \neq x_0$ имеем $f(x_n) \to l$ при $n \to \infty$.

Далее будем рассуждать от противного. Пусть l не является пределом функции $f(x)$ по Коши. Это значит, что найдется $\varepsilon > 0$, такое, что

$$\forall\ \delta > 0\ \exists\ x:\ 0 < |x - x_0| < \delta,$$

для которого выполняется неравенство $|f(x) - l| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим последовательность $\delta_n = 1/n$. Тогда для любого n найдется число x_n такое, что: 1) $x_n \neq x_0$, 2) $|x_n - x_0| < 1/n$, но 3) $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Заметим, что числа $\{x_n\}$ образуют последовательность, сходящуюся к x_0. Следовательно, в силу сходимости по Гейне при $n \to \infty$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Но тогда, переходя к пределу в неравенстве $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$, будем иметь $0 = |l - l| \geq \varepsilon$. Полученное противоречие устанавливает справедливость второго утверждения теоремы. Доказательство закончено.

§ 6. ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Напомним, что сложной функцией $h(x)$ называют функцию вида

$$h(x) = f(g(x)),$$

где $f(y)$ и $g(x)$ — некоторые функции такие, что область определения $f(y)$ содержит *все* множество значений, принимаемых функцией $g(x)$. Функцию $h(x)$ еще называют композицией (или суперпозицией) функций f и g. Символически это записывается так: $h = f \circ g$.

Следовало бы ожидать, что справедлива следующая **теорема:** *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = l$. *Тогда имеем*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l.$$

Такое утверждение справедливо, например, для непрерывных функций. Однако в общем случае эта теорема неверна.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = 0.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad f(g(x)) = 1 \ \forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1.$$

Тем не менее, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(y) = f(y_0)$. *Тогда имеем*

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(y_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta$ имеем $|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$. Далее, для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y: $|y - y_0| < \delta_1$ имеем $|f(y) - f(y_0)| < \varepsilon$. Для этого δ_1 существует $\delta = \delta(\delta_1) > 0$ такое, что при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta$ имеем

$$|g(x) - y_0| < \delta_1.$$

Полученное δ нам и требовалось найти.

Теперь при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta$ имеем $|g(x) - y_0| < \delta_1$. Следовательно, $|f(g(x)) - f(y_0)| < \varepsilon$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{y\to a} f(y) = f(a)$. *Тогда имеем*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. По условию имеем:

1) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y с условием $|y - a| < \delta_1$ выполняется неравенство $|f(y) - f(a)| < \varepsilon$;

2) существует $n_0 = n_0(\delta_1)$ такое, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \delta_1$.

Положим $n_0 = n_0(\delta_1(\varepsilon))$. Тогда при всех $n > n_0$ имеем

$$|x_n - a| < \delta_1 \text{ и } |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon.$$

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, *причем для всех* x *из некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *имеем* $g(x) \neq y_0$, *и пусть*

$$\lim_{y\to y_0} f(y) = l.$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = l.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(g(x)) - l| < \varepsilon.$$

По условию имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y с условием $0 < |y - y_0| < \delta_1$ выполняется неравенство

$$|f(y) - l| < \varepsilon.$$

Для заданного $\delta_1 > 0$ имеем также, что существует $\delta_2 = \delta(\delta_1) > 0$ такое, что при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $|g(x) - y_0| < \delta_1$. И, кроме того, по условию существует $\delta_3 > 0$ такое, что при всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta_3$ справедливо неравенство $g(x) \neq y_0$. Тогда возьмем

$$\delta = \min(\delta_3, \delta_2(\delta_1(\varepsilon))).$$

Получим, что при этой величине δ выполняется требуемое неравенство. Теорема 3 доказана.

Пусть теперь $f(x)$ имеет предел по базе B. В каком случае сложная функция $h(t) = f(g(t))$ по некоторой другой базе D имеет тот же предел? Другими словами, когда в функции, стоящей под знаком предела, разрешается делать замену переменной x на новую переменную t с соответствующей заменой базы B на новую базу D так, чтобы значение предела сохранялось? Здесь имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $\lim\limits_{B} f(x) = l$. *Тогда для того чтобы существовал*

$$\lim_{D} f(g(t)) = l,$$

достаточно, чтобы при отображении $x = g(t)$ каждое окончание b базы B содержало (целиком !) образ некоторого окончания d базы D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу определения предела функции по базе B имеем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует окончание $b = b(\varepsilon) \in B$ такое, что при всех $x \in b$ имеем $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Из условия теоремы следует, что существует окончание $d \in D$ такое, что $g(d) \subset b$, и, следовательно, для любого $t \in d$

$$|f(g(t)) - l| < \varepsilon,$$

что и означает справедливость утверждения теоремы. Доказательство закончено.

Примеры. 1. Пусть

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l, \quad x = \frac{1}{t}.$$

Тогда
$$\lim_{t\to 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = l.$$

Действительно, любое окончание $b = \{x \mid \ |x| > c\}$ базы B $(x \to \infty)$ содержит целиком образ окончания $d = \{t \mid \ |t| < 1/c\}$ базы D $(t \to 0)$.

2. Пусть
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0, \end{cases}$$

и $g(t) \equiv 0$. Тогда
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \text{ но } \lim_{t\to 0} f(g(t)) = 1,$$

т.е. сложная функция имеет другой предел. В этом случае окончания $b_\delta \in B$ $(x \to 0)$ имеют вид $0 < |x| < \delta$, но образ любого окончания $d \in D$, $d = \{t \mid \ 0 < |t| < \delta_1\}$, имеет вид $x \equiv 0$, т.е. в окончании b_δ базы B не содержится образ ни одного окончания базы D, т.е. *не выполнены* условия теоремы 1.

3. Пусть $f(x) \to l$ при $x \to a$ и $g(t) \to a$ при $t \to b$, причем $g(t) \neq a$ в некоторой проколотой окрестности точки b. Тогда для сложной функции $h(t)$ имеем $h(t) = f(g(t)) \to l$ при $t \to b$.

Действительно, каждое окончание базы $x \to a$ представляет собой некоторую проколотую окрестность точки $x = a$. Но в силу условия $g(t) \to a$ и $g(t) \neq a$ при $t \to b$ эта окрестность содержит образ некоторой проколотой окрестности точки $t = b$ при отображении $x = g(t)$. Таким образом, здесь выполнены условия теоремы 1, и поэтому $h(t) \to l$ при $t \to b$, что и требовалось доказать.

Доказанные нами теоремы применяются при вычислении пределов функций.

4. При $x \to 0$ имеем
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x + 1} \to \frac{0^2 + 2 \cdot 0 + 1}{0^3 + 0 + 1} = 1.$$

5. При $x \to 2$ имеем
$$f(x) \to \frac{2^2 + 2 \cdot 2 + 1}{2^3 + 2 + 1} = \frac{9}{11}.$$

6. При $x \to \infty$ имеем
$$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \to 0.$$

§ 7. ПОРЯДОК БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ФУНКЦИИ

Определение 1. *Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ бесконечно малые функции по базе B. Тогда, если $\alpha(x)$ представлена в виде*

$$\alpha(x) = \beta(x)\gamma(x),$$

то говорят, что $\alpha(x)$ **имеет больший (или более высокий) порядок малости, чем $\beta(x)$ или $\gamma(x)$.**

Определение 2. *Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются* **эквивалентными** *(по базе B), если разность*

$$\delta(x) = \alpha(x) - \beta(x)$$

имеет более высокий порядок малости, чем $\alpha(x)$ (или $\beta(x)$). В этом случае пишут: $\alpha \sim \beta$ (по базе B).

Утверждение 1. *Следующие утверждения эквивалентны: 1) $\alpha \sim \beta$ (по базе B); 2) $\frac{\beta}{\alpha} \sim 1$ (по базе B), $\frac{\alpha}{\beta} \sim 1$ (по базе B).*

Доказательство. 1) По условию $\delta = \alpha - \beta$ имеет более высокий порядок малости, чем α, т.е. $\delta = \alpha\gamma$, где γ — бесконечно малая функция. Следовательно, имеем $\beta = \alpha - \delta$,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha - \delta}{\alpha} = \frac{\alpha(1-\gamma)}{\alpha} = 1 - \gamma \to 1.$$

2) Обратное утверждение доказывается аналогично.

Определение 3. *Пусть функция $g(x)$ не обращается в нуль на некотором окончании базы B.*

1. Если функция $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ финально ограничена (по базе B), то пишут

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{(по базе } B).$$

Читается: f есть O большое от g по базе B. Или пишут так:

$$f(x) \ll g(x) \quad \text{(по базе } B).$$

В случае, когда $f(x) \ll g(x) \ll f(x)$, говорят, что **функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый порядок по базе B.**

2. Если функция $h(x)$ — бесконечно малая, то пишут $f(x) = o(g(x))$. Читается: f есть o малое от g.

3. Если существуют число $\delta > 0$ такое, что для любого окончания b базы B найдется $x \in b$ с условием $|h(x)| > \delta > 0$, то пишут

$$f(x) = \Omega(g(x)) \quad \text{(по базе } B).$$

Читается: f есть омега от g (по базе B).

4. Функция $f(x) = O(x^m)$ при $x \to 0$ называется **бесконечно малой порядка** *m.*

Знаки $O(g)$, $o(g)$, $\Omega(g)$ предложены Э. Ландау, а знак $\ll$ ввел И. М. Виноградов.

Примеры. 1. При $x \to \infty$
$$\frac{x+1}{x+2} = O(1).$$
2. При $x \to \infty$
$$\frac{\sin x}{x} = o(1), \quad \frac{\sin x}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{\sin x}{x} = \Omega\left(\frac{1}{x}\right).$$
3. При $x \to 0+$ имеем $\sqrt{x} - x \sim \sqrt{x}$.
/vskip5mm
4. При $x \to +\infty$ имеем $\sqrt{x} - x \sim -x$.

Глава IV
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Лекция 12

§ 1. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* **непрерывной в точке** x_0, *если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

1) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall\ x\colon\ |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$;

4) $f(x) = f(x_0) + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — *бесконечно малая функция при* $x \to x_0$, $\alpha(x_0) = 0$;

5) *для любого* $\varepsilon > 0$ *имеем:* ε*-окрестность точки* $f(x_0)$ *содержит образ (при отображении* f*) некоторой окрестности точки* x_0.

Эквивалентность этих определений следует из доказанных ранее теорем о пределах.

Определение 2. *Функция называется* **непрерывной справа**, *если*

$$f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0);$$

непрерывной слева, *если*

$$f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Утверждение 1. *Для того чтобы $f(x)$ была непрерывной в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была одновременно непрерывна справа и слева.*

Доказательство. Необходимость. Если $f(x)$ непрерывна, то $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x: $|x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Но тогда при всех x: $-\delta < x - x_0 < 0$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $f(x)$ непрерывна слева. Непрерывность справа устанавливается аналогично.

Достаточность. Функция $f(x)$ непрерывна справа и слева при $x \to x_0$. Тогда

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0\ \forall\ x:\ 0<x-x_0<\delta_1\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon;$$
$$\exists\ \delta_2=\delta_2(\varepsilon)>0\ \forall\ x:\ -\delta_2<x-x_0<0\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существет $\delta > 0$ такое, что при всех x: $|x - x_0| < \delta$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Утверждение доказано.

Пример. Пусть $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$. Тогда функция

$$F(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n f(n) - f(x) \sum_{a<n\leq x} c_n$$

тоже непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$ (непрерывность в концевых точках отрезка понимается как непрерывность справа или слева).

Действительно, имеем: функция $F(x)$ непрерывна при $x = x_0$, где x_0 — нецелое число, поскольку в некоторой окрестности этой точки $G(x) = \sum\limits_{a<n\leq x} c_n f(n)$, $A(x) = \sum\limits_{a<n\leq x} c_n$ — постоянные. Пусть x_0 — целое число. Тогда

$$F(x_0+) = \lim_{x\to x_0+} F(x) = \sum_{a<n\leq x_0} c_n f(n) - f(x_0) \sum_{a<n\leq x_0} c_n = F(x_0),$$
$$F(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} F(x) = \sum_{a<n\leq x_0-1} c_n f(n) - f(x_0) \sum_{a<n\leq x_0-1} c_n = F(x_0).$$

В силу предыдущего утверждения $F(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Свойства непрерывных функций вытекают из соответствующих свойств пределов.

Пусть f, g непрерывны в точке x_0. Тогда в точке x_0 имеем:

а) $c_1 f + c_2 g$ непрерывна для всех $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;

б) fg непрерывна;

в) f/g непрерывна, если $g(x_0) \neq 0$;

г) если $f(x_0) \neq 0$, то существует $\delta > 0$ такое, что

$$f(x)f(x_0) > 0 \quad \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

(т.е. $f(x)$ сохраняет знак);

д) $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки x_0.

е) если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

§ 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Перечислим элементарные функции.

1. $P(x)$ — многочлен, $P(x) = a_0x^n + \cdots + a_n$.
2. Рациональная функция $f(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x)$, $Q(x)$ — многочлены.
3. Показательная функция $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Степенная функция $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.
5. Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
6. Все тригонометрические функции.
7. Всевозможные суперпозиции всех этих функций.

Эти функции носят название элементарных потому, что только они рассматриваются в рамках элементарной математики. Описание их функциональных свойств существенным образом опирается на определение понятий показательной, степенной и логарифмической функций, а также на определения функций синус и косинус от вещественного аргумента. Следует сказать, что в элементарной математике свойства перечисленных функций устанавливаются, в основном, описательно, исходя из наглядных арифметических и геометрических соображений. В курсе математического анализа эти функции используются главным образом в качестве материала для применения общей теории, и мы могли бы оставаться на данной "наивной" точке зрения на них. Однако средства математического анализа позволяют дать вполне строгое определение всех основных элементарных функций. Для показательной, логарифмической и степенной функций это будет сделано нами сразу после изучения свойств монотонных функций. Несколько сложнее ситуация с тригонометрическими функциями, поскольку их определение должно опираться на понятие длины дуги окружности или на понятие степенного ряда, которые будут изучаться нами лишь во второй и третьей частях курса. Пока же, отвлекаясь от строгих определений и опираясь на основные функциональные свойства, мы докажем непрерывность показательной функции $y = a^x$ и функции $y = \sin x$.

Утверждение 1. *При любом $x_0 \in \mathbb{R}$ функция $y = a^x$ непрерывна.*

Доказательство. Пусть $a > 1$. Тогда надо доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x

с условием $|x - x_0| < \delta$ имеем $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$, или, что то же самое, $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon a^{-x_0} = \varepsilon_1$. Заметим, что можно ограничиться случаем $\varepsilon_1 < 1$. В качестве $\delta(\varepsilon)$ мы возьмем число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что из неравенства $|x - x_0| < \delta_1$ следует неравенство $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon_1$.

Далее положим $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon_1) = \frac{\varepsilon_1}{a+1}$.

Имеем $-\delta_1 < x - x_0 < \delta_1$. Так как $a > 1$, то

$$a^{-\delta_1} < a^{x-x_0} < a^{\delta_1},$$

$$a^{-\delta_1} - 1 < a^{x-x_0} - 1 < a^{\delta_1} - 1.$$

Сначала докажем, что $a^{\delta_1} - 1 < \varepsilon_1$. Положим

$$N = \left[1/\delta_1\right] = \left[\frac{a+1}{\varepsilon_1}\right] \geq \left[\frac{a+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right] = \left[\frac{a}{\varepsilon_1}\right] + 1 > \frac{a}{\varepsilon_1}.$$

Тогда $1/\delta_1 \geq N$, т.е. $\delta_1 \leq 1/N$.

Так как

$$(1+\varepsilon_1)^N > 1 + \varepsilon_1 N > 1 + \varepsilon_1 \frac{a}{\varepsilon_1} > a,$$

то

$$1 + \varepsilon_1 > a^{1/N} \geq a^{\delta_1}.$$

Отсюда следует, что

$$a^{\delta_1} - 1 < \varepsilon_1, \quad a^{-\delta_1} > \frac{1}{1+\varepsilon_1} = 1 - \frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1} > 1 - \varepsilon_1.$$

Окончательно имеем

$$-\varepsilon_1 < a^{-\delta_1} - 1 < a^{x-x_0} - 1 < a^{\delta_1} - 1 < \varepsilon_1,$$

следовательно,

$$|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon_1.$$

Тем самым доказана непрерывность $f(x) = a^x$ в точке x_0. Доказательство закончено.

Утверждение 2. *Функция* $f(x) = \sin x$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Вспомним, что $|\sin x| \le |x|$. Имеем тогда

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, и получим

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon \quad \forall\ x:\ |x-x_0| < \varepsilon.$$

Следовательно, функция $f(x) = \sin x$ непрерывна. Эти утверждения можно записать так:

$$\sin x = \sin x_0 + \alpha(x), \quad a^x = a^{x_0} + \beta(x),$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — бесконечно малые функции.

При $x \to 0$, т.е. при $x_0 = 0$, имеют место более точные соотношения, которые называются замечательными пределами:

1) $\sin x/x \sim 1$,

2) $(e^x - 1)/x \sim 1$.

Эти пределы используются далее для изучения дифференциальных свойств элементарных функций.

Лекция 13

§ 3. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Утверждение 1. *Имеют место соотношения:*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

Доказательство. а) Рассмотрим сначала случай $x \to +\infty$. В силу свойства монотонности показательной функции справедливы неравенства

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Но мы знаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

т. е. справедливы утверждения

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1 = N_1(\varepsilon):\ \forall\ n > N_1\ \Rightarrow\ \left|\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n - e\right| < \varepsilon;$$

$$\exists\ N_2 = N_2(\varepsilon):\ \forall\ n > N_2\ \Rightarrow\ \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - e\right| < \varepsilon.$$

Тогда при $n > \max(N_1, N_2)$ имеем

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < e+\varepsilon;$$

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e+\varepsilon.$$

Если $x > 1+\max(N_1,N_2) = N$, то $[x] > \max(N_1,N_2) = N-1$. Следовательно, при $x > N$ справедливы неравенства

$$e-\varepsilon < \left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e+\varepsilon.$$

Таким образом, получим

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N:\ \forall\ x > N\ \Rightarrow\ \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} - e\right| < \varepsilon.$$

Это значит, что $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \to e$ при $x \to +\infty$.

Рассмотрим теперь случай $x \to -\infty$. Положим $y = -x$. Тогда, используя теорему 4 §6 гл. III о пределе сложной функции, будем иметь

$$e = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.$$

Соединяя вместе случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, приходим к соотношению

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Утверждение а) доказано.

б) Для доказательства соотношения $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$ воспользуемся той же теоремой 4 §6 гл. III. Полагая $x = 1/y$, получим

$$e = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

в) Так как

$$(1+x)^{1/x} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} \to e \text{ при } x \to 0,$$

то из непрерывности и монотонности функции $y = e^x$ следует, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

г) Вновь воспользуемся теоремой о пределе сложной функции, полагая

$$g(x) = e^x - 1 \to 0 \text{ при } x \to 0,$$

$$f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y} \to 1 \text{ при } y \to 0,$$

и, кроме того, $f(0) = 1$.

Тогда имеем $f(g(x)) = \frac{x}{e^x-1} \to 1$ при $x \to 0$. Отсюда следует утверждение г).

Утверждение 1 полностью доказано.

Утверждение 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. При $0 < x < \pi/2$ рассмотрим сектор единичного круга, отвечающего дуге длины x, и два треугольника, один из которых вписан в сектор, а второй, прямоугольный, содержит его, имея с ним общий угол и сторону на оси абсцисс. Сравнивая площади этих фигур, имеем

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}.$$

Отсюда получим

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Последние неравенства связывают четные функции, поэтому они имеют место при $0 < |x| < \pi/2$. Так как $\cos x$ — непрерывная функция, то по теореме о переходе к пределу в неравенствах имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство закончено.

Примеры вычисления пределов.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$.

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha\ln(1+x)} - 1}{x} = \frac{e^{\alpha x + o(x)} - 1}{x} =$$
$$= \frac{1 + \alpha x + o(x) - 1}{x} = \alpha + o(1) \to \alpha \text{ при } x \to 0.$$

Этот прием называется заменой бесконечно малой функции на эквивалентную ей.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{2\left(\frac{x}{2} + o(x)\right)^2}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1).$$

Таким образом:

1) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ при $x \to 0$;

2) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$. Положим $x_n = \frac{x}{n} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда по теореме о пределе сложной функции имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left((1 + x_n)^{1/x_n}\right)^x = e^{x\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}} = e^x.$$

§ 4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НА МНОЖЕСТВЕ

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* **непрерывной на множестве** *A, если она непрерывна во всякой точке $x \in A$.*

Если не все точки множества A входят в него с некоторой окрестностью, то это определение чуть-чуть меняется, например:

Определение 1а. *Функция $f(x)$ называется* **непрерывной на отрезке** *$I = [a, b]$, если она непрерывна при всех x_0 с условием $a < x_0 < b$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.*

Определение 2. *Функция $f(x)$ на множестве A называется*

а) **неубывающей** *($f \uparrow$ на A), если $f(a) \leq f(b)$ при всех значениях $a, b \in A$, $a < b$;*

б) **невозрастающей** *($f \downarrow$ на A), если $f(a) \geq f(b)$ при всех значениях $a, b \in A$, $a < b$;*

в) **(строго) возрастающей** *($f \uparrow\uparrow$), если $f(a) < f(b)$ при всех значениях $a, b \in A$, $a < b$;*

г) **(строго) убывающей** *($f \downarrow\downarrow$), если $f(a) > f(b)$ при всех значениях $a, b \in A$, $a < b$.*

Если $f(x)$ неубывающая, или невозрастающая, или возрастающая, или убывающая на A, то $f(x)$ называется **монотонной функцией** *на A.*

Определение 3. *Если в своей области определения функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то она называется* **разрывной** *в точке x_0. Точка x_0 называется* **точкой разрыва** *$f(x)$.*

Определение 4. *Точка x_0 называется* **точкой разрыва первого рода** *функции $f(x)$, если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$. В противном случае точка разрыва функции $f(x)$ называется* **точкой разрыва второго рода**.

Примеры. 1. $y = \{x\}$ имеет разрывы первого рода в целых точках.

2. $y = \sin 1/x$ в точке $x_0 = 0$ имеет разрыв второго рода. (Рассмотреть две последовательности $x_n = \frac{1}{\pi n}$, $y_n = \frac{1}{\pi/2 + \pi n}$.)

Определение 5. *Разрыв первого рода в точке x_0 называется* **устранимым**, *если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, но $l \neq f(x_0)$.*

Этот разрыв устраняется, если по-новому определить (или, возможно, доопределить) $f(x)$ в точке $x = x_0$, положив $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Если $f(x) \to l$ при $x \to x_0$, но $f(x)$ не определена при $x = x_0$, то говорят также, что имеет место устранимый разрыв. В противном случае разрыв первого рода называется **неустранимым**.

Т е о р е м а 1 (о точках разрыва монотонной функции на отрезке). *Пусть функция $f(x)$ — монотонная на отрезке $[a,b]$. Тогда она может иметь на этом отрезке разрывы только первого рода. Более того, при всех $x_0 \in [a,b]$ имеем*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) = l_2,$$
$$l_2 \le f(x_0) \le l_1,$$

если $f(x)$ не убывает. Если же функция $f(x)$ не возрастает, то

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \sup_{x>x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \inf_{x<x_0} f(x) = l_2,$$
$$l_1 \le f(x_0) \le l_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим только один случай, когда функция $f(x)$ не убывает ($f \uparrow$) на $[a,b]$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Докажем теорему в этом случае:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x) = l_1.$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x) = l_2.$$

Так как l_1 — точная нижняя грань множества значений $f(x)$ при $x > x_0$, то:

1) $f(x) \ge l_1 \ \forall \ x > x_0$;

2) $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ x_1 > x_0$ такое, что $f(x_1) < l_1 + \varepsilon$.

В силу того, что $f(x)$ неубывающая функция, имеем

$$\forall x: \ \ x_0 < x \le x_1 \ \ \Rightarrow \ \ l_1 \le f(x) < l_1 + \varepsilon,$$

следовательно, $l_1 = \lim_{x\to x_0+} f(x)$. Имеем еще, что число $f(x_0)$ есть нижняя грань для $\{f(x)\}$ при $x > x_0$, откуда $f(x_0) \le l_1$.

Аналогично $f(x_0) \ge l_2$, откуда $l_2 \le f(x_0) \le l_1$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2 (критерий непрерывности монотонной функции). *Пусть $f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a,b]$. Тогда для непрерывности ее на этом отрезке необходимо и достаточно, чтобы для любого $l \in [f(a), f(b)]$ нашлась точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) = l$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим только случай неубывающей функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Необходимость. Возьмем любое число $l \in [f(a), f(b)]$. Рассмотрим множество $X = \{x\} \subset [a, b]$, для которых $f(x) \geq l$, и пусть $x_0 = \inf X$. Тогда, поскольку $f(x)$ неубывающая функция, имеем

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) = l_1 \geq l.$$

При $x < x_0$ (если $x_0 \neq a$) $f(x) < l$. Отсюда

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = l_2 \leq l,$$

т.е. $l_2 \leq l \leq l_1$.

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то $f(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. $l_2 = l_1 = f(x_0)$. Следовательно,

$$l = l_2 = l_1 = f(x_0).$$

Если же $x_0 = a$, то

$$f(a) \leq l < l_1,$$

но из непрерывности функции $f(x)$ в точке a слева следует, что $f(a) = l_1$, а значит, $l = f(a) = l_1$.

Достаточность. Будем рассуждать от противного. Пусть $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0 и $f(x)$ не убывает на $[a, b]$. Тогда для значений $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $l_2 = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ выполняются неравенства $l_2 < l_1$ и $l_2 \leq f(x_0) \leq l_1$.

Возьмем $l \in (l_2, l_1)$ и $l \neq f(x_0)$. Имеем:

$$\begin{aligned} l &> f(x) \text{ при } x < x_0, \\ l &< f(x) \text{ при } x > x_0, \\ l &\neq f(x) \text{ при } x = x_0, \end{aligned}$$

т.е. функция не принимает значение l на $[a, b]$. Таким образом мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

Т е о р е м а 3 (об обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ строго возрастает и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда существует функция $x = g(y)$, строго возрастающая, определенная на отрезке $[f(a), f(b)]$ и непрерывная на нем, такая, что $g(f(x)) = x$,* т.е. $g = f^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Отображение $[a, b] \xrightarrow[f]{} [f(a), f(b)]$ инъективно, где $[a, b] = I_1$, $[f(a), f(b)] = I_2$, т.е. является вложением. Другими словами, для любых точек $x_1 \neq x_2$ имеем неравенство $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2. Отображение f сюръективно, т.е. является накрытием. Это имеет место по теореме 2, утверждающей, что для любого числа $l \in [f(a), f(b)]$ найдется точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) = l$.

Следовательно, f есть биекция, т.е. f устанавливает взаимно однозначное соответствие между I_1 и I_2.

Тогда существует обратное отображение g, т.е. обратная функция $x = g(y)$.

1. Эта функция монотонно возрастает, так как если $y_1 > y_2$, то $g(y_1) = x_1$ и $g(y_2) = x_2$, причем $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$. Отсюда $x_1 > x_2$, поскольку $f(x)$ монотонно возрастает.

2. Эта функция $g(y)$ принимает все значения из $[a, b]$, так как для каждого x существует y такое, что $g(y) = x$, и этим y является число $f(x)$.

Отсюда в силу теоремы 2 имеем, что функция $g(y)$ непрерывна на отрезке I_2.

Теорема полностью доказана.

Используя доказанные выше теоремы о монотонных функциях, снова обратимся к изучению элементарных функций. Прежде всего, заметим, что при натуральном m функция $f(x) = x^m = \underbrace{x \dots x}_{m}$ является непрерывной и строго возрастающей при $x \geq 0$.

Действительно, если $a > b > 0$, то

$$a^m > a^{m-1}b > a^{m-2}b^2 > \dots > ab^{m-1} > b^m.$$

Непрерывность же функции $f(x) = x^m$ следует из того, что она является произведением m непрерывных функций вида $y = x$.

По теореме 3 при всех $x \geq 0$ для нее существует обратная функция $g(x)$, которая тоже непрерывна и строго возрастает. Для нее, как известно из курса элементарной математики, используется обозначение $g(x) = \sqrt[m]{x}$ и она называется операцией извлечения корня m-й степени. Зафиксируем теперь число $x > 0$ и натуральное m и рассмотрим числа $y = \sqrt[m]{x}, z = \sqrt[m]{x^n}$. Тогда $y^m = x$, $y^{mn} = x^n$, $z^m = x^n$, откуда имеем $(y^n)^m = z^m$ и $y^n = z$, т.е. $\left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \sqrt[m]{x^n}$. Это значит, что операция извлечения корня и возведения в целую степень перестановочны, и для числа z возможно использовать обозначения вида $z = x^{n/m}$ и $z^{-1} = x^{-n/m}$.

Пусть теперь $r = a/b$ и $r_1 = a_1/b_1$ рациональные числа, причем a, a_1 — целые числа, а b, b_1 —натуральные числа. Положим $d = x^{1/(bb_1)}$, будем иметь

$$x^r x^{r_1} = d^{ab_1} d^{a_1 b} = d^{ab_1 + a_1 b} = x^{\frac{ab_1 + a_1 b}{bb_1}} = x^{r + r_1}.$$

Аналогично, получим

$$(x^r)^{r_1} = \left(d^{ab_1}\right)^{\frac{a_1}{b_1}} = d^{aa_1} = x^{\frac{aa_1}{bb_1}} = x^{rr_1}.$$

Таким образом, для рациональной степени фиксированного числа x выполняются те же функциональные соотношения, что и для целой степени того же числа x.

Далее, используя прежние обозначения, допустим, что $r > r_1$ и $x > 1$. Тогда $d > 1$, $ab_1 > a_1 b$ и $d^{ab_1} > d^{a_1 b}$, $x^r > x^{r_1}$.

Следовательно, при возрастании рационального числа r при $x > 1$ значения x^r возрастают. Далее положим $x = e$. Ранее для любого натурального b нами были получены неравенства

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)^b < e < \left(1+\frac{1}{b}\right)^{b+1}.$$

Отсюда следует, что

$$e^{\frac{1}{b+1}} < 1+\frac{1}{b} < e^{\frac{1}{b}}.$$

Выполняя очевидные преобразования, получим

$$e^{\frac{1}{b+1}} < 1+\frac{1}{b} = \frac{1}{1-\frac{1}{b+1}}, \quad e^{-\frac{1}{b+1}} > 1-\frac{1}{b+1}.$$

Далее, пусть $|r| < 1$ и $r = m/n$. Тогда $|m| < n$. Применяя неравенство Бернулли, приходим к неравенству

$$(e^{\pm 1/n})^{|m|} \geq (1 \pm 1/n)^{|m|}, \quad e^{m/n} = e^r \geq 1+r.$$

Отсюда в случае $0 < r < 1$ будем иметь

$$e^{-r} > 1-r, \quad e^r < \frac{1}{1-r} = 1+\frac{r}{1-r}.$$

Пусть теперь α — иррациональное число, и пусть рациональные числа r_1 и r_2 удовлетворяют неравенствам $r_1 < \alpha < r_2$. Тогда если $\{r_1\}$ — множество всех рациональных чисел, определяемых условием $r_1 < \alpha$, то соответствующее ему множество чисел $M_1 = \{e^{r_1}\}$ ограничено сверху числом e^{r_2}. Следовательно, существует число $\gamma_1 = \sup\limits_{r_1<\alpha}\{e^{r_1}\}$. В силу аналогичных соображений относительно множества $M_2 = \{e^{r_2}\}$ существует число $\gamma_2 = \inf\limits_{r_2>\alpha}\{e^{r_2}\}$.

Покажем, что на самом деле имеет место равенство $\gamma_1 = \gamma_2$. Для этого сначала заметим, что каждое из чисел e^{r_2} является верхней гранью множества M_1, в то время как γ_1 есть точная верхняя грань этого множества. Следовательно, для любого $r_2 > \alpha$ выполнено неравенство $\gamma_1 \leq e^{r_2}$. Это значит, что γ_1 есть нижняя грань множества M_2. Но так как γ_2 — это точная нижняя грань данного множества, то $\gamma_1 \leq \gamma_2$.

Выберем теперь некоторые значения r_1 и r_2 с условием

$$[\alpha] < r_1 < \alpha < r_2 < [\alpha] + 1.$$

Тогда справедливы неравенства

$$e^{r_1} \le \gamma_1 \le \gamma_2 \le e^{r_2} \le e^{[\alpha]+1},$$

$$0 \le \gamma_2 - \gamma_1 \le e^{r_2} - e^{r_1} = e^{r_1}(e^{r_2 - r_1} - 1) \le e^{[\alpha]+1} \frac{r_2 - r_1}{1 - (r_2 - r_1)}.$$

Но поскольку число $\gamma_2 - \gamma_1$ — фиксировано, а число $r_2 - r_1 > 0$ может быть сколь угодно малым (например, в качестве r_1 и r_2 можно выбрать любые округления числа α с избытком и недостатком), то отсюда следует, что $\gamma_2 - \gamma_1 = 0$, т.е. $\gamma_2 = \gamma_1$. Указанную величину $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ мы возьмем в качестве значения степени e^α, т.е. мы по определению полагаем

$$\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = e^\alpha.$$

Тем самым мы определили функцию $y = e^x$ для всех возможных вещественных значений x.

Осталось показать, что эта функция строго возрастает и удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}.$$

Прежде всего следует сказать, что из ее определения вытекает, что если $r_1 < \alpha < r_2$, где r_1 и r_2 — рациональные числа, то имеет место неравенство

$$e^{r_1} < e^\alpha < e^{r_2}.$$

Но тогда, если $\alpha < \beta$, то на интервале (α, β) найдется рациональное число r_3 такое, что имеет место неравенство

$$e^\alpha < e^{r_3} < e^\beta.$$

Таким образом, строгая монотонность функции $y = e^x$ установлена. Пусть теперь $\mu = \alpha + \beta$. Заметим, что если μ — рациональное число, то и в этом случае при рациональных r_1 и r_2 имеем

$$e^\mu = \sup_{r_1 < \mu} e^{r_1} = \inf_{r_2 > \mu} e^{r_2}.$$

Доказательство последнего равенства по существу повторяет рассуждения, проведенные нами выше для иррационального числа μ.

Представим теперь число r_1 в виде $r_1 = r_1' + r_1''$, где $r_1' < \alpha$ и $r_1'' < \beta$, а число r_2 — в виде $r_2 = r_2' + r_2''$, где $r_2' > \alpha$ и $r_2'' > \beta$.

Тогда будем иметь

$$e^{r_1} = e^{r_1'+r_1''} < e^\alpha e^\beta < e^{r_2'+r_2''} = e^{r_2}, \quad e^{r_1} < e^\mu < e^{r_2}.$$

Отсюда следует, что

$$h = |e^\mu - e^\alpha e^\beta| < e^{r_2} - e^{r_1}.$$

Но ранее мы уже показали, что данное неравенство при произвольных рациональных значениях r_1 и r_2 с условием $r_1 < \mu < r_2$ влечет за собой равенство $h = 0$. Другими словами, это означает, что

$$e^\mu = e^{\alpha+\beta} = e^\alpha e^\beta,$$

и тем самым все требуемые свойства функции $y = e^x$, определенной ранее на всей вещественной оси, полностью доказаны.

Тогда у функции $f(x) = e^x$, отображающей вещественную ось $\mathbb{R}$ на луч $(0, +\infty)$, существует обратная функция $g(x)$, отображающая луч $(0, +\infty)$ на всю вещественную ось $\mathbb{R}$. Эта функция называется *натуральным логарифмом* и обозначается так: $g(x) = \ln x$. Она всюду непрерывна, строго возрастает и удовлетворяет условию: $x = e^{\ln x}$. Отсюда имеем

$$e^{\ln xy} = xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}.$$

Поэтому справедливо равенство $\ln xy = \ln x + \ln y$. Тем самым установлено основное свойство функции $y = \ln x$.

Обратимся теперь к степенной функции $y = x^\alpha$, где $x > 0$. Для рациональных значений α ее свойства уже описаны при определении показательной функции. Если же α — иррациональное число, то тогда эту функцию мы можем определить равенством

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

В этом случае все ее элементарные свойства следуют из уже рассмотренных свойств показательной и логарифмической функций.

Здесь уместно снова подчеркнуть, что строгое обоснование свойств тригонометрических функций в этой части курса по указанным ранее причинам проводиться нами не будет.

В заключение рассмотрим несколько примеров на применение доказанных выше теорем.

Примеры. 1. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ — непрерывные на всей области их определения. Это утверждение является прямым следствием доказанных выше теорем.

2. Существует единственная функция $x = x(y)$ $(-\infty < y < +\infty)$, удовлетворяющая *уравнению Кеплера*

$$x - \varepsilon \sin x = y \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Действительно: 1) функция $y(x)$ монотонно возрастает, так как при $x_1 > x_2$

$$y_1 - y_2 = x_1 - x_2 - \varepsilon(\sin x_1 - \sin x_2) = x_1 - x_2 - 2\varepsilon \sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$\left|2\varepsilon \sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leq 2\varepsilon\left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right| = \varepsilon(x_1 - x_2),$$

$$y_1 - y_2 \geq (1 - \varepsilon)(x_1 - x_2) > 0;$$

2) $y(x) = x - \varepsilon \sin x$ — функция непрерывная.

По теореме 3 отсюда следует, что на любом отрезке $a \leq y \leq b$ существует единственная непрерывная функция $x(y)$, удовлетворяющая уравнению Кеплера.

Лекция 14

§ 5. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ НА ОТРЕЗКЕ

Теорема 1 (об обращении функции в нуль). *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$ и на концах этого отрезка она принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b) < 0$. Тогда существует $c \in (a,b)$ такое, что*

$$f(c) = 0.$$

Доказательство проведем методом Больцано. Отрезок $J_0 = [a,b]$ разделим пополам точкой $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1) = 0$, то все доказано. Если нет, то $f(x_1)$ имеет знак, отличный либо от $f(a)$, либо от $f(b)$. Обозначим через J_1 тот из двух отрезков $[a,x_1]$ или $[x_1,b]$, на концах которого $f(x)$ принимает значения разных знаков. Теперь разделим J_1 пополам точкой x_2 и выберем отрезок J_2 так, чтобы на концах его $f(x)$ имела значения разных знаков. Поступая так и далее, получим последовательность вложенных отрезков $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots$ Это последовательность стягивающихся отрезков, так как длина $J_n = \delta_n = \frac{\delta_0}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть x_0 — общая точка всех отрезков. Тогда если $J_n = [a_n, b_n]$, то $a_n \to x_0$ и $b_n \to x_0$ при $n \to \infty$, и отсюда

$$f(a_n) \to f(x_0) \text{ и } f(b_n) \to f(x_0) \text{ при } n \to \infty.$$

Так как $f(a_n)f(b_n) < 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = f^2(x_0) \leq 0$. Следовательно, $f(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (о промежуточном значении непрерывной функции). *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ и пусть c — любое число, удовлетворяющее условию*

$$\alpha \leq c \leq \beta, \text{ если } \alpha \leq \beta,$$
$$\beta \leq c \leq \alpha, \text{ если } \beta \leq \alpha.$$

Тогда существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) = c$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - c$. Если $g(a)$ или $g(b) = 0$, то тогда $x_0 = a$ или $x_0 = b$. Если же $g(a)g(b) \neq 0$, то $g(a)$ и $g(b)$ имеют значения разных знаков. По теореме 1 существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $g(x_0) = 0$, откуда $f(x_0) = c$, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 3 (об ограниченности непрерывной функции). *Функция, непрерывная на $[a, b]$, ограничена на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем доказательство методом Больцано. Предположим противное, т. е. пусть $f(x)$ не ограничена. Тогда разделим отрезок $J_0 = [a, b]$ пополам. В качестве J_1 выберем ту половину, где $f(x)$ не ограничена. Снова делим пополам J_1 и выбираем в качестве J_2 ту половину, на которой $f(x)$ не ограничена. Имеем $J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots \supset J_n \supset \dots$. Получена последовательность стягивающихся отрезков. Пусть x_0 — их общая точка. В ней $f(x)$ непрерывна. Возьмем $\delta(1)$ — окрестность точки x_0, в которой $|f(x) - f(x_0)| < 1$. Тогда

$$|f(x)| = |(f(x) - f(x_0)) + f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)|$$

и $f(x)$ ограничена в $\delta(1)$-окрестности точки x_0. Поскольку $\delta(1) > 0$, то в ней целиком содержится всякий отрезок J_n, если только его длина $\delta_n = \delta_0/2^n < \delta(1)$. Но тогда $f(x)$ будет ограничена и на J_n, что противоречит построению $\{J_n\}$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 4 (о достижении непрерывной функцией точной верхней и нижней граней). *Функция, непрерывная на отрезке, достигает своей точной верхней грани и точной нижней грани,* т. е.

$$\exists\ x_1 \in [a, b] \text{ такое, что } \sup_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_1),$$
$$\exists\ x_2 \in [a, b] \text{ такое, что } \inf_{x \in [a,b]} f(x) = f(x_2).$$

Докажем теорему только для $\sup f(x)$, так как для случая $\inf f(x)$ можно рассмотреть функцию $f_1(x) = -f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. От противного. Пусть $A = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $A \neq f(x)$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда $A > f(x)$ для любого x. Но тогда $A - f(x)$ — непрерывная функция и $A - f(x) > 0$ при всех $x \in [a, b]$.

Следовательно, $g(x) = \frac{1}{A - f(x)}$ тоже непрерывна. Поэтому $g(x)$ ограничена по теореме 3 и, значит, найдется $B > 0$ такое, что

$$\frac{1}{A - f(x)} < B.$$

Отсюда

$$A - f(x) > \frac{1}{B}, \quad f(x) < A - \frac{1}{B},$$

т.е. число $A - \frac{1}{B}$ есть верхняя грань, которая меньше, чем A, но это противоречит тому, что A — наименьшая верхняя грань. Теорема доказана.

Так как для непрерывной функции $f(x)$ на отрезке точная верхняя грань и точная нижняя грань достижимы, то $A = \sup f(x)$ называют максимальным значением $f(x)$, а $B = \inf f(x)$ — минимальным значением $f(x)$ и пишут

$$A = \max_{x\in[a,b]} f(x), \quad B = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Пример. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и пусть $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. Тогда существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что выполняется равенство

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Действительно, пусть

$$m = \min\left(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\right), \quad M = \max\left(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\right).$$

Тогда, очевидно, справедливо неравенство

$$m \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} = A \le M.$$

Следовательно, в силу теоремы 2 о промежуточном значении непрерывной функции отрезок $[m, M]$ принадлежит области значений функции $f(x)$, и потому существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $f(\xi) = A$. Это и есть искомая точка.

Лекция 15

§ 6. ПОНЯТИЕ РАВНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Запишем определение функции, заданной на множестве X и непрерывной в точке $x_0 \in X$: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in X$ и $|x - x_0| < \delta$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Вообще говоря, при фиксированных $\varepsilon > 0$ у каждой точки x_0 будет свое значение величины $\delta(\varepsilon)$, т.е. $\delta(\varepsilon)$ зависит от x_0 и это можно символически записать так:

$$\delta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon, x_0).$$

Если оказалось, что для любого $\varepsilon > 0$ и всякой точки $x_0 \in X$ величина $\delta(\varepsilon)$ не зависит от x_0, то функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве X.

Запишем это определение более четко в эквивалентной форме.

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется* **равномерно непрерывной** *на* X, *если*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ такое, что}$$
$$\forall\ x_1, x_2 \in X:\ |x_1 - x_2| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема (теорема Гейне – Кантора). *Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. (От противного). Пусть $f(x)$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной на $[a, b]$. Тогда

$$\exists\ \varepsilon > 0:\ \forall\ \delta > 0:\ \exists\ \alpha, \beta \in X:\ |\alpha - \beta| < \delta \text{ и } |f(\alpha) - f(\beta)| \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательность $\delta = \delta_n = 1/n$. Каждому n тогда соответствует пара точек α_n, β_n такая, что

$$|\alpha_n - \beta_n| < 1/n, \quad |f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon.$$

Последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ являются ограниченными. По теореме Больцано–Вейерштрасса из α_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{\alpha_{n_k}\}$, т.е. $\alpha_{n_k} \to x_0 \in X$ при $k \to \infty$. Далее,

$$|\alpha_{n_k} - \beta_{n_k}| < 1/n_k,$$

следовательно, $\gamma_{n_k} = \alpha_{n_k} - \beta_{n_k}$ есть бесконечно малая последовательность и $\beta_{n_k} \to x_0$ при $k \to \infty$. Но тогда $y_k = f(\alpha_{n_k}) \to f(x_0)$, $z_k = f(\beta_{n_k}) \to f(x_0)$ при $k \to \infty$, т.е. $t_k = |y_k - z_k| \to 0$ при $k \to \infty$. Но это противоречит тому, что

$$t_k = |y_k - z_k| \geq \varepsilon,$$

так как, переходя в этом неравенстве к пределу при $k \to \infty$, получим $0 \geq \varepsilon$, что неверно. Доказательство закончено.

Доказательство теоремы Кантора проходит аналогично и для множества X, которое не обязательно является отрезком. Достаточно, чтобы множество X было ограниченным и содержало все свои предельные точки.

§ 7. СВОЙСТВА ЗАМКНУТЫХ И ОТКРЫТЫХ МНОЖЕСТВ. КОМПАКТ. ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНЫЕ НА КОМПАКТЕ

Определение 1. *Множество точек (на вещественной прямой) называется* **замкнутым**, *если оно содержит все свои предельные точки.*

Напомним, что x_0 — предельная точка множества A, если во всякой окрестности точки x_0 находится бесконечно много точек, принадлежащих A (а сама точка x_0 может принадлежать или не принадлежать A).

Определение 2. *Множество называется* **открытым**, *если каждая его точка содержится в ее δ-окрестности, целиком состоящей из точек этого множества.*

Пример. Интервал — открытое множество, а отрезок — замкнутое множество.

Определение 3. *Ограниченное замкнутое множество (на вещественной прямой) называется* **компактом**.

Утверждение 1. а) *Если A — замкнутое множество, то $A_1 = \mathbb{R} \backslash A$ открыто.*

б) *Если B открыто, то $B_1 = \mathbb{R} \backslash B$ замкнуто.*

Доказательство. а) *(От противного).* Если существует $\alpha \in A_1$, у которой нет окрестности, целиком состоящей из точек множества A_1, то во всякой δ-окрестности точки α есть хотя бы одна точка из A, отличная от α, а следовательно, и бесконечно много точек из A. Но тогда α есть предельная точка множества A, и ввиду замкнутости A имеем, что $\alpha \in A$, но $\alpha \in A_1$. Имеет место противоречие.

б) Пусть β — предельная точка для B_1 и $\beta \in B$. Тогда в любой ее окрестности есть точки B_1, а это противоречит тому, что у любой точки множества B есть окрестность, состоящая из одних только точек множества B. Это значит, что $\beta \notin B$, т.е. $\beta \in B_1$, следовательно, B_1 замкнуто, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. а) *Любое объединение открытых множеств открыто, конечное пересечение открытых множеств — тоже открытое множество.*

б) Любое пересечение замкнутых множеств замкнуто, конечное объединение замкнутых множеств замкнуто.

Доказательство. Пусть $a \in \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$. Тогда существует номер α_0 такой, что $a \in A_{\alpha_0}$, и существует δ-окрестность точки a, целиком принадлежащая A_α. Обозначим ее $O_\delta(a)$. Тогда $O_\delta(a) \subset \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$, т.е. $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ открыто. Пусть теперь $a \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Тогда $\exists\ O_{\delta_m}(a) \subset A_m\ \forall\ m$ и при $\delta = \min(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ имеем

$$O_\delta(a) = \bigcap_{k=1}^{n} O_{\delta_k}(a) \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Таким образом, утверждение а) доказано, а утверждение б) следует из утверждения 1 б), что и требовалось доказать.

Определение 4. *Пусть заданы множество A и система множеств $\{B\}$. Будем говорить, что B есть* **покрытие** *A, если для любого $\alpha \in A$ существует $B \in \{B\}$ такое, что $\alpha \in B$.*

Следующее утверждение обычно берут за определение компакта.

Утверждение 3 (лемма Бореля). *Из любого покрытия компакта открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.*

Доказательство. От противного. Пусть A — компакт, тогда $\exists$ отрезок J_0, такой, что $A \subset J_0$ (поскольку A ограничено). Делением отрезка пополам строим систему стягивающихся отрезков $J_0 \supset J_1 \supset \cdots \supset J_k \supset \ldots$ с условием, что множества $A \cap J_k$ не допускают конечного покрытия для любого k. Пусть x_0 — их общая точка.

Поскольку $J_k \cap A$ не допускает конечного покрытия, в каждом отрезке J_k есть точки из A. Это значит, что точка $x_0 \in A$, так как A замкнуто. Всякая точка множества A покрыта некоторым множеством из системы множеств $\{B\}$, т.е. существует множество B такое, что $x_0 \in B$. Далее, существует номер k такой, что $J_k \subset B$, поскольку длина $J_k \to 0$, а B открыто. Тем самым B покрывает J_k и $A \cap J_k$ допускает конечное покрытие. Противоречие. Лемма доказана.

Т е о р е м а 1(обобщение теоремы Гейне – Кантора). *Функция, непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и зафиксируем его. Каждую точку $x_0 \in K$ накроем δ'-окрестностью радиуса $\delta' = \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_0\right)$, где $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_0\right) = \delta$ определяется из условия, что для любого $x \in K$ с условием $|x - x_0| < \delta$ имеем $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. Каждая такая δ'-окрестность — это открытое множество. По лемме Бореля выберем конечное подпокрытие для K. Пусть оно состоит из интервалов $J_1, \ldots, J_k$ с длинами соответственно $\delta_1, \ldots, \delta_k$ и центрами $a_1, \ldots, a_k$. Положим $\delta(\varepsilon) = \min(\delta_1, \ldots, \delta_k)$. Если теперь x_1 и x_2 таковы, что $|x_2 - x_1| < \delta(\varepsilon)$, тогда при некотором $a = a_s$ имеем, что точка x_1 принадлежит $\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right)$-окрестности точки a, т.е. $|x_1 - a| < \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right)$. Но $\delta(\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right)$, поэтому

$$|x_2 - a| = |(x_2 - x_1) + (x_1 - a)| \leq |x_2 - x_1| + |x_1 - a| < \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, a\right).$$

Отсюда $|f(x_2) - f(a)| < \varepsilon/2$. Но так как $|f(x_1) - f(a)| < \varepsilon/2$, то

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - f(a)) + (f(a) - f(x_1))| \leq$$
$$\leq |f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(a)| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $f(x)$ равномерно непрерывна на K. Доказательство закончено.

Примеры. 1. Функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна при $x > 1$. Действительно, для любых $x_1, x_2 > 1$ имеем неравенство

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}\left(< \frac{\delta}{2} = \varepsilon\right).$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ получим, что при $\delta = 2\varepsilon$

$$\forall\ x_1, x_2 \in (1, +\infty):\ |x_1 - x_2| < \delta\ \Rightarrow\ |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon.$$

2. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$, поскольку при $\varepsilon = 1$ справедливо неравенство для разности

$$y(n + \frac{1}{n}) - y(n) = (n + \frac{1}{n})^2 - (n)^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 1 = \varepsilon$$

при всех натуральных n, а это означает, что не существует числа $\delta(1) > 0$ такого, что для любых двух точек, находящихся на расстоянии меньшем $\delta(1)$, модуль разности значений функции x^2 в этих точках был меньше 1.

Ради полноты приведем позитивную формулировку свойства функции $f(x)$ не быть равномерно непрерывной на множестве A.

Определение 5. ***Функция** $f(x)$ **не является равномерно непрерывной на множестве** A, если можно указать такое $\varepsilon > 0$, что при всяком $\delta > 0$ найдутся числа $a_1 = a_1(\delta) \in A$ и $a_2 = a_2(\delta) \in A$ с условием $|a_1 - a_2| < \delta$, для которых*

$$|f(a_1) - f(a_2)| \geq \varepsilon.$$

Замечания. 1. В данном определении вместо всех $\delta > 0$ достаточно ограничиться только числами δ вида $\delta = \delta_n = 1/n$.

2. Непрерывность функции в некоторой точке x_0 предполагает, что функция $f(x)$ определена в некоторой δ-окрестности этой точки. Доказанная выше теорема 1 справедлива в несколько более общей ситуации. Приведём соответствующее определение.

Определение 6. ***Функция** $f(x)$, определенная на множестве A, называется **непрерывной в точке** x_0 **относительно данного множества** A, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что при всех $x \in A$ с условием $|x - x_0| < \delta$ выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.*

С учетом сделанных ранее замечаний, данное определение непрерывности можно записать через предел функции по некоторой базе.

Рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, остаются полностью справедливыми и в том случае, когда условие непрерывности функции в точке заменяется на сформулированное выше определение непрерывности относительно множества A, если только множество $A = K$ является компактом.

Глава V
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Лекция 16

§ 1. ПРИРАЩЕНИЕ ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ И ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Свойство функции $f(x)$ быть непрерывной в точке $x = a$ равносильно тому, что разность $\alpha(x) = f(x) - f(a)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Другими словами, это означает, что

$$f(x) = f(a) + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Таким образом, для всякой непрерывной функции в точке $x = a$ имеет смысл рассматривать аналитическое выражение (т.е. формулу)

$$\alpha(x) = f(x) - f(a).$$

Это выражение называется **приращением функции** $f(x)$ в точке $x = a$. Оно обозначается так: $\alpha(x) = \Delta f(x)$. Данное обозначение используется даже и в том случае, когда $f(x)$ не является непрерывной функцией в точке $x = a$.

Итак, если $\Delta f(x) \to 0$ при $x \to a$, то функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = a$, и наоборот. Для простейшей функции $f(x) = x$ ее приращение $\alpha(x) = x - a$ называется **приращением аргумента,** поскольку при $f(x) = x$ значение функции $f(x)$ равно значению аргумента. Это выражение имеет специальное обозначение: $\alpha(x) = \Delta x$. Имеем, что $\Delta x \to 0$ при $x \to a$.

Аргумент x можно выразить через его приращение Δx. Действительно, $x = a + (x - a) = a + \Delta x$. Следовательно, при фиксированном a приращение $\Delta f(x)$ можно рассматривать как некоторую функцию от Δx, т.е.

$$\alpha(x) = \Delta f(x) = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \beta(\Delta x).$$

Когда хотят подчеркнуть, что значение $\Delta f(x)$ равно A при $x = a$ и $\Delta x = b$, то пишут

$$\Delta_b f(a) = A \text{ или } \Delta f(x)\big|_{\substack{x=a\\ \Delta x=b}} = A.$$

Пример. Если $f(x) = x^2$, $x = 1$, $\Delta x = 2$, то

$$\Delta(x^2)\big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=2}} = \left((x+\Delta x)^2 - x^2\right)\big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=2}} = 9 - 1 = 8.$$

Теперь рассмотрим более подробно приращение $\Delta f(x)$ как функцию от приращения аргумента Δx. Очень важным для построения всего курса математического анализа является случай, когда $\Delta f(x)$ бесконечно мала и при этом еще и эквивалентна линейной функции вида $c\Delta x$, где c — некоторая вещественная постоянная. В этом случае говорят, что приращение $\Delta f(x)$ имеет линейную часть, называемую **дифференциалом функции** $f(x)$ **в точке** $x = a$, а функция $f(x)$ называется **дифференцируемой в точке** $x = a$.

Другими словами, мы приходим к следующему определению. Пусть $f(x)$ определена в некоторой δ-окрестности точки $x = a$.

Определение 1. *Линейная функция $g(\Delta x) = c\Delta x$ называется* **дифференциалом приращения** $\Delta f(x)$ (*или* **дифференциалом самой функции** $f(x)$ **в точке** $x = a$), *если*

$$\Delta f(x) \sim c\Delta x \text{ при } \Delta x \to 0,$$

т.е.

$$\Delta f(x) = c\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x,$$

где $c \in \mathbb{R}$ и $\gamma(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Дифференциал функции $f(x)$ обозначается $df(x)$ или просто df. Из определения вытекает, что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = c.$$

Если при этом $c \neq 0$, то

$$\frac{\Delta f}{df} \to 1 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Отметим, что функция $\gamma(\Delta x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $x = a$, функция $\Delta f(x)$ определена в некоторой δ-окрестности этой точки, а функция $df(x) = c\Delta x$ определена для всех $x \in \mathbb{R}$. Нам удобно будет доопределить функцию $\gamma(\Delta x)$, полагая $\gamma(0) = 0$. В результате в равенстве

$$\Delta f(x) = df(x) + \gamma(\Delta x)\Delta x,$$

определяющем дифференциал $df(x)$, все участвующие функции будут определены и непрерывны в некоторой окрестности точки $\Delta x = 0$.

Далее, легко видеть, что $\Delta x = dx$.

Определение 2. *Число* $c = \frac{df(x)}{dx}$ *называется* **производной функции** $f(x)$ *в точке* $x = a$. *Для производной используются следующие общепринятые обозначения:*

$$c = f'(a) = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} = Df(x)|_{x=a}\,.$$

Если $df(x)$ существует, то, исходя из определений 1 и 2, мы также можем написать

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = c,$$

т.е.

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a) \text{ при } x \to a.$$

Введенные выше понятия дифференциала и производной функции имеют не только глубокий аналитический смысл, но вполне определенный физический, точнее, механический, а также геометрический смысл.

Введем понятие касательной к кривой в данной точке.

Определение 3. Касательная, *точнее,* **наклонная касательная** *к кривой* $y = f(x)$ *в точке координатной плоскости с координатами* $x = a$, $y = f(a)$ *— это такая прямая, которая проходит через точку* $(a, f(a))$, *и ее угловой коэффициент* k, *т.е. тангенс угла ее наклона, равен пределу углового коэффициента* $k(\Delta x)$ *"секущей" прямой, проходящей через точки* $(a, f(a))$ *и* $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$ *при* $\Delta x \to 0$.

Поэтому говорят, что касательная — это предельное положение секущей.

Геометрический смысл производной раскрывается следующим ее свойством: число $f'(a)$ есть тангенс угла наклона касательной к кривой, задаваемой уравнением $y = f(x)$, на координатной плоскости xOy в точке $(a, f(a))$.

Механическая интерпретация. Если t — текущее время; $s(t)$ — путь, пройденный телом за отрезок времени $t - t_0$, где t_0 — начало отсчета, то

$$\Delta s(t)\,|_{t=a}$$

есть путь, пройденный телом за время от $t = a$ до $t = a + \Delta t$, т.е.

$$\Delta s(t) = s(a + \Delta t) - s(a).$$

Отношение

$$\left.\frac{\Delta s(t)}{\Delta t}\right|_{t=a}$$

есть средняя скорость на отрезке времени $[a, a + \Delta t]$, а предел этой скорости при $\Delta t \to 0$ — мгновенная скорость тела в момент времени $t = a$. Именно эту величину показывает спидометр автомобиля при его движении.

Утверждение 1. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = a$, то она непрерывна в этой точке.*

Действительно, тогда $\Delta f \sim df = c\Delta x$, поэтому Δf бесконечно мала при $\Delta x \to 0$, а значит, $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

Примеры. 1. Пусть $f(x) = x^2$, $a = 2,5$. Тогда

$$\Delta f(x) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2, \quad \Delta f(2 \cdot 5) = 5\Delta x + (\Delta x)^2,$$
$$\Delta x = dx, \quad df(x) = 2adx, \quad df(2,5) = 5dx.$$

2. Пусть $f(x) = 3x - 1$, $a = 2$. Тогда

$$\Delta f(x)\,|_{x=2} = f(2 + \Delta x) - f(2) = 3\Delta x = df(2) = 3dx.$$

Дифференциал функции, если он существует, является линейной функцией приращения аргумента, поэтому его называют линейной частью приращения аргумента. Если $f'(a) \neq 0$, то дифференциал в точке $x = a$ называется еще главной частью приращения. Это название отражает свойство разности вида $\beta(\Delta x) = \Delta f - df$, которая есть $o(\Delta x)$, а следовательно, и $o(df)$, т.е.

$$\Delta f - df = o(df).$$

Таким образом, эта разность является бесконечно малой более высокого порядка, чем df, и поэтому дифференциал df вносит при малых Δx главный вклад в значение приращения Δf.

Легко привести пример функции $f(x)$, непрерывной в точке $x = 0$, но не дифференцируемой в этой точке (т.е. $f(x)$ не имеет дифференциала и производной в этой точке). Действительно, для функции

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

имеем $\Delta(|x|) = |x + \Delta x| - |x|$. Отсюда при $x = 0$ получим

$$\Delta(|x|)\,|_{x=0} = |\Delta x|.$$

Тогда

$$\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \to 1 \text{ при } \Delta x \to 0^+, \quad \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \to -1 \text{ при } \Delta x \to 0^-,$$

т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ не существует.

Но все же правый и левый пределы в этом случае существуют. Они называются правой и левой производной функции.

Приведенный пример показывает, что непрерывная функция может и не иметь дифференциала. Для некоторого класса таких функций вводится более общее понятие односторонних производных.

Определение 4. *Конечные пределы (если они существуют)*

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

называются соответственно **правой и левой производной функции** $f(x)$ **в точке** $x=a$.

В рассмотренном выше случае $y=|x|$ односторонние производные в точке $x=0$ существуют, при этом правая производная в этой точке равна $+1$, а левая -1. Связь понятий односторонних и обычной производных между собой выражается следующим очевидным утверждением.

Утверждение 2. *Функция $f(x)$ имеет производную в точке $x=a$ тогда и только тогда, когда существуют левая и правая производные и они равны между собой.*

Лекция 17

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = a$, причем $\varphi(a) = b$, $\varphi'(a) = \alpha$. Далее, пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = b$, причем $f'(b) = \beta$. Тогда сложная функция*

$$g(t) = f(\varphi(t))$$

дифференцируема в точке $t = a$, причем

$$g'(t) = \beta \cdot \alpha.$$

Доказательство. В силу дифференцируемости функций $\varphi(t)$ и $f(x)$ имеем

$$\Delta\varphi(t) = \alpha\Delta t + \alpha_1(\Delta t)\Delta t, \quad \alpha_1(0) = 0;$$
$$\Delta f(x) = \beta\Delta x + \beta_1(\Delta x)\Delta x, \quad \beta_1(0) = 0.$$

Здесь $\alpha_1(\Delta t)$ и $\beta_1(\Delta x)$ определены в некоторых окрестностях точек $\Delta t = 0$ и $\Delta x = 0$ соответственно и стремятся к нулю при $\Delta t \to 0$ и при $\Delta x \to 0$.

Возьмем во втором равенстве величину Δx равной $\Delta\varphi(t)$. Тогда получим

$$\Delta f(x) = \beta\Delta\varphi(t) + \Delta\varphi(t)\beta_1(\Delta\varphi(t)) =$$
$$= \beta\alpha\Delta t + \Delta t(\alpha\beta_1(\Delta\varphi(t)) + \alpha_1(\Delta t)\beta_1(\Delta\varphi(t))).$$

Кроме того, имеем, что $\Delta f(x) = \Delta g(t)$, т.е.

$$\Delta g(t) = \beta\alpha\Delta t + \Delta t\gamma(\Delta t),$$

где

$$\gamma(\Delta t) = \alpha\beta_1(\Delta\varphi(t)) + \alpha_1(\Delta t)\beta_1(\Delta\varphi(t)).$$

Но $\Delta\varphi(t) \to 0$ как функция Δt при $\Delta t \to 0$, поскольку функция $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = a$. Отсюда по теореме о пределе сложной функции имеем, что $\beta_1(\Delta\varphi(t))$ и $\alpha_1(\Delta t)$ есть бесконечно малые при $\Delta t \to 0$. Следовательно, функция $\gamma(\Delta t)$ — тоже бесконечно малая при $\Delta t \to 0$. А это означает, что $\beta\alpha\Delta t$ — дифференциал функции $g(t)$ в точке $t = a$, т.е.

$$dg(t) = \beta\alpha\Delta t = \beta\alpha dt, \quad \frac{dg(t)}{dt} = \beta\alpha.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. Область определения функций $\alpha_1(\Delta t)$ и $\beta_1(\Delta x)$

$$\Delta\varphi = \alpha\Delta t + \alpha_1(\Delta t)\Delta t,$$
$$\Delta f = \beta\Delta x + \beta_1(\Delta x)\Delta x,$$

целиком содержит некоторые окрестности точек $\Delta t = 0$ и $\Delta x = 0$, поскольку при определении дифференциала мы доопределили эти функции в нуле по непрерывности, положив $\alpha_1(0) = \beta_1(0) = 0$. Если этого не сделать, то наши рассуждения при доказательстве теоремы о дифференцируемости сложной функции будут ошибочны, так как $\alpha_1(\Delta t)$ может принимать значение, равное 0, даже тогда, когда $\Delta t \neq 0$ для некоторых Δt, принадлежащих той окрестности точки 0, в которой была определена функция.

Заметим также, что мы говорим о производной функции $f(x)$ в точке $x = a$ только в том случае, когда эта точка — внутренняя точка области определения $f(x)$. Если же говорится только о правой производной $f'(a+)$, то область определения $f(x)$ должна содержать промежуток $(a, a+\delta)$, а если о левой — то $(-\delta + a, a)$.

Дифференциал $df(x)$ функции $f(x)$ в любой точке $x = x_0$ отрезка $[a, b]$ является линейной функцией $c\Delta x$ от аргумента Δx. Здесь для каждого значения производная $f'(x_0) = c$ имеет свое собственное значение. Таким образом, процедура взятия дифференциала порождает *отображение* отрезка $[a, b]$ в множество линейных функций. Это отображение не является числовой функцией, так как его образ состоит не из чисел, а из функций. За такими отображениями утвердилось название "оператор", в данном случае — дифференциальный оператор. А сама процедура отыскания дифференциала или производной функции в точке, как уже говорилось, называется *операцией дифференцирования* или просто *дифференцированием*. Напомним также, что функция, для которой существует производная в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке.

Пример. Пусть $f(x) = x^2$ при $0 \le x \le 1$. Тогда имеем

$$f'(x) = 2x \text{ при } 0 < x < 1,\ f'(0+) = 0,\ f'(1-) = 2.$$

Докажем теперь теорему о производной обратной функции. Вообще говоря, правило дифференцирования обратной функции просто следует из теоремы о производной сложной функции, но мы докажем его при более слабых предположениях, не требуя заранее существования производной обратной функции.

Теорема 2 (о производной обратной функции). *Пусть функция $f(x)$, определенная и непрерывная на отрезке $[a,b]$, имеет обратную функцию $g(y)$, определенную на отрезке I, концами которого являются точки $f(a)$ и $f(b)$. Пусть x_0 — внутренняя точка отрезка $[a,b]$, а y_0 — внутренняя точка I, причем $f(x_0)=y_0$ и $g(y_0)=x_0$. Пусть в точке $x=x_0$ функция $f(x)$ имеет производную, отличную от нуля, т. е. $f'(x_0)\neq 0$.*

Тогда в точке y_0 функция $g(y)$ имеет производную $g'(y_0)$, причем

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=g(y_0)}.$$

Доказательство. Если известно, что $g'(y_0)$ существует, то воспользовавшись предыдущей теоремой, получаем:

$$g(f(x))=x,\quad (g(f(x)))'_x=1,$$

но

$$(g(f(x)))'_x=g'(y_0)f'(x_0).$$

Следовательно,

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Если существование производной заранее не предполагается, то доказательство проведем так. Заметим, что $f(x)$ строго монотонна на $[a,b]$, следовательно, $g(y)$ непрерывна на I и строго монотонна на нем. По определению производной

$$g'(y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0},$$

если этот предел существует.

В силу непрерывности $f(x)$ в точке $x=x_0$ и теоремы о пределе обратной функции имеем, что $g(y)\to g(y_0)=x_0$ при $y\to y_0$.

Определим на I функцию $F(x)$, полагая $F(x_0)=1/f'(x_0)$ и

$$F(x)=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}\quad \text{при } x\neq x_0.$$

Тогда $F(x)$ непрерывна в точке $x=x_0$, поскольку

$$F(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Сделаем замену переменной вида $x = g(y)$:

$$F(g(y)) = \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}.$$

Применяя теорему о пределе сложной функции, получаем, что существует предел

$$\lim_{y \to y_0} F(g(y)) = F(x_0) = \left. \frac{1}{f'(x)} \right|_{x=g(y_0)}.$$

Но, с другой стороны,

$$\lim_{y \to y_0} F(g(y)) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0).$$

Тем самым доказательство теоремы 2 закончено.

Т е о р е м а 3 (об инвариантности формы первого дифференциала). *Если вместо дифференциала независимой переменной x в формулу для дифференциала $df(x)$ функции $f(x)$ подставить дифференциал некоторой функции $x = \varphi(t)$, то полученное выражение окажется дифференциалом сложной функции $g(t) = f(\varphi(t))$.*

Другими словами, пусть $df = c_1 dx$ — дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = a$, $d\varphi = c_2 dt$ — дифференциал $\varphi(t)$ в точке $t = \alpha$, причем $\varphi(\alpha) = a$. Тогда функция $c_1 d\varphi = c_1 c_2 dt$ — дифференциал функции $g(t) = f(\varphi(t))$ в точке $t = \alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта теорема является прямым следствием теоремы о дифференцируемости сложной функции, так как согласно последней

$$dg(t) = g'(t)dt = c_1 c_2 dt = c_1 d\varphi(t),$$

что и требовалось доказать.

Смысл этой очень простой и, казалось бы, "пустой" теоремы станет понятным позже, когда мы увидим, что дифференциалы высших порядков уже не обладают свойством инвариантности.

Пример. Решение уравнения Кеплера $x = x(y)$: $x - \varepsilon \sin x = y$, $0 < \varepsilon < 1$ — дифференцируемая функция в силу теоремы о производной обратной функции, причем

$$x'(y) = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos x(y)}.$$

§ 3. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы, $c \in \mathbb{R}$. Тогда имеем:

1) $(cf(x))' = cf'(x)$;

2) Если $f(x) = \text{const}$, то $f'(x) = 0$;

3) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Эти утверждения следуют из определения производной. Докажем, например, утверждение 3. Имеем: $\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g$. Откуда

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \to f' + g' \text{ при } \Delta x \to 0.$$

4) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$
$$= \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} =$$
$$= g(x+\Delta x)\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + f(x)\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \to$$
$$\to g(x)f'(x) + f(x)g'(x) \text{ при } \Delta x \to 0,$$

так как

$$g(x+\Delta x) \to g(x), \quad \frac{\Delta f}{\Delta g} \to f'(x), \quad \frac{\Delta g}{\Delta x} \to g'(x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

5) $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{g'(x)}{g^2(x)}$.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\Delta(1/g)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x)g(x+\Delta x)} \to -\frac{g'}{g^2} \text{ при } \Delta x \to 0,$$

поскольку

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} \to g', \quad \frac{1}{g(x+\Delta x)} \to \frac{1}{g(x)} \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Следствия:

1. $(g_1 \cdot \ldots \cdot g_n)' = \sum\limits_{k=1}^{n} g_1 \cdot \ldots \cdot g_k' \cdot \ldots \cdot g_n$.

2. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

Производные элементарных функций

$x' = 1$;

$(x^n)' = nx^{n-1}$;

$(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$;

$(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$;

$(\cos x)' = -\sin x$, так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

$(\ln x)' = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$, $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$ — обратная функция;

$y = x^\alpha$, $\alpha \neq 0$ — степенная функция,

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln x})' = (\alpha\ln x)'\cdot e^{\alpha\ln x} = \alpha x^{\alpha-1};$$

$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1$;

$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2(\pi/2 - x)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} = \frac{1}{1 + x^2}$;

$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Из теоремы 2 о дифференцировании сложной функции и из правил дифференцирования следует:

$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x\ln a$;

$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$;

$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$;

$(u^v)' = (e^{v\ln u})' = e^{v\ln u}(v\ln u)' = u^v\left(v'\ln u + v\cdot\frac{u'}{u}\right)$.

Замечание. Если $h(x) = f(g(x))$, то символы $f'_x(g(x))$ и $f'_g(g(x))$ определяются равенствами $f'_x(g(x)) = h'(x)$, $f'_g(g(x)) = f_1(g(x))$, где $f_1(x) = f'(x)$.

Лекция 18

§ 4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть $f(x)$ является дифференцируемой в каждой точке интервала (a,b). Тогда каждой точке $x \in (a,b)$ можно поставить в соответствие число — производную $f'(x)$ в этой точке. Полученная функция называется функцией, производной от данной, и обозначается также $f'(x)$. Может случиться, что она сама тоже имеет производную. Тогда эта производная называется **второй производной функции** $f(x)$ и обозначается так:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Подобным образом определяются третья, четвертая и все последующие производные:

$$f'''(x) = (f''(x))', \qquad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Пример. $(x^3)'' = ((x^3)')' = (3x^2)' = 6x$.

Т е о р е м а 1(формула Лейбница). *Пусть u, v имеют n-е производные. Тогда справедлива формула*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)} = \\ = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u^{(m)}v^{(n-m)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (По индукции). При $n = 1$ утверждение теоремы справедливо. Предположим, что оно верно при $n = s \geq 1$. Докажем его при $n = s + 1$. Имеем

$$(uv)^{(s+1)} = ((uv)^{(s)})' = \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} (u^{(m)}v^{(s-m)})' = \\ = \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} \left(u^{(m+1)}v^{(s-m)} + u^{(m)}v^{(s-m+1)}\right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} u^{(m+1)} v^{(s-m)} + \sum_{m=0}^{s} \binom{s}{m} u^{(m)} v^{(s-m+1)} =$$

$$= \sum_{t=1}^{s+1} \binom{s}{t-1} u^{(t)} v^{(s-t+1)} + \sum_{t=0}^{s} \binom{s}{t} u^{(t)} v^{(s-t+1)} =$$

$$= \binom{s}{0} u^{(0)} v^{(s+1)} + \binom{s}{s} u^{(s+1)} v^{(0)} + \sum_{t=1}^{s} \left(\binom{s}{t} + \binom{s}{t-1} \right) u^{(t)} v^{(s-t+1)} =$$

$$= \sum_{t=0}^{s+1} \binom{s+1}{t} u^{(t)} v^{(s-t+1)},$$

поскольку

$$\binom{s}{t} + \binom{s}{t-1} = \binom{s+1}{t}.$$

Теорема 1 доказана.

Имеется еще одно обозначение для n-й производной, а именно:

$$f^{(n)}(x) = D^n f(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Последнее обозначение связано с понятием **дифференциала высшего порядка**, к определению которого мы приступаем.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда существует ее дифференциал

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Зафиксируем значение приращения аргумента $dx = \Delta x = h$. Тогда $df(x)$ можно будет рассматривать как функцию от x, заданную на том же интервале (a, b). Если она дифференцируема, то дифференциал имеет вид

$$d(f'(x)h) = f''(x)h\Delta x.$$

Если мы в этом случае значение Δx возьмем снова равным h, то получим

$$d(f'(x)h) = f''(x)h^2 = f''(x)dx^2.$$

Это выражение называется **вторым дифференциалом** и обозначается $d^2 f(x)$, т.е.

$$d^2 f(x) = f''(x)dx^2.$$

Аналогично определим:

$$d^3f(x) = d(d^2f(x)) = f'''(x)dx^3,$$
$$d^nf(x) = d(d^{n-1}f(x)) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Очевидно, в силу такого определения можно записать:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Целесообразность введения понятия n-го дифференциала будет ясна позднее. Например, далее мы увидим, что приращение $\Delta f(x)$ во многих случаях можно представить в виде

$$\Delta f = \frac{df}{1!} + \frac{d^2f}{2!} + \frac{d^3f}{3!} + \dots + \frac{d^nf}{n!} + \dots$$

(формула Бернулли). Смысл этого равенства мы уточним тогда, когда будем его доказывать.

Заметим, что уже второй дифференциал не обладает свойством инвариантности. Действительно, если

$$f'(x) = f_1(x) \quad \text{и} \quad f''(x) = f_2(x),$$

то при $x = g(t)$ имеем

$$(f(g(t)))''_{tt} = (f_1(g(t))g'(t))'_t = f_2(g(t)) \cdot (g'(t))^2 + f_1(g(t))g''(t).$$

Отсюда получим

$$d^2f(g(x)) = f''_{tt}(g(t))dt^2 = f''_{gg}(g(x))(dg(x))^2 + f'_g(g(x))d^2g(x),$$

в то время как второй дифференциал функции $f(x)$ равен

$$d^2f(x) = f''_{xx}(x)dx^2,$$

и при подстановке в правую часть равенства функции $g(t)$ получим выражение $f''_{gg}(g(x))(dg(x))^2$, которое, как видим, отличается от правой части равенства для $d^2f(g(x))$. Следовательно, свойство инвариантности для второго дифференциала не имеет места.

Для того чтобы глубже прояснить сущность свойства инвариантности дифференциала, мы рассмотрим несколько более общие понятия.

Будем называть **дифференциальным мономом** D_k *порядка* k от n *функций* $f(x), g(x), \ldots, h(x)$, $n \leq k$, одной пеперменной x следующее выражение

$$D_k = cf^{(\alpha)}(x)g^{(\beta)}(x)\ldots h^{(\gamma)}(x)\ dx^k,$$

где $\alpha + \beta + \cdots + \gamma = k$, причем $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ являются натуральными числами и c — некоторая вещественная постоянная.

Всякая линейная комбинация дифференциальных мономов фиксированного порядка от одного и того же набора функций $f, g, \ldots, h$ называется **однородным дифференциальным выражением порядка** k. **Неоднородным дифференциальным выражением** называется линейная комбинация конечного числа мономов разного порядка, но от тех же функций $f, g, \ldots, h$.

Следует отметить, что на любое дифференциальное выражение можно смотреть как на функцию двух независимых переменных, а именно: x и dx. Но в данный момент нас будет интересовать не функциональная, а алгебраическая сторона вопроса, точнее, свойство дифференциального выражения сохранять свою форму при замене независимой переменной x на функцию $\varphi(t)$ и, соответственно, dx на $d\varphi(t) = \varphi'(t)\cdot dt$. Поясним более четко, что конкретно имеется в виду. Если подставим в однородное дифференциальное выражение D порядка k вместо x функцию $\varphi(t)$, то вместо дифференциала dx^k будем иметь выражение $(d\varphi(t))^k = (\varphi'(t))^k(dt)^k$, а вместо производных $f^{(\alpha)}(x), g^{(\beta)}(x), \ldots, h^{(\gamma)}(x)$ — выражения $f^{(\alpha)}_{\varphi^\alpha}(\varphi(t)), g^{(\beta)}_{\varphi^\beta}(\varphi(t)), \ldots, h^{(\gamma)}_{\varphi^\gamma}(\varphi(t))$, т.е. мы получим некоторое дифференциальное выражение B_1, завсящее от t и от dt. Другое дифференциальное выражение B_2, зависящее от тех же величин t и dt, получим, если то же однородное выражение D применим к функциям $f(\varphi(t)), g(\varphi(t)), \ldots, h(\varphi(t))$, т.е. вместо $f^{(\alpha)}(x), g^{(\beta)}(x), \ldots, h^{(\gamma)}(x)$ рассмотрим $f^{(\alpha)}_{t^\alpha}(\varphi(t)), g^{(\beta)}_{t^\beta}(\varphi(t)), \ldots, h^{(\gamma)}_{t^\gamma}(\varphi(t))$, а вместо $(dx)^k$ — выражение $(dt)^k$. Если при этом оказывается, что вне зависимости от вида функции $\varphi(t)$ имеет место равенство $B_1 = B_2$, то мы говорим, что дифференциальное выражение D обладает свойством **инвариантности, или инвариантно относительно замены переменной.** В противном случае мы считаем, что оно указанным свойством не обладает. Иными словами, инвариантность B означает возможность перестановки порядка выполнения операции замены переменной и операции вычисления этого дифференциального выражения, т.е. коммутативности этих двух операций.

В смысле введенных нами понятий дифференциалы первого и высших порядков являются однородными дифференциальными выражениями, причем первый дифференциал обладает свойством инвариантности (относительно любой замены переменной), а дифференциалы порядка, большего единицы, этим свойством не обладают. Заметим, однако, что в случае линейной замены переменной инвариантность все же имеет место.

Возникает вопрос о том, существуют ли дифференциальные выражения порядка, большего единицы, обладающие свойством инвариантности. Было известно, что, вообще говоря, инвариантные дифференциальные выражения от нескольких функций существуют. В течение ряда лет профессор МГУ А. А. Кириллов привлекал внимание математиков к идущей от О. Веблена проблеме, связанной с описанием классов инвариантных дифференциальных выражений. Прояснить ситуацию в указанном круге вопросов в значительной степени удалось Ф. М. Малышеву в 1978 г. Единственным инвариантным дифференциальным выражением, зависящим от одной функции, является первый дифференциал. Для двух функций f и g все инвариантные выражения порождаются двумя однородными дифференциальными выражениями B_1 и B_2 вида $B_1 = f'g'dx^2$, $B_2 = (f''g' - f'g'')dx^3$. Он доказал общую теорему о конечности количества $N(n)$ "образующих" однородных дифференциальных выражений от n функций и получил оценку $N(n) \le n!$. Кроме того, для степени инвариантного дифференциального выражения имеет место неравенство $k \le n(n+1)/2$ [23].

В заключение приведем еще одну теорему, которая касается производных высших порядков от сложной функции.

Теорема 2 (теорема Валле Пуссена). *Пусть функции $F(x)$ и $u(x)$ имеют n-е производные. Тогда для n-й производной функции $G(x) = F(u(x))$ имеет место следующая формула*

$$G^{(n)}(x) = \sum_{\alpha+2\beta+3\gamma+\dots=n} F^{(\alpha+\beta+\gamma+\dots)}(u)P_{\alpha+\beta+\gamma+\dots},$$

$$P_{\alpha+\beta+\gamma+\dots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\dots}\left(\frac{u'}{1!}\right)^{\alpha}\left(\frac{u''}{2!}\right)^{\beta}\left(\frac{u'''}{3!}\right)^{\gamma}\dots.$$

Поясним, что суммирование в правой части ведется по всем целым неотрицательным числам α, β, $\gamma, \dots$, удовлетворяющим равенству $\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots = n$.

Доказательство. Последовательно применяя правило дифференцирования сложной функции, мы, очевидно, приходим к равенству вида

$$G^{(n)}(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k(x)F^{(n)}(u),$$

где $c_k(x)$ — некоторые выражения, вид которых не зависит от конкретного задания функций $y=F(u)$, $u=f(x)$. Поэтому для определения точного выражения $c_k(x)$ через функцию $u(x)$ мы можем использовать любые удобные для нас функции. В силу этого будем считать, что $F(u)$ и $u(x)$ — многочлены n-й степени, записанные в виде

$$F(u)=F(u_0)+z\frac{F'(u_0)}{1!}+\cdots+z^n\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!},$$

$$u(x)=u(x_0+t)=u(x_0)+t\frac{u'(x_0)}{1!}+\cdots+t^n\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Здесь мы полагаем, что переменные z и t определены равенствами $z=u-u_0$, $u_0=u(x_0)$, $t=x-x_0$. В этом случае функция $G(x)$ будет представлять собой многочлен степени n^2, который может быть записан в виде

$$G(x)=G(x_0)+\frac{G'(x_0)}{1!}t+\cdots+\frac{G^{(n)}(x_0)}{n!}t^n+\cdots+\frac{G^{(n^2)}(x_0)}{(n^2)!}t^{n^2},$$

и, кроме того, в виде

$$G(x)=F(u_0)+\frac{F'(u_0)}{1!}\left(\frac{u'(x_0)}{1!}t+\cdots+\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}t^n\right)+$$

$$+\frac{F^{(n)}(u_0)}{n!}\left(\frac{u'(x_0)}{1!}t+\cdots+\frac{u^{(n)}(x_0)}{n!}t^n\right)^n.$$

Раскрывая скобки в последнем равенстве с помощью полинома Ньютона (см. замечание к §1 гл. II) и сравнивая коэффициенты при t^n в получившемся выражении с первым равенством, приходим к утверждению теоремы. Теорема 2 доказана.

§ 5. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Пусть x_0 — внутренняя точка области определения $f(x)$.

Определение. 1. *Функция* $f(x)$ **возрастает в точке** $x = x_0$, *если существует некоторая окрестность этой точки, в которой:*

а) $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$,

б) $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$.

Ясно, что точка $x = x_0$ является точкой возрастания функции $f(x)$, если

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0$$

в некоторой окрестности точки $x = x_0$.

2. *Функция* $f(x)$ **убывает в точке** $x = x_0$, *если существует некоторая окрестность этой точки, в которой:*

а) $f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$;

б) $f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$.

Точка $x = x_0$ является точкой убывания функции $f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \neq 0.$$

3. *Функция имеет в точке локальный максимум (локальный минимум), если в некоторой проколотой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x_0) > f(x)$ (соответственно $f(x_0) < f(x)$).*

4. *Функция* $f(x)$ *имеет* **локальный экстремум** *в точке* $x = x_0$, *если в этой точке она имеет или локальный максимум, или локальный минимум.*

Т е о р е м а (достаточное условие возрастания или убывания функции в точке). *1. Если $f'(x_0) = c > 0$, то тока $x = x_0$ — точка возрастания функции $f(x)$.*

2. Если $f'(x_0) = c < 0$, то функция $f(x)$ убывает в точке $x = x_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Так как

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то существует число $\delta = \delta(c/2) > 0$ такое, что неравенство

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c \right| < \frac{c}{2}$$

выполняется для всех точек проколотой δ-окрестности точки $x = x_0$. В этой окрестности имеем

$$0 < \frac{c}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{3c}{2}.$$

Следовательно, Δf имеет тот же знак, что и Δx, т.е. x_0 — точка возрастания. Случай 2 сводится к случаю 1 заменой $f(x)$ на $-f(x)$.

Эта теорема называется **л е м м о й Дарбу.**

Лекция 19

§ 6. ТЕОРЕМЫ РОЛЛЯ, КОШИ И ЛАГРАНЖА

Теорема 1 (теорема Ролля). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема во внутренних точках этого отрезка. Пусть также $f(a)=f(b)$. Тогда на интервале (a,b) существует точка ξ такая, что $f'(\xi)=0$.*

Доказательство. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$. Следовательно, на этом отрезке найдётся точка x_1, в которой $f(x)$ имеет максимум, а также точка x_2, являющаяся точкой минимума для $f(x)$. Если $x_1=x_2$, то $f(x)$ постоянна на отрезке $[a,b]$ и $f'(x)=0$ всюду на $[a,b]$. Если же $x_1\neq x_2$, то либо $f(x_1)$, либо $f(x_2)$ не равна $f(a)=f(b)$. И та точка из них, для которой равенство не имеет места, будет внутренней точкой отрезка $[a,b]$ и одновременно точкой локального экстремума. Обозначив ее через ξ, имеем $f'(\xi)=0$, поскольку в противном случае была бы точкой возрастания или точкой убывания функции $f(x)$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (теорема Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы внутри него. Пусть $g'(x)\neq 0$ при всех $x\in[a,b]$. Тогда на интервале (a,b) найдется точка c такая, что*

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Преобразуя эквивалентным образом требуемое равенство с учетом того, что $g'(c)\neq 0$, имеем

$$(f(a)-f(b))g'(c)-(g(a)-g(b))f'(c)=0.$$

Заметим, что слева в последнем равенстве стоит значение производной функции $H(x)$ в точке $x=c$, где

$$H(x)=g(x)(f(a)-f(b))-f(x)(g(a)-g(b)).$$

Таким образом, нам достаточно доказать существование точки c, в которой $H'(c)=0$. Но функция $H(x)$ дифференцируема во внутренних точках отрезка $[a,b]$ и

$$H(a)=H(b)=-g(a)f(b)+f(a)g(b).$$

Поэтому по теореме Ролля существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $H'(c)=0$, что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е (теорема Лагранжа). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда имеет место формула*

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b),$$

где c — некоторая внутренняя точка этого отрезка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следствия является частным случаем теоремы Коши при $g(x) = x$. Это следствие называется также **формулой конечных приращений.**

Замечания. 1. (**О схеме доказательства леммы Дарбу**). Эта лемма утверждает, что если $f'(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ возрастает. С другой стороны, ее возрастание означает, что приращение функции $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ и приращение аргумента $\Delta x = x - x_0$ имеют одинаковый знак и $\Delta f(x) \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Доказательство этого факта, по существу, основано на свойстве функции, имеющей положительный предел, быть положительной на некотором окончании базы. В данном случае

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0,$$

и поэтому в некоторой проколотой окрестности точки x_0 мы имеем неравенство

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Это и означает, что в данной проколотой окрестности точки x_0 значения $\Delta f(x)$ и Δx имеют одинаковый знак и $\Delta f(x) \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$.

2(а) (**По поводу теоремы Коши**). Для справедливости утверждения теоремы, в частности, требуется, чтобы $g'(x) \neq 0$ для любого x, принадлежащего отрезку $[a, b]$. Отсюда следует, что $g(a) - g(b) \neq 0$, т.е. в знаменателе отношения в формулировке теоремы стоит ненулевое число. Действительно, если мы предположим, что $g(a) = g(b)$, то по теореме Ролля существует число c такое, что $g'(c) = 0$, но по условию теоремы это не так.

(б) (**Геометрическая интерпретация теоремы Коши**). Пусть при $a \leq t \leq b$ имеем

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases}$$

Тогда в некоторой точке c тангенс угла наклона касательной к этой кривой равен тангенсу угла наклона хорды:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)}.$$

3. (**По поводу теоремы Ролля**). Эта теорема, по существу, утверждает, что при некоторых дополнительных условиях между двумя "нулями" функции всегда лежит "нуль" ее производной. Доказательство теоремы основано на том, что если точка глобального экстремума является внутренней, то она не может быть точкой возрастания или убывания, а отсюда уже следует, что производная в этой точке обращается в нуль.

Докажем несколько *более общую теорему*, а именно, *теорему Ферма*: Пусть, как и ранее, $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Определение 1. 1) *Внутренняя точка x_0 называется* **точкой несобственного локального максимума** (*или* **локального максимума в широком смысле**), *если существует проколотая δ-окрестность точки x_0, в которой*

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \geq 0.$$

2) *По аналогии определим, что такое* **точка несобственного локального минимума**: *$f(x)$ имеет несобственный локальный минимум (локальный минимум в широком смысле) в точке x_0, если существует проколотая δ-окрестность, в которой*

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \leq 0.$$

3) *Точки несобственного локального минимума и максимума называются* **точками несобственного локального экстремума**.

Ясно, что экстремальные точки можно рассматривать и как несобственные экстремальные точки, но не наоборот.

Теорема 3 (теорема Ферма). *Пусть внутренняя точка x_0 отрезка $[a, b]$, на котором определена и непрерывна функция $f(x)$, является точкой экстремума (в широком смысле) этой функции и пусть $\exists\ f'(x_0)$. Тогда имеем $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Точка x_0 не может быть точкой возрастания (убывания), так как тогда в некоторой проколотой δ-окрестности этой точки

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0 \quad \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < 0 \text{ соответственно}\right).$$

Но тогда неравенства $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$ невозможны. Остается принять, что $f'(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Докажем еще одну теорему об обращении в нуль производной.

Т е о р е м а 4. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b), $a < a_1 < b_1 < b$ и $f'(a_1) \cdot f'(b_1) < 0$. Тогда существует точка $\xi \in (a_1, b_1)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $f'(a_1) > 0$. Пусть ξ — точка максимума на отрезке $[a_1, b_1]$. Тогда она является внутренней для этого отрезка, так как a_1 — точка возрастания, а b_1 — точка убывания. Но тогда имеем $f'(\xi) = 0$. Второй случай, $f'(a_1) < 0$, сводится к первому с помощью замены функции $f(x)$ на $g(x) = -f(x)$. Теорема 4 доказана.

С л е д с т в и е (теорема Дарбу). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и для некоторых $a_1, b_1 \in (a, b)$*

$$f'(a_1) = \alpha, \quad f'(b_1) = \beta.$$

Тогда для всякого числа ξ, лежащего между α и β, найдется точка $x_0 \in [a_1, b_1]$ такая, что $f'(x_0) = \xi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - x\xi$. Имеем

$$g'(a_1) = \alpha - \xi, \quad g'(b_1) = \beta - \xi.$$

Но так как ξ лежит между α и β , то $\alpha - \xi$ и $\beta - \xi$ имеют разные знаки. Тогда по теореме 4 имеем, что существует точка x_0 такая, что $g'(x_0) = 0$. Отсюда следует, что

$$f'(x_0) - \xi = 0, \quad \text{т.е.} \quad f'(x_0) = \xi.$$

Доказательство закончено.

Т е о р е м а 5. *Функция $g(x) = f'(x)$ не может иметь разрывов первого рода.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$f'(x) \to a \text{ при } x \to x_0+, \; f'(x) \to b \text{ при } x \to x_0- .$$

Докажем, что $a = b$. Предположим, что это не так. Тогда $a \neq b$. Пусть

$$x_n = x_0 + \frac{1}{n} \to x_0+, \; y_n = x_0 - \frac{1}{n} \to x_0-,$$

тогда

$$f'(x_n) \to a \text{ при } n \to \infty, \; f'(y_n) \to b \text{ при } n \to \infty.$$

Так как $a \neq b$, то или $a \neq f'(x_0)$, или $b \neq f'(x_0)$.

Допустим, что имеет место случай $a \neq f'(x_0)$. Так как число $\frac{f'(x_n)+f'(x_0)}{2}$ находится между $f'(x_n)$ и $f'(x_0)$, то в силу теоремы Дарбу существует c_n с условием $x_n < c_n < x_0$, кроме того,

$$f'(c_n) = \frac{f'(x_n) + f'(x_0)}{2}.$$

Поскольку $c_n \to x_0$, согласно определению правого предела по Гейне имеем

$$f'(c_n) \to a.$$

Отсюда $a = \frac{a+f'(x_0)}{2}$, т.е. $a = f'(x_0)$, а это противоречит тому, что $f'(x_0) \neq a$. Следовательно, предположение, что $a \neq b$, неверно и $a = b$. А это значит, что функция $f'(x)$ не может иметь разрывов первого рода. Теорема 5 доказана.

Попутно мы доказали, что если $f'(x) \to z_0$ при $x \to x_0+$ (или $x \to x_0-$), то $z_0 = f'(x_0)$.

Пример точки разрыва производной. Положим

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

При $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x},$$

а при $x = 0$ по определению производной

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 \cos 1/\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

В точке $x = 0$ не существует ни правого, ни левого предела $f'(x)$.

Определение 2. *Если* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \to \underset{(-)}{+}\infty$ *при* $x \to x_0$, *то говорят, что* $f(x)$ *в точке* x_0 *имеет* **бесконечную производную**, и пишут:

$$f'(x_0) = \underset{(-)}{+}\infty.$$

То же самое говорят и пишут о правой и левой производных.

Пример. $f(x) = \sqrt{x}$. При $x \neq 0$ имеем $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Тогда

$$f'(0+) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{\Delta x} - 0}{\Delta x} = +\infty.$$

Лекция 20

§ 7. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА

Т е о р е м а 1. *Пусть $f'(x) = 0$ при всех $x \in (a,b)$. Тогда $f(x) = \mathrm{const} = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Лагранжа имеем

$$\Delta f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'(c)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) = 0.$$

Отсюда

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a,b). Тогда для того чтобы $f(x)$ не убывает на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы*

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in (a,b).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Условие неубывания функции $f(x)$ эквивалентно тому, что $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0$. Переходя к пределу в неравенствах, получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Достаточность. Если $f'(x) \geq 0$, то по теореме Лагранжа

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(c) \geq 0$$

при некотором $c \in (a,b)$, т.е. функция $f(x)$ не убывает на (a,b). Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Если $f'(x) > 0$ на интервале (a,b), то функция $f(x)$ монотонно возрастает на (a,b).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Лагранжа имеем

$$\Delta f(x) = f'(c)\Delta x > 0 \text{ при } \Delta x > 0,$$

что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 4. *Пусть $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда для того чтобы функция $f(x)$ строго возрастала на нем, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ на интервале (a,b) и $f'(x)$ не обращалась в нуль тождественно ни на каком отрезке $[a_1,b_1]$, лежащем внутри отрезка $[a,b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость (от противного). Если условие теоремы не выполнено, то или $f'(x_0) < 0$ для некоторой точки $x_0 \in (a,b)$, или $f'(x) \equiv 0$ при всех $x \in [a_1,b_1]$. Тогда в первом случае x_0 — точка убывания функции $f(x)$, а во втором — $f(x) = \mathrm{const}$ на $[a_1,b_1]$. Это противоречит условию возрастания функции $f(x)$.

Достаточность. Так как по условию $f'(x) \geq 0$, то при любых $a_1 < b_1$, где $a_1,b_1 \in [a,b]$, имеем

$$f(b_1) - f(a_1) = f'(c)(b_1 - a_1) \geq 0,$$

т.е. $f(x)$ не убывает.

Докажем, что $f(x)$ возрастает. Пусть это не так, и $f(a_1) = f(b_1)$ при $b_1 > a_1$. Но тогда в силу неубывания $f(x)$ на отрезке $[a_1,b_1]$ имеем, что $f(x) = \mathrm{const}$ на нем, и, следовательно, $f'(x) = 0$ на (a_1,b_1), что противоречит условию теоремы. Тем самым теорема 4 доказана полностью.

§ 8. НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Т е о р е м а (неравенство Юнга). *Пусть $\alpha,\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$. Тогда при $x > 0$ имеем*

$$x^\alpha \leq \alpha x + \beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $f(x) = x^\alpha - \alpha x - \beta$. Заметим, что $f(1) = 1 - \alpha - \beta = 0$. Далее, поскольку

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) < 0 \text{ при } x > 1,$$

при $x > 1$ функция $f(x)$ убывает. Следовательно, при $x > 1$ выполнено неравенство $f(x) < f(1) = 0$.

Если же $0 < x < 1$, то

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) > 0.$$

Отсюда получим, что $f(x) < f(1) = 0$ при $0 < x < 1$. Таким образом, для всех $x > 0$ выполнено неравенство $x^\alpha - \alpha x - \beta \leq 0$, откуда следует справедливость теоремы.

Положим $x = a/b > 0$. Из неравенства Юнга имеем $a^\alpha b^\beta \le \alpha a + \beta b$. Это неравенство справедливо при любых $a, b \ge 0$.

Положим теперь

$$a = \frac{u_\nu^{1/\alpha}}{\sum_{\nu=1}^n u_\nu^{1/\alpha}}, \quad b = \frac{v_\nu^{1/\beta}}{\sum_{\nu=1}^n v_\nu^{1/\beta}}, \quad u_\nu, v_\nu \ge 0,$$

и просуммируем по ν от 1 до n. Получим

$$\sum_{\nu=1}^n \left(\frac{u_\nu^{1/\alpha}}{\sum_{s=1}^n u_s^{1/\alpha}}\right)^\alpha \left(\frac{v_\nu^{1/\beta}}{\sum_{s=1}^n v_s^{1/\beta}}\right)^\beta \le 1,$$

т. е.

$$\sum_{\nu=1}^n u_\nu v_\nu \le \left(\sum_{\nu=1}^n u_\nu^{1/\alpha}\right)^\alpha \left(\sum_{\nu=1}^n v_\nu^{1/\beta}\right)^\beta.$$

Это неравенство называется **неравенством Гельдера**.

Докажем теперь **неравенство Минковского.** Пусть выполняются следующие условия: $p > 1$; $a_\nu, b_\nu \ge 0$, $\nu = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\left(\sum_{\nu=1}^n (a_\nu + b_\nu)^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=1}^n b_\nu^p\right)^{1/p}.$$

Доказательство. Введем обозначение $1/p + 1/q = 1$. Используя неравенство Гельдера, имеем

$$A = \sum_{\nu=1}^n (a_\nu + b_\nu)^p = \sum_{\nu=1}^n a_\nu (a_\nu + b_\nu)^{p-1} + \sum_{\nu=1}^n b_\nu (a_\nu + b_\nu)^{p-1} = B + C,$$

$$B = \sum_{\nu=1}^n a_\nu (a_\nu + b_\nu)^{p-1} \le \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n (a_\nu + b_\nu)^{q(p-1)}\right)^{1/q},$$

$$C = \sum_{\nu=1}^n b_\nu (a_\nu + b_\nu)^{p-1} \le \left(\sum_{\nu=1}^n b_\nu^p\right)^{1/p} \left(\sum_{\nu=1}^n (a_\nu + b_\nu)^{q(p-1)}\right)^{1/q}.$$

Так как $q(p-1) = p$, то

$$A \le \left(\left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=1}^n b_\nu^p\right)^{1/p}\right) A^{1/q},$$

откуда, поскольку $1 - 1/q = 1/p$, имеем

$$A^{1/p} = \left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{\nu=1}^n b_\nu^p\right)^{1/p},$$

что и требовалось доказать.

§ 9. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — две функции, заданные и дифференцируемые на $[0, 1]$, и для всех $t \in [0, 1]$ имеет место неравенство $\varphi'(t) > 0$ (или $\varphi'(t) < 0$). Тогда $\varphi(t)$ строго возрастает ($\varphi(t)$ строго убывает при $\varphi' < 0$) и эта функция имеет обратную функцию $t = g(x)$. Совокупности пар $(\varphi(t), \psi(t))$ задают функцию $y = f(x)$ такую, что

$$(x, y) = (x, f(x)) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

где $x = \varphi(t)$, $\quad t = g(x)$, $\quad f(x) = \psi(g(x))$.

Найдем ее производную. Имеем

$$f'(x) = \psi'_g(g(x))g'(x) = \frac{\psi'_g(g(x))}{\varphi'_g(g(x))},$$

поскольку

$$g'(x) = \frac{1}{\varphi'_g(g(x))}.$$

Это равенство для $f'(x)$ можно записать в следующем виде:

$$f'_\varphi(\varphi(t)) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

что дает нам правило нахождения производной функции, заданной параметрически. Таким же образом можно вычислить производные любого порядка. Найдем, например, формулу для второй производной. Имеем

$$f''(x) = f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t)).$$

С одной стороны, справедливо равенство

$$(f'_\varphi(\varphi(t)))'_t = f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

С другой стороны, имеем

$$(f'_\varphi(\varphi(t)))'_t = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^2}.$$

Следовательно,

$$f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t)) = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Лекция 21

§ 10. РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Т е о р е м а 1 (первое правило Лопиталя; неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ при $x \to a-$). *Пусть:*

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некотором интервале вида $(a-\delta_1, a)$, $\delta_1 > 0$;

2) $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} g(x) = 0$;

3) $f'(x), g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a-\delta_2, a)$ при некотором $\delta_2 > 0$;

4) существует конечный или бесконечный предел при $x \to a-$ отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, т.е. $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что предел $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ при $x \to a-$ является конечным числом и равен l, поскольку если это не так, то можно рассмотреть отношение $\frac{g(x)}{f(x)}$.

Доопределим $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, полагая $f(a) = g(a) = 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a слева. Поскольку $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to l$ при $x \to a-$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $x \in I(\delta_3) = (a-\delta_3, a)$ имеем

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Тогда для каждого $x \in (a-\delta,\ \delta)$, используя теорему Коши, получим

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - l\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon,$$

где $c \in (x, a) \subset (a-\delta, a)$.

Таким образом, по определению предела

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = l,$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е 1. *В теореме 1 можно заменить условие $x \to a-$ и интервал $(a-\delta, a)$ на условие $x \to a+$ и интервал $(a, a+\delta)$.*

Для *д о к а з а т е л ь с т в а* этого факта достаточно сделать замену переменной $y = 2a - x$ и применить теорему 1 к функциям $f_1(y) = f(x)$ и $g_1(y) = g(x)$. Очевидно, эти функции удовлетворяют условиям теоремы, причем $y = 2a - x \to a-$ при $x \to a+$.

С л е д с т в и е 2 (первое правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при $x \to a$). *Пусть:*

1) $f(x)$ и $g(x)$ определены на некотором интервале $(a-\delta, a+\delta)$ и дифференцируемы на нем, за исключением, быть может, точки $x = a$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

3) $f'(x), g'(x) \neq 0$ при $x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$;

4) существует конечный или бесконечный предел: $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно вытекает из теоремы 1 и следствия 1.

Похожая теорема имеет место для предела отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ и в том случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к ∞ при $x \to a$ (неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$). Однако доказательство в этом случае усложняется по причине, которая будет ясна дальше.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2 (второе правило Лопиталя; неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x \to a-$). *Пусть:*

1) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в интервале вида $(a-h, a)$, $h > 0$;

2) $f'(x), g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a-h, a)$;

3) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a-$;

4) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда предел отношения функций также существует и имеет место равенство

$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что можно считать

$$\lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R},$$

т.е. предел конечен. Действительно, если $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, то

$$\lim_{x\to a-} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0.$$

И вместо того чтобы доказывать, что $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$, достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to a-} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. Одновременно это будет означать, что $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Как и при доказательстве теоремы 1, будем использовать формулу Коши. Но здесь ситуация сложнее, так как мы не можем сразу отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ заменить на $\frac{\Delta f(x)}{\Delta g(x)}$. Тем не менее, это можно сделать с малой погрешностью, которая, по существу, стремится к нулю. Будем считать, что в некоторой полуокрестности $(a - h_1, a)$ точки a выполняется неравенство $f(x) \neq 0$ и $g(x) \neq 0$. Это возможно, поскольку $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a-$.

Пусть ε_1 — любое число, $0 < \varepsilon_1 < 1/2$. Возьмем $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ так, чтобы неравенство

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \varepsilon_1, \quad \delta_1 < \min(h, h_1)$$

выполнялось для всех x из интервала $(a - \delta_1, a)$. Это возможно, так как

$$\lim_{x\to a-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$$

существует по условию. Пусть x_0 — некоторая точка из этой окрестности. Поскольку $\lim_{x\to a-} f(x) = \infty$, то найдется $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon_1) > 0$ такое, что

$$|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{\varepsilon_1} \quad \forall\ x \in (a - \delta_2, a).$$

Аналогично найдется $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon_1) > 0$ такое, что

$$|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{\varepsilon_1} \quad \forall\ x \in (a - \delta_3, a).$$

Пусть $\delta_4 = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, $\quad I_4 = \{x \mid \ x \in (a - \delta_4, a)\}$. Тогда для любого $x \in I_4$ в силу теоремы Коши имеем

$$\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} - l\right| = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - l\right| = \left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - l\right| < \varepsilon_1,$$

где $c \in (x, x_0) \subset I_4$. Отсюда получим

$$\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right| = \left|\left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} - l\right) + l\right| < \varepsilon_1 + |l| < 1 + |l|.$$

Далее для тех же значений x будем иметь цепочку неравенств:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} + \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} - l\right| \le$$
$$\le \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right| + \left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)} - l\right| \le$$
$$\le \left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta g(x_0)}\right| \left|\frac{\frac{\Delta g(x_0)}{g(x)}}{\frac{\Delta f(x_0)}{f(x)}} - 1\right| + \varepsilon_1 = \left|\frac{\Delta f}{\Delta g}\right| A + \varepsilon_1.$$

Но так как

$$\frac{\Delta g}{g} = 1 - \frac{g(x_0)}{g(x)} = 1 + \alpha, \text{ где } |\alpha| < \varepsilon_1,$$
$$\frac{\Delta f}{f} = 1 - \frac{f(x_0)}{f(x)} = 1 + \beta, \text{ где } |\beta| < \varepsilon_1,$$

то

$$A = \left|\frac{1+\alpha}{1+\beta} - 1\right| = \frac{|\alpha - \beta|}{|1+\beta|} \le \frac{2\varepsilon_1}{0,5} = 4\varepsilon_1.$$

Следовательно, получаем

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| \le (|l| + 1)4\varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon_1(4|l| + 5) = \varepsilon.$$

Положим

$$\delta(\varepsilon) = \delta_4\left(\frac{\varepsilon}{4|l| + 5}\right).$$

Тогда для любого $\varepsilon = \left(0, \frac{1}{2}(4|l|+5)\right)$ найдено $\delta = \delta(\varepsilon) = \delta_4\left(\frac{\varepsilon}{4|l|+5}\right)$ такое, что для любого $x \in (a - \delta, a)$ выполняется неравенство $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \varepsilon$. Это значит, что

$$\lim_{x \to a-} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е 1. *Если в теореме 2 условия $x \to a-$ и $x \in (a-h, a)$ заменить на условия $x \to a+$ и $x \in (a, a+h)$, то утверждение теоремы остается в силе.*

Для *д о к а з а т е л ь с т в а* достаточно применить теорему 2 к функциям

$$f_1(y) = f_1(2a - x) = f(x), \quad g_1(y) = g_1(2a - x) = g(x).$$

С л е д с т в и е 2 (второе правило Лопиталя; неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to a$). *Пусть:*

1) $f(x)$, $g(x)$ определены и дифференцируемы в проколотой h-окрестности точки a;

2) $f'(x), g'(x) \neq 0$ в той же окрестности точки a;

3) $f(x) \to \infty$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a$;

4) существует предел отношения производных $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Тогда предел отношения функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ существует и равен

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения непосредственно следует из утверждений теоремы 2 и следствия 1.

Замечания. **1.** В теоремах 1 и 2 условие $x \to a-$ можно заменить условием $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, а во вторых следствиях теорем 1 и 2 — на $x \to \infty$.

Доказательство проводится посредством подходящей замены переменной. Например, в случае $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ надо положить $x = -1/t$. Тогда

$$\left.\frac{f'(x)}{g'(x)}\right|_{x=-1/t} = \frac{f'_t\left(-\frac{1}{t}\right)/\frac{1}{t^2}}{g'_t\left(-\frac{1}{t}\right)/\frac{1}{t^2}} = \frac{f'_t\left(-\frac{1}{t}\right)}{g'_t\left(-\frac{1}{t}\right)} = \frac{f'_1(t)}{g'_1(t)}.$$

Отсюда следует существование предела

$$\lim_{t\to 0-} \frac{f'_1(x)}{g'_1(x)} = l,$$

и затем по теореме 1 имеем

$$\lim_{t\to 0-} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = l = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

2. Применение теоремы Штольца о пределе отношения двух последовательностей позволяет существенно упростить довольно громоздкий вывод второго правила Лопиталя. Далее мы приведем еще один вариант доказательства теоремы 2, основанный на указанной выше идее.

Доказательство теоремы 2. В силу определения предела по Гейне мы имеем, что условие $\frac{f(x)}{g(x)} \to l$ при $x \to a-$ означает выполнение условия $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to l$ для любой возрастающей последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a, $x_n \neq a$. Но так как по условию теоремы $g(x) \to \infty$ при $x \to a-$, то и $g(x_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, а это значит, что к отношению $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ можно применить теорему Штольца. Поэтому, используя еще и теорему Коши, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)},$$

если только последний предел существует. Но для чисел c_n мы имеем здесь неравенства $x_n < c_n < x_{n+1}$, откуда следует, что $c_n \to a$ при $n \to \infty$, поэтому последний предел существует и равен l.

Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

Примеры. 1. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$. По второму правилу Лопиталя имеем

$$\ln x^x = x \ln x = \frac{\ln x}{1/x},$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\ln x^x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

2. Используя первое правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Лекция 22

§ 11. ЛОКАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

В качестве приложения докажем *формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано* или, как ее еще называют, *локальную формулу Тейлора.*

Мы видим, что дифференциал df приближает приращение Δf с точностью до бесконечно малой порядка, большего 1. Это означает также, что
$\Delta f(a) - df(x)|_{x=a} = o(\Delta x)$, т.е. имеем

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = o(|x-a|) \quad \text{при} \quad x \to a.$$

Правило Лопиталя позволяет обобщить это утверждение.

Рассмотрим **многочлен Тейлора степени** n:

$$q(x) = f_n(a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n,$$

где $\Delta x = x - a$.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $f(x)$ дифференцируема $n-1$ раз в некоторой окрестности точки $x = a$ и существует $f^{(n)}(a)$. Тогда*

$$r(x) = f(x) - f_n(a,x) = o((\Delta x)^n) \quad \textit{при} \quad \Delta x \to 0,$$

Доказательство. Применим первое правило Лопиталя $n-1$ раз при $x \to a$ к отношению

$$\alpha(x) = \frac{r(x)}{(x-a)^n}.$$

Получим

$$\lim_{x\to a}\frac{r(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{r'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \cdots =$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{r^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x) - q^{(n-1)}(x)}{x-a}.$$

Далее имеем

$$q^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(a) + f^{(n)}(a)(x-a).$$

Отсюда

$$\lim_{x\to a}\alpha(x) = \lim_{x\to a}\frac{r^{(n-1)}(x)}{((x-a)^n)^{(n-1)}} =$$

$$= \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\left(\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - f^{(n)}(a)\right) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(a) - f^{(n)}(a)) = 0.$$

Другими словами, $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$. Следовательно, $r(a) = (x-a)^n\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая, т.е.

$$r(x) = o((x-a)^n).$$

Теорема доказана.

Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано удобно использовать для вычисления пределов. Действительно, при $x \to 0$ имеем, например,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x + x^3/6}{x^5} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5/120 + o(x^5)}{x^5} = \frac{1}{120}.$$

Важно отметить, что локальная формула Тейлора имеет и глубокий содержательный смысл. В частности, она обобщает понятие дифференцируемости функции в точке, поскольку при $n = 1$ мы получаем из нее данное выше определение дифференциала функции.

Будем говорить, что при некотором $n \in \mathbb{N}$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют **касание n-го порядка в точке** x_0, если при $x \to x_0$ выполняется соотношение $f(x) - g(x) = o((x-x_0)^n)$. Тогда локальная формула Тейлора утверждает, что многочлен Тейлора $f_n(x)$ имеет касание n-го порядка с функцией $f(x)$.

Заметим, что если два многочлена n-й степени $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ имеют касание порядка n в некоторой точке x_0 с какой-либо функцией $g(x)$, то их коэффициенты совпадают и $P_n(x) = Q_n(x)$. Действительно, тогда имеем

$$h_n(x) = P_n(x) - Q_n(x) = (P_n(x) - g(x)) + (g(x) - Q_n(x)) = o((x-x_0)^n).$$

Но так как многочлен $h_n(x)$ имеет степень n, то, устремляя $x \to x_0$, получим, что все коэффициенты $h_n(x)$ равны нулю. Это и означает, что $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ представляют собой один и тот же многочлен. Отсюда также следует, что многочлен Тейлора $f_n(x) = f_n(a, x)$, из доказанной выше теоремы, определен однозначно. Производные функции $f(x)$ в точке a выражаются через его коэффициенты c_k по формулам

$$f_k(a) = k!c_k, \; k = 1, \ldots, n.$$

Интересно, что возможна ситуация, когда в точке a функция $f(x)$ вторая производная $f''(a)$ уже не существует, и в то же время в этой точке имеет место касание порядка $n \geq 2$ этой функции и многочлена $P_n(x)$ степени n. Тогда при $k \geq 2$ величины

$$\partial_k = \frac{c_k}{k!},$$

где c_k — коэффициенты многочлена $P_k(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$, можно рассматривать как обобщение понятия производной соответствующего порядка функции $f(x)$ в точке $x = a$. Будем называть эти числа **метками** k-го порядка функции $f(x)$ в точке $x = a$ и обозначать их через $\partial_k = \partial_k(f(a))$.

Приведем **пример**, в котором на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ "почти всюду" разрывна, но в то же время она на "всюду плотном множестве" имеет не только производную первого порядка, но и метки $\partial_k(f(x))$ любого порядка (точный смысл слов, взятых в кавычки, станет ясным ниже). Эта функция задается так

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное,} \\ n^{-n}, & \text{если } x = \frac{m}{n}, \; (m, n) = 1. \end{cases}$$

Относительно данной функции ограничимся доказательством утверждения, касающегося существования только первой производной.

Очевидно, что если x_0 — рациональное число из отрезка $[0, 1]$, то $f(x)$ разрывна в точке x_0. Если x_0 — иррациональное число, то для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число дробей со знаменателями, не превосходящими $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, а именно, $r_1, \ldots, r_k$.

Пусть $\delta = \min\limits_{i \leq k} |x_0 - r_i|$. Тогда для любого x с условием $|x - x_0| < \delta$ имеем

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| < N^{-N} < N^{-1} < \varepsilon.$$

Далее нам потребуются следующие определение и теорема. *Число α называется* **алгебраическим,** *если оно удовлетворяет алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами. Оно будет иррациональным, если любой многочлен первой степени с целыми коэффициентами не обращается в нуль.*

Теорема (теорема Рота). *Пусть ξ — иррациональное алгебраическое число и $\rho > 2$ — произвольная постоянная. Тогда существует конечное число пар (p, q) целых чисел, $q \geq 1$, $(p, q) = 1$ таких, что*

$$|\xi - \frac{p}{q}| < q^{-\rho}.$$

Пусть x_0 — любое алгебраическое иррациональное число. По теореме Рота при $\rho > 2$ неравенство

$$|x_0 - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^\rho}$$

имеет лишь конечное число решений. Обозначим эти решения через $\frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_r}{q_r}$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и положим

$$N = \max(q_1, \ldots, q_r, \rho, [1/\varepsilon] + 1), \ \delta = \min_{i \leq r} \left| x_0 - \frac{p_i}{q_i} \right|.$$

Тогда, если $|x - x_0| < \delta$, то при $x = m/n$, $(m, n) = 1$, имеем, что

$$n > N, \ \left| \frac{m}{n} - x_0 \right| \geq \frac{1}{n^\rho}, \ |f(x) - f(x_0)| = \frac{1}{n^n}.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \frac{n^{-n}}{n^{-\rho}} = n^{\rho - n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Если же x — иррациональное число, то

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = 0 < \varepsilon.$$

Таким образом установлено, что при алгебраическом иррациональном числе x_0 функция $f(x)$ имеет производную, равную нулю.

Назовем множество A *всюду плотным* на отрезке $[a, b]$, если для любой точки $x \in [a, b]$ в каждом интервале, содержащем x, находится хотя бы одна точка множества A.

Тогда указанная выше функция будет: 1) разрывна на всюду плотном множестве отрезка $[0, 1]$, 2) непрерывна на всюду плотном множестве в $[0, 1]$, 3) иметь производную на всюду плотном множестве в $[0, 1]$ (см. [34]).

В связи с рассмотренным примером может возникнуть вопрос: Будет ли функция $g(x)$ на отрезке $[a, b]$ дифференцируема n раз, если в каждой точке этого отрезка у функции $g(x)$ существует метка $\partial_n g(x)$? Пример функции $y = e^{-1/x^2} \sin e^{1/x^2}$ дает отрицательный ответ на этот вопрос.

В заключение приведем другое доказательство локальной формулы Тейлора, допускающее простое обобщение на случай функций от нескольких переменных.

Второе доказательство теоремы. Применим метод математической индукции по параметру n. При $n = 1$ утверждение теоремы следует из определения дифференциала функции. Предположим теперь, что $n > 1$. Из условия теоремы вытекает, что функция $r(x)$ дифференцируема $(n-1)$ раз в некоторой окрестности U точки $x = a$, и в самой точке дифференцируема n раз. Кроме того, в точке a сама функция и все ее производные до n-го порядка включительно равны нулю.

Далее, пусть $x \in U$ и $\Delta x = x - a$. Обозначим через $g(t)$ функцию вида

$$g(t) = r(a + t\Delta x).$$

Тогда имеем

$$r(x) = r(x) - r(a) = r(a + \Delta x) - r(a) = g(1) - g(0).$$

Отсюда, применяя формулу Лагранжа к функции $g(t)$, при некотором ξ, $0 < \xi < 1$, получим

$$r(x) = g'(\xi) = r'_x(a + \xi\Delta x)\Delta x.$$

Заметим, что точка $a + \xi\Delta x \in U$. Поэтому к производным в правой части последнего равенства можно применить предположение индукции с заменой значения параметра n на $n - 1$. Тогда будем иметь

$$r'_x(a + \xi\Delta x) = o(|x - a|^{n-1}).$$

Отсюда следует, что $r(x) = o(|x-a|^n)$. Теорема доказана.

§ 12. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в окрестности точки можно записать приближенное равенство

$$f(x) \approx f_n(a, x).$$

Оказывается, что многочлен $f_n(a, x)$ может хорошо приближать $f(x)$ и в некоторой, иногда весьма большой, окрестности точки a. Более того, знание всех чисел $f^{(n)}(a)$, соответствующих только одной точке a, часто позволяет вычислить $f(x)$ при любом x с любой требуемой степенью точности. Этот факт важен не столько для вычислений, сколько для построения теории. Выражаясь более точно, мы сейчас докажем одну из важнейших теорем анализа, центральную теорему курса в этом семестре, а именно: формулу Тейлора с остаточным членом в общей форме (или в форме Шлемильха–Роша).

Т е о р е м а (формула Тейлора). *Пусть $f(x)$ — $(n+1)$ раз дифференцируемая функция на интервале (x_0, x_1). Пусть $a < b$ — любые две точки из этого интервала. Тогда для любого положительного $\alpha > 0$ существует точка c, лежащая между a и b такая, что*

$$r_n(b) = f(b) - f_n(a, b) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{\alpha} \cdot (b-c)^{n+1} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Напомним, что

$$f_n(a, b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим число H равенством

$$H = \frac{f(b) - f_n(a, b)}{(b-a)^{\alpha}}.$$

По существу, нам надо доказать, что на интервале (a, b) найдется точка c такая, что

$$H = \frac{n+1}{\alpha}(b-c)^{n+1-\alpha} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Докажем это, опираясь на теорему Ролля. Равенство, определяющее число H, можно записать так:

$$f(b) - f_n(a,b) - H(b-a)^\alpha = 0.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t)$, определенную на $[a,b]$ соотношением

$$\varphi(t) = f(b) - f_n(t,b) - H(b-t)^\alpha.$$

Тогда, очевидно, $\varphi(a) = 0$. Кроме того, имеем, что $\varphi(t)$ дифференцируема на (a,b) и непрерывна на $[a,b]$. Далее, так как справедливо равенство $f_n(b,b) = f(b)$, то

$$\varphi(b) = f(b) - f(b) - H(b-b)^\alpha = 0.$$

Следовательно, по теореме Ролля на интервале (a,b) производная $\varphi'(t)$ обращается в нуль в некоторой точке c, т.е.

$$\varphi'(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = c, \quad c \in (a,b).$$

Запишем $\varphi'(t)$ в развернутой форме:

$$\varphi'(t) = -f_n'(t,b) + \alpha H(b-t)^{\alpha-1} =$$

$$= \left(f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(b-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(b-t)^n\right)_t' + \alpha H(b-t)^{\alpha-1}.$$

Так как при $s = 1, \ldots, n$ имеем

$$\left(\frac{f^{(s)}(t)}{s!}(b-t)^s\right)_t' = \frac{f^{(s+1)}(t)}{s!}(b-t)^s - \frac{f^{(s)}(t)}{(s-1)!}(b-t)^{s-1},$$

то

$$\varphi'(t) = \alpha H(b-t)^{\alpha-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n.$$

Отсюда при $t = c$ получаем

$$\varphi'(c) = \alpha H(b-c)^{\alpha-1} - f^{(n+1)}(c)\frac{(b-c)^n}{n!} = 0.$$

Следовательно,

$$H = \frac{n+1}{\alpha}(b-c)^{n+1-\alpha} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Доказательство закончено.

С л е д с т в и е. *Формула Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха – Роша верна и при* $a \geq b$.

Доказательство. 1. Если $b = a$, то $f_n(a,b) = f(a)$, $r_n(b) = 0$ и формула имеет место.

2. Если $b < a$, то применим теорему к функции $g(x) = f(2a - x)$, $b_1 = 2a - b$. Тогда $b_1 > a$ и справедливо равенство

$$g(b_1) = g_n(a, b_1) + R_n(b_1).$$

Но легко убедиться в том, что $g(b_1) = f(b)$, $g_n(a,b_1) = f_n(a,b)$, $R_n(b_1) = r_n(b)$. Действительно, имеем

$$(b_1 - a)^s = (a-b)^s = (-1)^s(b-a)^s;$$

$$g_n(a,b_1) = g(a) + \frac{g'(a)}{1!}(b_1 - a) + \dots + \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(b_1 - a)^n =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n = f_n(a,b).$$

Далее при некотором c_1, $a < c_1 < b$, справедливо равенство

$$R_n(b_1) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{b_1 - a}{b_1 - c_1}\right)^{\alpha}(b_1 - c_1)^{n+1}\frac{g^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!}.$$

Положим $c = 2a - c_1$. Тогда $b < c < a$,

$$R_n(b_1) = \frac{n+1}{\alpha}\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{\alpha}\frac{f^{(n+1)}(c_1)}{(n+1)!}(b-c)^{n+1} = r_n(b).$$

Таким образом, формула Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха–Роша в случае $a \geq b$ имеет тот же вид, что и при $a < b$. Следствие доказано.

Частные случаи формулы Тейлора.

1. Остаточный член в форме Лагранжа ($\alpha = n+1$). В этом случае

$$r_n(b) = \frac{n+1}{n+1}\left(\frac{b-a}{b-c}\right)^{n+1}(b-c)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

2. Остаток в форме Коши ($\alpha = 1$):

$$r_n(b) = \frac{n+1}{1}\frac{b-a}{b-c}\cdot(b-c)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

$$c = a + \theta(b-a), \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 - \theta = \frac{b-c}{b-a},$$

$$r_n(b) = (b-a)^{n+1}(1-\theta)^n\frac{f^{(n+1)}(a + \theta(b-a))}{n!}.$$

Замечания. **1**. Формула Тейлора (с остаточным членом в любой форме) в частном случае $a = 0$ обычно называется *формулой Маклорена.*

2. Сравнивая формулы Тейлора с остаточными членами в общей форме и в форме Пеано, видим, что в первом случае имеем более точный результат, однако достигается это за счет более жестких требований к функции. В самом деле, в первом случае в окрестности точки, в которой рассматривается разложение, требуется существование $(n+1)$-й производной данной функции, а во втором случае — только $(n-1)$-й производной, то есть на две производные меньше.

Лекция 23

§ 13. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА К НЕКОТОРЫМ ФУНКЦИЯМ

1. Показательная функция: $f(x) = e^x$. Имеем

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1; \quad f^{(n+1)}(x) = e^x.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа принимает вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

При любом фиксированном x остаток в ней стремится к нулю, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

2. Функция $f(x) = \sin x$. Имеем

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(2k+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \cos\theta x.$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа дает

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos\theta x.$$

3. Функция $f(x) = \cos x$. Имеем

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(2k)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + 2k\cdot\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k\cos\theta x.$$

Тогда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos\theta x.$$

4. Функция $f(x) = \ln(1+x)$. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Следовательно,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n,$$
$$R_n = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

Заметим, что если $|x| < 1$, то $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Кроме того,

а) если $0 \le x < 1$, то $|R_n| \le \frac{1}{n+1}$;

б) если $-1 < -r \le x < 0$, то $|R_n| \le \frac{r^{n+1}}{n(1-r)}$, где

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$$

(остаток в форме Коши).

5. Функция $f(x) = (1+x)^\alpha$. Имеем

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

поэтому

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta_1 x)^{\alpha-n-1}, \quad 0 < \theta_1 < 1$$

(остаток в форме Лагранжа),

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta_2 x)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\theta_2}{1+\theta_2 x}\right)^n, \quad 0 < \theta_2 < 1$$

(остаток в форме Коши). Если $|x| < 1$, то $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Мы видим, что во всех этих случаях $R_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Другими словами,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0, x) = f(x).$$

Это предельное выражение символически записывается так:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

и называется **рядом Тейлора функции** $f(x)$ в точке $x = a$.

Заметим, что при всех $n \in N$ для n-го члена ряда имеет место равенство

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \frac{d^n f(x)}{n!} = \left.\frac{d^n f(x)}{n!}\right|_{\substack{x=a \\ \Delta x = x-a}}.$$

Поэтому ряд Тейлора можно переписать в следующем виде

$$\Delta f = \frac{df}{1!} + \frac{d^2 f}{2!} + \dots + \frac{d^n f}{n!} + \dots .$$

Тем самым определен точный смысл равенства, приведенного ранее в лекции 18, §4.

Замечание. Ряд Тейлора не всегда сходится к породившей его функции.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Тогда при любом натуральном k имеем

$$f^{(k)}(0) = 0.$$

Таким образом, мы видим, что ряд Тейлора нулевой, а породившая его функция отлична от тождественного нуля.

Лекция 24

§ 14. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТОЧКИ. ВЫПУКЛОСТЬ

Наша дальнейшая цель — применение построенной теории к решению задач, связанных с изучением поведения функций. Одна из них — задача отыскания локальных и глобальных экстремумов функций. Ранее мы уже доказали ряд утверждений подобного типа. Напомним их, а заодно и некоторые понятия, которые потребуются далее.

1. Точки x, в которых $f'(x) = 0$, называются **стационарными.**

2. **Критерий возрастания (в широком смысле)** на интервале (a, b) дифференцируемой функции: для того чтобы функция $f(x)$ не убывала на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ на (a, b).

3. **Критерий возрастания в строгом смысле:** для того чтобы $f(x)$ строго возрастала на (a, b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ на (a, b) и, кроме того, $f'(x) \not\equiv 0$ ни на каком интервале $(a_1, b_1) \supset (a, b)$.

Отсюда имеем **достаточное условие строгого возрастания:** для того чтобы $f(x)$ строго возрастала, достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ при всех $x \in (a, b)$.

4. **Т е о р е м а Ферма.** Если в точке $x_0 \in (a, b)$ имеется несобственный локальный экстремум функции $f(x)$, то x_0 — стационарная точка.

Далее мы выведем несколько достаточных условий достижения функцией локального экстремума в заданной точке.

Т е о р е м а 1. *Пусть $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 (т.е. в этой точке $f'(x_0) = 0$). Тогда:*

1а) если $f'(x) > 0$ слева от x_0 и $f'(x) < 0$ справа от x_0, то x_0 — точка строгого локального максимума функции $f(x)$;

1б) если $f'(x) < 0$ слева от x_0 и $f'(x) > 0$ справа от x_0, то x_0 — точка строгого локального минимума $f(x)$;

2) если $f'(x)$ имеет справа и слева от точки x_0 один и тот же знак, то x_0 не является точкой экстремума ни в широком, ни в строгом смысле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1а. По теореме Лагранжа имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0),$$

где точка c находится на интервале с концами x_0 и x.

Из условия следует, что $f'(c)(x - x_0) < 0$. Действительно, если $x - x_0 > 0$, то $c > x_0$ и, значит, $f'(c) < 0$, $(x - x_0)f'(c) < 0$; если же $x - x_0 < 0$, то $f'(c) > 0$ и $(x - x_0)f'(c) < 0$. Отсюда получим, что $f(x) < f(x_0)$, что и требовалось доказать. Доказательство п. 1б проводится аналогично.

2. Если $f'(x) > 0$ справа и слева от x_0, то $f'(c)(x-x_0) < 0$ слева и > 0 справа. Отсюда имеем $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$ при $x_1 < x_0 < x_2$, что и требовалось доказать. Случай $f'(x) < 0$ рассматривается аналогично.

Доказанная нами теорема позволяет сформулировать следующее **правило исследования стационарной точки на экстремум:**

Если при переходе через стационарную точку слева направо производная меняет знак $+$ на знак $-$, то функция имеет локальный максимум в этой точке, если меняется знак $-$ на знак $+$, то функция имеет локальный минимум, и если она не меняет знак, то локального экстремума нет.

Т е о р е м а 1а. *Пусть $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки и дифференцируема в проколотой окрестности этой точки. Если $f'(x)$ меняет знак $+$ на знак $-$ при переходе через точку x_0 слева направо, то $f(x)$ имеет локальный максимум, если знак $-$ на знак $+$, то локальный минимум, и если не меняет знак, то локального экстремума нет.*

Д о к а з а т е л ь с т в о совершенно аналогично доказательству теоремы 1, так как там мы нигде не пользовались существованием производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Общее правило отыскания (локального и глобального) **экстремума** функции $f(x)$ на отрезке в случае, когда $f(x)$ непрерывна и кусочно-дифференцируема (т.е. дифференцируема всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек).

Находим все стационарные точки и точки, в которых $f'(x)$ не существует, и проверяем их на экстремальность. Затем, добавляя концевые точки и выбирая наибольшее и наименьшее из значений функции в этих точках, находим ее глобальные экстремумы.

Т е о р е м а 2 (второе достаточное условие экстремума). *Пусть $f'(x_0) = 0$ и существует $f''(x_0)$. Тогда:*

1) если $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 — точка (строгого) локального максимума;

2) если $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 — точка (строгого) локального минимума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Так как $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ убывает в точке $x = x_0$, и поскольку $f'(x_0) = 0$, то $f'(x)$ меняет знак с + на – при переходе через x_0 слева направо. Поэтому по теореме 1 точка x_0 является локальным максимумом.

2. $f''(x_0) > 0$, поэтому $f'(x)$ возрастает в точке $x = x_0$.

Из теоремы 1 тогда следует, что x_0 — точка локального минимума. Доказательство закончено.

Т е о р е м а 3 (третье достаточное условие экстремума). *Пусть*

$$f'(x_0) = \cdots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(2k)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда:

1) если $f^{(2k)}(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума;

2) если $f^{(2k)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. При $k = 1$ утверждение следует из теоремы 2. Пусть $k > 1$. Выразим $f'(x)$ по формуле Тейлора:

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(2k-2)}(x_0)}{(2k-3)!}(x - x_0)^{2k-3} +$$

$$+ \frac{f^{(2k-1)}(c)}{(2k-2)!}(x - x_0)^{2k-2}.$$

Отсюда

$$f'(x) = \frac{f^{(2k-1)}(c)}{(2k-2)!}(x - x_0)^{2k-2}.$$

Так как $f^{(2k)}(x_0) < 0$, то $f^{(2k-1)}(x)$ убывает и, следовательно, $f^{(2k-1)}(x)$ меняет знак + на – при переходе через точку x_0, а значит, и $f'(x)$ меняет знак + на –. Поэтому x_0 — точка локального максимума. Случай 2 рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Определение 1. *Функция $f(x)$ называется* **выпуклой вверх** *на интервале (a, b), если график функции лежит под касательной для любой точки данного интервала.*

Это значит, что если x_0 — произвольная фиксированная точка из (a, b) и

$$f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

то

$$f_1(x) \geq f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Поясним, что график линейной функции $f_1(x)$ является касательной к графику $f(x)$ в точке x_0.

Определение 2. *Функция $f(x)$ называется* **выпуклой вниз** *на (a,b), если график ее лежит над касательной, т.е.*

$$f_1(x) \le f(x) \quad \forall x \in (a,b).$$

Т е о р е м а 4. *1. Если $f''(x) \le 0$ на (a,b), то $f(x)$ выпукла вверх на (a,b).*

2. Если $f''(x) \ge 0$ на (a,b), то $f(x)$ выпукла вниз на (a,b).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Из формулы Тейлора имеем

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2,$$

где $c \in (a,b)$.

Так как $f''(c) \le 0$, то $f(x) \le f_1(x)$ $\forall x \in (a,b)$, что и требовалось доказать. Случай 2 доказывается аналогично.

Т е о р е м а 4а. *Если $f''(x_0) < 0$ и $f''(x)$ непрерывна в x_0, то $\exists$ δ-окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ выпукла вверх.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f''(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f''(x_0) < 0$, существует число $\delta_1 > 0$ такое, что $f''(x) < 0$ в δ_1-окрестности точки x_0, и в ней по теореме 4 функция $f(x)$ выпукла вверх, что и требовалось доказать.

Замечание. Если в определениях 1 и 2 имеют место строгие неравенства, то функция $f(x)$ называется **строго выпуклой.** Строгие знаки неравенства в теоремах 4 и 4а влекут за собой строгую выпуклость функции $f(x)$.

Т е о р е м а 5. *Пусть функция $f(x)$ имеет первую производную на интервале (a,b) и выпукла на этом интервале. Тогда производная $f'(x)$ является непрерывной и монотонной функцией на этом интервале, причем строгая выпуклость $f(x)$ влечет за собой строгую монотонность $f'(x)$. Выпуклость вверх при этом соответствует убыванию, а выпуклость вниз — возрастанию производной $f'(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы ограничимся рассмотрением только одного случая, а именно, когда функция выпукла вниз в нестрогом смысле. Выберем произвольным образом на интервале (a,b) две точки $x_1 < x_2$. Пусть $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на координатной плоскости соединим хордой и ее угловой коэффициент $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ обозначим через k_0. Через точку (x_1, y_1) проведем касательную прямую к графику функции $y = f(x)$. Поскольку $f(x)$ выпукла вниз, эта касательная лежит под графиком, следовательно, и под хордой, имея с ней общую точку (x_1, y_1). Но это возможно лишь в том случае, если угловой коэффициент касательной $f'(x_1)$ не превосходит углового коэффициента хорды k_0, т.е. если $f'(x_1) \le k_0$.

Рассуждая подобным образом относительно точки (x_2, y_2), приходим к неравенству $k_0 \le f'(x_2)$, откуда имеем $f'(x_1) \le k_0 \le f'(x_2)$. В силу произвольности выбора точек $x_1 < x_2$ это означает, что $f'(x)$ не убывает на (a, b).

Теперь заметим, что по теореме Дарбу функция $f'(x)$ принимает все свои промежуточные значения, а это ввиду монотонности $f(x)$ влечет за собой непрерывность функции $f'(x)$. Таким образом, рассматриваемый случай разобран полностью.

Другие случаи рассматриваются совершенно аналогично, поэтому теорему 5 можно считать доказанной.

Замечание. Из определений 1 и 2 следует, что всякая хорда, соединяющая две различные точки графика функции, выпуклой вверх, лежит под ее графиком, а для функции, выпуклой вниз, она лежит над графиком. Это свойство часто берется в качестве исходного определения выпуклости функции (вверх или вниз соответственно). Рассмотрим его подробнее на примере функции выпуклой вверх. Запишем свойство выпуклости вверх функции в аналитической форме с помощью неравенств. Значения координат точки (x, y), находящейся на хорде с концами в точках (x_1, y_1), $y_1 = f(x_1)$ и (x_2, y_2), $y_2 = f(x_2)$ при x_1 и x_2, принадлежащих интервалу (a, b), с условием $x_1 < x_2$ можно записать в виде

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Поскольку величина y в этом случае не должна превосходить $f(x)$, то условие выпуклости вверх будет выражено следующим соотношением

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \ge y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

В этом случае функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и имеет на нем правую и левую производную. Далее мы докажем непрерывность функции и ограничимся рассмотрением только правой производной.

Сначала докажем непрерывность справа функции $f(x)$ в любой точке x_0 интервала (a, b). Прежде всего отметим следующий геометрический факт, состоящий в том, что всякая прямая пересекает график функции $f(x)$ либо по некоторому отрезку, либо не более чем в двух точках. Действительно, если бы нашлись три такие точки $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ и $C = (x_3, y_3)$, $x_1 < x_2 < x_3$, то на интервале (x_1, x_2) или на интервале (x_2, x_3) существовала бы точка x_4, для которой точка $D = (x_4, f(x_4))$ не лежит на хорде с концами A и C. Но тогда при $x \in (x_1, x_2)$ точка D обязана лежать выше хорды AB и хорда DC лежит выше точки B, что противоречит выпуклости вверх функции $f(x)$. Если бы точка x_4 лежала на интервале (x_2, x_3), то выше точки B проходила бы хорда AD.

Отсюда следует, что если точка $x_5 \in (a,b)$ лежит левее точки x_0, то часть графика функции $f(x)$, отвечающая точкам $x > x_0$, лежит под продолжением хорды l_1, соединяющей точки $(x_5, f(x_5))$ и $(x_0, f(x_0))$. Это значит, что если k_1 — угловой коэффициент хорды l_1, то при всех $x > x_0$ имеем $\Delta f(x_0) \le k_1 \Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$. Следовательно, при $\Delta x > 0$ заключаем, что

$$\Delta f(x_0) = O(\Delta x) \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0+,$$

т.е. $f(x)$ непрерывна справа в точке $x_0 \in (a,b)$. Подобным же образом можно установить, что функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна слева. Таким образом, во всех точках интервала (a,b) эта функция является непрерывной.

Переходя к доказательству существования правой производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, заметим, что для любых точек x_6 и x_7 с условием $x_0 < x_6 < x_7$ хорда, соединяющая точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_6, f(x_6))$, лежит не ниже хорды, соединяющей точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_7, f(x_7))$, поэтому для угловых коэффициентов k_6 и k_7 этих хорд справедливо неравенство $k_6 \ge k_7$, т.е.

$$k_6 = \left.\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\right|_{\Delta x = x_6 - x_0} \ge \left.\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}\right|_{\Delta x = x_7 - x_0} = k_7.$$

Таким образом, отношение $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ не убывает при монотонном стремлении величины Δx к нулю справа. С другой стороны, это отношение ограничено величиной k_1, рассмотренной выше при доказательстве непрерывности справа функции $f(x)$ в точке $x = x_0$. Следовательно, согласно свойству монотонных функций существует предел отношения

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

который по определению и называется правой производной функции $f(x)$ в точке x_0. Случай левой производной аналогичен.

Итак, мы доказали, что у выпуклой вверх функции правая и левая производные в любой внутренней точке отрезка $[a,b]$ существуют, хотя они и не обязаны быть равными.

С другой стороны, мы установили, что правая производная функции $f(x)$ в точке x_0 не превосходит углового коэффициента k_7. Но предел величины k_7 при $x_7 \to x_0$ есть левая производная $f'(x_0-)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, откуда следует, что в любой точке интервала правая производная не превосходит левой производной. Если же рассмотреть две различные точки $x_0 < x_1$, то угловой коэффициент k хорды, соединяющей точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x_1, f(x_1))$, "разделяет" значения правой производной $f(x_0+)$ в точке x_0 и левой производной $f'(x_1-)$ в точке x_1, т.е.

$$f'(x_0+) \geq k \geq f'(x_1-) \geq f'(x_1+).$$

Отсюда следует, что $f'(x+)$ не возрастает на (a, b). То же справедливо и для левой производной. Поскольку обе эти функции монотонны, каждая из них имеет не более чем счетное множество точек разрыва первого рода. Все остальные точки интервала (a, b) являются точками непрерывности обеих функций. Но в этом случае в силу последнего неравенства их значения совпадают, и тогда функция $f(x)$ имеет обычную производную

$$f'(x_0) = f'(x_0+) = f'(x_0-),$$

которая к тому же будет непрерывной и невозрастающей функцией в этой точке.

Кроме того, по свойству точки разрыва первого рода в ней существуют правые и левые пределы для $f'(x+)$ и $f'(x-)$ и они одновременно совпадают соответственно с правой и левой производными в этой точке. Дело в том, что у функции выпуклой вверх правая производная в каждой точке непрерывна справа, а левая производная — непрерывна слева. Снова будем рассматривать только правую производную функции $f(x)$ в точке x_0. По определению она равна предельному значению чисел k, являющихся угловыми коэффициентами хорды, соединяющей точки $(x_0, f(x_0))$ и $(x, f(x))$, когда x стремится к x_0 справа. Отметим, что при уменьшении x величина k не убывает. Если $x_0 < x_1 < x$, то угловой коэффициент k_1 хорды, проходящей через точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x, f(x))$, не превосходит $f'(x_1+)$. Величина же k_1 стремится к k при $x_1 \to x$. Поэтому предел l функции $f'(x_1+)$ при $x_1 \to x_0+$ не меньше, чем k, т.е. $l \geq k$. Отсюда следует, что

$$l \geq \lim_{x \to x_0+} k = f'(x+),$$

но в силу того, что $f'(x+)$ не возрастает, всегда имеем, что $l \leq f'(x+)$, т.е. $l = f'(x+)$, что и означает непрерывность справа функции $f'(x+)$ в точке x_0.

Лекция 25

§ 15. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Определение 1. *Точку x_0 из интервала (a,b) будем называть* **точкой перегиба** *дифференцируемой функции $f(x)$ (или ее графика), если существует проколотая δ-окрестность точки x_0 такая, что и в правой, и в левой ее полуокрестностях функция $f(x)$ имеет выпуклый график, но направление выпуклости справа и слева разное.*

Лемма 1. *Если x_0 — точка перегиба функции $f(x)$ и $f'(x)$ существует на (a,b), то в некоторой δ-окрестности точки x_0 разность*

$$r(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

является неубывающей или невозрастающей функцией в точке x_0 (в зависимости от изменения направления выпуклости).

Доказательство. Возьмем проколотую δ-окрестность точки x_0, в правой и левой частях которой $f(x)$ имеет разные направления выпуклости. Пусть для определенности при $x_0 - \delta < x < x_0$ функция $f(x)$ выпукла вверх, а при $x_0 < x < x_0 + \delta$ — выпукла вниз.

Надо доказать, что $r(x) \geq 0$ при всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ и $r(x) \leq 0$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Рассмотрим сначала первый случай. Имеем

$$r(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = (f(x) - f(x_0)) - f'(x_0)(x - x_0).$$

К разности $f(x) - f(x_0)$ применим теорему Лагранжа. Тогда при некотором $x_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$ будем иметь

$$r(x) = f'(x_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(x_1) - f'(x_0))(x - x_0).$$

По теореме 5 на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ функция $f'(x)$ непрерывна и не убывает. Точно так же доказывается, что $f'(x)$ не убывает и непрерывна на $(x_0 - \delta, x_0)$. Но так как производная не может иметь разрывов первого рода, а монотонная функция не может иметь разрывов второго рода, то $f'(x)$ непрерывна и в точке x_0. Далее, в силу того, что $f'(x)$ не убывает в проколотой окрестности точки x_0 и на основании ее непрерывности в этой точке имеем, что и в точке x_0 она тоже не убывает. Но тогда $f'(x_1) - f'(x_0) \geq 0$, откуда

$$r(x) = (f'(x_1) - f'(x_0))(x - x_0) \geq 0.$$

Случай $x < x_0$ разбирается совершенно аналогично. Лемма 1 доказана.

Т е о р е м а 1 (необходимое условие перегиба). *Если $f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет вторую производную и точка x_0 — точка перегиба, то*

$$f''(x_0) = 0$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (От противного). Допустим, что $f''(x_0) \neq 0$. Легко видеть, что $r''(x) = f''(x)$. Поэтому

$$r''(x_0) = f''(x_0) \neq 0.$$

Но поскольку

$$r'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0,$$

то по второму достаточному признаку экстремума функция $r(x)$ имеет строгий локальный экстремум. Это противоречит утверждению леммы, по которому $r(x)$ не убывает или $r(x)$ не возрастает.

Отсюда следует, что $f''(x_0) = 0$. Теорема 1 доказана.

Далее будем говорить о точках перегиба только в строгом смысле, имея в виду, что в определении точки перегиба имеет место строгая выпуклость в обеих полуокрестностях.

Т е о р е м а 2 (первое достаточное условие строгого перегиба). *Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой окрестности точки $x = x_0$ и $f''(x)$ имеет в ней разные знаки при $x < x_0$ и $x > x_0$.*

Тогда, если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, то x_0 — точка строгого перегиба графика функции $f(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f''(x)$ сохраняет знак при $x < x_0$ и $x > x_0$ в некоторой проколотой δ-окрестности, то $f(x)$ имеет разные направления строгой выпуклости в этих частях δ-окрестности. По определению это означает, что x_0 — точка строгого перегиба. Теорема 2 доказана.

Эту теорему можно сформулировать так: *если $f''(x_0) = 0$ и $f''(x)$ строго возрастает в точке x_0, то x_0 — точка строгого перегиба (то же и в случае $f''(x_0) = 0$, $f''(x)$ строго убывает).*

Т е о р е м а 3 (второе достаточное условие строгого перегиба). *Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b), $f''(x_0) = 0$ и существует $f'''(x_0) \neq 0$.*

Тогда x_0 — точка строгого перегиба.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, то либо $f^{(3)}(x_0) > 0$, либо $f^{(3)}(x_0) < 0$. В первом случае имеем $f''(x)$ строго возрастает в точке x_0, а во втором — $f''(x)$ строго убывает в точке x_0. Поэтому из теоремы 2 в обоих случаях следует, что x_0 — точка строгого перегиба. Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4 (третье достаточное условие строгого перегиба). *Пусть $x_0 \in (a,b)$ и пусть $f(x)$ дифференцируема $2k$ раз на $[a,b]$. Пусть существует $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$ и $f^{(2)}(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{(2k)}(x_0) = 0$. Тогда x_0 — точка строгого перегиба.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что x_0 в силу условия $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$ является точкой возрастания или убывания для $f^{(2k)}(x)$. Рассмотрим проколотую δ-окрестность U точки x_0, в которой $f^{(2k)}(x)$ меняет знак при переходе через x_0 и сохраняет знак внутри каждой из двух ее полуокрестностей.

Далее можно считать, что $k \geq 2$, так как при $k = 1$ теорема 4 следует из теоремы 3. Пусть $x \in U$. По формуле Тейлора имеем

$$f^{(2)}(x)=f^{(2)}(x_0)+\ldots+\frac{f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k-3)!}(x-x_0)^{2k-3}+\frac{f^{(2k)}(c)}{(2k-2)!}(x-x_0)^{2k-2}=$$
$$=\frac{f^{(2k)}(c)}{(2k-2)!}(x-x_0)^{2k-2},$$

где $c = c(x) \in U$ и $(x - x_0)c(x) > 0$. Но $(x - x_0)^{2k-2}$ сохраняет знак при $x \in U$, а $f^{(2k)}(c)$ меняет знак. Поэтому и $f^{(2)}(x)$ меняет знак, следовательно, по теореме 2 точка x_0 — точка строгого перегиба. Теорема 4 доказана.

Примеры. 1. $y = x^3$: точка 0 — точка перегиба (строгого).

2. $y = x^{2k+1}$: точка 0 — точка перегиба (строгого).

Определение 2. *Прямая $x = a$ на плоскости xOy называется* **вертикальной асимптотой** *функции $f(x)$, если один из пределов*

$$\lim_{x\to a-} f(x) \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a+} f(x)$$

равен $\pm\infty$.

Пример. $y = 1/x$. Здесь прямая $x = 0$ — это вертикальная асимптота.

Определение 3. *Прямая $y = kx + b$ называется* **наклонной асимптотой** *функции $f(x)$ (или, точнее, графика функции $y = f(x)$) при $x \to +\infty$, если*

$$\alpha(x) = f(x) - kx - b \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Аналогично определяется асимптота при $x \to -\infty$.

Т е о р е м а 5. *Для существования наклонной асимптоты $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ у функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы при $x \to +\infty$ (одновременно) выполнялись два условия:*

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k,\ k \in \mathbb{R}$,

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b,\ b \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — асимптота, тогда

$$\alpha(x) = f(x) - kx - b \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Следовательно,

$$\frac{f(x) - kx - b}{x} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

откуда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k.$$

Далее,

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} ((f(x) - kx - b) + b) = b.$$

Тем самым первая часть теоремы доказана.

Достаточность. Так как $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = \lim_{x\to\infty} ((f(x) - kx) - b) = b - b = 0.$$

Теорема доказана полностью.

Если для функции $f(x)$ выполнено условие 1 теоремы 5, то мы будем говорить, что прямая $y = kx$ задает **асимптотическое направление.**

Пример нахождения наклонных асимптот в случае функции, заданной неявно.

Рассмотрим уравнение кривой

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Зададим ее параметризацию, полагая $y = tx$. Тогда получим

$$x^3(1 + t^3) - 3ax^2t = 0,$$

$$1 + t^3 - \frac{3at}{x} = 0, \quad x = \frac{3at}{1 + t^3}.$$

Отсюда имеем: $\frac{y}{x} = t = t(x)$ — ограниченная величина при $x \to \infty$ и $t(x) \to -1$. Следовательно, $t = -1$, т.е. прямая $y = -x$ задает асимптотическое направление. Найдем теперь значение параметра b в уравнении касательной $y = -x + b$. Имеем

$$y = -x + b + o(1),$$
$$x^3 + (-x + b)^3 - 3ax(-x + b) = o(x^2),$$

откуда

$$3x^2(b + a) + 3x(ab - b^2) + b^3 = o(x^2),$$
$$b + a + \frac{ab - b^2}{x} + \frac{b^3}{3x^2} = o(1).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $x \to \infty$ для постоянного b, получим равенство $b + a = 0$, откуда $b = -a$, и, следовательно, искомое уравнение асимптоты при $x \to \infty$ имеет вид $y = -x - a$.

Краевой экстремум. Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.

Определение 4. *Точка a называется* **точкой краевого локального максимума (минимума)**, *если существует интервал $(a, a + \delta) \in [a, b]$, для всех точек x которого справедливо неравенство*

$$f(a) > f(x) \quad (\textit{соответственно } f(x) > f(a)).$$

При $f(a) \geq f(x)$ имеет место несобственный (локальный) максимум; при $f(a) \leq f(x)$ — несобственный (локальный) минимум.

То же самое можно определить и для точки b, только интервал $(a, a + \delta)$ надо заменить на интервал $(b - \delta, b)$.

Краевые максимум и минимум называются **краевыми экстремумами.**

Л е м м а 2. *Для существования (собственного) краевого экстремума в точке a (или b) достаточно, чтобы в этой точке существовала отличная от нуля односторонняя производная функции $f(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично доказательству леммы Дарбу.

Например, если $f'(x) > 0$ при $x \in (a, a + \delta)$, то a — краевой минимум, поскольку при $x \in (a, a + \delta)$ существует $c \in (a, a + \delta)$ такое, что

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) > 0, \quad \text{т.е.} \quad f(x) > f(a).$$

Лемма 2 доказана.

Общая схема построения графика функции $f(x)$

1. Найти область определения функции $f(x)$.

2. Учесть особенности функции (четность, периодичность, знакопеременность). Найти пересечения графика с осями координат.

3. Отметить значения функции на границе области определения и в точках разрыва. Найти вертикальные асимптоты.

4. Найти наклонные асимптоты.

5. Определить участки монотонности. Определить локальные и краевые экстремумы.

6. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба.

7. Отобразить перечисленные особенности функции при построении ее графика.

Лекция 26

§ 16. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ

Целью интерполирования, или интерполяции, является приближенное нахождение функции по известным значениям этой функции и ее производных в некоторых заданных точках области ее определения. Эта задача становится определенной, если задан вид функции и число неизвестных параметров не превышает количества заданных значений функции и ее производных. Так, например, многочлен n-й степени имеет $n+1$ параметров (его коэффициенты) и может быть определен по значениям его в $n+1$ различных точках.

Пусть в точках $x_1, \ldots, x_n$ многочлен $P(x)$ принимает соответственно значения $f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

Теорема 1. *Существует единственный многочлен $P(x)$ степени $n-1$ такой, что $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Имеем

$$Q_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = x_k, \\ 0, & \text{если } x = x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n, \end{cases}$$

где

$$Q_k(x) = \frac{(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}.$$

Тогда $P(x)$ можно записать в виде

$$P(x) = f(x_1)Q_1(x) + \cdots + f(x_n)Q_n(x).$$

Докажем, что многочлен $P(x)$ единственен. Действительно, допустим, что существует еще один многочлен с указанными свойствами, т.е. $Q(x_k) = f(x_k)$.

Отсюда получим, что многочлен $(n-1)$-й степени

$$F(x) = P(x) - Q(x)$$

имеет n корней, а именно, $F(x_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $F(x) \equiv 0$, т.е. многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно совпадают. Теорема 1 доказана.

Формула, задающая многочлен $P(x)$, называется **интерполяционной формулой Лагранжа.** При этом точки $x_1, \ldots, x_n$ называют **узлами интерполяции.**

Пусть $f(x)$ — некоторая функция. Обозначим через $P_k(x)$ многочлен степени $k-1$, принимающий в точках $x_1, \ldots, x_k$ значения $f(x_1), \ldots, f(x_k)$. Тогда интерполяционную формулу можно записать в виде

$$P(x) = P_1(x) + \sum_{k=2}^{n}(P_k(x) - P_{k-1}(x)) = P_n(x).$$

Многочлен $P_k(x) - P_{k-1}(x)$ степени $k-1$ в силу определения обращается в нуль в точках $x_1, \ldots, x_{k-1}$. Следовательно, он имеет вид $A_k(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})$. Коэффициент A_k совпадает со старшим коэффициентом многочлена $P_k(x)$ и в силу интерполяционной формулы Лагранжа равен

$$A_k = \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_k)} +$$

$$+ \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots(x_2 - x_k)} + \cdots + \frac{f(x_k)}{(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})}.$$

Таким образом, коэффициент A_k является некоторой функцией от $x_1, \ldots, x_k$. Обозначим ее через $A_k = f_k(x_1, \ldots, x_k)$. Тогда интерполяционный многочлен $P(x)$ можно записать так:

$$P(x) = f_1(x_1) + (x - x_1)f_2(x_1, x_2) + \cdots + (x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f_n(x_1, \ldots, x_n),$$

где, очевидно, полагая $x = x_1$, имеем $f_1(x_1) = f(x_1)$. Эта формула называется **интерполяционной формулой Ньютона. Функции** $f_k(x_1, \ldots, x_k)$, $k = 1, \ldots, n$, называются **интерполирующими функциями.**

Полагая в формуле Ньютона $x = x_n$, получаем

$$f(x_n) = P(x_n) = f(x_1) + (x_n - x_1)f_2(x_1, x_2) + \ldots$$

$$+(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})f_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Здесь узел интерполяции x_n — произвольное число, поэтому, заменяя x_n на x, будем иметь

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f_2(x_1, x_2) + \cdots + (x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f_n(x_1, \ldots, x).$$

Уменьшим количество узлов интерполяции на один, исключив точку x_{n-1}, запишем эту формулу для узлов интерполяции $x_1, \ldots, x_{n-2}, x$ и вычтем получившееся тождество из предыдущего. Тогда получим

$$f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) = \frac{f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-2}, x) - f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})}{x - x_{n-1}}.$$

Таким образом, при $n = 2, 3, \ldots$ имеют место соотношения

$$f_2(x_1, x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f_3(x_1, x_2, x) = \frac{f_2(x_1, x) - f_2(x_1, x_2)}{x_1 - x_2},$$

которые позволяют с помощью простого алгоритма вычислить интерполирующие функции. Для определения всех коэффициентов интерполяционного многочлена Ньютона $(n-1)$-й степени достаточно вычислить значения интерполирующих функций в $\frac{n(n-1)}{2}$ точках (с учетом кратности). Здесь существенно, что при добавлении новой точки интерполяции интерполирующие функции, вычисленные ранее, сохраняются и надо только добавить к ним значения интерполирующих функций в этой точке.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ имеет n-ю производную на отрезке $[a, b]$, $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$. Тогда имеет место формула*

$$f(b) = P_n(b) + R(b),$$

где

$$R(b) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b - x_1)\ldots(b - x_n),$$

причем c — некоторая точка, принадлежащая (a, b).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$R(x) = f(x) - P_n(x) - (x - x_1)\ldots(x - x_n)H,$$

где H — некоторое число, значение которого мы выберем ниже. Имеем

$$R(x_1) = \cdots = R(x_n) = 0.$$

Величину H найдем из соотношения $R(b) = 0$. Отсюда по теореме Ролля, примененной n раз, получим, что существует число $c \in (a, b)$, для которого $R^{(n)}(c) = 0$, откуда

$$f^{(n)}(c) - n!H = 0.$$

Следовательно,

$$H = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Теорема 2 доказана.

Лекция 27

§ 17. МЕТОД ХОРД И МЕТОД КАСАТЕЛЬНЫХ (МЕТОД НЬЮТОНА). БЫСТРЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$. Тогда $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и по теореме Коши о промежуточном значении для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, лежащего между числами $f(a)$ и $f(b)$, внутри отрезка $[a,b]$ найдется точка c такая, что $f(c) = \alpha$. Естественной и важной задачей и в теоретическом, и в практическом смысле является задача вычисления приближенного значения числа c с наперед заданной точностью. Например, можно поставить вопрос о нахождении корня уравнения $x^2 = 2$ с точностью до десяти знаков после запятой, т.е. для $\sqrt{2}$ найти приближенное значение c_0 такое, чтобы имело место неравенство $|\sqrt{2} - c_0| < 10^{-10}$ и т.п.

Рассмотрим два естественных метода нахождения таких приближенных значений, а именно: метод хорд и метод касательных, который еще называют методом Ньютона, поскольку Ньютон первым его применил. Эти методы важны не столько сами по себе, сколько тем, что они являются простейшей моделью многих вычислительных процессов, применяемых в гораздо более сложных ситуациях. Оба метода итерационные, т.е. они состоят в последовательном вычислении некоторых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. При этом разность $|c - x_n| \to 0$ при $n \to \infty$, и поэтому , начиная с некоторого номера n_0, она должна стать меньше наперед заданного значения, называемого заданной точностью или погрешностью вычисления.

Метод хорд. Число x_1 определим как абсциссу точки пересечения горизонтальной прямой $y = \alpha$ с "хордой" графика функции $y = f(x)$, т.е. с отрезком, соединяющим точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Обозначим отрезок $[a,b]$ через I_0. Полагая $A = f(a)$ и $B = f(b)$, исходя из подобия соответствующих треугольников для нахождения величины x_1 имеем уравнения:

$$\frac{\alpha - A}{x_1 - a} = \frac{B - \alpha}{b - x_1} = \frac{\alpha - B}{x_1 - b}.$$

Отсюда находим

$$x_1(\alpha - A) - b(\alpha - A) = x_1(\alpha - B) - a(\alpha - B),$$

$$x_1 = \frac{-a(\alpha - B) + b(\alpha - A)}{B - A}.$$

Затем в качестве I_1 берем один из отрезков $[a, x_1]$ или $[x_1, b]$ так, чтобы число α вновь находилось между значениями $f(x)$ на его концах, т.е. на концах отрезка I_1 функция $f(x) - \alpha$ имеет значения разных знаков. По тому же правилу находим I_2 и т.д. Получим систему вложенных отрезков: $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$ Как известно, они содержат общую точку c.

Если, например, $f'(x) \geq 0$, то $f(x)$ не убывает, и тогда из непрерывности $f(x)$ следует, что $f(c) = \alpha$, поскольку на концах каждого из отрезков I_n функция $g(x) = f(x) - \alpha$ имеет значения разных знаков.

Метод касательных. Этот метод состоит в следующем. Пусть для простоты $\alpha = 0$. (Если это не так, то вместо уравнения $f(x) = \alpha$ рассмотрим уравнение $g(x) = 0$, где $g(x) = f(x) - \alpha$.) Величину x_1 определим из соотношения

$$\frac{f(b)}{b - x_1} = f'(b) \quad \text{т.е.} \quad x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

При $n \geq 1$ далее имеем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

В обоих методах надо еще уметь определить момент, когда следует оборвать процесс вычислений. Чтобы упростить решение этого вопроса и сократить объем вычислений, применяют следующий **комбинированный метод**.

Метод хорд и касательных. Сущность этого метода состоит в нахождении пар точек x_n, y_n, подчиненных следующему условию $x_n \leq c \leq y_n$. Схема вычисления величин x_n и y_n такова. Пусть $f''(x) > 0$ на $I_0 = [a, b]$. Определим x_1 по методу хорд, а y_1 — по методу касательных. Тогда имеем $x_1 < c < y_1$, и далее за I_1 принимаем отрезок $[x_1, y_1]$. Точно так же, находя x_2 по методу хорд, а y_2 по методу касательных, получим отрезок $I_2 = [x_2, y_2]$ и т.д. Как только окажется, что $|x_n - y_n| < \delta$, на этом процесс вычисления c с точностью до δ обрывают.

Пример. Пусть $f(x) = x^2 - a$, $\alpha = 0$, $a = 2$.

Применим метод касательных. Для определенности положим $x_0 = 1$. Величина x_{n+1} определяется по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Для того чтобы выяснить, как быстро сходится этот вычислительный процесс, проведем оценку погрешности на $(n+1)$-м шаге. С этой целью обозначим через r_n величину $r_n = |\sqrt{a} - x_n|$. Тогда

$$r_n^2 = (\sqrt{a} - x_n)^2 = a - 2x_n\sqrt{a} + x_n^2,$$

откуда

$$\frac{r_n^2}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right) - \sqrt{a} = r_{n+1}.$$

Из неравенства $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ получаем, что при $n \geq 1$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{a}.$$

Следовательно,

$$r_{n+1} \leq \frac{r_n^2}{2\sqrt{a}} < \frac{r_n^2}{2}, \quad \text{так как} \quad a = 2.$$

Отсюда можем заключить, что если x_n приближает $\sqrt{a}$ с точностью до k десятичных знаков после запятой, т.е. $r_n \leq 10^{-k}$, то x_{n+1} приближает $\sqrt{a}$ уже с точностью до $2k$ знаков, т.е. $r_{n+1} \leq 10^{-2k}$. Если за x_0 возьмем, например, число $1,4$, которое, как известно, приближает $\sqrt{2}$ с точностью до одного знака, т.е. $|\sqrt{2} - 1,4| \leq 10^{-1}$, то получим $r_1 < 10^{-2}$, $r_2 < 10^{-4}$, ..., $r_n < 10^{-2^n}$, ... Мы видим, что за n шагов точность составит величину, не меньшую чем k знаков, где $k = 2^n$. Так что для вычисления числа $\sqrt{2}$ с заданной точностью в k знаков достаточно выполнить n итераций, где

$$n = [\log_2 k] + 1.$$

Такого же типа оценки для метода Ньютона имеют место и в общем случае решения уравнения $f(x) = 0$, если начальное приближение взято достаточно “хорошим”. Доказательство этого утверждения основано на применении формулы Тейлора с разложением до второго члена.

Обратим внимание на следующий факт: при оценке эффективности вычислительного алгоритма надо обращать внимание не только на количество итераций, но и на количество арифметических операций в каждой итерации. Например, при вычислении $\sqrt{a}$ количество арифметических операций в каждой итерации равно 3: одно деление, одно сложение и одно умножение. Следовательно, для вычисления $\sqrt{a}$ с точностью до k знаков надо выполнить $3[\log_2 k]+3$ арифметических операций. Но и это еще не все. Во-первых, надо иметь в виду, что нет необходимости в начальных итерациях учитывать все k знаков, так как точность приближения от этого не возрастает; во-вторых, проводить деление в столбик гораздо труднее, чем умножать числа, а умножать труднее, чем складывать.

Отметим, что метод Ньютона дает возможность заменить деление умножением. Действительно, имеем

$$f(x)=\frac{1}{x}-\alpha, \quad x_0=1.$$

Тогда

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{1/x_n-\alpha}{-1/x_n^2}=2x_n-\alpha x_n^2.$$

Как и раньше, имеем

$$r_n=\left|\frac{1}{\alpha}-x_n\right|,\ r_n^2=\frac{1}{\alpha^2}-\frac{2x_n}{\alpha}+x_n^2,\ \alpha r_n^2=\frac{1}{\alpha}-(2x_n+\alpha x_n^2)=r_{n+1}.$$

Теперь, например, при $\alpha<1$ и $r_0<10^{-1}$ для величины n — количества итераций — при вычислении с точностью до k десятичных знаков после запятой имеем $n\le[\log_2 k]+1$.

Еще более строгий подход к вопросу об эффективности вычислительного алгоритма состоит в учете операций над цифрами, с помощью которых записывается число. Тогда можно сказать, что, например, сложение двух n-значных натуральных чисел требует не более $3n$ операций, а "школьный" способ умножения чисел в столбик требует порядка n^2 поразрядных умножений и порядка n^2 сложений. Поэтому кажется естественным, что быстрее чем за $O(n^2)$ операций умножить два n-значных числа нельзя. В 50-х гг. академик А.Н. Колмогоров поставил задачу доказать это, на первый взгляд, правильное утверждение. Но оказалось, что это не так.

В 1961 г. А.А. Карацуба доказал замечательную теорему, которая положила начало совершенно новому направлению в вычислительной математике — теории быстрых вычислений. Он доказал, что два n-значных числа можно умножить не за $O(n^2)$, а за $O(n^{\log_2 3})$ операций.

Т е о р е м а (теорема А.А. Карацубы). *Существует алгоритм, позволяющий умножить два n-значных числа за $O(n^{\log_2 3})$ операций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим числа в двоичной записи: $a = \bar{a}_n \dots \bar{a}_1$, $b = \bar{b}_n \dots \bar{b}_1$. Заметим, что

$$ab = \frac{1}{4}((a+b)^2 - (a-b)^2).$$

Для деления числа на 4 достаточно сдвинуть его на 2 разряда вправо, это займет только $O(n)$ операций. Так что достаточно доказать, что возведение в квадрат n-значного числа потребует указанного числа операций. Доказательство проведем по индукции. Пусть для простоты $n = 2^k$ и пусть

$$a = 2^{n/2} \cdot \alpha + \beta,$$

где α и β — $n/2$-значные числа. Тогда имеет место тождество

$$a^2 = \alpha^2(2^n - 2^{n/2}) + (\alpha + \beta)^2 2^{n/2} - \beta^2(2^{n/2} - 1).$$

Если число операций для возведения в квадрат n-значного числа обозначим через $K(n)$, то

$$\begin{aligned}
K(n) &\le 3K(n/2) + cn, \\
K(n/2) &\le 3K(n/4) + cn/2, \\
\dots\dots &\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
K(2) &\le 3K(1) + c, \\
K(n) &\le 3^k + c(n + 3\frac{n}{2} + 3^2\frac{n}{4} + \dots + 3^k),
\end{aligned}$$

где $k = \log_2 n$. Отсюда имеем

$$K(n) \le 3^k(3c + 1).$$

Теорема доказана.

В заключение укажем на одно соображение общего характера, лежащее в основе многих итерационных вычислительных алгоритмов. Пусть требуется найти значение функции в точке x_0, т.е. вычислить $f_0 = f(x_0)$. Обозначим через f_n приближение к f_0 с точностью Δ_n (до n десятичных знаков):

$$\Delta_n = |f_n - f_0|.$$

Допустим, нам известна функция $G(x)$ со следующим свойством:

$$G(f_0) = f_0, \quad G'(x)|_{x=f_0} = 0.$$

Тогда имеем

$$G(f_n) = G(f_0) + G'(f_0)(f_n - f_0) + \frac{G''(\xi)}{2}(f_n - f_0)^2,$$

откуда $|f_0 - G(f_n)| \le c\Delta_n^2$, где $c = \max \frac{|G''(\xi)|}{2}$.

Теперь, полагая $f_{n+1} = G(f_n)$, получим приближение к f_0 с точностью порядка $2n$ десятичных знаков после запятой. Тем самым мы имеем быстросходящийся алгоритм для приближенного вычисления значения f_0. Заметим, что рассмотренный выше алгоритм вычисления корня квадратного из числа x_0 является частным случаем данного при $f(x_0) = \sqrt{x_0}$ и $G(f_n) = \frac{1}{2}\left(f_n + \frac{x_0}{f_n}\right)$.

Глава VI
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекция 28

§ 1. ТОЧНАЯ ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 1. *Функция $F(x)$ называется* **точной первообразной** *для функции $f(x)$ на (a,b), если при любом $x \in (a,b)$ имеем $F'(x) = f(x)$, т.е. в каждой точке x интервала (a,b) значение функции $f(x)$ является производной для функции $F(x)$.*

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ определена на (a,b) и $F_1(x)$, $F_2(x)$ — две ее точные первообразные. Тогда существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что при любом $x \in (a,b)$*

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

Доказательство. Пусть функция

$$G(x) = F_1(x) - F_2(x).$$

Тогда $G(x)$ — дифференцируемая функция, причем всюду на (a,b)

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Положим $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Тогда по формуле Лагранжа конечных приращений имеем

$$G(x) - G(x_0) = G'(\xi)(x - x_0) = 0,$$

т.е.

$$G(x) = G(x_0) \ \forall \ x \in (a,b).$$

Но, полагая $c = G(x_0)$, получим, что $G(x) = c$ для всех точек x интервала (a,b). Теорема 1 доказана.

Замечание. Из теоремы 1 следует такое утверждение: любые две первообразные $F(x)$ и $G(x)$ функций $f(x)$ и $g(x)$ отличаются на константу тогда и только тогда, когда их производные совпадают, т.е.

когда $F' = f = g = G'$. Ранее мы видели, что далеко *не все функции*, заданные на каком-либо интервале (a, b), имеют производную.

Аналогично обстоит дело и с первообразной, т.е. не все функции имеют производную. Но если функция $f(x)$, определенная на (a, b), имеет первообразную, то она называется **интегрируемой**. Прежде чем перейти к изучению класса интегрируемых функций, несколько обобщим понятие точной первообразной.

Определение 2. *Непрерывная функция $F(x)$ называется* **первообразной** *функции $f(x)$ на интервале (a, b), если в каждой его точке x за исключением, быть может, конечного их числа выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.*

Т е о р е м а 2. *Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные для функции $f(x)$ на (a, b). Тогда найдется число c такое, что всюду на этом интервале*

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — конечное множество точек, на котором не существует $F_1'(x)$ или $F_2'(x)$. Тогда множество (a, b) состоит из конечного числа интервалов I_k, на которых производные обеих функций существуют. Следовательно, по теореме 1 их разность постоянна на каждом таком интервале. Кроме того, эта разность является непрерывной функцией на всей области определения. Отсюда следует, что в общей граничной точке любых двух смежных интервалов ее значение равно одновременно пределу справа и слева. Эти значения, в свою очередь, совпадают с ее значениями на смежных интервалах. А это значит, что функция на смежных интервалах, включая точку их общей границы, постоянна. Следовательно, она постоянна на всем интервале (a, b), что и требовалось доказать.

Определение 3. *Совокупность всех первообразных функций для какой-либо одной функции $f(x)$ на интервале называется* **неопределенным** *интегралом от функции $f(x)$. Эта совокупность обозначается символом $\int f(x)dx$ (читается: интеграл от $f(x)dx$).*

Из теоремы 2 следует, что все функции этой совокупности отличаются друг от друга на постоянную. Поэтому, если $F(x)$ — какая-нибудь одна первообразная, то можно записать равенство

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \tag{1}$$

где c — произвольное число.

Это равенство надо понимать как равенство двух множеств, состоящих из функций, определенных на (a, b), причем слева стоит совокупность, образующая неопределенный интеграл от $f(x)$, а справа — совокупность функций, отличающаяся от функции $F(x)$ на функцию, значение которой равно числу c для всех точек x этого интервала.

Примеры.

1. $\int 1 \cdot dx = x + c$, так как $x' = 1$.

2. $\int 0 \cdot dx = c$,

3. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$, так как $(\sin x)' = \cos x$.

Для доказательства этих равенств надо продифференцировать правую часть и убедиться, что ее производная равна функции, записанной слева между знаком $\int$ и символом dx. Она называется **подынтегральной функцией.** Знак $\int$ называется знаком интеграла, а выражение, записываемое справа от него, — подынтегральным выражением.

Легко видеть, что подынтегральное выражение есть не что иное, как дифференциал любой первообразной функции для $f(x)$. Действительно, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, то по определению дифференциала

$$dF(x) = f(x)dx.$$

А так как

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \quad d(F(x) + c) = dF(x), \tag{1}$$

то можно записать равенства

$$\int dF(x) = F(x) + c, \quad d\Big(\int f(x)dx\Big) = dF(x) = f(x)dx, \tag{2}$$

причем знак равенства в последнем соотношении означает, что все функции, входящие в совокупность $\int f(x)dx$, имеют один и тот же дифференциал $dF(x)$. Также имеем

$$\Big(\int f(x)dx\Big)' = f(x). \tag{3}$$

Определение 4. Нахождение неопределенного интеграла от функции $f(x)$, заданной на (a, b), называется интегрированием *этой функции. Саму задачу нахождения неопределенного интеграла можно рассматривать как обратную к задаче нахождения дифференциала функции.*

Лекция 29

§ 2. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Из правил дифференцирования функции и теоремы 2 следует ряд свойств неопределенного интеграла. Приведем некоторые из них, которые задаются равенствами и доказываются с помощью дифференцирования обеих частей этих равенств. Прежде всего докажем, что равенство

$$\int f(x)dx = \int g(x)dx \tag{4}$$

эквивалентно одному из следующих четырех равенств:

а) $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(\int g(x)dx\right)'$;

б) $d\left(\int f(x)dx\right) = d\left(\int g(x)dx\right)$;

в) $f(x) = g(x)$;

г) $f(x)dx = g(x)dx$,

которые имеют место при всех $x \in (a, b)$, за исключением, быть может, конечного числа точек.

В самом деле, силу приведенных выше свойств (1)–(3) равенства а)–г) действительно эквивалентны. А равенство (4) означает лишь то, что любые две первообразные F, G для функций f и g отличаются между собой на константу. Но согласно замечанию к теореме 1 для этого необходимо и достаточно, чтобы $f = g$, т.е. равенство (4) равносильно равенству в).

Замечание. Свойство (4) дает критерий равенства двух неопределенных интегралов: они совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их производные или дифференциалы. Докажем теперь следующее свойство:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \tag{5а}$$

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx \ \forall \ \alpha \neq 0. \tag{5б}$$

Эти равенства надо понимать как совпадение двух совокупностей функций, стоящих в этих равенствах справа и слева. (Напомним, что два множества равны, когда они состоят из одних и тех же элементов.) Надо пояснить, что совокупность

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx$$

состоит из всевозможных функций, образованных суммами функций $F(x)+G(x)$, где $F(x)\in\int f(x)dx$, $G(x)\in\int g(x)dx$, т.е.

$$\int f(x)dx+\int g(x)dx=\{F(x)+G(x)\},$$

где

$$\{F(x)\}=\int f(x)dx, \quad \{G(x)\}=\int g(x)dx.$$

Теперь для доказательства (5) в силу свойства (4) достаточно продифференцировать эти равенства. Доказательство закончено.

Заметим, что для простоты применения на символы $\int f(x)dx$ и $\int g(x)dx$ удобно смотреть, как на обычные функции, подразумевая под ними некоторые первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, а равенство между выражениями, в которые они входят линейно, понимать с "точностью до постоянной", имея в виду, что правая и левая части отличаются на функцию, постоянную на (a,b).

С помощью свойства (4) можно легко установить еще два свойства неопределенных интегралов, важных для непосредственного интегрирования:

правило интегрирования по частям

$$u(x)v(x)-\int u(x)dv(x)=\int v(x)du(x), \tag{6}$$

правило замены переменной

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \tag{7}$$

где $x=\varphi(t)$ — дифференцируемая функция от t, определенная на интервале (α,β), причем множество значений $\{\varphi(t)\}$ принадлежит интервалу (a,b). Мы предполагаем, что в обоих равенствах интегралы в левых частях действительно существуют; из этого следует существование интегралов и в правых частях этих равенств.

Докажем свойство (6). Так как по условию интеграл в левой части равенства существует, то ее дифференциал равен

$$d\left(uv-\int u\,dv\right)=u\,dv+v\,du-u\,dv=v\,du.$$

Отсюда в силу свойства (4) следует справедливость свойства (6).

Для доказательства свойства (7) заметим, что по правилу дифференцирования сложной функции и свойству (3) при $x=\varphi(t)$ имеем

$$\left(\int f(x)dx\right)_t'=\left(\int f(x)dx\right)_x'\frac{d\varphi(t)}{dt}=f(x)|_{x=\varphi(t)}\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно, согласно свойству (4) интеграл $\int f(x)dx$ при $x=\varphi(t)$ есть в то же время и неопределенный интеграл от функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, т.е.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

что и требовалось доказать.

С помощью дифференцирования легко убедиться в том, что справедливы следующие равенства для неопределенных интегралов от простейших элементарных функций:

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ n \neq -1;$

2) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c;$

3) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c;$

4) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c;$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c;$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2\pm1}\right| + c;$

7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \ a>0, \ a\neq 1,$

$\int e^x dx = e^x + c;$

8) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c;$

9) $\int \cos x\, dx = \sin x + c;$

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c;$

11) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c;$

12) $\int \ln x dx = x\ln x - x + c.$

Как мы уже отмечали, не всякая функция имеет точную первообразную, потому что не всякая функция является производной от другой функции. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x\in(0,1), \\ 2, & \text{если} \quad x=1, \\ 3, & \text{если} \quad x\in(1,2). \end{cases}$$

Эта функция определена на $(0,2)$ и не может являться производной какой-либо функции $F(x)$ на $(0,2)$, так как по теореме Дарбу производная принимает все свои промежуточные значения, а $f(x)$ — всего три значения: 1, 2, 3.

В дальнейшем мы докажем *формулу Ньютона–Лейбница*, из которой следует, что функция, *непрерывная* на интервале, имеет первообразную, т.е. интегрируема. Поэтому все элементарные функции интегрируемы на всех интервалах, входящих в их области определения. Однако в результате интегрирования далеко не всегда получаются снова элементарные функции, как это имеет место при дифференцировании. Например, можно доказать, что функции

$$\operatorname{li} x = \int \frac{dx}{\ln x} \quad \text{(интегральный логарифм)},$$

$$\operatorname{si} x = \int \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{(интегральный синус)}$$

не являются элементарными.

Функции, сами не являющиеся элементарными, но определяемые через них с помощью аналитических соотношений типа интегрирования и дифференцирования, обычно называют **специальными функциями**. Однако следует отдавать себе отчет в том, что, например, с вычислительной точки зрения специальные функции, вообще говоря, "ничуть не хуже", чем элементарные, а иногда и "лучше". Но все же простейшие элементарные функции имеют преимущество, состоящее в простоте тех функциональных соотношений, которым они удовлетворяют.

Еще раз подчеркнем, что единого метода интегрирования элементарных функций существовать не может, так как первообразная может и не быть элементарной функцией. Но для нахождения первообразной в явном виде имеется несколько приемов. Говоря о методах интегрирования, снова напомним, что для выяснения того, является ли известная нам функция $F(x)$ первообразной для $f(x)$, нет необходимости "брать интеграл", т.е. вычислять $\int f(x)dx$, здесь надо просто найти $F'(x)$ и сравнить ее с $f(x)$.

Примеры. 1. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на (a,b), $C(x) = \sum\limits_{a<n\leq x} c_n$. Тогда

$$F(x) = \sum_{a<n\leq x} c_n f(n) - C(x)f(x) = -\int C(x)f'(x)dx.$$

Действительно, если x — не целое число, то, поскольку $C(x)$ и $\sum\limits_{a<n\leq x} c_n$ кусочно-постоянны на интервалах, не содержащих целых точек,

$$F'(x) = -C(x)f'(x).$$

Ранее мы убедились, что $F(x)$ непрерывна на (a,b). Так что $F(x)$ есть первообразная для функций $C(x)f'(x)$.

2. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на (a, b), $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. Тогда имеет место формула

$$F(x) = \sum_{a<n\leq x} f(n) - \rho(x)f(x) + \rho(a)f(a) = \int (f(x) - \rho(x)f'(x))dx.$$

Действительно, если x — не целое число, то

$$F'(x) = (-\rho(x)f(x))' = f(x) - \rho(x)f'(x).$$

Далее, так как $F(x)$ — непрерывная функция, то $F(x)$ — первообразная для функции $f(x) - \rho(x)f'(x)$.

Иногда дифференцирование ответа оказывается очень громоздкой процедурой, так что целесообразно с помощью различных приемов сводить процесс вычисления к табличным интегралам. Для того чтобы уверенно и быстро вычислять интегралы, необходим определенный навык применения стандартных приемов интегрирования. Самые простые и самые общие из этих приемов — это метод замены переменной и метод интегрирования по частям [см. свойства (5) и (6)].

Подробнее с различными методами интегрирования можно познакомиться, например, в [4, 7, 15, 16].

Лекция 30

ДОПОЛНЕНИЕ. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА ПО ГЕЙНЕ НА ФУНКЦИИ, СХОДЯЩИЕСЯ ПО БАЗЕ МНОЖЕСТВ

Предметом настоящей лекции является распространение классического понятия предела функции по Гейне на общий случай сходимости по базе множеств. Как известно, построение курса математического анализа основано на двух эквивалентных понятиях сходимости: пределах по Коши и по Гейне. Одновременное использование обоих понятий в курсе мотивируется его содержанием. В частности, это позволяет унифицировать и сделать значительно яснее использование пределов во всем их разнообразии, включая теорию интегрирования, функции многих переменных и др.

Необходимо отметить, что понятие сходимости по базе множеств было впервые сформулировано А. Крыжановским [22] (в несколько отличающейся терминологии). В 1937 г. В.И. Гливенко [23] использовал это понятие для общего определения интеграла. Позже, как отмечал А.Н. Колмогоров, французская математическая школа пришла к тому же понятию в рамках теории фильтров.

В связи с успешным развитием теории сходимости по Коши возникла неотложная необходимость в соответствующем обобщении понятия предела функции по Гейне [24],[25]. Здесь мы решаем эту задачу. Введем понятие H-предела по базе, которое совпадает с классическим определением предела по Гейне в простейших конкретных случаях. Затем установим эквивалентность понятия H-предела по базе, введенного нами, и общепринятого определения предела функции по Коши. Наконец, как нетривиальный пример введенного понятия H-сходимости по базе, мы продемонстрируем новый подход к определению и исследованию верхнего и нижнего пределов функции по базе.

1. Пусть A — основное множество элементов x, $A = \{x\}$, и пусть B — база его подмножеств, которая состоит из бесконечного числа окончаний b, т.е. $b \subset A$, $b \in B$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) каждое окончание является непустым множеством;

2) для любых двух окончаний b_1, b_2 существует окончание b_3 такое, что $b_3 \subset b_1 \cap b_2$.

Определение 1. Мы называем последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in A$, *фундаментальной* по базе B, если для любого окончания b существует только лишь конечное число членов последовательности, которые не принадлежат b.

Определение 2. Фундаментальная последовательность называется *монотонной* (по базе B), если условие $x_n \in b$ влечет условие $x_{n+1} \in b$ для каждого окончания b.

Далее мы ограничимся базами B, удовлетворяющими также следующим условиям:

3) для любых двух окончаний b_1, b_2 имеем, что либо $b_1 \subseteq b_2$, либо $b_2 \subseteq b_1$;

4) существует по крайней мере одна монотонная последовательность по базе множеств B;

5) $\bigcap\limits_{b \in B} b = \varnothing$.

2. Докажем несколько свойств монотонных последовательностей по базе.

Лемма 1. *Пусть $\{x_n\}$ — монотонная последовательность по базе B. Тогда существуют ее подпоследовательность $\{y_k\}$, $y_k = x_{n_k}$, и последовательность окончаний $b_n \in B$, зависящая от $\{y_k\}$, такие, что $x_{n_k} \in b_k$, но $x_{n_k} \notin b_{k+1}$, $b_{k+1} \subset b_k$.*

Доказательство. В качестве b_1 выберем произвольное окончание из B. Существует только конечное число членов последовательности, которые не принадлежат b_1. Пусть $x_{n_1} \in b_1$, тогда для любого $k \geq 0$ имеем $x_{n_1+k} \in b_1$ (по свойству монотонности $\{x_n\}$). В качестве b_2 выберем некоторое окончание, которому не принадлежит x_{n_1}. Такое b_2 существует, поскольку $H_B = \bigcap_{b \in B} b = \varnothing$. Действительно, если $x_{n_1} \in b$ для любого окончания b, то $x_{n_1} \in H_B$. Но тогда H_B не будет пустым множеством. В качестве x_{n_2} выберем член последовательности с минимальным индексом, начиная с которого все последующие члены последовательности принадлежат b_2, и т.д.

Таким образом, мы получаем две последовательности: элементов $y_s = x_{n_s}$ и окончаний $\{b_s\}$, $b_s \in B$ таких, что $x_{n_s} \in b_s$, $x_{n_s} \notin b_{s+1}$ и $b_{s+1} \subset b_s$ для каждого $s \geq 1$. Лемма 1 доказана.

Заметим, что последовательность $\{y_s\}$, очевидно, является монотонной по базе B. Последовательность $\{b_n\}$ назовем **основной последовательностью окончаний.**

Лемма 2. *Пусть $\{b_n\}$ — основная последовательность окончаний. Тогда для каждого окончания $b \in B$ существует окончание $b_n \in B$ такое, что $b_n \subset b$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть b^* такое окончание, что для всех n имеем $b_n \not\subset b^*$. Тогда в соответствии со свойством 3 базы B выполняется следующее условие: $b_n \supset b^*$ для всякого $n \geq 1$, т.е. $b^* \subset \bigcap_n b_n = D$. Из леммы 1 имеем, что $y_n \notin b_{n+1}$. Следовательно, $y_n \notin \bigcap_n b_n = D$, т.е. бесконечно много, даже все члены последовательности $\{y_n\}$ не принадлежат D. Далее, так как $b^* \subset D$, то окончанию b^*не принадлежит бесконечно много членов последовательности $\{y_n\}$. Это противоречит тому, что последовательность является фундаментальной. Лемма 2 доказана.

3. Пусть $f(x)$ — вещественная функция, определенная на A. Мы называем число l C-пределом функции $f(x)$ по базе B, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует окончание $b = b(\varepsilon)$ такое, что для всех $x \in b$ имеем $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Обозначение: $l = C\text{-}\lim\limits_B f(x)$ или просто $l = \lim\limits_B f(x)$.

Это соответствует определению предела функции по Коши. Дадим теперь аналогичное определение предела по Гейне.

Число l будем называть Hm-пределом функции $f(x)$ по базе B, если для каждой монотонной последовательности $\{x_n\}$ по базе B имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Обозначение: $l = Hm\text{-}\lim\limits_B f(x)$.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы существовал $C\text{-}\lim\limits_B f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал $Hm\text{-}\lim\limits_B f(x)$; более того, имеем*

$$Hm\text{-}\lim_B f(x) = C\text{-}\lim_B f(x).$$

Другими словами, понятия Hm-предела и C-предела функции по базе B являются эквивалентными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть C-предел существует, т.е.

$$C - \lim_B f(x) = l.$$

Тогда по определению для любого $\varepsilon > 0$ существует $b = b(\varepsilon)$ такое, что при всех $x \in b$ справедливо неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, монотонную по базе B. Из условия монотонности следует, что существует n_0 такое, что для всех $n > n_0$ имеет место соотношение $x_n \in b$. Следовательно,

$$|f(x_n) - l| < \varepsilon \quad \forall\ n > n_0,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Достаточность. Предположим противное. Пусть $Hm\text{-}\lim\limits_B f(x) = l$, но C-предел не существует или не равен l. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого окончания $b \in B$ найдется $x \in b$, для которого $|f(x) - l| \geq \varepsilon$.

Рассмотрим основную последовательность окончаний $\{b_n\}$. Пусть $z_1 \in b_1$ и $|f(z_1) - l| \geq \varepsilon$. Так как $H_B = \bigcap_{b\in B} b = \varnothing$, то существует окончание $b^{(1)} \in B$ такое, что $z_1 \notin b^{(1)}$. В силу леммы 2 при некотором n_1 имеем $b_{n_1} \subset b^{(1)}$. Следовательно, $z_1 \notin b_{n_1}$.

Далее, существует точка $z_2 \in b_{n_1}$ такая, что $|f(z_2) - l| \geq \varepsilon$. Как и выше, мы находим окончание b_{n_2}, удовлетворяющее условию $z_2 \notin b_{n_2}$. Затем выбираем $z_3 \in b_{n_2}$ такое, что $|f(z_3) - l| \geq \varepsilon$, и т.д. Таким образом, мы получаем последовательность $\{z_n\}$, которая удовлетворяет условиям $z_k \in b_{n_{k-1}}$, $z_k \notin b_{n_k}$, и последовательность окончаний $b_1 = b_{n_0} \supset b_{n_1} \supset b_{n_2} \supset \ldots$

Покажем, что последовательность $\{z_n\}$ является фундаментальной и монотонной по базе B.

Фундаментальность. Возьмем любое окончание $b^* \in B$. По лемме 2 существует окончание b_k такое, что $b_k \subset b^*$. Если $n_s > k$, то $b_{n_s} \subset b_k \subset b^*$. Окончанию b_{n_s} не принадлежат только элементы $z_1, \ldots, z_s$ последовательности $\{z_n\}$, и для любого $n > s$ имеем $z_n \in b_{n_s} \subset b^*$. Значит, последовательность $\{z_n\}$ является фундаментальной.

Монотонность. (От противного). Предположим, что существует окончание $b^* \in B$ такое, что для некоторого номера k имеем $z_k \in b^*$, $z_{k+1} \notin b^*$. Из построения последовательности $\{z_n\}$ получим, что $z_{k+1} \in b_{n_k}$. Следовательно, $b_{n_k} \supset b^*$ (по свойству 3 базы). Так как $z_k \in b^*$, то $z_k \in b_{n_k}$. Однако это противоречит тому факту, что по построению последовательности $\{z_k\}$ справедливо условие $z_k \notin b_{n_k}$. Таким образом, последовательность $\{z_k\}$ является монотонной.

Далее, из того, что

$$Hm\text{-}\lim_{B} f(x) = l,$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = l.$$

Следовательно, мы можем перейти к пределу в неравенстве

$$|f(z_n) - l| \geq \varepsilon > 0.$$

Получим $0 \geq \varepsilon > 0$, что невозможно. Теорема доказана.

Будем говорить, что число l называется **H-пределом функции $f(x)$ по базе B**, если для любой фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ по базе B выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Обозначение: $l = H\text{-}\lim_{B} f(x)$.

Т е о р е м а 2. *Следующие три понятия предела эквивалентны:*

1) $\lim\limits_{B} f(x) = l$;

2) $H\text{-}\lim\limits_{B} f(x) = l$;

3) $Hm\text{-}\lim\limits_{B} f(x) = l$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеет место следующая цепочка утверждений: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$. Первые два из них очевидны, а третье следует из теоремы 1.

4. Теперь докажем несколько свойств верхнего и нижнего предела по базе.

Пусть $\{x_n\}$ — монотонная последовательность по базе B и пусть существует

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

Тогда l называется **частичным пределом по базе** B. Наибольший из частичных пределов (если он существует) называется **верхним пределом функции** $f(x)$ **по базе** B и обозначается $\varlimsup\limits_{B} f(x)$; подобным образом наименьший частичный предел называется **нижним пределом по базе** B и обозначается $\varliminf\limits_{B} f(x)$.

Число l_1 называется **верхним предельным числом,** если

$$l_1 = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x),$$

а число l_2 — **нижним предельным числом,** если

$$l_2 = \sup_{b\in B} \inf_{x\in b} f(x).$$

Т е о р е м а 3. *Пусть* $f(x)$ *финально ограничена. Тогда верхний и нижний пределы* $f(x)$ *по базе* B *существуют и*

$$\varlimsup_{B} f(x) = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x),$$
$$\varliminf_{B} f(x) = \sup_{b\in B} \inf_{x\in b} f(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых двух окончаний b_1, b_2 базы B имеем

$$\inf_{x\in b_1} f(x) \le \sup_{x\in b_2} f(x).$$

Действительно, если b_3 — окончание базы B и $b_3 \subset b_1 \cap b_2$, то

$$\inf_{x\in b_1} f(x) \le \inf_{x\in b_3} f(x) \le \sup_{x\in b_3} f(x) \le \sup_{x\in b_2} f(x).$$

Следовательно, в силу финальной ограниченности $f(x)$ по базе B существует такое число λ, что

$$\lambda = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x).$$

Докажем, что

$$\overline{\lim_{B}} f(x) = \lambda.$$

Шаг 1. Мы можем найти окончание $b^* \in B$, для которого $f(x) < \lambda+1$ для любых $x \in b^*$. Из леммы 2 следует, что существует окончание $b_{n_1} \in B$ с условием $b_{n_1} \subset b^*$. Покажем, что можно найти элемент $x_1 \in b_{n_1}$ с условием

$$\lambda + 1 > f(x_1) > \lambda - 1.$$

Достаточно показать, что

$$\sup_{x\in b_{n_1}} f(x) \geq f(x_1) > \lambda - 1.$$

Если бы такого элемента x_1 не было, то $\forall\ x \in b_{n_1}$ выполнялось неравенство $f(x) \leq \lambda - 1$. Следовательно,

$$\sup_{x\in b_{n_1}} f(x) \leq \lambda - 1,$$

откуда имеем

$$\lambda = \inf_{b\in B} \sup_{x\in b} f(x) \leq \lambda - 1.$$

Имеет место противоречие.

Далее мы можем найти окончание $b_0^{(1)}$ такое, что $x_1 \notin b_0^{(1)}$. (Такое окончание существует, поскольку $H_B = \bigcap_{b\in B} b = \varnothing$.)

Шаг 2. Выберем окончание $b^{(2)} \in B$, подчиненное условию

$$f(x) < \lambda + \frac{1}{2} \quad \forall\ x \in b^{(2)}.$$

Рассмотрим окончание $b_1^{(2)} \subset b^{(2)} \cap b_0^{(1)}$. Окончанию $b_1^{(2)} \in B$ не принадлежит x_1. Далее, как и в шаге 1, существует окончание $b_{n_2} \subset b_1^{(2)}$, которое содержит точку $x_2 \neq x_1$ такую, что

$$\lambda - \frac{1}{2} < f(x_2) < \lambda + \frac{1}{2},$$

и т.д. Наконец мы получаем последовательность $\{x_s\}$, которая удовлетворяет условиям

$$x_s \in b_{n_s}, \quad x_s \notin b_{n_{s-1}}, \quad \lambda - \frac{1}{s} < f(x_s) < \lambda + \frac{1}{s}.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, устанавливаем, что $\{x_n\}$ — монотонная последовательность по базе B. Кроме того, при $n \to \infty$ справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lambda$, т.е. λ — частичный предел по базе B.

Шаг 3. Покажем, что любой частичный предел функции $f(x)$ по базе B не превосходит λ. Из определения величины λ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окончание b с условием

$$\sup_{x\in b} f(x) < \lambda + \varepsilon.$$

Пусть $\{x_n\}$ — произвольная монотонная последовательность по базе B, для которой существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. В силу фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ только конечное число ее членов не принадлежат b, т.е. существует номер n_0 такой, что для всех номеров n, больших n_0, имеем $f(x_n) < \lambda + \varepsilon$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \lambda + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \le \lambda$. Теорема доказана.

Пусть l_1 и l_2, как и прежде, верхнее и нижнее предельные числа соответственно. Мы назовем число $l_2 - l_1 \ge 0$ **колебанием функции** $f(x)$ **по базе** B и обозначим

$$\operatorname*{osc}_B f(x) = l_2 - l_1.$$

Критерий Коши в этих обозначениях формулируется следующим образом.

Для существования предела функции $f(x)$ по базе B необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname*{osc}\limits_B f(x) = 0$.

Отметим, что из теоремы 3, в частности, следует, что:

1) $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}} f(x) = \inf\limits_{T>0} \sup\limits_{x>T} f(x)$;

2) $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x) = \inf\limits_{T>0} \sup\limits_{|x|>T} f(x)$;

3) $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x) = \inf\limits_{\delta>0} \sup\limits_{0<|x-x_0|<\delta} f(x)$.

Замечания. 1. Теорема 1 даже в простейших случаях несколько сильнее, чем классическая теорема, утверждающая эквивалентность поточечной сходимости по Коши и Гейне, поскольку требуются только монотонные последовательности. Это, в свою очередь, иногда удобно в приложениях.

С другой стороны, можно рассматривать базы, для которых каждая фундаментальная последовательность не является монотонной. В этом случае, конечно, Hm-сходимость не определена, тем не менее, теорема 2, утверждающая эквивалентность H- и C-сходимости, остается справедливой, так как ее доказательство, по существу, тождественно с выводом теоремы 1 при очевидной подстановке просто фундаментальной последовательности вместо монотонной.

2. Необходимо подчеркнуть, что понятия Hm-, H-сходимости могут быть определены в том случае, если существует по крайней мере одна монотонная фундаментальная последовательность по базе. Кроме того, как показано в лемме 1, для такой базы всегда существует основная последовательность окончаний, которая сама является счетной базой, кофинальной к первоначальной. На языке теории фильтров это означает, что проблема обобщения теоремы Гейне об эквивалентности H- и C-сходимости может рассматриваться только для фильтров со счетной базой.

3. Мы ограничиваемся рассмотрением понятия сходимости только для числовых функций. Однако результат теоремы 2 без труда может быть распространен на общий случай отображений двух баз тогда и только тогда, когда они допускают существование монотонных или просто фундаментальных последовательностей.

4. Условие 3, налагаемое на базу B, иногда оказывается невыполненным. Обычно в этих случаях можно вместо базы B рассматривать базу D, удовлетворяющую этому условию, заданную на том же основном множестве и эквивалентную базе B в том смысле, что сходимость любой функции по одной из этих баз влечет за собой ее сходимость и по другой базе к тому же самому значению.

Примером эквивалентных баз являются база B и основная последовательность окончаний $\{b_n\}$ из леммы 1.

ЧАСТЬ II

ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Эта часть курса математического анализа читается во втором семестре и включает в себя основы интегрального исчисления функций одной переменной и дифференциального исчисления в пространстве нескольких измерений. Обе темы объединяет появление в них геометрических понятий как главного объекта изучения.

Следует отметить, что источником основных понятий математического анализа во многом являются представления о простейших свойствах геометрических объектов в реальном пространстве. В качестве примера можно указать на метод вычисления площадей у Архимеда или метод "исчерпывания" Евдокса. Чтобы быть ближе к сущности предмета устанавливается взаимосвязь понятия интегрируемости функции по Риману и вопроса о существовании площади криволинейной трапеции, т. е. ее измеримости по Жордану.

Второй источник понятий математического анализа — арифметика. Поэтому мы стремились к раскрытию арифметических аспектов математического анализа, понимая под этим, скорее, их обусловленность дискретными элементами, имеющими арифметическую природу, связанную, в конечном счете, со свойствами натуральных чисел. Сюда можно отнести доказанные в курсе формулы суммирования Эйлера и Абеля, метод интегральных сумм, равномерные разбиения в теории интеграла Римана, критерий Г. Вейля для равномерного распределения последовательности по модулю единица, признак алгебраичности функций, данный Эйзенштейном. Упомянем также об упрощении в изложении вывода формулы длины дуги кривой.

Необходимо сказать еще о том, что в этой части книги рассматривается ряд понятий, которые в дальнейшем более подробно изучаются в рамках других предметов. Здесь дается о них первое и в то же время достаточно отчетливое представление с тем, чтобы облегчить усвоение соответствующего материала в будущем, и, может быть, что еще в большей степени обеспечит понимание специальных курсов естественнонаучного содержания.

Глава VII
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Лекция 1

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (α, β), содержащем отрезок $[a, b]$. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на этом отрезке $[a, b]$ называется число, равное площади криволинейной трапеции, т.е. фигуры, заключенной между прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$, причем площадь той части, которая лежит выше оси абсцисс берется со знаком $+$, и ниже ее — со знаком - Интеграл обозначается так:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

где число a называется **нижним**, а число b — **верхним пределами интегрирования.**

В связи с данным определением интеграла возникает ряд вопросов. Во-первых, что такое площадь? Этот вопрос — принципиальный, и им мы будем заниматься далее, и весьма продолжительное время.

Более простыми являются следующие вопросы.

1) Почему эта площадь обозначается почти так же, как и неопределенный интеграл?

2) Какая связь существует между неопределенным и определенным интегралами?

Забегая несколько вперед, дадим ответы на последние вопросы.

Прежде всего, заметим, что на определенный интеграл можно смотреть как на функцию верхнего (или нижнего) предела интегрирования, считая другой предел интегрирования фиксированным, т.е., если зафиксируем, скажем, число a, то при любом $b \in (\alpha, \beta)$ мы будем получать свои величины, равные значению интеграла на отрезке $[a, b]$. Тем самым, определяется некоторая функция $F(b)$, заданная на интервале (α, β). Оказывается, что если $f(x)$ непрерывна на (α, β), то из теоремы Ньютона - Лейбница, о которой мы будем говорить далее, следует, что функция $F(x)$ является дифференцируемой, и, более того, она является первообразной для функции $f(x)$, т.е. имеем $F'(x) = f(x)$, и, кроме того, справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Пусть $F_1(x)$ — другая первообразная для $f(x)$. Тогда, поскольку $F_1(x) = F(x) + c$, где c — некоторая постоянная, то

$$F_1(b) - F_1(a) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Другими словами, это равенство имеет место для любой первообразной из семейства, образующего неопределенный интеграл, т.е. теорема Ньютона – Лейбница указывает на то обстоятельство, что неопределенный и определенный интегралы — это тесно связанные между собой понятия. И для того чтобы их далее изучать, надо разобраться, какой же смысл вкладывается в понятие "*площадь криволинейной трапеции*". Заметим, что к этому вопросу можно подходить по разному, и в зависимости от этого у одной и той же трапеции площадь может существовать или не существовать. Но если в двух различных смыслах она существует, то всегда в обоих случаях она должна быть одной и той же величиной.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Мы уже говорили о том, что понятие "*определенный интеграл*" по существу сводится к определению понятия "*площадь криволинейной трапеции*", т.е. площадь фигуры, лежащей в полосе $a \le x \le b$, и заключенной между графиком функции $y = f(x)$ и осью абсцисс. Другими словами, эта фигура образована множеством A точек вида

$$\{(x, y) |\ a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\},$$

и множеством B

$$\{(x, y) |\ a \le x \le b, f(x) \le y \le 0\}.$$

Площадь всякой плоской фигуры D будем обозначать через $\mu(D)$. Заметим, что площадь любой фигуры на плоскости — это неотрицательное число. Определенный интеграл отличается от площади тем, что он равен разности площадей фигур A и B, т.е.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mu(A) - \mu(B),$$

а не их сумме, как можно было бы ожидать.

Из школьного курса геометрии известны следующие простейшие свойства фигур, имеющих площадь:

1) Если $D_1 \subset D_2$, то $\mu(D_1) \leq \mu(D_2)$;

2) Если $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то $\mu(D_1 \cup D_2) = \mu(D_1) + \mu(D_2)$;

3) Площадь прямоугольника равна произведению длин двух соседних его сторон.

Фигуры, составленные из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, будут иметь площадь. Такие фигуры назовем **простейшими.**

Теперь можно определить понятие площади криволинейной трапеции D, а значит, и понятие определенного интеграла I от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следующим образом. Здесь для простоты рассуждений рассмотрим только случай, когда функция $f(x)$ неотрицательна.

Впишем в фигуру D и опишем вокруг нее простейшие фигуры соответственно D_1 и D_2. Для наглядности можно положить, что функция $f(x)$ является непрерывной. Очевидно, имеем $D_1 \subset D \subset D_2$. Отметим также, что некоторые части границ фигур D_1 и D_2 являются ступенчатыми функциями на отрезке $[a, b]$. Напомним, что функция $h(x)$ называется **ступенчатой,** если на каждом промежутке (x_{i-1}, x_i), $i = 0, 1, \ldots, n$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, она принимает постоянное значение h_i. Пусть фигуре D_1 отвечает ступенчатая функция $h(x)$, а фигуре D_2 — ступенчатая функция $g(x)$. Тогда имеем $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. **Интегралом от ступенчатой функции** $h(x)$ назовем величину $I(h) = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i \Delta x_i$. Справедливо неравенство $I(h) \leq I(g)$. Рассмотрим два числовых множества $A = \{I(h)\}$ и $B = \{I(g)\}$. В силу леммы об отделимости этих множеств найдется число I, их разделяющее. Если оно единственно, то мы назовем его **интегралом от функции** $f(x)$ **на отрезке** $[a, b]$, а саму функцию — **интегрируемой** на этом отрезке.

Известно, что если числа $\inf\limits_{D_2 \supset D} I(g)$ и $\sup\limits_{D_1 \subset D} I(h)$ совпадают, то их общее значение и равно I. Поэтому справедлив следующий критерий интегрируемости ограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Теорема 1. *Для того чтобы ограниченная на отрезке функция $f(x)$ была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовали ступенчатые функции $h(x)$ и $g(x)$ с условием $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, и такие, что $I(g) - I(h) < \epsilon$.*

Эту теорему мы доказывать сейчас не будем, поскольку построим теорию интеграла Римана, основываясь на более традиционном подходе, и в рамках этого подхода критерий интегрируемости и будет доказан. Тем самым, покажем, что оба подхода к построению интеграла Римана дают один и тот же класс интегрируемых функций.

Отметим также, что рассмотренный выше подход дает возможность определить понятие площади фигуры D через вписанные и описанные простейшие фигуры. Подобным образом далее определим фигуры, измеримые по Жордану, и докажем, что для измеримости по Жордану криволинейной трапеции, отвечающей функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была интегрируема по Риману.

Существуют и другие конструкции, с помощью которых можно ввести понятие и площади, и определенного интеграла, интересующего нас в первую очередь. Смысл этих конструкций состоит в том, чтобы поставить в соответствие каждой функции из некоторого класса свое число таким образом, чтобы при этом выполнялось ряд естественных свойств, которыми обладает площадь простейших фигур. Заметим, что чем сложнее конструкция, тем шире становится класс функций, для которых понятие "определенный интеграл" приобретает смысл. Мы здесь будем рассматривать конструкцию, предложенную немецким математиком Б. Риманом, и поэтому соответствующий интеграл будем называть **интегралом Римана.** Также познакомимся и с интегралом более общего вида: интегралом Лебега, но, в основном, будем заниматься интегралом Римана. Изложение оригинальной конструкции Б.Римана можно найти в его статье "О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда", написанной им в 1853 году. Впервые эта статья была опубликована в 1867 году. На русском языке она появилась в 1914 году ("Харьковская математическая библиотека", серия В, №2).

Заметим, что, например, интеграл Лебега является более общим, чем интеграл Римана, на том основании, что все функции, интегрируемые по Риману, также являются интегрируемыми по Лебегу, но не наоборот. Но подчеркнем, что если функция интегрируема двумя разными способами, то значения интеграла всегда обязаны совпадать. Так что задача расширения понятия интеграла может состоять только в том, чтобы приписать числовые значения определенным интегралам от все более широких классов функций, не меняя при этом значений интегралов для тех функций, у которых это значение установлено.

Переходим к изложению конструкции интеграла Римана. Будем считать, что функция $f(x)$ определена на интервале (α, β), содержащем отрезок $[a, b]$.

Определение 1. *Конечное множество T точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называется* **(неразмеченным) разбиением** *отрезка $[a, b]$, если $n \geq 1$ и $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

Определение 2. *Будем говорить, что* **разбиение T_1 предшествует разбиению T_2 (или разбиение T_2 следует за разбиением T_1),** *если имеет место теоретико-множественное включение $T_1 \subset T_2$ (или $T_2 \supset T_1$). Разбиение T_2 называется* **измельчением** *разбиения T_1.*

Очевидно, справедливы следующие свойства.

1^0. Всякое разбиение есть измельчение самого себя.

2^0. Если $T_3 = T_1 \cup T_2$, то разбиение T_3 есть измельчение и разбиения T_1, и разбиения T_2.

Для любого разбиения $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ через Δ_k обозначим отрезок вида $[x_{k-1}, x_k]$. Длину этого отрезка обозначим так:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

Определение 3. *Величина* $\Delta_T = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ *называется* **диаметром разбиения** T.

На каждом из отрезков Δ_k выберем точку ξ_k, $k = 1, \dots, n$, т.е.

$$x_{k-1} \le \xi_k \le x_k.$$

Определение 4. *Совокупность точек* $\{x_0, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ *называется* **размеченным разбиением** *отрезка* $[a, b]$.

Обозначим его через V, а соответствующее ему неразмеченное разбиение — через $T = T(V)$.

Определение 5. *Сумма*

$$\sigma(V) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется **интегральной суммой функции** $f(x)$, *соответствующей размеченному разбиению* V.

Определение 6. *Число* I *называется* **определенным интегралом (Римана)** *от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *если для всякого* $\epsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *такое, что для любого размеченного разбиения* V *отрезка* $[a, b]$ *с условием* $\Delta_V < \delta$ *справедливо неравенство*

$$|I - \sigma(V)| < \varepsilon,$$

т.е.

$$|I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k| < \varepsilon.$$

Для интеграла I используют обозначение

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Определение 7. *Функция $f(x)$, для которой существует интеграл Римана, называется* **интегрируемой (по Риману)** *на отрезке* $[a, b]$.

Легко доказать следующее утверждение. Если существуют два числа I_1 и I_2, удовлетворяющие определению интеграла Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то они совпадают, т.е. $I_1 = I_2$.

Действительно, если, например, $I_1 < I_2$, то в качестве величины ε возьмем число, равное $\frac{1}{2}(I_2 - I_1)$. Тогда в силу определения интеграла существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V с условием $\Delta_V < \delta$ имеем

$$|\sigma_V - I_1| < \varepsilon, \ |\sigma_V - I_2| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$I_2 - I_1 = |I_2 - I_1| \le |I_2 - \sigma_V| + |\sigma_V - I_1| < 2\varepsilon = I_2 - I_1.$$

Отсюда получим $I_2 - I_1 < I_2 - I_1$, что невозможно, так что имеем $I_1 = I_2$. Утверждение доказано.

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно рассматривать как предел по некоторой базе. Определим эту базу, т.е. опишем множество окончаний, из которых она состоит.

Напомним определение базы B подмножеств b основного множества A. Окончания $b \subset A$ базы B, т.е. ее элементы, удовлетворяют следующим условиям:

1) пустое множество не является окончанием базы;

2) для любых двух окончаний b_1, b_2 базы B найдется окончание $b_3 \in B$ с условием $b_3 \subset b_1 \cap b_2$.

В качестве основного множества A возьмем множество всех размеченных разбиений отрезка $[a, b]$. Для каждого $\delta > 0$ рассмотрим множество $b_\delta \subset A$, состоящее изо всех размеченных разбиений с диаметром Δ_V меньшим, чем δ, т.е. $\Delta_V < \delta$. Совокупность множеств $\{b_\delta\}$ и будет искомой базой. Интегральная сумма $\sigma(V)$ является функцией, определенной на множестве A размеченных разбиений V. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ оказывается не чем иным, как пределом интегральных сумм $\sigma(V)$ по базе B, т.е.

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_B \sigma(V).$$

Напомним, что это равенство означает следующее: для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует окончание $b_\delta = b_\delta(\varepsilon)$ базы B, такое, что для любого размеченного разбиения $V \in b_\delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$|\sigma(V) - I| < \varepsilon.$$

Отметим, что в предыдущем определении интеграла в качестве $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ надо взять величину δ, которая порождает окончание $b_\delta(\varepsilon)$.

Так как интеграл — это предел интегральных сумм по базе B, то к нему применимы теоремы о пределе функции по базе множеств.

Докажем следующее важное свойство интегрируемых функций.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда она ограничена на нем.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a,b]$. Возьмем любое разбиение $T:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ этого отрезка такое, что $\Delta_T < \delta$. Тогда существует отрезок $\Delta_r = [x_{r-1}, x_r]$, на котором функция $f(x)$ не ограничена. Покажем, что $\sigma(V)$ не ограничена. Возьмем любое число $M > 0$. Построим разметку V разбиения T такую, что $|\sigma(V)| > M$. С этой целью точки $\xi_1, \ldots, \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ возьмем произвольно. Положим

$$A = \left| \sum_{k=1, k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right|.$$

Поскольку функция $f(x)$ не ограничена на отрезке Δ_r, существует точка $\xi_r \in \Delta_r$ такая, что

$$|f(\xi_r)| > \frac{M + A}{\Delta x_r}.$$

Отсюда имеем

$$|\sigma(V)| \geq |f(\xi_r)\Delta x_r| - \left| \sum_{k=1, k\neq r}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right| > \frac{M + A}{\Delta x_r}\Delta x_r - A = M,$$

следовательно, $\sigma(V)$ не ограничена, т.е. функция $f(x)$ — не интегрируема. Теорема 2 доказана.

§ 3. КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ

Установим критерий интегрируемости по Риману функции, ограниченной на отрезке.

Определение 1. Верхней суммой Дарбу *функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, отвечающей разбиению $T = \{x_0, \dots, x_n\}$, называется сумма*

$$S(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k,$$

где $M_k = \sup\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$, Δ_k *— отрезок* $[x_{k-1}, x_k]$, *а* Δx_k *— его длина.*
Нижней суммой Дарбу *называется сумма*

$$s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k,$$

где $m_k = \inf\limits_{x \in \Delta_k} f(x)$.

Определение 2. *Число* $I^* = \inf\limits_{T \in A'} S(T)$ *называется* **верхним интегралом**, *а число* $I_* = \sup\limits_{T \in A'} s(T)$ — **нижним интегралом** *от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, где A' — множество всех разбиений $[a,b]$.*

Т е о р е м а 1. (Критерий Римана интегрируемости функции на отрезке). *Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема на отрезке, небходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{\Delta_T \to 0} (S(T) - s(T)) = 0.$$

Для доказательства этого критерия нам потребуются следующие свойства верхних и нижних сумм Дарбу.

Л е м м а 1. *Для любого размеченного разбиения V имеем*

$$s(T(V)) \le \sigma(V) \le S(T(V)).$$

Л е м м а 2. *Пусть T_0 — любое фиксированное разбиение и $\alpha(T_0)$ — множество разметок этого разбиения. Тогда*

$$s(T_0) = \inf_{V \in \alpha(T_0)} \sigma(V), \; S(T_0) = \sup_{V \in \alpha(T_0)} \sigma(V).$$

Л е м м а 3. *Для любых неразмеченных разбиений T_1 и T_2 имеем*

$$s(T_1) \leq S(T_2).$$

Л е м м а 4. *Для ограниченной функции верхний и нижний интегралы I^* и I_* существуют, причем для любого разбиения T справедливы неравенства*

$$s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T).$$

Л е м м а 5. *Диаметры размеченного разбиения V и отвечающего ему неразмеченного разбиения $T = T(V)$ совпадают, поэтому если $V \in b'_\delta$, то $T(V) \in b_\delta$. Здесь b'_δ — окончание базы размеченных разбиений и b_δ — окончание базы неразмеченных разбиений, отвечающие числу δ.*

Л е м м а 6. *Для любого разбиения T имеем*

$$I^* - I_* \leq S(T) - s(T) = \Omega(T).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о этих утверждений не представляет большого труда. Поэтому докажем только леммы 3, 4 и 6. Начнем с леммы 3. Отметим, что при измельчении разбиения T нижняя сумма Дарбу $s(T)$ может разве что возрасти, а верхняя сумма $S(T)$ разве что уменьшиться, а потому возьмем разбиение $T_3 = T_1 \cup T_2$ и получим, что

$$s(T_1) \leq s(T_3) \leq S(T_3) \leq S(T_2).$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4 по существу вытекает из леммы 3. Если мы образуем числовое множество M_1 всех значений величин $s(T)$ и множество M_2 всех значений $S(T)$, то утверждение леммы 3 означает, что любой элемент $a \in M_2$ есть верхняя грань для множества M_1. Но тогда наименьшая верхняя грань множества M_1, т.е. величина I_*, не превосходит a. А это означает, что I_* — нижняя грань множества M_2, а по своему определению I^* есть точная нижняя грань множества M_2, поэтому имеем

$$s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T).$$

Лемма 4 доказана.

Утверждение леммы 6 следует из цепочки неравенств

$$S(T) - s(T) \geq I^* - s(T) \geq I^* - I_*.$$

Утверждение остальных трех лемм непосредственно следуют из определений.

Теперь можно перейти к доказательству критерия интегрируемости функции по Риману.

Доказательство теоремы 1. *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{\Delta_V\to 0}\sigma(V)=I$. Это значит, что для любого числа $\varepsilon_1>0$ найдется число $\delta_1=\delta_1(\varepsilon_1)>0$ такое, что для любого размеченного разбиения V с диаметром $\Delta_V<\delta_1$ имеем $|\sigma(V)-I|<\varepsilon_1$, т.е.

$$I-\varepsilon_1<\sigma(V)<I+\varepsilon_1. \qquad (1)$$

Рассмотрим произвольное неразмеченное разбиение T с условием $\Delta_T<\delta_1$. Имеем

$$s(T)=\inf_{V\in\alpha(T)}\sigma(V),\ S(T)=\sup_{V\in\alpha(T)}\sigma(V).$$

Тогда из (1) вытекает, что

$$I-\varepsilon_1\le s(T)\le I+\varepsilon_1,\ I-\varepsilon_1\le S(T)\le I+\varepsilon_1.$$

Следовательно, числа $s(T)$ и $S(T)$ лежат на одном отрезке $[I-\varepsilon_1,I+\varepsilon_1]$ длины $2\varepsilon_1$, т.е.

$$|S(T)-s(T)|\le 2\varepsilon_1.$$

Если мы возьмем $\varepsilon_1=\varepsilon/3$ и $\delta=\delta_1(\varepsilon/3)$, то получим, что для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что для всякого разбиения T с условием $\Delta_T<\delta(\varepsilon)$ имеем неравенство $|S(T)-s(T)|<\varepsilon$, т.е.

$$\lim_{\Delta_T\to 0}(S(T)-s(T))=0.$$

Необходимость утверждения доказана.

Достаточность. Докажем, что из условия $\lim\limits_{\Delta_T\to 0}(S(T)-s(T))=0$ следует существование предела $\lim\limits_{\Delta_V\to 0}\sigma(V)$.

Сначала убедимся, что верхний и нижний интегралы I^* и I_* равны между собой. В силу леммы 6 имеем

$$0\le I^*-I_*\le S(T)-s(T).$$

Следовательно, при $\Delta_T\to 0$ получим $h=I^*-I_*\to 0$, т.е. $h=0$ и

$$I^*=I_*=I.$$

Осталось доказать, что $\lim\limits_{\Delta_V\to 0}\sigma(V)=I$. Зададимся произвольным $\varepsilon>0$. Тогда существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любого разбиения T с условием $\Delta_T<\delta$ выполняется неравенство

$$S(T)-s(T)<\varepsilon.$$

Но тогда для любого размеченного разбиения V с условием $\Delta_V < \delta$ имеем

$$S(T(V)) - s(T(V)) < \varepsilon,$$

и, кроме того,

$$s(T(V)) \le \sigma(V) \le S(T(V)),\ s(T(V)) \le I \le S(T(V)),$$

т.е. обе точки $\sigma(V)$ и I лежат на отрезке $[s(T(V)), S(T(V))]$, длина которого меньше ε, но это значит, что расстояние между любыми точками его меньше, чем ε. Другими словами, для любого разбиения V с условием $\Delta_V < \delta$ справедливо неравенство $|\sigma(V) - I| < \varepsilon$, т.е. имеем $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. Теорема 1 доказана полностью.

Замечание. При доказательстве достаточности в критерии интегрируемости установлена справедливость следующего утверждения.

Пусть для ограниченной функции выполняется условие

$$\lim_{\Delta_T \to 0}(S(T) - s(T)) = 0.$$

Тогда имеет место равенство $I^* = I_*$.

Примеры. 1. Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \end{cases}$$

не является интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$.

Действительно, возьмем любое разбиение T этого отрезка. На любом промежутке Δ_i разбиения T содержатся как рациональные точки, так и иррациональные, поэтому колебание ω_i функции на этом промежутке равно 1. Следовательно,

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a.$$

Но по критерию интегрируемости функции по Риману должно выполняться условие

$$\lim_{\Delta_T \to 0}(S(T) - s(T)) = 0.$$

Значит, функция Дирихле $D(x)$ неинтегрируема по Риману.

2. Функция Римана

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \frac{m}{n},\ (m, n) = 1, \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \end{cases}$$

интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$.

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Положим число N, равным величине
$$N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$$
и возьмем число δ из условия $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2N^2}$. Возьмем теперь любое разбиение T с условием $\Delta_T < \delta$. Колебание ω_i функции $R(x)$ на любом промежутке Δ_i удовлетворяет условию $0 < \omega_i \leq 1$. Представим сумму $\Omega(T) = S(T) - s(T)$ в виде суммы двух слагаемых Ω_1 и Ω_2 в соответствии с тем, что выполняется неравенство $0 < \omega_i \leq \frac{1}{N}$ и $\frac{1}{N} < \omega_i \leq 1$. В сумму Ω_2 входят промежутки Δ_i, содержащие рациональные точки со знаменателем, меньшим, чем N. Количество таких точек не превосходит N^2. Поэтому получим
$$\Omega(T) = \Omega_1 + \Omega_2 \leq \frac{1}{N}\sum{}'\Delta x_i + \sum{}''\Delta x_i \leq \frac{1}{N} + \delta N^2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
где штрих и два штриха в знаке суммы означают, что промежутки Δ_i входят соответственно в суммы Ω_1 и Ω_2.

Следовательно, функция Римана $R(x)$ интегрируема.

Лекция 3

§ 4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТРЕХ УСЛОВИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ

Докажем критерий интегрируемости функции по Риману в трех эквивалентных формах.

Теорема 1. *Для интегрируемости ограниченной на отрезке функции необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из трех эквивалентных условий:*

1) $\lim\limits_{\Delta_T \to 0}(S(T) - s(T)) = 0,$

2) $I^* = I_*,$

3) $\inf\limits_T(S(T) - s(T)) = 0.$

Доказательство. Мы докажем, что имеет место следующая цепочка заключений: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1), откуда и следует искомая эквивалентность.

В силу замечания к теореме 1 §3 получим, что из 1) $\Rightarrow$ 2).

Докажем, что из 2) $\Rightarrow$ 3). Справедливо следующее соотношение:

$$\inf_T(S(T) - s(T)) = h = I^* - I_*.$$

а) Сначала покажем, что h является нижней гранью множества $S(T) - s(T)$. Имеем

$$I^* \leq S(T), \; -I_* \leq -s(T).$$

Следовательно,

$$S(T) - s(T) \geq I^* - I_*.$$

б) Докажем теперь, что величина h является точной нижней гранью множества $S(T) - s(T)$, т.е., что для любого $\varepsilon > 0$ число $h + \varepsilon$ не является нижней гранью. Из определения верхнего и нижнего интегралов следует, что найдутся разбиения T_1 и T_2 такие, что

$$S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \; s(T_2) > I^* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда для разбиения $T_3 = T_1 \cup T_2$ имеем

$$S(T_3) \leq S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \; s(T_3) \geq s(T_2) > I^* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$S(T_3) - s(T_3) < I^* - I_* + \varepsilon = h + \varepsilon,$$

т.е. $h+\varepsilon$ действительно не является нижней гранью множества значений $S(T)-s(T)$.

Так как утверждение 2) состоит в том, что $h=0$, то из доказанного выше имеем $\inf\limits_{T}(S(T)-s(T))=0$. Таким образом, из утверждения 2) мы вывели утверждение 3).

Докажем теперь, что из 3) $\Rightarrow$ 1). В силу условия 3) имеем, что для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение T_1 такое, что $S(T_1)-s(T_1)<\frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим через n число точек разбиения T_1. В силу ограниченности на отрезке функции $f(x)$ существует число $M>0$ такое, что для всех точек x из этого отрезка имеем $|f(x)|<M$. Положим $\delta=\frac{\varepsilon}{4nM}$. Далее возьмем любое разбиение T с условием $\Delta_T<\delta$. Тогда для разбиения $T_2=T\cup T_1$ имеем

$$S(T_2)-s(T_2)\le S(T_1)-s(T_1)<\frac{\varepsilon}{2},$$

или, что то же самое, $\Omega(T_2)\le\Omega(T_1)<\frac{\varepsilon}{2}$. Аналогично, имеем $\Omega(T_2)\le\Omega(T)$.

Оценим сверху величину $\Omega(T)$. Поскольку

$$\Omega(T)=\Omega(T_2)+(\Omega(T)-\Omega(T_2)),$$

достаточно оценить $\Omega(T)-\Omega(T_2)$. Разбиение T_2 является измельчением разбиения T и получается из него так, что на некоторые промежутки разбиения T добавляются точки разбиения T_1. Количество таких промежутков не превосходит n, длина каждого из них меньше δ, а колебание функции $f(x)$ на этих промежутках не превосходит $2M$. Следовательно, $\Omega(T)-\Omega(T_2)\le 2Mn\delta$.

Таким образом, получим

$$\Omega(T)<\frac{\varepsilon}{2}+2Mn\delta=\varepsilon.$$

А это означает, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\frac{\varepsilon}{4Mn}$ такое, что для любого разбиения T с условием $\Delta_T<\delta$ выполняется неравенство $\Omega(T)<\varepsilon$, т.е.

$$\lim_{\Delta_T\to 0}(S(T)-s(T))=0.$$

Теорема 1 доказана полностью.

§ 5. СПЕЦИАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ

Верхнюю (соответственно нижнюю) сумму Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, отвечающую разбиению T_n отрезка $[a,b]$ на n равных частей, обозначим через S_n (соответственно s_n).

Докажем следующий специальный критерий интегрируемости функции по Риману.

Т е о р е м а 1. *Для интегрируемости ограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость следует из критерия Римана (теорема 1 §4).

Достаточность. Пусть

$$I^* = \inf_T S(T), \ I_* = \sup_T s(T).$$

Тогда для любого разбиения T будем иметь

$$s(T) \le I_* \le I^* \le S(T).$$

Следовательно,

$$s_n \le I_* \le I^* \le S_n.$$

Отсюда получим

$$S_n - s_n \ge I^* - I_* \ge 0.$$

Но поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$, то $I^* = I_* = I$, и в силу теоремы 2 §4 (условие 2) функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Теорема 1 доказана полностью.

С л е д с т в и е. *Для интегрируемости ограниченной функции на отрезке необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих эквивалентных условий:*

4) $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0$,

5) $\inf\limits_n(S_n - s_n) = 0$.

Условия 4) и 5) дополняют условия 1),2) и 3) теоремы 2 §4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, имеем цепочку заключений

$$5) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5).$$

Следствие доказано.

Пример. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, $0 \le x_n < 1$. Пусть α и β — любые числа с условием $0 \le \alpha \le \beta \le 1$. Обозначим через N_Q количество членов последовательности $\{x_k\}$, $1 \le k \le Q$, попадающих на отрезок $[\alpha,\beta]$, т.е. $\alpha \le x_k \le \beta$, $1 \le k \le Q$.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ **равномерно распределена по модулю единица** (р.р. (mod 1)), если выполняется соотношение

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{N_Q}{Q} = \beta - \alpha.$$

Докажем следующий критерий равномерной распределенности, принадлежащий Г.Вейлю.

Т е о р е м а 2. (Критерий Г.Вейля). *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была равномерно распределена по модулю единица, необходимо и достаточно, чтобы для любой интегрируемой по Риману функции $f(x)$ имело место равенство*

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{1}{Q}\sum_{r=1}^{Q} f(x_r)=\int\limits_0^1 f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Периодическая функция $f(x)$ с периодом 1,

$$f(x)=\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \alpha\le x\le\beta,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

интегрируема на отрезке $[0,1]$.

Кроме того, имеем

$$N_Q=\sum_{i=1}^{Q}\varphi(x_i),\quad \int\limits_0^1\varphi(x)\,dx=\beta-\alpha.$$

Следовательно,

$$\lim_{Q\to\infty}\frac{N_Q}{Q}=\beta-\alpha,$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю единица. Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть $f(x)$ — произвольная интегрируемая по Риману функция на отрезке $[0,1]$. Тогда в силу критерия интегрируемости для любого $\epsilon>0$ существует разбиение T, такое, что

$$\Omega(T)=S(T)-s(T)<\frac{\epsilon}{3},\ s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i, S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i.$$

Очевидно, справедливо неравенство

$$s(T)\le\int\limits_0^1 f(x)\,dx\le S(T).$$

Положим

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad x\in\Delta_i,\\ 0, & \text{если}\quad x\notin\Delta_i,\end{cases}$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i \varphi_i(x), \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i \varphi_i(x).$$

Заметим, что если равенство (1) выполняется для некоторых функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_r(x)$, то оно справедливо и для функции $g(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_r f_r(x)$. Поэтому, исходя из определения равномерной распределенности, получим:

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \varphi(x_r) = \int_0^1 \varphi(x)\, dx = s(T),$$

$$\lim_{Q\to\infty} \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \Phi(x_r) = \int_0^1 \Phi(x)\, dx = S(T).$$

Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует $Q_0 = Q_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $Q > Q_0$ имеем

$$\left| s(T) - \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \varphi(x_r) \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| S(T) - \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \Phi(x_r) \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

Далее, поскольку имеет место неравенство $\varphi(x) \le f(x) \le \Phi(x)$,

$$s(T) - \frac{\varepsilon}{3} \le \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \varphi(x_r) \le \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} f(x_r) \le \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} \Phi(x_r) \le S(T) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, как $\frac{1}{Q} \sum\limits_{r=1}^{Q} f(x_r)$, так и значение интеграла $\int\limits_0^1 f(x)\, dx$ принадлежат отрезку $[s(T) - \frac{\varepsilon}{3}, S(T) + \frac{\varepsilon}{3}]$. Поэтому имеем

$$\left| \frac{1}{Q} \sum_{r=1}^{Q} f(x_r) - \int_0^1 f(x)\, dx \right| \le \Omega(T) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Теорема 2 доказана полностью.

§ 6. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММ

Метод интегральных сумм основан на следующей лемме.

Лемма. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, и пусть $\{V_n\}$ — любая последовательность размеченных разбиений с условием, что последовательность диаметров разбиений $\{\Delta_{V_n}\} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$ имеем:*

$$\text{а)} S_n = S(T(V_n)) \to I; \text{ б)} s_n = s(T(V_n)) \to I; \text{ в)} \sigma_n = \sigma(V_n) \to I.$$

Доказательство. По определению интеграла и по критерию интегрируемости функции по Риману для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если $\Delta_{V_n} = \Delta_{T(V_n)} < \delta$, то имеем

$$|\sigma_n - I| < \frac{\varepsilon}{2}, \ |S_n - I| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ |s_n - I| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Но так как последовательность $\{\Delta_{V_n}\}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то вне соответствующей δ-окрестности нуля лежит не более конечного числа $n_0(\delta)$ значений Δ_{V_n}. Поэтому вне ε-окрестности числа I тоже лежит не более, чем $n_0(\delta)$ значений величин σ_n, S_n, s_n. Следовательно,

$$I = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Лемма доказана.

Примеры. 1. Имеем $\int\limits_a^b e^x\,dx = e^b - e^a$.

Поскольку функция e^x непрерывна на отрезке $[a,b]$, она интегрируема на нем. Для того чтобы найти значение интеграла, остается только выбрать последовательность $\{V_n\}$ и вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$. Положим при $k = 0, \dots, n$

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \ \xi_k = x_{k-1}, \ \Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \Delta, \ x_k = a + k\Delta.$$

Отсюда имеем

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{a+k\Delta}\cdot\Delta = \Delta e^a(1 + e^\Delta + \dots + e^{(n-1)\Delta}) =$$

$$= \Delta e^a \frac{1 - e^{n\Delta}}{1 - e^\Delta} = \frac{\Delta}{e^\Delta - 1}\cdot(e^b - e^a).$$

Так как при $n \to \infty$ справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta}{e^{\Delta}-1} = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = e^b - e^a = \int\limits_a^b e^x\,dx.$$

2. Пусть $0 < a < b$. Тогда имеем $\int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.

Возьмем произвольное разбиение отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ и положим $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}x_k}$, $k = 1,\ldots,n$. Тогда для соответствующей интегральной суммы σ_n будем иметь

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k-1}x_k}\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}x_k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int\limits_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

3. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = l$.

Очевидно, имеем

$$l = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Отсюда по формуле Ньютона – Лейбница, которая будет доказана чуть позже, получим $l = \ln 2$.

В частности, используя это, найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) = \ln 2.$$

4. Справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_0^{\pi} \ln\left(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2\right) dx = \begin{cases} 2\pi\ln|\alpha|, & \text{если} \quad |\alpha| > 1, \\ 0, & \text{если} \quad |\alpha| < 1. \end{cases}$$

Положим $x_k = \frac{\pi k}{n}$, $\xi_k = x_k$ $k = 1, \ldots, n$. Тогда имеем $\Delta x_k = \frac{\pi}{n}$. Следовательно,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - 2\alpha\cos x_k + \alpha^2)\frac{\pi}{n} = \pi\sum_{k=1}^{n} \ln|(\alpha - e^{ix_k})(\alpha - e^{-ix_k})|\frac{1}{n} =$$

$$= \pi \ln \prod_{k=1}^{n} |(\alpha - e^{ix_k})(\alpha - e^{-ix_k})|\frac{1}{n} = \pi \ln|\alpha^{2n} - 1|\frac{1}{n}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим искомое значение интеграла.

5. Пусть $f(x)$ не убывает и ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда для величины

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(x)\,dx$$

имеют место неравенства

$$0 \le \delta_n \le \frac{f(b) - f(a)}{n}.$$

Очевидно, имеем

$$0 \le \delta_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}(b-a)}^{\frac{k}{n}(b-a)} \left(f(a + \frac{k}{n}(b-a)) - f(x)\right)\,dx \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}(b-a)}^{\frac{k}{n}(b-a)} \left(f(a + \frac{k}{n}(b-a)) - f(a + \frac{k-1}{n}(b-a))\right)\,dx \le$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(a + \frac{k}{n}(b-a)) - f(a + \frac{k-1}{n}(b-a))\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)).$$

А это и доказывает требуемое неравенство.

6. Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ ограниченную и интегрируемую производную, и пусть символ δ_n обозначает то же, что и в примере 5. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} n\delta_n = \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{2}.$$

В силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях на каждом отрезке $\Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, для любой точки $x \in \Delta_k$ существует точка ξ_k, принадлежащая интервалу (x_{k-1}, x_k), такая, что

$$f(a + \frac{k}{n}(b-a)) - f(x) = f'(\xi_k)(\frac{k}{n}(b-a) - x).$$

Пусть m_k, M_k — соответственно нижняя и верхняя грани производной $f'(x)$ на отрезке Δ_k. Тогда $m_k \le f'(\xi_k) \le M_k$.

Из определения δ_n имеем

$$\delta_n = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\frac{k-1}{n}(b-a)}^{\frac{k}{n}(b-a)} \left(a + \frac{k}{n}(b-a) - x\right) f'(\xi_k)\, dx.$$

Отсюда следуют неравенства

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} m_k \le \delta_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} M_k.$$

Домножая обе части неравенства на n и переходя к пределу, получаем требуемое предельное соотношение.

Отсюда, в частности, для последовательности примера 3, имеем

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} - \ln 2\right) = -\frac{1}{4}.$$

7. Пусть $p(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $[0, 1]$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{1}{\int\limits_0^1 \frac{dx}{p(x)}} \le e^{\int\limits_0^1 \ln p(x)\, dx} \le \int\limits_0^1 p(x)\, dx.$$

Положим $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 0, \ldots, n$. Тогда для соответствующих интегральных сумм в силу неравенств между средними гармоническим, геометрическим и арифметическим имеем

$$\frac{n}{\frac{1}{p(x_1)} + \cdots + \frac{1}{p(x_n)}} \le e^{\frac{1}{n}\sum \ln p(x_k)} = \sqrt[n]{p(x_1)\ldots p(x_n)} \le \frac{p(x_1) + \ldots p(x_n)}{n}.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$, получаем искомое неравенство.,

§ 7. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА РИМАНА КАК ПРЕДЕЛА ПО БАЗЕ

Напомним данное в конце § 1 определение интеграла Римана как предела по некоторой базе.

Пусть A — совокупность всех размеченных разбиений отрезка $[a,b]$. Множество A будет основным множеством базы B. При всяком $\delta > 0$ окончаниями $b = b_\delta \in A$ этой базы B являются множества, состоящие изо всех размеченных разбиений $V \in A$ с диаметром разбиения Δ_V, меньшим δ. Другими словами, окончание b_δ задается так:

$$b_\delta = \{V \in A |\ \Delta_V < \delta\}.$$

Пусть, как и раньше, $\sigma(V)$ — интегральная сумма, отвечающая размеченному разбиению $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_n; \xi_1, \ldots, \xi_n\}$, т.е.

$$\sigma(V) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Тогда число I называется **интегралом Римана** от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если

$$I = \lim_{B} \sigma(V).$$

Другими словами, число I — интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V отрезка $[a,b]$ с условием $\Delta_V < \delta$ имеем

$$|I - \sigma(V)| < \varepsilon.$$

Пусть теперь A' — совокупность неразмеченных разбиений отрезка $[a,b]$. Это множество A' является основным множеством базы B', состоящей из окончаний b'_δ, причем b'_δ состоит изо всех неразмеченных разбиений T с диаметром $\Delta_T < \delta$.

Дадим определение верхнего и нижнего интегралов Дарбу.

Пусть $S(T)$ и $s(T)$ — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу, отвечающие неразмеченному разбиению T и $\Omega(T) = S(T) - s(T)$. Тогда число

$$I^* = \inf_{T \in A'} S(T)$$

называется **верхним интегралом Дарбу**, *а число*

$$I_* = \sup_{T \in A'} s(T)$$

— **нижним интегралом Дарбу** *от функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$.

Возьмем любое фиксированное неразмеченное разбиение T_0. Обозначим через $\alpha(T_0)$ множество всех тех размеченных разбиений V, которым соответствует одно и то же неразмеченное разбиение T_0, т.е. множество всех его разметок. Тогда, исходя из леммы 2 §3, определение верхнего и нижнего интегралов Дарбу можно записать и так:

$$I^* = \inf_{T\in A'} \sup_{V\in\alpha(T)} \sigma(V), I_* = \sup_{T\in A'} \inf_{V\in\alpha(T)} \sigma(V).$$

Отметим несколько свойств введенных выше понятий.

Л е м м а 1. *Пусть размеченное разбиение V есть разметка разбиения T_0, т.е. $V\in\alpha(T_0)$. Тогда, если $V\in b_\delta$, то:*

1) $\alpha(T_0)\subset b_\delta$;

2) $\bigcup\limits_{T_0,\Delta_{T_0}<\delta} \alpha(T_0) = \bigcup\limits_{T_0\in b'_\delta} \alpha(T_0) = b_\delta$.

Действительно, имеем $\Delta_{T_0} = \Delta_V$. Следовательно, для любого размеченного разбиения $V_1\in\alpha(T_0)$ получим $\Delta_{V_1} = \Delta_V < \delta$, поэтому $\alpha(T_0)\subset b_\delta$. Свойство 2) проверяется аналогично. Лемма 1 доказана.

Отметим теперь несколько свойств базы B. Кроме указанных ранее двух свойств:

1) любое окончание базы — непустое множество;

2) для любых окончаний b_1 и b_2 существует окончание b_3 с условием $b_3\subset b_1\cup b_2$, выполняются следующие три свойства:

3) Для любых окончаний b_1 и b_2 выполняется одно из условий: либо $b_1\subset b_2$, либо $b_2\subset b_1$.

4) Напомним определение фундаментальной и монотонной последовательности по базе множеств (см. лекцию 30, ч. I). Последовательность разбиений $\{V_n\}$ называется **фундаментальной** по базе B, если для любого окончания $b\in B$ существует только конечное множество членов последовательности, не принадлежащих b. Фундаментальная последовательность $\{V_n\}$ называется **монотонной** по базе B, если для любого окончания b из условия $V_n\in b$ следует, что $V_{n+1}\in b$. В качестве монотонной последовательности по базе B можно взять последовательность $\{V_n\}$ размеченных разбиений отрезка $[a,b]$ таких, что $T_n = T(V_n)$ является разбиением его на n равных частей.

5) $\bigcap\limits_{b\in B} b = \varnothing$.

Введем следующие обозначения для верхнего и нижнего пределов по базе B :

$$J^* = \overline{\lim_B}\,\sigma(V),\ J_* = \underline{\lim_B}\,\sigma(V).$$

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Имеют место неравенства:*

$$J_* \le I_* \le I^* \le J^*.$$

Отсюда в силу критерия Коши получим следующий критерий интегрируемости функции по Риману.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы функция была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$J^* = J_*.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Из определения верхних интегралов I^* и J^* и свойств верхнего предела по базе множеств (теорема 3, лекция 30, ч. I) имеем

$$I^* = \inf_T S(T) = \inf_T \sup_{V\in\alpha(T)} \sigma(V) = \inf_{\delta>0} \inf_{\Delta_T<\delta} \sup_{V\in\alpha(T)} \sigma(V) \le$$

$$\le \inf_{\delta>0} \inf_{\Delta_T<\delta} \sup_{V\in b_\delta} \sigma(V) = \inf_{b_\delta\in B} \sup_{V\in b_\delta} \sigma(V) = \overline{\lim_B} \sigma(V) = J^*,$$

т. е. $I^* \le J^*$. Аналогично, получим, что $J_* \le I_*$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Итак, мы видим, что критерий Римана для существования интеграла в форме $I^* = I_*$ на языке понятия предела по базе, в сущности, эквивалентен критерию Коши существования предела по базе $\Delta_V \to 0$.

Замечание 2. Из эквивалентности понятий предела по Коши и по Гейне для базы $\Delta_T \to 0$ вытекает, что функция интегрируема тогда и только тогда, когда для любой последовательности разбиений $\{V_n\}$ с условием $\Delta_{V_n} \to 0$ при $n \to \infty$ последовательность интегральных сумм $\{\sigma(V_n)\}$ является сходящейся последовательностью. С другой стороны, специальный критерий интегрируемости, который был доказан ранее, говорит о том, что здесь можно ограничиться лишь одной последовательностью равномерных разбиений отрезка интегрирования. В этом проявляется специфика рассматриваемой базы $\Delta_T \to 0$.

Уточним теорему 1, а именно, покажем, что верхний предел по базе B интегральных сумм совпадает с верхним интегралом Дарбу. Для этого нам будут необходимы несколько лемм.

Л е м м а 2. *Пусть модуль функции $f(x)$ ограничен на отрезке $E = [a, b]$ числом M. Пусть T — разбиение этого отрезка с диаметром $\delta > 0$. Пусть также разбиение T_1 получается из T добавлением к нему одной точки. Тогда для разности верхних сумм Дарбу $S(T)$ и $S(T_1)$ имеем оценку*

$$|S(T_1) - S(T)| \le 2M\delta.$$

Доказательство. Рассмотрим отрезок $E_0 = [a_0, b_0]$, являющийся отрезком разбиения T и содержащий точку $t \in T_1$, не входящую в разбиение T. Тогда наборы точек $\tau = \{a_0 < b_0\}$ и $\tau_1 = \{a_0 < t < b_0\}$ можно рассматривать как неразмеченное разбиение отрезка E_0. Пусть при этом $S(\tau)$ и $S(\tau_1)$ есть верхние суммы Дарбу на этом отрезке. Тогда из определения следует, что

$$S(T_1) - S(T) = S(\tau_1) - S(\tau).$$

Отсюда имеем

$$|S(T_1) - S(T)| = |S(\tau_1) - S(\tau)| \le |S(\tau_1)| + |S(\tau)| \le M\delta + M\delta = 2M\delta.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если в условиях леммы 2 разбиение T_1 получается из разбиения T добавлением не более, чем n точек, то имеет место оценка*

$$|S(T_1) - S(T)| \le 2M\delta n.$$

Доказательство. Справедливость леммы 3 устанавливается n кратным применением леммы 2. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть разбиение T отрезка $E = [a, b]$ удовлетворяет условию леммы 2, а разбиение T_1 того же отрезка содержит не более n внутренних точек. Тогда справедливо неравенство*

$$S(T) \le S(T_1) + 2M\delta n.$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение $T_2 = T \cup T_1$. Тогда в силу основного свойства верхних сумм Дарбу справедливы неравенства

$$S(T_2) \le S(T), \quad S(T_2) \le S(T_1).$$

Далее применим лемму 3 к суммам $S(T)$ и $S(T_2)$, получим

$$S(T) - S(T_2) \le 2M\delta n.$$

Отсюда следует, что

$$S(T) \le S(T_2) + 2M\delta n \le S(T_1) + 2M\delta n.$$

Лемма 4 доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть модуль функции $f(x)$ ограничен на отрезке $E=[a,b]$ числом $M>0$. Пусть, далее, I^* — верхний интеграл Дарбу от функции $f(x)$, а $\sigma(V)$ — интегральная сумма, отвечающая размеченному разбиению V отрезка E. Пусть также $J^* = \overline{\lim\limits_{\Delta_V\to 0}}\,\sigma(V)$. Тогда имеет место равенство $J^* = I^*$.*

Замечание. В силу ограниченности функции $f(x)$ числа I^* и J^* существуют.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $T(V)$ неразмеченное разбиение отрезка E, полученное из размеченного разбиения V отбрасыванием точек разметки, а через $\alpha(T_0)$ — множество всех размеченных разбиений V с условием $T(V)=T_0$.

Тогда непосредственно из определений и свойств верхнего предела по базе и из леммы 1 вытекает

$$S(T_0) = \sup_{V\in\alpha(T_0)} \sigma(V),\, I^* = \inf_T S(T) = \inf_{\delta>0}\inf_{\Delta_T<\delta} S(T),$$

$$J^* = \overline{\lim_{\Delta_V\to 0}}\,\sigma(V) = \inf_{\delta>0}\sup_{\Delta_V<\delta}\sigma(V) =$$

$$= \inf_{\delta>0}\sup_{\Delta_T<\delta}\sup_{V\in\alpha(T)}\sigma(V) = \inf_{\delta>0}\sup_{\Delta_T<\delta} S(T).$$

Таким образом всегда имеет место неравенство

$$I^* = \inf_{\delta>0}\inf_{\Delta_T<\delta} S(T) \le \inf_{\delta>0}\sup_{\Delta_T<\delta} S(T) = J^*.$$

Нам надо доказать, что $I^* = J^*$. Заметим, что для любого числа $\varepsilon>0$ число $I^*+\varepsilon$ уже не является нижней гранью множества значений $S(T)$, поэтому существует разбиение T_0 такое, что

$$I^* \le S(T_0) \le I^* + \varepsilon.$$

Далее заметим, что величина $\sup\limits_{\Delta_T<\delta} S(T)$ как функция от δ является неубывающей. Поэтому существует $\delta_0>0$ такое, что для всякого δ с условием $0<\delta<\delta_0$ имеем

$$J^* \le \sup_{\Delta_T<\delta} S(T) \le J^* + \varepsilon.$$

Отсюда, в частности, следует, что существует разбиение T_1 с условием $\Delta_{T_1}<\delta$ такое, что

$$J^* - \varepsilon \le S(T_1) \le J^* + \varepsilon.$$

Обозначим через n количество внутренних точек разбиения T_0. Тогда по лемме 4 справедлива оценка

$$S(T_1) \le S(T_0) + 2M\delta n.$$

Следовательно,

$$J^* - \varepsilon \le S(T_1) \le S(T_0) + 2M\delta n < I^* + \varepsilon + 2M\delta n.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$0 \le J^* - I^* < 2\varepsilon + 2M\delta n.$$

Но так как числа $\varepsilon > 0$ и $0 < \delta < \delta_0$ можно выбрать сколь угодно малыми, то $J^* - I^* = 0$, $J^* = I^*$. Теорема 3 доказана.

С л е д с т в и е теоремы 3. *Справедливо равенство $J_* = I_*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $g(x) = -f(x)$. Тогда по доказанной теореме 3 имеем, что $J^*(g) = I^*(g)$, но $J^*(g) = -J_*(f)$ и $I^*(g) = -I_*(f)$. Отсюда получим $J_*(f) = I_*(f)$.

Следствие доказано.

§ 8. КЛАССЫ ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ ПО РИМАНУ

Докажем, что любая непрерывная на отрезке функция и любая монотонная на отрезке функция являются интегрируемыми на этом отрезке.

Т е о р е м а 1. *Всякая функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы Кантора функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, является равномерно непрерывной на нем. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек $x, y \in [a, b]$ с условием $|x - y| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Возьмем любое разбиение T отрезка $[a, b]$ с диаметром $\Delta_T < \delta$. Тогда будем иметь

$$\omega_k = \sup_{x,y\in\Delta_k} (f(x) - f(y)) \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Отсюда получим

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, для всякого $\epsilon > 0$ мы нашли число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T с диаметром $\Delta_T < \delta$ выполняется неравенство $\Omega(T) < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$. Отсюда в силу критерия интегрируемости следует, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Всякая функция $f(x)$, ограниченная и монотонная на отрезке $[a, b]$, интегрируема на нем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности можно рассмотреть только случай неубывающей на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$ и положим

$$\delta = \frac{\varepsilon}{f(b-0) - f(a+0) + 1},$$

$$\omega_k = \sup_{x,y \in \Delta_k} (f(x) - f(y)) = f(x_k - 0) - f(x_{k-1} + 0).$$

Тогда для любого разбиения $T : a = x_0 < \dots < x_n = b$ с диаметром $\Delta_T < \delta$ будем иметь

$$\Omega(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \leq \delta \sum_{k=1}^{n} \omega_k \leq (f(b-0) - f(a+0))\delta < \varepsilon,$$

т.е. получим, что $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$, и, значит, в силу критерия интегрируемости функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Всякая ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция, непрерывная всюду, за исключением конечного числа разрывов, интегрируема на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу критерия интегрируемости функции $f(x)$ в форме $\inf\limits_{T} \Omega(T) = 0$ нам достаточно для любого $\epsilon > 0$ построить разбиение T с условием $\Omega(T) < \epsilon$.

Пусть количество точек разрыва $f(x)$ равно m и $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Каждую точку разрыва d_s, $s = 1, \dots, m$, окружим окрестностью вида $\Delta_k = (d_s - \frac{\varepsilon}{8Mm}, d_s + \frac{\varepsilon}{8Mm})$. Тогда в каждом из отрезков

$$\Delta_r = [d_{r-1} + \frac{\varepsilon}{8Mm}, d_r - \frac{\varepsilon}{8Mm}], r = 1, \dots, m+1, \ d_0 = a, d_{m+1} = b$$

функция $f(x)$ непрерывна, и, значит, по теореме Кантора она является равномерно непрерывной на каждом из этих отрезков. Поэтому мы можем выбрать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых точек x, y, принадлежащих этим отрезкам, и $|x - y| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Построим теперь произвольное разбиение T_0 указанных отрезков так, чтобы выполнялось условие $\Delta_{T_0} < \delta$. Объединим это разбиение T_0 с построенными ранее окрестностями точек разрыва, получим разбиение T отрезка $[a, b]$.

Далее имеем

$$\Omega(T) = \Omega_1 + \Omega_2,$$

$$\Omega_1 = \sum_{k=1}^{m} \omega_k \Delta x_k \le 2Mm \cdot \frac{\varepsilon}{4Mm} = \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\Omega_2 = \sum_{\Delta_k \in T_0} \omega_k \Delta x_k \le (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\Omega(T) < \varepsilon$. Теорема 3 доказана.

Лекция 5

§ 9. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим свойства интеграла, связанные с интегрируемостью на заданном фиксированном отрезке. Множество всех интегрируемых функций на отрезке $[a,b]$ будем обозначать символом $R[a,b]$ или просто IR.

Утверждение 1. *Пусть функция $f(x)$ отлична от нуля только в l точках. Тогда $f \in IR$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Доказательство. Пусть $M = \max\limits_{1\le k\le l} |f(x)|$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2Ml}$. Тогда для любого размеченного разбиения V с условием $\Delta_V < \delta$ имеем

$$|\sigma(V)| = |\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k| \le l \cdot \frac{\varepsilon}{2Ml} \cdot M = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Здесь мы воспользовались тем, что сумма $\sigma(V)$ содержит не более l слагаемых, отличных от нуля, и тем, что $\Delta x_k < \delta$.

В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ мы получим, что

$$\lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = 0.$$

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда*

1) функция $f(x) + g(x) \in R[a,b]$ и

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

2) для любого вещественного числа k функция $kf(x) \in R[a,b]$ и

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. 1) Поскольку $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и для любого размеченного разбиения $V: a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \dots < \xi_n < x_n = b$ справедливы равенства

$$\sigma_f(V) + \sigma_g(V) = \sigma_{f+g}(V),$$

переходя к пределу при $\Delta_V \to 0$, мы видим, что предел левой части равенства существует, следовательно, существует и предел правой части, т.е. функция $f(x) + g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, и, кроме того, имеет место равенство

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

В случае 2) имеем, что $\sigma_{kf}(V) = k\sigma_f(V)$. Из этого следует интегрируемость функции $f(x)$ и выполнение равенства

$$\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Утверждение 2 доказано.

Утверждение 3.

1) Пусть функция $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

2) Пусть функция $f(x)$ интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a,b]$, и пусть в точке $x = x_0$ непрерывности $f(x)$ выполнено неравенство $f(x_0) > 0$. Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Доказательство. 1) Составим для любого размеченного разбиения V интегральную сумму $\sigma(V)$. Она — неотрицательна, и, следовательно, интеграл как предел интегральных сумм будет величиной неотрицательной.

2) Поскольку x_0 — точка непрерывности и $f(x_0) > 0$, существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x с условием $|x - x_0| < \delta$ имеем $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$. Возьмем любое размеченное разбиение V с диаметром

$\Delta_V < \frac{\delta_0}{2}$. Тогда на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ будут содержаться полностью некоторые отрезки разбиения V с суммой длин не меньшей, чем δ_0. Отсюда получим

$$\sigma(V) > \frac{\delta_0 f(x_0)}{2} > 0.$$

Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$ и $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$. Тогда для всех точек $x \in [a, b]$ имеем $f(x) = 0$.*

Доказательство. (От противного.) Допустим, что существует точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) > 0$. Тогда из утверждения 3 имеем, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$. Противоречие.

Утверждение 4 доказано.

Утверждение 5. *Пусть $a < b$ и на отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство $f(x) \geq g(x)$. Тогда имеем*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$. Тогда из утверждения 3 следует, что $\int\limits_a^b h(x)\,dx \geq 0$, а из утверждения 2 имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b (h(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b h(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx \geq \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Утверждение 5 доказано.

Утверждение 6. *Пусть $a < b$ и на отрезке $[a, b]$ справедливо неравенство $m \leq f(x) \leq M$. Тогда имеем*

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Доказательство. Утверждение 6 является простым следствием утверждения 5.

Утверждение 7. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда функция $|f(x)|$ интегрируема на нем и имеет место неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Поскольку $|f(x)-f(y)| \ge |f(x)|-|f(y)|$, имеем

$$\sup_{x,y\in\Delta_k} |f(x)-f(y)| \ge \sup_{x,y\in\Delta_k} (|f(x)|-|f(y)|),$$

и, следовательно, $\omega_k(f) \ge \omega_k(|f|)$. Отсюда для любого разбиения T имеем, что

$$\Omega_f(T) \ge \Omega_{|f|}(T).$$

По условию функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, следовательно, существует разбиение T такое, что $\Omega_f(T) < \varepsilon$. Отсюда имеем $\Omega_{|f|}(T) < \varepsilon$. А это по критерию интегрируемости означает, что функция $|f(x)|$ интегрируема на отрезке $[a, b]$.

Так как имеет место неравенство

$$-|f(\xi)| \le f(\xi) \le |f(\xi)|,$$

то для любого размеченного разбиения V получим

$$-\sigma_{|f|}(V) \le \sigma_f(V) \le \sigma_{|f|}(V).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу, будем иметь

$$-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx,$$

т. е. $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

Утверждение 7 доказано.

Утверждение 8. *Пусть $f(x) \in R[a, b]$. Тогда $f^2(x) \in R[a, b]$.*

Доказательство. Обозначим через M супремум функции $|f(x)|$ на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливо неравенство

$$|f^2(x) - f^2(y)| \le 2M|f(x) - f(y)|,$$

и, следовательно, $\omega_k(f^2) \le 2M\omega_k(f)$. Отсюда получим

$$\Omega_{f^2}(T) \le 2M\Omega_f(T),$$

значит, по критерию интегрируемости функция $f^2(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Утверждение 8 доказано.

Утверждение 9. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда их произведение $f(x)g(x)$ также интегрируемо на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Имеем

$$fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2).$$

Тогда из утверждений 8 и 2 следует, что произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемо на отрезке $[a,b]$. Утверждение 9 доказано.

Теорема (об интегрируемости сложной функции). *Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, и пусть $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[m,M]$.*

Тогда сложная функция $h(x) = \varphi(f(x))$ интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной непрерывности функции $\varphi(x)$ на отрезке $[m,M]$ имеем, что существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in [m,M]$ с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$. Далее, в силу критерия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ найдется разбиение T этого отрезка такое, что

$$\Omega_f(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k < \varepsilon\delta,$$

где $\omega_k(f)$ — колебание функции $f(x)$ на отрезке Δ_k разбиения T.

Разобьем все отрезки Δ_k, $k = 1,\ldots,n$, разбиения T на два класса. К первому классу отнесем те Δ_k, для которых справедливо неравенство $\omega_k(f) < \delta$. На этих отрезках также имеет место неравенство $\omega_k(h) < \epsilon$. Ко второму классу отнесем все остальные отрезки разбиения T, т.е. те, для которых $\omega_k(f) \geq \delta$. В связи с этим сумму $\Omega_h(T)$ представим в виде $\Omega_h(T) = \Omega_1 + \Omega_2$, где

$$\Omega_1 = \sum_k{}' \omega_k(h)\Delta x_k, \ \Omega_2 = \sum_k{}'' \omega_k(h)\Delta x_k,$$

причем знак "штрих" в сумме Ω_1 означает, что суммирование ведется по k, отвечающим отрезкам Δ_k разбиения T, относящимся к первому классу, а знак "$''$" в сумме Ω_2 показывает, что суммирование ведется по числам k, отвечающим отрезкам Δ_k из второго класса.

Из определения суммы Ω_1 имеем

$$\Omega_1 = \sum_k{}' \omega_k(h)\Delta x_k < \varepsilon \sum_k{}' \Delta x_k \leq \varepsilon(b-a).$$

Оценим сверху сумму длин отрезков Δ_k, принадлежащих второму классу. Имеем

$$\delta \sum_k {}'' \Delta x_k \leq \sum_k {}'' \omega_k(f) \Delta x_k \leq \sum_k \omega_k(f) \Delta x_k = \Omega_f(T) < \delta\epsilon.$$

Следовательно, $\sum\limits_k {}'' \Delta x_k < \varepsilon$.

Пусть $C = \max\limits_{x \in [m, M]} |\varphi(x)|$. Тогда для суммы Ω_2 получим оценку

$$\Omega_2 = \sum_k {}'' \omega_k(h) \Delta x_k \leq 2C \sum_k {}'' \Delta x_k \leq 2C\varepsilon.$$

Таким образом, имеем $\Omega_h(T) < \varepsilon(b - a + 2C)$, т.е. в силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ получим соотношение

$$\inf_T \Omega_h(T) = 0,$$

а это в силу критерия интегрируемости означает, что $h(x) = \varphi(f(x))$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Теорема доказана.

§ 10. АДДИТИВНОСТЬ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Свойство аддитивности интеграла выражается следующим утверждением.

Т е о р е м а. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для любой точки $c \in [a, b]$ она интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$. И наоборот если $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$, причем*

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда в силу критерия интегрируемости имеем, что $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T такое, что $\Omega(T) < \varepsilon$. Рассмотрим разбиение $T_0 = T \cup \{c\}$ отрезка $[a, b]$. Получим $\Omega(T_0) \leq \Omega(T) < \varepsilon$. Разбиение T_0 можно представить как объединение разбиений T_1 отрезка $[a, c]$ и T_2 отрезка $[c, b]$. Поэтому

$$\Omega(T_1) + \Omega(T_2) = \Omega(T_0) < \varepsilon.$$

Следовательно,
$$\Omega(T_1) < \varepsilon, \quad \Omega(T_2) < \varepsilon.$$

В силу инфимум-критерия интегрируемости функции $f(x)$ отсюда имеем, что $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$.

Пусть теперь $f(x)$ интегрируема на $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T_1 отрезка $[a, c]$ и существует разбиение T_2 отрезка $[c, b]$ такие, что
$$\Omega(T_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Omega(T_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Следовательно, для разбиения $T = T_1 \cup T_2$ отрезка $[a, b]$ имеем
$$\Omega(T) = \Omega(T_1) + \Omega(T_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Отсюда в силу инфимум-критерия интегрируемости $f(x)$ следует, что $f(x)$ является интегрируемой на $[a, b]$. Возьмем произвольные размеченные разбиения отрезка V_1 отрезка $[a, c]$ и V_2 отрезка $[c, b]$, $V = V_1 \cup V_2$ отрезка $[a, b]$. Имеем равенство
$$\sigma(V) = \sigma(V_1) + \sigma(V_2).$$
Переходя в нем к пределу при $\Delta_V \to 0$, получим равенство (1). Теорема доказана.

По определению, положим,
$$\int_a^a f(x)\,dx = \int_b^b f(x)\,dx = 0.$$
Пусть $f(x)$ интегрируема на $[c, a]$. Тогда при $c < a$, по определению, полагают
$$\int_a^c f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx.$$
В силу этого определения утверждение теоремы можно переформулировать так.

С л е д с т в и е. *Пусть $x_0 < x_1$, $a, b, c \in [x_0, x_1]$ и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда*
$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = 0.$$

Здесь утверждается также, что интегралы на указанных отрезках с концами a, b, c существуют.

Для доказательства ввиду симметричности равенства относительно точек a, b, c достаточно рассмотреть один случай $a < c < b$. Но это точно совпадает с утверждением теоремы.

Глава VIII
ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ИНТЕГРАЛА РИМАНА

Лекция 6

§ 1. ИНТЕГРАЛ РИМАНА КАК ФУНКЦИЯ ОТ ЕГО ВЕРХНЕГО (НИЖНЕГО) ПРЕДЕЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ. ПРОИЗВОДНАЯ ИНТЕГРАЛА

В предыдущей главе доказано, что если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то для любого $x \in [a,b]$ она интегрируема на отрезке $[a,x]$, т.е. существует функция

$$F(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du.$$

Докажем несколько свойств этой функции.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du$ является непрерывной функцией на этом отрезке.*

Доказательство. Из интегрируемости функции $f(x)$ следует, что она ограничена на отрезке $[a,b]$, т.е. найдется постоянная $M > 0$ такая, что для всех $x \in [a,b]$ выполняется неравенство $|f(x)| \le M$. Возьмем любые точки x, $x+\Delta x \in [a,b]$. Имеем

$$|\Delta F(x)| = |F(x+\Delta x) - F(x)| = |\int\limits_x^{x+\Delta x} f(u\,du)| \le \int\limits_x^{x+\Delta x} |f(u)|\,du \le M|\Delta x|.$$

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Тогда для любой величины Δx с условием $|\Delta x| < \frac{\varepsilon}{M}$ имеем $|\Delta F(x)| < \varepsilon$. Следовательно, функция $\Delta F(x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, т.е. функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна во внутренней точке x_0 этого отрезка. Тогда $F(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du$ дифференцируема в точке $x = x_0$ и $F'(x_0) = f(x_0)$.*

Доказательство. В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

такое, что для всех u с условием $|u-x_0|<\delta$ справедливы неравенства $f(x_0)-\varepsilon<f(u)<f(x_0)+\varepsilon$.

Возьмем любое $|\Delta x|<\delta$ так, чтобы отрезок с концами x_0 и $x_0+\Delta x$ содержался бы в отрезке $[a,b]$. Интегрируя неравенства, получим

$$\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(x_0)-\varepsilon)\,du\le\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}\le\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(x_0)+\varepsilon)\,du,$$

т.е. при любом Δx с условием $|\Delta x|<\delta$ выполняются неравенства

$$f(x_0)-\varepsilon\le\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}\le f(x_0)+\varepsilon.$$

Отсюда имеем

$$F'(x_0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}=f(x_0).$$

Теорема 2 доказана.

§ 2. ТЕОРЕМА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА. ФОРМУЛЫ СУММИРОВАНИЯ ЭЙЛЕРА И АБЕЛЯ

Формулу Ньютона – Лейбница называют **основной теоремой** интегрального исчисления, поскольку она связывает понятия определенного и неопределенного интегралов.

Теорема 1 (Формула Ньютона – Лейбница). *Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет не более конечного числа точек разрыва. Тогда функция $F(x)=\int\limits_a^x f(u)\,du$ является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и для любой первообразной $\Phi(x)$ справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(u)\,du=\Phi(b)-\Phi(a).$$

Доказательство. Из теорем 1 и 2 предыдущего параграфа следует, что функция $F(x)=\int\limits_a^x f(u)\,du$ является непрерывной на отрезке $[a,b]$ и во всех точках непрерывности функции $f(x)$ существует производная от $F(x)$ и она равна $f(x)$. Следовательно, функция $F(x)$

является первообразной для функции $f(x)$, кроме того, имеет место формула

$$\int_a^b f(u)\,du = F(b) = F(b) - F(a),\ F(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0.$$

Пусть $\Phi(x)$ — любая другая первообразная функция для $f(x)$. Тогда по свойству первообразной функции существует такое число c, что $\Phi(x) = F(x) + c$. Следовательно, имеет место равенство

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)\,du.$$

Теорема 1 доказана.

В качестве приложения формулы Ньютона – Лейбница выведем формулы суммирования Эйлера и Абеля.

Теорема 2 (Формула суммирования Эйлера). *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$, $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$. Тогда при любом x, принадлежащем отрезку $[a,b]$, справедлива формула*

$$\sum_{a<n\le x} f(n) - \rho(x)f(x) = \int_a^x f(u)\,du - \int_a^x \rho(u)f(u)\,du - \rho(a)f(a).$$

Доказательство. Обозначим левую часть последнего равенства через $G(x)$. Легко видеть, что функция $G(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Действительно, если число x — нецелое, то она будет даже дифференцируема, а если число $x = n$ — целое, то сумма в выражении для $G(x)$ возрастает на величину $f(n)$, а функция $\rho(x)f(x)$ убывает ровно на $f(n)$ при переходе через точку $x = n$, так что скачок суммы гасится скачком функции $\rho(x)f(x)$. Следовательно, можно применить формулу Ньютона – Лейбница.

Но тогда при нецелом x имеем

$$G(x) = G(a) + \int_a^x G'(u)\,du = -\rho(a)f(a) + \int_a^x (-\rho(u)f(u))'\,du =$$

$$= -\rho(a)f(a) + \int_a^x f(u)\,du - \int_a^x \rho(u)f'(u)\,du.$$

Теорема 2 доказана.

Ценность этой формулы состоит в том, что она позволяет приближенно заменить сумму на интеграл. Заметим, что часто удобно в качестве пределов суммирования брать полуцелые числа.

Пример. *(Упрощенная формула Стирлинга .)* При $n \geq 2$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{5} \leq \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \leq 5.$$

Действительно, из формулы суммирования Эйлера получим

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n = \sum_{0,5<m\leq n+0,5} \ln m = \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \ln t\, dt - \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{\rho(t)}{t}\, dt =$$

$$= (n+0,5)\ln(n+0,5) - n - 0,5 - 0,5\ln 0,5 + 0,5 - r(n).$$

Оценим величину $r(n)$. Полагая $\sigma(t) = \int\limits_0^t \rho(u)\, du$, $|\sigma(t)| \leq \frac{1}{8}$, будем иметь

$$r(n) = \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{\rho(t)}{t}\, dt = \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{d\sigma(t)}{t} = \frac{\sigma(t)}{t}\Bigg|_{0,5}^{n+0,5} + \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{\sigma(t)}{t^2}\, dt.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|r(n)| < 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, находим

$$\ln n! = (n+0,5)\ln n - n + (n+0,5)\ln(1+\frac{1}{2n}) + 0,5\ln 2 - r(n),$$

$$|\ln n! - (n+0,5)\ln n + n| \leq (n+0,5)\ln(1+\frac{1}{2n}) + 0,5\ln 2 + |r(n)| <$$

$$< 0,5\ln 2 + \frac{9}{8} < \ln 5.$$

Потенцируя это неравенство, получим сформулированную оценку.

Заметим, что в случае, когда пределы суммирования в теореме 2 — целые числа, то его можно переписать в несколько иной форме.

Т е о р е м а 3. *Пусть a и b — целые числа и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$. Тогда справедлива следующая формула:*

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = f(a) + \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b \{x\} f'(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как a и b — целые числа, то $\rho(a) = \rho(b) = \frac{1}{2}$. Кроме того, имеем

$$\int_a^b \rho(x) f'(x)\,dx = \frac{1}{2}f(b) - \frac{1}{2}f(a) - \int_a^b \{x\} f'(x)\,dx.$$

Подставляя полученные выражения в формулу теоремы 2, приходим к утверждению теоремы 3.

Пример. При целом $N \geq 1$ имеет место соотношение

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2N} + \frac{1}{12N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

В силу теоремы 3 получим

$$s_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = 1 + \int_1^N \frac{dx}{x} - \int_1^N \frac{\{x\}}{x^2}dx =$$

$$= \ln N + \left(1 - \int_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2}dx\right) + \int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^2}dx.$$

Обозначим через γ следующее выражение $\gamma = 1 - \int\limits_1^\infty \frac{\{x\}}{x^2}dx$. Будем иметь

$$s_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2}\int_N^\infty \frac{dx}{x^2} - \int_N^\infty \frac{\rho(x)}{x^2}dx = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \int_N^\infty \frac{d\sigma(x)}{x^2},$$

где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, $\sigma(x) = \int\limits_0^x \rho(t)\,dt$.

Интегрируя последний интеграл по частям, получим

$$s_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \frac{\sigma(N)}{N^2} + 2\int_N^\infty \frac{\sigma(x)}{x^3}dx.$$

И наконец, положим $\sigma_0(x) = \sigma(x) - \frac{1}{12}$, $\sigma_1(x) = \int\limits_0^x \sigma_0(t)\,dt$. Очевидно, имеем $\sigma_1(N) = \int\limits_0^N \sigma_0(t)\,dt = 0$. Интегрируем в последней формуле для s_N интеграл по частям, находим

$$s_N = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} + \frac{1}{6}\int\limits_N^\infty \frac{dx}{x^3} + 2\int\limits_N^\infty \frac{d\sigma_1(t)}{t^3}.$$

Отсюда имеем требуемую формулу для s_N.

Докажем теперь **формулу суммирования Абеля.**

Т е о р е м а 4. *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$ и пусть $A(x) = \sum\limits_{a<m\le x} \alpha_m$. Тогда при любом $x \in [a,b]$ имеем*

$$\sum_{a<n\le x} \alpha_n f(n) - A(x)f(x) = -\int\limits_a^x A(t)f'(t)\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $G(x)$ левую часть последнего равенства. Аналогично доказательству теоремы 2 функция $G(x)$ имеет непрерывную производную в нецелых точках, а при целых значениях она является непрерывной функцией. Заметим также, что при нецелых значениях x имеет место равенство $A'(x) = 0$. Следовательно, продифференцировав $G(x)$ при нецелых x, получим $G'(x) = -A(x)f'(x)$. Но и производная правой части рассматриваемого равенства равна той же функции. Тогда из формулы Ньютона – Лейбница имеем искомое равенство. Теорема 4 доказана.

§ 3. ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Важную роль при вычислении интегралов играют формулы замены переменной и интегрирования по частям. Они являются следствием формулы Ньютона – Лейбница. Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 1 (о замене переменной). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[x_0, x_1]$. Пусть также точки $a, b \in [x_0, x_1]$ $a < b$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ и множество значений функции $\varphi(t)$ при $\alpha \le t \le \beta$ является подмножеством отрезка $[x_0, x_1]$. Пусть, кроме того, производная $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по теореме Ньютона – Лейбница существует ее первообразная $F(x)$ и $F'(x) = f(x)$, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

При всех $t \in [\alpha, \beta]$ по условию теоремы определена функция $G(t) = F(\varphi(t))$, которая на этом отрезке имеет производную, причем

$$G'(t) = F'_t(\varphi(t)) = F'_\varphi(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

А это значит, что функция $G(t)$ является первообразной функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Следовательно, имеет место равенство

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (Формула интегрирования по частям). *Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы гладкие функции $f(x)$ и $g(x)$. Тогда имеем*

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx,$$

где символ $h(x)|_a^b$ означает разность $h(b) - h(a)$.

Доказательство. Пусть $h(x) = f(x)g(x)$. Тогда имеем

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Следовательно,

$$\int_a^b h'(x)\,dx = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

По теореме Ньютона – Лейбница получим

$$\int_a^b h'(x)\,dx = h(b) - h(a) = f(x)g(x)|_a^b.$$

Подставляя последнюю формулу в предыдущую, получим искомую формулу. Теорема 2 доказана.

§ 4. ПЕРВАЯ И ВТОРАЯ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ ИНТЕГРАЛА

Теорема 1 (первая теорема о среднем значениии). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Пусть также на этом отрезке функция $g(x)$ неотрицательна, а для функции $f(x)$ при некоторых вещественных числах m и M имеют место неравенства $m \le f(x) \le M$. Тогда найдется вещественное число μ с условием $m \le \mu \le M$* такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Поскольку справедливы неравенства

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x),$$

интегрируя их, получим

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

Заметим, что $\int\limits_a^b g(x)\,dx \geq 0$, так как $g(x) \geq 0$.

Тогда если $\int\limits_a^b g(x)\,dx = 0$, то из неравенства (1) имеем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 = \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

и число μ можно положить равным m.

Если $\int\limits_a^b g(x)\,dx > 0$, то получим

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int\limits_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Положим отношение интегралов равным μ. Тогда будем иметь

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$. Теорема 1 доказана.

С л е д с т в и е 1. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Пусть также на этом отрезке функция $g(x)$ неположительна, а для функции $f(x)$ при некоторых вещественных m и M имеют место неравенства $m \leq f(x) \leq M$. Тогда найдется вещественное число μ с условием $m \leq \mu \leq M$* такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $g_1(x) = -g(x)$. Тогда функции $f(x)$ и $g_1(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и мы имеем равенство

$$\int\limits_a^b f(x)g_1(x)\,dx = \mu \int\limits_a^b g_1(x)\,dx,$$

где $m \leq \mu \leq M$.

Подставляя в это равенство $g_1(x) = -g(x)$, получим утверждение следствия.

8*

С л е д с т в и е 2. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и функция $g(x)$ интегрируема на этом отрезке, причем для всех точек $x \in [a,b]$ функция $g(x)$ неотрицательна. Тогда существует точка $c \in [a,b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке существует точка c, $a \leq \leq c \leq b$ такая, что $\mu = f(c)$, $m \leq \mu \leq M$. Отсюда в силу теоремы 1 получаем утверждение следствия.

С л е д с т в и е 3. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка c такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Данное утверждение получается из следствия 2 при $g(x) \equiv 1$.

Замечание. Среднее арифметическое значений арифметических функций на отрезке $[a,b]$ стремится к величине

$$\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

поэтому говорят, что интеграл — это среднее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Т е о р е м а 2 (вторая теорема о среднем значениии). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ Пусть, далее, функция $g(x)$ на этом отрезке неотрицательна и не убывает. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка c такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательность разбиений $T_n : a = x_0 < \cdots < x_n = b$ с условием, что диаметр T_n, равный δ_n, стремится к нулю при $n \to \infty$. (Например, всегда можно считать, что разбиение T_h отрезка $[a,b]$ есть разбиение на n равных частей и тогда $\delta_n = 1/n)$. Положим

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx, M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|,$$

$$\omega_k(g) = \sup_{x',x''\in\Delta_k} |g(x') - g(x'')| = g(x_k - 0) - g(x_{k-1} + 0).$$

Имеем

$$\left|\sigma_n - \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (g(x_k) - g(x))f(x)\,dx\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g) \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|\,dx \le M\delta_n \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g) \le M\delta_n g(b).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Поскольку интеграл как функция нижнего предела есть непрерывная функция, функция $F(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$ является непрерывной и достигает своего минимального и максимального значений на отрезке $[a,b]$, соответственно, в точках α и β.

Теперь преобразуем сумму σ_n. Имеем

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \left(\int\limits_{x_{k-1}}^{b} f(x)\,dx - \int\limits_{x_k}^{b} f(x)\,dx \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g(x_k)F(x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)F(x_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_{k+1})F(x_k) - \sum_{k=1}^{n} g(x_k)F(x_k) =$$

$$= g(x_1)F(a) + \sum_{k=1}^{n-1} (g(x_{k+1}) - g(x_k))F(x_k).$$

Так как для любого $x \in [a,b]$ справедливы неравенства

$$F(\alpha) \le F(x) \le F(\beta), \; g(x) \ge 0,$$

и функция $g(x)$ не убывает, то из последнего неравенства для σ_n получим

$$F(\alpha)g(b) \le \sigma_n \le F(\beta)g(b).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, будем иметь

$$F(\alpha)g(b) \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le F(\beta)g(b),$$

т. е.

$$F(\alpha) \le \frac{1}{g(b)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le F(\beta).$$

Поскольку функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, по теореме Коши о промежуточном значении найдется точка $c \in [a,b]$, такая, что

$$F(c) = \frac{1}{g(b)} \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

или

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Пусть, далее, функция $g(x)$ на этом отрезке неотрицательна и не возрастает. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка c такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $x_1 = -x$, $f_1(x_1) = f(-x)$, $g_1(x_1) = g(-x)$. Тогда в силу того что $g(x)$ не возрастает на отрезке $[a,b]$, то функция $g_1(x_1)$ не убывает на отрезке $[-b,-a]$. Поэтому к функциям $f_1(x_1)$ и $g_1(x_1)$ можно применить теорему 2. Отсюда следует, что на отрезке $[-b,-a]$ найдется точка $-c$ такая, что

$$\int_{-b}^{-a} f_1(x_1)g_1(x_1)\,dx_1 = g_1(-a)\int_{-c}^{-a} f_1(x_1)\,dx_1.$$

В интегралах последнего равенства сделаем замену переменной вида $x = -x_1$. Получим

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

Теорема 3 доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ Пусть, далее, функция $g(x)$ монотонна на этом отрезке. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка c такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)\,dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть сначала функция $g(x)$ не убывает на отрезке $[a,b]$. Тогда функция $g_1(x) = g(x) - g(a)$ будет неотрицательной и неубывающей на этом отрезке. Следовательно, по теореме 2 имеем

$$\int\limits_a^b f(x)g_1(x)\,dx = g_1(b)\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Подставляя сюда выражение для $g_1(x)$, получим утверждение следствия.

Пусть теперь функция $g(x)$ не возрастает на отрезке $[a,b]$. Тогда, положим, $g_1(x) = g(x) - g(a)$. Функция $g_1(x)$ — неотрицательная и невозрастающая. Следовательно, к функциям $f(x)$ и $g_1(x)$ применима теорема 3. Отсюда и следует искомая формула. Следствие доказано.

Пример. Пусть $b > a > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{2}{a}.$$

Действительно, функция $\frac{1}{x}$ — положительна и невозрастающая на отрезке $[a,b]$. Тогда по теореме 3 найдется точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| = \left|\frac{1}{a}\int\limits_a^c \sin x\,dx\right| = \frac{|\cos c - \cos a|}{a} \le \frac{2}{a}.$$

Наконец, приведем вариант доказательства второй теоремы о среднем для гладких функций.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и функция $g(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем производная $g'(x)$ на этом отрезке неотрицательна и непрерывна. Тогда на отрезке $[a,b]$ найдется точка c такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx.$$

Тогда функция $F(t)$ как функция верхнего предела является дифференцируемой, поскольку подынтегральная функция $f(x)$ — непрерывна. Следовательно, имеем

$$I = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dF(x).$$

Интеграл I проинтегрируем по частям. Получим

$$I = g(x)F(x)\big|_a^b - \int_a^b F(x)\,dg(x).$$

Но так как $g'(x)$ неотрицательна, $F(x)$ и $g'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то по первой теореме о среднем значении интеграла имеем

$$\int_a^b F(x)g'(x)\,dx = F(c)\int_a^b g'(x)\,dx = F(c)(g(b)-g(a)).$$

Следовательно,

$$I = g(b)F(b) - g(b)F(c) + g(a)F(c) = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$$

Теорема 4 доказана.

Лекция 8

§ 5. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА С ОСТАТОЧНЫМ ЧЛЕНОМ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Равенство, которое доказывается в следующей теореме, называется **формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.**

Теорема. *Пусть $n \geq 0$ — целое число и пусть функция $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю непрерывную производную на отрезке $[a,b]$. Тогда имеет место формула*

$$f(b) = f_n(a,b) + R_n(a,b),$$

где $f_n(a,b)$ — многочлен Тейлора, т.е.

$$f_n(a,b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n,$$

и остаточный член $R_n(a,b)$ имеет вид

$$R_n(a,b) = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,dt.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=0$ должно иметь место равенство

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{0!}\int_a^b f'(t)\,dt = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt.$$

Это есть формула Ньютона – Лейбница. Так что при $n=0$, теорема доказана.

Пусть при $n=k$ утверждение теоремы уже доказано, т.е. справедливо равенство

$$f(b) = f_k(a,b) + R_k(a,b).$$

Докажем его при $n=k+1$. Для этого проинтегрируем $R_k(a,b)$ по частям. Получим

$$R_k(a,b) = \frac{1}{k!}\int f^{(k+1)}(t)(b-t)^k\,dt = -\frac{1}{(k+1)!}\int_a^b f^{(k+1)}(t)\,d(b-t)^{k+1} =$$

$$= -\frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t)(b-t)^{k+1}\Big|_a^b + \frac{1}{(k+1)!}\int\limits_a^b f^{(k+2)}(b-t)^{k+1}\,dt =$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}\cdot(b-a)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\int\limits_a^b f^{(k+2)}(t)(b-t)^{k+1}\,dt.$$

Подставляя это выражение в равенство, справедливое по предположению индукции при $n = k$, будем иметь

$$f(b) = f_{k+1}(a,b) + R_{k+1}(a,b).$$

Теорема доказана.

Замечания. **1.** После замены переменной интегрирования вида $t = a+u(b-a)$ остаточный член в формуле Тейлора можно представить в виде

$$R_n(a,b) = \frac{(b-a)^{n+1}}{n!}\int\limits_0^1 f^{(n+1)}(a+u(b-a))(1-u)^n\,du.$$

2. Если применить к остатку $R_n(a,b)$ теорему о среднем, то можно получить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Шлемильха – Роша, но, правда, при более жестких условиях на функцию $f(x)$. Действительно, при любом $\alpha > 0$ имеем

$$R_n(a,b) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^{n+1-\alpha}(b-t)^{\alpha-1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{n!\alpha} f^{(n+1)}(c)(b-c)^{n+1-\alpha}(b-a)^{\alpha},$$

где c — некоторая точка интервала (a,b).

В качестве примеров получим формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме для некоторых элементарных функций при $a=0$ и $b=x$. В двух первых примерах воспользуемся формулой Тейлора из доказанной выше теоремы, а в остальных ее вывод мы упрощаем за счет применения специальных приемов.

1. *Показательная функция.* Из теоремы следует, что

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

где

$$R_n = R_n(0,x) = \frac{x^{n+1}}{n!}\int\limits_0^1 e^{xu}(1-u)^n\,du.$$

2. *Тригонометрические функции.* Имеем

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_n, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + r_n,$$

где

$$R_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} \cos ux\, du,$$

$$r_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 (1-u)^{2n} \cos ux\, du.$$

3. *Логарифмическая функция.* Пусть $f(x) = \ln(1+x)$. Тогда по формуле суммы геометрической прогрессии получим

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k + \frac{(-x)^n}{1+x}.$$

Интегрируя это равенство пределах от 0 до x, найдем

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + R_n, \quad R_n = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n\,dt}{1+t}.$$

4. *Арктангенс.* Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n-1}(-x^2)^k + \frac{(-x^2)^n}{1+x^2}.$$

Проинтегрируем это равенство в пределах от 0 до x. Получим

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_n, \quad R_n = (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}\,dt}{1+t^2}.$$

Из теоремы о среднем следует, что существует величина $\theta = \theta(x)$ такая, что $0 < \theta < 1$ и

$$R_n = \frac{(-1)^n}{1+\theta x^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Отсюда имеем, что при $|x| \le 1$ предел R_n равен 0 при $n \to \infty$, т.е. при $|x| \le 1$ сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$ и он равен $\operatorname{arctg} x$.

5. *Формула бинома.* Пусть $f(x) = (1+x)^\alpha$. Ранее было доказано (ч. I, лекция 23, пример 5), что многочлен Тейлора $g(x) = g_{n-1}(x)$, $n \geq 2$, этой функции в окрестности точки $x = 0$ имеет вид

$$g(x) = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k,$$

и, более того, ряд Тейлора $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится при $|x| < 1$ и равен $(1+x)^\alpha$. Далее, функция $f(x)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\alpha f(x) - (1+x)f'(x) = 0.$$

Подставляя в это уравнение вместо функции $f(x)$ ее ряд Тейлора и приравнивая к нулю коэффициенты при степенях аргумента x, получим равенства

$$ka_k - (\alpha - k + 1)a_{k-1} = 0, \quad k \geq 1.$$

Отметим, что справедливость их можно проверить непосредственно.

Найдем формулу для выражения $h(x) = \alpha g(x) - (1+x)g'(x)$. Имеем

$$h(x) = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k - (1+x)\sum_{k=1}^{n-1} k a_k x^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha a_k x^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}x^k - \sum_{k=1}^{n-1} k a_k x^k =$$

$$= (\alpha a_0 - a_1) + \sum_{k=1}^{n-2}((\alpha-k)a_k - (k+1)a_{k+1})x^k + (\alpha a_{n-1} - (n-1)a_{n-1})x^{n-1} =$$

$$= (\alpha - n + 1)a_{n-1}x^{n-1} = na_n x^{n-1}.$$

Следовательно, остаточный член $R = R_n(x) = f(x) - g(x)$ формулы Тейлора удовлетворяет уравнению

$$\alpha R - (1+x)R' = na_n x^{n-1},$$

т.е. справедливо равенство

$$\left(\frac{R}{(1+x)^\alpha}\right)' = \frac{na_n x^{n-1}}{(1+x)^{\alpha+1}}.$$

Интегрируя его в пределах от 0 до x, получим

$$R = R_n(x) = na_n(1+x)^\alpha \int\limits_0^x \frac{t^{n-1}dt}{(1+t)^{\alpha+1}}.$$

Таким образом, мы доказали, что имеет место формула

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + r,$$

$$r = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}(1+x)^\alpha x^n \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1}du}{(1+xu)^{\alpha+1}}.$$

6. *Арксинус.* Пусть $f(x) = \arcsin x$. Тогда имеем $f'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$. Отсюда по формуле бинома получим

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+2\right)}{(n-1)!}x^{2n-2} + r,$$

$$r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{(n-1)!}(1-x^2)^{-1/2}x^{2n} \int\limits_0^1 \frac{u^{n-1}du}{(1-x^2u)^{\alpha+1}}.$$

Далее, имеем

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k k!} = (-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$

Следовательно,

$$|r| \le \frac{1}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_0^1 \frac{u^{n-1}du}{\sqrt{1-u}}.$$

Используя формулу понижения, получим

$$\int\limits_0^1 \frac{u^{n-1}du}{\sqrt{1-u}} = 2\int\limits_0^1 (1-t^2)^{n-1}dt = 2\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Отсюда имеем

$$|r| \le \frac{x^{2n}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Теперь проинтегрируем формулу для $f'(x)$. Тогда при некотором $\theta = \theta(x)$, $|\theta| < 1$ получим

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \theta R_n,$$

где

$$R_n = \int_0^x \frac{t^{2n}dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Заметим, что предел последовательности $\{R_n\}$ при $n \to \infty$ равен 0, если $|x| < 1$. Следовательно, при $|x| < 1$ ряд Тейлора

$$x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

сходится к функции $\arcsin x$.

7. *Интегральный синус.* Пусть функция $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$. Тогда из примера 2 имеем

$$f'(x) = \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-2}}{(2k-1)!} + r,$$

где

$$r = r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{2n+1} \cos(ux)\, du.$$

Интегрируя равенство для $f'(x)$ в пределах от 0 до x, получим

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!} + R,$$

где

$$|R| \le \int_0^x |r(t)| dt \le \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)(2n+2)}.$$

Отсюда следует, что для любого $x \in \mathbb{R}$ выражение R стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место разложение в ряд Тейлора

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)(2k-1)!}.$$

§ 6. НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Т е о р е м а 1(неравенство Гельдера). *Пусть* $p, q > 0$, $p + q = 1$ *и пусть* $f(x)$, $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции $|f(x)|^p$, $|g(x)|^q$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ по теореме об интегрируемости сложной функции (теорема §9 гл. VII).

Рассмотрим разбиение $T_n : a = x_0 < \dots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ на n равных частей. Тогда искомое неравенство получается предельным переходом в неравенстве для их интегральных сумм

$$\left|\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\frac{b-a}{n}\right| \le \left(\sum_{k=1}^n |f(x)|^p \frac{b-a}{n}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |g(x)|^q \frac{b-a}{n}\right)^{1/q}$$

или эквивалентном неравенстве

$$\left|\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k)\right| \le \left(\sum_{k=1}^n |f(x)|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |g(x)|^q\right)^{1/q}.$$

Последнее же неравенство есть неравенство Гельдера для сумм (§8 гл. V). Теорема 1 доказана.

При $p = q = 2$ приведенное выше неравенство называется **неравенством Коши – Буняковского.**

Т е о р е м а 2(неравенство Минковского — обобщенное неравенство треугольника). *Пусть* $p \ge 1$, *и пусть* $f(x)$, $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\int\limits_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int\limits_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случай $p = 1$ — очевиден. Возьмем, как и в предыдущей теореме 1, разбиение T_n отрезка $[a, b]$ на n равных частей. Тогда достаточно доказать неравенство для соотвествующих интегральных сумм

$$\left(\sum_{k=1}^n |f(x_k) + g(x_k)|^p \frac{b-a}{n}\right)^{1/p} \le$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x)|^p \frac{b-a}{n}\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |g(x)|^p \frac{b-a}{n}\right)^{1/p}$$

или

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) + g(x_k)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x)|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |g(x)|^p\right)^{1/p}$$

Последнее же неравенство есть неравенство Минковского для сумм (§8 гл. V). Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть функции $f_1(x), \ldots, f_m(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливо неравенство*

$$\sqrt{\left(\int_a^b f_1(x)\,dx\right)^2 + \cdots + \left(\int_a^b f_m(x)\,dx\right)^2} \leq \int_a^b \sqrt{f_1^2(x) + \cdots + f_m^2(x)}\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей и положим $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Для соответствующих интегральных сумм должно иметь место неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_1(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} f_m(x_k)\frac{b-a}{n}\right)^2 \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{f_1^2(x_k) + \cdots + f_k^2(x_k)}\frac{b-a}{n}\right)^2.$$

Действительно, оно выводится из следующей цепочки соотношений

$$\sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} f_s(x_k)\right)^2 = \sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{k_1=1}^{n} f_s(x_{k_1})\right)\left(\sum_{k_2=1}^{n} f_s(x_{k_2})\right) =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\left(\sum_{s=1}^{m} f_s(x_{k_1})f_s(x_{k_2})\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=1}^{n}\sqrt{\sum_{s=1}^{m} f_s^2(x_{k_1})}\sqrt{\sum_{t=1}^{m} f_t^2(x_{k_2})} = \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\sum_{s=1}^{m} f_s^2(x_k)}\right)^2.$$

Заметим, что неравенство в этой цепочке соотношений следует из неравенства Коши. Теорема 3 доказана.

Лекция 9

§ 7. КРИТЕРИЙ ЛЕБЕГА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ

Ранее мы доказали и уже неоднократно использовали критерий интегрируемости функции на отрезке, принадлежащий Риману. Этот критерий имеет вид: ограниченная на отрезке функция интегрируема тогда и только тогда, когда имеет место одно из эквивалентных соотношений:

$$\text{а) } \lim_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0 \quad \text{или} \quad \text{б) } \inf_T \Omega(T) = 0,$$

где понятие омега-суммы определено ранее (лемма 6 §3 главы VII).

Как видим, этот критерий непосредственно ничего не говорит о том, какие именно функции интегрируемы по Риману, а какие — нет. На данный вопрос и отвечает **критерий Лебега.**

Для его формулировки определим понятие множества, имеющего нулевую меру Лебега.

Определение. *Множество A точек на числовой прямой имеет* **лебегову меру нуль,** *если для всякого числа $\epsilon > 0$ существует конечное или счетное покрытие A интервалами с общей длиной, не превосходящей ϵ. Другими словами, для всякого $\epsilon > 0$ найдутся интервалы $I_1, \ldots, I_n, \ldots$ с длинами их соответственно $\delta_1, \ldots, \delta_n, \ldots$ таких, что $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ и для любого натурального n имеет место неравенство $s_n = \delta_1 + \cdots + \delta_n < \epsilon$.*

Это обозначают так: $\mu(A) = 0$.

Утверждение 1. *Любое не более чем счетное множество точек $\{x_n\}$ на числовой прямой имеет лебегову меру нуль.*

Действительно, можно взять интервалы с центрами в этих точках и длинами $\delta_1 = \epsilon/2, \ldots, \delta_n = \epsilon/2^n, \ldots$. Тогда имеем

$$s_n = \frac{\epsilon}{2} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \epsilon.$$

Утверждение 2. *Пусть $B \subset A$ и $\mu(A) = 0$. Тогда и $\mu(B) = 0$.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что всякое покрытие множества A интервалами является и покрытием для множества B.

Теперь сформулируем **критерий Лебега.**

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы множество A — точек разрыва этой функции имело лебегову меру нуль, т.е. $\mu(A)=0$.*

Прежде чем доказывать этот критерий, дадим его применения.

Т е о р е м а 2. *Пусть функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)$, $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} g(x)$, и пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[m,M]$. Тогда функция $f(g(x))$ интегрируема на $[a,b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x_0 — точка непрерывности функции $g(x)$, тогда по теореме о непрерывности сложной функции $h(x)=f(g(x))$ является непрерывной функцией в точке x_0.

Следовательно, точками разрыва функции $h(x)$ могут быть только точки разрыва функции $g(x)$. Пусть A — множество точек разрыва $g(x)$, а B — множество точек разрыва $h(x)$. Тогда имеем $B\subset A$.

Поскольку функция $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, по критерию Лебега получим, что $\mu(A)=0$. Отсюда в силу утверждения 2 имеем $\mu(B)=0$. Таким образом, по тому же критерию Лебега функция $h(x)=f(g(x))$ является интегрируемой на отрезке $[a,b]$. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Пусть функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$. Тогда она интегрируема на отрезке $[a,b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что множество точек разрыва функции $f(x)$ является счетным. В главе IV §3 (теорема 1) доказано, что $f(x)$ имеет разрывы только первого рода. Пусть x_0 — точка разрыва, тогда в этой точке существуют левосторонний и правосторонний пределы: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=l_2$, причем $l_1\neq l_2$. На интервале с концами в точках l_1 и l_2 можно выбрать рациональное число r, и это рациональное число поставим в соответствие данной точке x_0. Множество всех выбранных таким образом рациональных чисел r, как подмножество всех рациональных чисел, является не более чем счетным. По утверждению 1 не более чем счетное множество имеет лебегову меру, равную нулю. Следовательно, согласно критерию Лебега монотонная на отрезке функция будет интегрируемой на этом отрезке. Теорема 3 доказана.

§ 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КРИТЕРИЯ ЛЕБЕГА

Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$. Обозначим через $I=I(\delta,x_0)$ промежуток $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$, если x_0 — внутренняя точка отрезка $[a,b]$, и соответственно, промежуток $[a,a+\delta)$ или $(b-\delta,b]$, если $x_0=a$ или $x_0=b$.

Определение. Колебанием функции $f(x)$ в точке x_0 *назовем величину*

$$\omega(x_0)=\omega_f(x_0)=\inf_{\delta>0}\sup_{x,y\in I(\delta)}(f(x)-f(y)),$$

другими словами, величина $\omega(x_0)$ определяется равенством

$$\omega(x_0)=\inf_{\delta>0}(M_\delta(x_0)-m_\delta(x_0)),$$

где

$$M_\delta(x_0)=\sup_{x\in I(\delta)}f(x),\ m_\delta(x_0)=\inf_{x\in I(\delta)}f(x).$$

Имеет место следующий критерий непрерывности функции в точке.

Лемма 1. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда колебание $\omega_f(x_0)$ функции $f(x)$ в точке x_0 равно* 0.

Доказательство. Необходимость. Предположим противное, т.е., что имеет место равенство $\omega_f(x_0)=\alpha>0$. Рассмотрим последовательность $\delta_n=1/n$, $n=1,2,\dots$. Пусть $I=I(1/n)$. В силу определения инфимума имеем

$$\sup_{x,y\in I}(f(x)-f(y))=M_{1/n}(x_0)-m_{1/n}(x_0)\geq\alpha.$$

Далее, в силу определения супремума получим, что существуют точки x_n, $y_n\in I(1/n)$, такие, что $f(x_n)-f(y_n)>\frac{\alpha}{2}>0$. Но так как длина промежутка $I(1/n)$ стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности, то имеем $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$.

Переходя в последнем неравенстве к пределу, используя непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0, получим $0\geq\frac{\alpha}{2}>0$. Имеет место противоречие.

Следовательно, $\omega_f(x_0)=0$.

Достаточность. Нам дано, что $\omega_f(x_0)=0$. Но тогда для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любых $x,y\in I(\delta)$ имеем $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Положим здесь $y=x_0$. Тогда получим условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0. Лемма доказана полностью.

Доказательство критерия Лебега. *Необходимость.* Нам дано, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Надо доказать, что множество D точек разрыва функции $f(x)$ имеет лебегову меру нуль.

Предположим противное, т.е. что множество D не является множеством нулевой меры. Тогда существует число $\varepsilon_0>0$ такое, что для любого множества интервалов, покрывающих множество D, $D\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}I_n$, найдется натуральное число n_0 с условием $\delta_1+\dots+\delta_{n_0} \geq \varepsilon_0$. Отметим, что число n_0 зависит от последовательности интервалов $\{I_n\}$.

Рассмотрим теперь любое разбиение T отрезка $[a,b]$. Среди отрезков $[x_{k-1},x_k]$ разбиения T выделим те, *внутри* которых содержится хотя бы одна точка множества D. На каждом таком отрезке $[x_{k-1},x_k]$ колебание функции $f(x)$ не меньше, чем α. Сумма длин этих отрезков будет не меньше, чем ε_0, поскольку множество D содержится в них, за исключением, быть может, конечного числа точек, попадающих в точки x_k разбиения T. (Если бы оказалось, что сумма длин указанных отрезков $[x_{k-1},x_k]$ была бы меньше, чем ε_0, то, покрывая точки $x_k \in D$ конечным числом интервалов так, чтобы общая сумма длин всех интервалов, покрывающих D, оказалась меньше, чем ε_0, получим систему интервалов, покрывающих D и имеющих общую длину, меньшую, чем ε_0, что невозможно.)

Таким образом, для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем

$$\Omega(T) \geq \alpha\varepsilon_0.$$

Следовательно, $\inf\limits_T \Omega(T) \geq \alpha\varepsilon_0 > 0$, а это в силу критерия интегрируемости функции по Риману означает, что функция $f(x)$ не является интегрируемой. Противоречие. Необходимость доказана.

Достаточность. Для любого $\epsilon > 0$ построим разбиение T такое, что $\Omega(T) < \epsilon$. Пусть $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Положим $\delta = \frac{\epsilon}{4M}, \alpha = \frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Так как множество D имеет лебегову меру нуль, то его можно покрыть системой интервалов I, имеющих сумму длин меньшую, чем δ. В каждой точке x_0 множества $K = [a,b]\setminus I$ колебание функции $f(x)$ равно 0, поэтому существует интервал, покрывающий эту точку x_0, на котором колебание функции будет меньше, чем α. Итак, получим систему интервалов J, покрывающих множество K. Из системы интервалов $I \cup J$, покрывающих отрезок $[a,b]$, можно выделить конечное покрытие $[a,b]$. В качестве точек x_k разбиения T концы интервалов этого конечного покрытия.

Сумму $\Omega(T)$ представим в виде $\Omega(T) = \Omega_1 + \Omega_2$, где Ω_1 и Ω_2 представляют собой суммы слагаемых вида $\omega_k \Delta x_k$, причем в первой сумме Ω_1 переменная суммирования k пробегает значения, удовлетворяющие условию $(x_{k-1},x_k) \subset I$, а все оставшиеся значения k входят во вторую сумму Ω_2.

Тогда для $\Omega(T)$ получим оценку вида

$$\Omega(T) = \Omega_1 + \Omega_2 < 2M\delta + \alpha(b-a) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Отсюда в силу того, что $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$, следует интегрируемость функции $f(x)$. Теорема доказана полностью.

При использовании критерия Лебега (в частности, для доказательства неинтегрируемости функции по Риману) иногда бывает полезна другая его формулировка в виде приведенной ниже теоремы. Докажем сначала одно вспомогательное утверждение — лемму 2.

Пусть $D(\alpha)$ обозначает множество точек отрезка $[a, b]$, для которых выполнено неравенство $\omega(x) \geq \alpha$.

Лемма 2. *Множество точек $D(\alpha)$ является замкнутым.*

Доказательство. Пусть x_0 является предельной точкой множества $D(\alpha)$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к x_0 при $n \to \infty$, причем колебание функции $f(x)$ в точках x_n не меньше, чем α, т.е. $\omega_f(x_n) \geq \alpha$. Заметим, что каково ни было число $\delta > 0$, найдется член последовательности $x_n \in I_\delta(x_0)$. Положим

$$\delta_1 = \min(x_n - x_0 + \delta, x_0 + \delta - x_n),$$

т.е. величина δ_1 равна расстоянию от точки x_n до границ интервала $I_\delta(x_0)$. Тогда получим, что $I_{\delta_1}(x_n) \subset I_\delta(x_0)$. Отсюда имеем

$$M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0) \geq M_{\delta_1}(x_n) - m_{\delta_1}(x_n) \geq \omega_f(x_n) \geq \alpha.$$

Так как при произвольном числе $\delta > 0$ имеем неравенство $M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0) \geq \alpha$, то

$$\inf_{\delta>0}(M_\delta(x_0) - m_\delta(x_0)) = \omega_f(x_0) \geq \alpha.$$

Следовательно, всякая предельная точка множества $D(\alpha)$ принадлежит ему самому, т.е. $D(\alpha)$ — замкнуто. Лемма доказана.

Теорема. *Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция была интегрируема по Риману, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha > 0$ множество $D(\alpha)$ имело лебегову меру нуль.*

Доказательство. Необходимость. Поскольку функция $f(x)$ интегрируема по Риману, по доказанному выше критерию Лебега мера множества точек разрыва ее равна нулю, $\mu(D) = 0$. Но для любого $\alpha > 0$ имеет место следующее включение $D(\alpha) \subset D$. Следовательно, $\mu(D(\alpha)) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Очевидно, $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(1/n)$. По условию теоремы для любого натурального числа n имеем $\mu(D(1/n)) = 0$. Следовательно, $\mu(D) = 0$, и по критерию Лебега функция $f(x)$ интегрируема. Теорема доказана.

Глава IX
НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 10

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Наша дальнейшая цель состоит в распространении понятия интегрируемости функции по Риману на новые классы функций, а именно:

1) на функции, заданные на бесконечном промежутке;

2) на неограниченные функции.

Понятие предела, которым мы владеем, позволяет достичь этой цели без особого труда, а обобщение понятия интеграла Римана при этом называется **несобственным интегралом.**

Для первого случая интегралы типа

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

называются **несобственными интегралами первого рода**, во втором случае, когда функция $f(x)$ является неограниченной на конечном отрезке $[a,b]$, интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется **несобственным интегралом второго рода.**

Случай, когда и промежуток интегрирования, и сама функция не ограничены, не вносит ничего нового в эту проблематику, так как его можно свести к случаю несобственных интегралов первого и второго родов простым разбиением промежутка интегрирования на части, и потому отдельно мы его рассматривать не будем. Разберем более подробно понятие несобственного интеграла первого рода, при этом остановимся только на случае интегралов вида $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$.

Определение. *Пусть a — вещественное число и пусть для любого $A > a$ функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,A]$ и*

$$F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx.$$

Если при $A \to +\infty$ существует предел

$$I = \lim_{A \to +\infty} F(A),$$

то этот предел I называется **несобственным интегралом первого рода** *от функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty)$.*

Для интеграла I используется обозначение:

$$I = \int_a^{\infty} f(x)\, dx \left(= \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)\, dx \right).$$

Если предел I существует, то говорят, что **несобственный интеграл сходится.** Если же этот предел не существует, то выражение $\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx$ понимают как некий символ, который тоже называют **несобственным интегралом,** но говорят про него, что он расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл вида

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \lim_{A \to -\infty} \int_A^a f(x)\, dx,$$

а несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ понимают как сумму двух несобственных интегралов

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_0^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Замечания. **1.** В отличие от несобственных интегралов обычный интеграл Римана по конечному промежутку называется **собственным.**

2. Из свойств собственного интеграла и определения несобственного интеграла для любых вещественных a и b тривиально имеем

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Примеры. 1. При $a > 0$ справедливо равенство

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \lim\limits_{A \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}), & \text{если} \quad \alpha \neq 1, \\ \lim\limits_{A \to +\infty} (\ln A - \ln a), & \text{если} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что этот интеграл сходится при $\alpha > 1$ и равен $\frac{1}{\alpha-1}a^{1-\alpha}$, и расходится при $\alpha \leq 1$.

2. При натуральном числе n интегрированием по частям получим

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = n!.$$

§ 2. КРИТЕРИЙ КОШИ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Из критерия Коши существования предела функции при $A \to \infty$ непосредственно получается следующая теорема.

Теорема 1 (Критерий сходимости несобственного интеграла первого рода). *Для сходимости интеграла* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие Коши, т.е. чтобы для всякого* $\varepsilon > 0$ *существовало число* $B = B(\varepsilon) > 0$ *такое, что для всех чисел* A_1, A_2, *больших* B, *выполнялось неравенство*

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

Символически это условие Коши можно записать так:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists B = B(\varepsilon) > 0 :\ \forall A_1, A_2 > B \Longrightarrow \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\, dx\right| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (общий признак сравнения). *Пусть для всех* $x \in [a, +\infty)$ *справедливо неравенство* $|f(x)| \leq g(x)$ *и пусть интеграл* $\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ *сходится. Тогда будет сходиться интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Доказательство. Докажем, что выполнено условие Коши для сходимости несобственного интеграла от функции $f(x)$. В силу сходимости интеграла от функции $g(x)$ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $B = B(\varepsilon) > 0$ такое, что при любых A_1, A_2, $A_1 > A_2 > B$ справедливо неравенство $\int_{A_1}^{A_2} g(x)\, dx < \varepsilon$. Но поскольку

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\, dx\right| \leq \int_{A_1}^{A_2} |f(x)|\, dx \leq \int_{A_1}^{A_2} g(x)\, dx < \varepsilon,$$

условие Коши выполняется и для интеграла от функции $f(x)$ с тем же самым $B = B(\varepsilon)$. Теорема 2 доказана.

Пример. Пусть при некотором $\alpha > 1$ и при $x \to \infty$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \ll \frac{1}{x^\alpha},$$

т.е. пусть существуют $c > 0$ и $x_0 = x_0(c) > 0$ такие, что $|f(x)| \leq cx^{-\alpha}$ при $x > x_0$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Действительно, имеем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{x_0} f(x)\,dx + \int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Первый из интегралов суммы является собственным, а второй интеграл $\int\limits_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится по признаку сравнения, поскольку $\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$.

§ 3. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ. ПРИЗНАКИ АБЕЛЯ И ДИРИХЛЕ

Сначала дадим определения понятий абсолютной и условной сходимости несобственных интегралов.

Определение 1. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется* **абсолютно сходящимся**, *если сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$.

Определение 2. *Несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется* **условно сходящимся**, *если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится, а интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *расходится.*

Из общего признака сравнения непосредственно следует, что абсолютная сходимость интеграла влечет за собой его условную сходимость. Обратное неверно.

Как и ранее, будем считать, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, A]$ при любом $A > a$.

Теорема 1 (признак Дирихле). *Пусть при любом числе* $x \in [a, +\infty)$ *функция* $F(x) = \int\limits_a^x f(u)\,du$ *ограничена и пусть функция* $g(x)$ *неотрицательна и, не возрастая, стремится к нулю при* $x \to +\infty$. *Тогда интеграл*

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

сходится.

Доказательство. Поскольку функция $g(x)$ на плюс бесконечности не возрастает и стремится к нулю, для всякого $\varepsilon_1 > 0$ существует $B = B(\varepsilon_1) > a$ такое, что для всех $x > B$ имеем неравенство $0 \le g(x) < \varepsilon_1$. Пусть, далее, $M = \sup\limits_{x \ge a} |F(x)|$. Тогда по второй теореме о среднем для любых A_1, A_2, $A_2 > A_1 > B$ найдется такое число A_3, $A_1 < A_3 < A_2$, что

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| = \left|g(A_1)\int\limits_{A_1}^{A_3} f(x)\,dx\right| < \varepsilon_1 \left|\int\limits_{A_1}^{A_3} f(x)\,dx\right| =$$

$$= \varepsilon_1 \left|\int\limits_a^{A_3} f(x)\,dx - \int\limits_a^{A_1} f(x)\,dx\right| \le 2\varepsilon_1 M.$$

Если теперь мы зададимся произвольным $\varepsilon > 0$, то, взяв $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}$, получим, что для любых A_1, A_2, $A_2 > A_1 > B\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)$ выполнено неравенство

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

т.е. выполняется условие Коши, поэтому интеграл I сходится. Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (признак Абеля). *Пусть интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится и пусть функция* $g(x)$ *неотрицательна, монотонна и ограничена сверху на промежутке* $[a, +\infty)$. *Тогда интеграл*

$$I = \int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$$

сходится.

Доказательство. Поскольку $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, в силу критерия Коши имеем: для всякого $\varepsilon_1 > 0$ существует $B = B(\varepsilon_1)$, такое, что для всех A_1, A_2, $A_2 > A_1 > B$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon_1.$$

Далее, по второй теореме о среднем существует число A_3, $A_1 < A_3 < A_2$ такое, что

$$\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx = g(A_1)\int\limits_{A_1}^{A_3} f(x)\,dx + g(A_2)\int\limits_{A_3}^{A_2} f(x)\,dx.$$

Положим $M = \sup\limits_{x>a} g(x)$. Но так как

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_3} f(x)\,dx\right| < \varepsilon_1, \quad \left|\int\limits_{A_3}^{A_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon_1,$$

то получим

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| \le 2M\varepsilon_1.$$

Поэтому, взяв $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M}$, будем иметь, что для любых чисел A_1, A_2, $A_2 > A_1 > B\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right)$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, по критерию Коши интеграл I сходится. Теорема 2 доказана.

Примеры. 1. По признаку Дирихле при $\alpha > 0$ сходится интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, так как для любого $A > 1$ функция $F(x) = \int\limits_1^A \sin x\,dx$ ограничена, а при $\alpha > 0$ и при $x \to +\infty$ функция $x^{-\alpha}$, монотонно убывая, стремится к нулю.

2. Пусть $f(x)$ — многочлен степени большей, чем 1. Тогда сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \sin f(x)\, dx$.

Без ограничения общности можно считать, что старший коэффициент многочлена $f(x)$ положителен. Тогда, начиная с некоторого $A > 0$, производная его $f'(x)$ будет положительна и монотонно возрастать к плюс бесконечности. Достаточно доказать, что сходится интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \sin f(x)\, dx$. Для любого $B > A$ в интеграле $\int\limits_A^{B} \sin f(x)\, dx$ сделаем замену переменной интегрирования $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$. Получим интеграл

$$\int\limits_{f^{-1}(A)}^{f^{-1}(B)} \frac{\sin y}{f'(f^{-1}(y))}\, dy.$$

По второй теореме о среднем он ограничен величиной $\frac{2}{f'(f^{-1}(A))}$ и при $A \to +\infty$ будет стремиться к нулю. А это и доказывает сходимость исходного интеграла.

Лекция 11

§ 4. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Определение 1. *Пусть 1) функция $f(x)$ задана на промежутке $[a,b)$ и не ограничена на нем;*

2) для любого $\alpha, a \le \alpha < b$, функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на отрезке $[a,\alpha]$;

3) существует предел $I = \lim\limits_{\alpha\to b-} \int\limits_a^\alpha f(x)\,dx$.

Тогда этот предел I называется **несобственным интегралом второго рода** *от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. При этом для предела I используется обозначение*

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Замечания. **1.** Точка b называется *особой точкой* интеграла I.

2. Если предел $I \in \mathbb{R}$ существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ сходится, а если — нет, то говорят, что этот интеграл расходится.

3. Если особой точкой интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ является нижний предел интегрирования, то несобственный интеграл второго рода определяется аналогично.

4. Если особая точка c лежит внутри отрезка $[a,b]$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определяется как сумма двух несобственных интегралов:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Пример. Справедливы равенства:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to 0+} \int\limits_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{a\to 0+} \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - a^{1-\alpha}\right), & \text{если} \quad \alpha \ne 1, \\ \lim\limits_{a\to 0+} (-\ln a), & \text{если} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha < 1$ и равен $\frac{1}{1-\alpha}$, и расходится при $\alpha \ge 1$.

Перейдем теперь к рассмотрению основных свойств несобственного интеграла второго рода на примере интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с единственной особой точкой b. Эти свойства аналогичны свойствам несобственных интегралов первого рода.

1. *Критерий Коши сходимости несобственного интеграла второго рода.* Для сходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы имело место условие Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ нашлось число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любых α_1, α_2 с условиями $\alpha_1, \alpha_2 \in (b-\delta, b)$, $\alpha_1 < \alpha_2$, выполнялось неравенство

$$\left|\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)\,dx\right| < \epsilon.$$

2. *Общий признак сравнения.* Пусть для всех $x \in [a, b)$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq g(x)$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ сходится. Тогда сходится интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

3. *Несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется* **абсолютно сходящимся,** *если сходится интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, и* **условно сходящимся**, *если он сходится, но не абсолютно, т.е. интеграл $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ расходится.*

Можно сформулировать признаки, аналогичные признакам Абеля и Дирихле для интегралов первого рода.

И наконец, любой интеграл с бесконечными пределами интегрирования (или одним бесконечным пределом интегрирования) и конечным числом особых точек можно рассматривать как сумму несобственных интегралов, каждый из которых имеет одну особую точку, являющуюся границей отрезка интегрирования (точки $+\infty$ и $-\infty$ также можно считать особыми), т.е. исследование любого несобственного интеграла сводится к несобственным интегралам первого и второго рода.

§ 5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В НЕСОБСТВЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

Теорема 1. *Пусть производная $\varphi'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha,\beta]$ и отлична от нуля на интервале (α,β), и пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(\varphi(\alpha),\varphi(\beta))$. Тогда имеет место формула*

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

как для собственных, так и для несобственных интегралов.

Доказательство. Пусть сначала точки α и β являются конечными. Тогда особыми точками функций $f(x)$ и $f(\varphi(t))$ могут быть концы соответствующих отрезков. Ввиду монотонности функции $x=\varphi(t)$ каждое значение x принимается лишь один раз, когда переменная t изменяется на интервале (α,β). Тогда для любых $\epsilon_1>0$ и $\epsilon_2>0$ по теореме о замене переменной для собственного интеграла имеем

$$\int\limits_{\varphi(\alpha+\epsilon_1)}^{\varphi(\beta-\epsilon_2)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha+\epsilon_1}^{\beta-\epsilon_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\epsilon_1\to 0$ и $\epsilon_2\to 0$, получим искомую формулу.

Если же α и β — бесконечны, то, взяв $\alpha_1,\beta_1\in\mathbb{R}$ и используя вновь теорему о замене переменной для собственного интеграла, получим

$$\int\limits_{\varphi(\alpha_1)}^{\varphi(\beta_1)} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\alpha_1\to-\infty$ и $\beta_1\to+\infty$, получим искомое равенство. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть:*

1) функции $f'(x)$ и $g'(x)$ — непрерывны на промежутке $(a,+\infty)$;

2) сходится хотя бы один из несобственных интегралов

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{a}^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx;$$

3) существует предел $l_1=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)$, а в случае если a — особая точка, то существует предел $l_2=\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$.

Тогда существуют оба интеграла и имеет место равенство

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^{+\infty} - \int\limits_a^{+\infty} f'(x)g(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим собственные интегралы на отрезке $[a+\epsilon, b]$. По теореме об интегрировании по частям в собственном интеграле будем иметь

$$\int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_{a+\epsilon}^{b} - \int\limits_{a+\epsilon}^{b} f'(x)g(x)\,dx.$$

Устремив в этом равенстве ϵ к нулю, а b к плюс бесконечности, получим искомую формулу. Теорема 2 доказана.

Иногда полезными оказываются следующие специальные определения несобственного интеграла.

Определение 1. *Вещественное число* $l = \lim\limits_{A\to+\infty} \int\limits_{-A}^{+A} f(x)\,dx$ *называется* **главным значением** *(по Коши) интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *и обозначается так:*

$$l = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Определение 2. *Если c — особая точка несобственного интеграла второго рода от функции $f(x)$ и $c \in (a,b)$, то* **главное значение интеграла** *определяется так:*

$$l_1 = \lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx\right).$$

Глава X
ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

Лекция 12

§ 1. КРИВЫЕ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 1. Кривой L *в пространстве* $\mathbb{R}^m$ (**пространственной кривой** *в* m*-мерном пространстве) называется множество точек* $M \subset \mathbb{R}^m$, *состоящее из всех значений* $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t))$ *некоторой вектор-функции* $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t)$, *причем функции* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ *заданы на некотором промежутке* $I \subset \mathbb{R}$ *и непрерывны* в каждой точке его.

Под промежутком мы понимаем либо конечные отрезки, интервалы и полуинтервалы, либо бесконечные интервалы и полуинтервалы.

Для простоты в дальнейшем будем рассматривать случай $I = [a, b]$. Напомним, что в концах отрезка непрерывность понимается как односторонняя непрерывность.

Определение 2. *Точка* $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_m) \in L$ *называется* **кратной точкой кривой** L, *если имеются по крайней мере две различные точки* $t_1 \neq t_2$ *промежутка* I *такие, что* $\varphi_1(t_1) = \varphi_1(t_2) = c_1, \ldots, \varphi_m(t_1) = \varphi_m(t_2) = c_m$.

Точки кривой, не являющиеся кратными, называются **простыми точками кривой.**

Кривая L, *имеющая только конечное число кратных точек, называется* **параметризуемой кривой.**

Кривая L, *не имеющая кратных точек, за исключением, быть может, концевых точек промежутка* I, *называется* **простой кривой.**

Если только в концевых точках t_1 *и* t_2 *отрезка* I *значения функций* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ *совпадают, то простая кривая называется* **простой замкнутой кривой.**

Л е м м а. *Всякую параметризуемую кривую можно представить в виде объединения конечного числа простых кривых.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно отрезок I разбить на конечное число отрезков с концами в кратных точках исходной кривой.

Определение 3. *Функция* $f(t)$, *непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *называется* **кусочно-линейной** $[a, b]$, *если для любого значения* $t \in [a, b]$, *за исключением конечного их числа:* $t_1, \ldots, t_{n-1}$, *имеем:* $f'(t)$ *равна постоянному значению на каждом отрезке* $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, n$. *Это* *означает также, что на любом отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ имеет вид $f(t) = a_k t + b_k$ (здесь $t_0 = a, t_n = b$).*

Определение 4. *Простая кривая L называется* **ломаной линией,** *если $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$ являются кусочно-линейными функциями.*

Очевидно, что каждая ломаная состоит из отдельных отрезков, которые называются ее **звеньями,** а концы этих отрезков — точки $A_1, \ldots, A_n$, называются ее **узлами.** Точки $t_0, \ldots, t_n$, которым соответствуют эти узлы, образуют разбиение отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим одно звено ломаной с начальной точкой $A_1(x_1, \ldots, x_m)$ и конечной точкой $A_2(y_1, \ldots, y_m)$. По теореме Пифагора его длина $|l|$ равна величине

$$|l| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_m - x_m)^2}.$$

Если же точки $A_0(x_{1,0}, \ldots, x_{m,0}), \ldots, A_n(x_{1,n}, \ldots, x_{m,n})$ являются последовательными узлами ломаной l, то длина этой ломаной обозначается символом $|l|$ и, очевидно, она равна

$$|l| = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_{1,k} - x_{1,k-1})^2 + \cdots + (x_{m,k} - x_{m,k-1})^2}.$$

Определение 5. *Ломаная l, соответствующая разбиению T отрезка $[a, b]$, называется* **вписанной** *в кривую L, задаваемую уравнениями $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_m = \varphi_m(t)$, $t \in [a, b]$, если начальная точка звена совпадает с концом предыдущего и узлы ломаной l лежат на кривой L.*

Определение 6. *Простая кривая L называется* **спрямляемой,** *если длины $|l|$ всех ломаных l, вписанных в кривую L, образуют ограниченное сверху множество.*

Определение 7. Длиной $|L|$ спрямляемой кривой *L называется число, равное точной верхней грани длин всех ломаных, вписанных в данную кривую.*

Замечания. **1.** Очевидно, что если мы хотим правильно определить понятие длины кривой, то мы должны требовать, чтобы вписанная ломаная была короче самой кривой. В данном случае это так, поскольку кратчайшее расстояние между двумя точками, как известно, достигается на отрезке прямой, проходящей через эти точки.

2. Бывают *неспрямляемые* кривые, но они задаются очень сложно, и поэтому примеров их мы приводить не будем.

§ 2. ТЕОРЕМА О ДЛИНЕ ДУГИ КРИВОЙ

Т е о р е м а. *Пусть функции $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_m(t)$, задающие простую кривую L, имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$. Тогда кривая L — спрямляема и ее длина $|L|$ выражается формулой*

$$|L| = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}\, dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что длина любой ломаной не превосходит величины

$$A = \int_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}\, dt.$$

Пусть узлы ломаной l соответствуют точкам $t_0, t_1, \ldots, t_n$ разбиения T отрезка $[a,b]: \ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Тогда имеем

$$|l| = \sum_{s=1}^{n} \sqrt{(\varphi_1(t_s) - \varphi_1(t_{s-1}))^2 + \cdots + (\varphi_m(t_s) - \varphi_m(t_{s-1}))^2} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \sqrt{\left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} \varphi_1'(t)\, dt\right)^2 + \cdots + \left(\int_{t_{s-1}}^{t_s} \varphi_m'(t)\, dt\right)^2}.$$

Далее, в силу неравенства (см. гл. VIII, §6, теорема 3)

$$\sqrt{\left(\int_a^b f_1(t)\, dt\right)^2 + \cdots + \left(\int_a^b f_m(t)\, dt\right)^2} \le \int_a^b \sqrt{f_1^2(t) + \cdots + f_m^2(t)}\, dt$$

получим

$$|l| \le \sum_{s=1}^{n} \int_{t_{s-1}}^{t_s} \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}\, dt = A.$$

Таким образом мы доказали, что A — верхняя грань длин всех ломаных l, вписанных в кривую L, т.е. кривая L является спрямляемой.

Покажем, что A есть *точная* верхняя грань длин таких ломаных, т.е. длина кривой L равна A.

Поскольку функции $\varphi_k'(t)$, $k = 1, \ldots, m$, непрерывны на отрезке $[a, b]$, по теореме Гейне – Кантора они являются равномерно непрерывными на этом отрезке. Следовательно, при всех $k = 1, \ldots, m$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t', t'' \in [a, b]$: $|t' - t''| < \delta$ выполняется неравенство

$$|\varphi_k'(t') - \varphi_k'(t'')| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}(b-a)} = \varepsilon_1.$$

Возьмем любое разбиение T отрезка $[a, b]$ с диаметром $\Delta_T < \delta$, T : $a = t_0 < t_1 \cdots < t_n = b$, и пусть ломаная l соответствует этому разбиению T.

Оценим теперь сверху разность $A - |l| \geq 0$. Имеем

$$A - |l| = \int\limits_a^b \sqrt{(\varphi_1'(t))^2 + \cdots + (\varphi_m'(t))^2}\, dt - \sum_{s=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^m (\varphi_k(t_s) - \varphi_k(t_{s-1}))^2} =$$

$$= \sum_{s=1}^n \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} \left(\sqrt{\sum_{k=1}^m (\varphi_k'(t))^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\frac{\Delta\varphi_k(t_{s-1})}{\Delta t_{s-1}} \right)^2} \right) dt,$$

где $\Delta\varphi_k(t_{s-1}) = \varphi_k(t_s) - \varphi_k(t_{s-1})$, $\Delta t_{s-1} = t_s - t_{s-1}$.

Далее применим неравенство треугольника в следующем виде. Пусть заданы вершины $O(0, \ldots, 0)$, $A(a_1, \ldots, a_m)$, $B(b_1, \ldots, b_m)$ треугольника OAB. Тогда имеет место неравенство треугольника (неравенство Минковского при $p = 2$):

$$\left| \sqrt{\sum_{k=1}^m a_k^2} - \sqrt{\sum_{k=1}^m b_k^2} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^m (a_k - b_k)^2}.$$

Следовательно, получим

$$A - |l| \leq \sum_{s=1}^n \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\varphi_k'(t) - \frac{\Delta\varphi_k(t_{s-1})}{\Delta t_{s-1}} \right)^2}\, dt =$$

$$= \sum_{s=1}^n \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} \sqrt{\sum_{k=1}^m \left(\varphi_k'(t) - \varphi_k'(\eta_{k,s}) \right)^2}\, dt <$$

$$< \sum_{s=1}^n \int\limits_{t_{s-1}}^{t_s} \varepsilon_1 \sqrt{m}\, dt = \varepsilon_1 \sqrt{m}(b-a) = \varepsilon,$$

где $\eta_{k,s}$ — некоторая точка отрезка $[t_{s-1}, t_s]$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $s = s(u)$ — длина дуги кривой L, задаваемой уравнениями $x_1 = x_1(t), \ldots, x_m = x_m(t)$, $a \le t \le u$. Тогда для дифференциала длины дуги кривой ds справедлива формула*

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_m)^2.$$

Доказательство. Из теоремы имеем

$$s(u) = \int\limits_a^u \sqrt{(x_1'(t))^2 + \cdots + (x_m'(t))^2}\, dt.$$

Дифференцируя это выражение, найдем

$$ds(u) = \sqrt{(x_1'(u))^2 + \cdots + (x_m'(u))^2}du, \text{ или } ds = \sqrt{(dx_1)^2 + \cdots + (dx_m)^2}.$$

Следствие доказано.

Отсюда имеем, что квадрат дифференциала длины дуги плоской кривой $(m = 2)$ в полярных координатах (r, φ) равен

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2,$$

где координаты r и φ определяются по формулам:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r \ge 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi.$$

Действительно,

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi,\ dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi d\varphi.$$

Следовательно, получим

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

В частности, если уравнение эллипса задано в параметрической форме

$$\bar{r} = \bar{r}(\varphi) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi),\ a \ge b > 0,$$

и угол φ между осью Ox и радиус -вектором $\bar{r}$ изменяется от нуля до 2π, то для дифференциала длины дуги эллипса имеем

$$ds = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Пример. Найти длину дуги кривой (циклоиды)

$$\begin{cases} x = & R(t - \sin t), \\ y = & R(1 - \cos t), \end{cases}$$

где $0 \le t \le \theta \le 2\pi$. Имеем: $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $ds^2 = 4R^2\sin^2\frac{t}{2}(dt)^2$, $ds = 2R\sin\frac{t}{2}dt$. Следовательно,

$$s = s(\theta) = 4R(1 - cos\frac{\theta}{2}).$$

Заметим, что эта кривая задает траекторию движения точки на ободе катящегося колеса радиуса R.

Глава XI
МЕРА ЖОРДАНА

Лекция 13

§ 1. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ И ОБЪЕМ ТЕЛА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРЫ ЖОРДАНА

О площади плоской фигуры мы уже говорили, когда вводили понятие определенного интеграла как площади криволинейной трапеции. Причем, давая точное определение этого понятия, мы исходили из основных свойств площади фигуры, справедливых для площадей простейших фигур, например, таких, которые являются объединением конечного числа прямоугольников и треугольников.

Сформулируем эти свойства. Обозначим через $\mu(P)$ площадь фигуры P.

1^0. *Для каждой фигуры P, имеющей площадь, функция $\mu(P)$ неотрицательна и однозначно определена.*

2^0. Площадь квадрата со стороной, равной единице, также равна единице.

3^0. Функция $\mu(P)$ является *аддитивной*, т.е., если фигура P разбита на две непересекающиеся фигуры P_1 и P_2, $P = P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, то

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

4^0. Функция $\mu(P)$ является *инвариантной* относительно всех движений плоскости. Другими словами, если фигуры P_1 и P_2 можно наложить одну на другую так, чтобы все их точки совпали, т.е. P_1 и P_2 можно совместить при помощи поворота плоскости вокруг некоторой неподвижной точки или параллельного переноса плоскости, то $\mu(P_1) = \mu(P_2)$.

5^0. Функция $\mu(P)$ является *монотонной*, т.е., если $P_1 \subset P_2$, то $\mu(P_1) \leq \mu(P_2)$.

Заметим, что эти свойства имеют место не только для площадей простых фигур, но и для объемов простых тел, а также для суммарных длин простейших множеств на прямой, т.е. множеств, составленных из конечного числа промежутков и отдельных точек.

В дальнейшем **простейшей** будем называть фигуру, являющуюся объединением конечного числа прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат. Такие прямоугольники мы будем называть **стандартными прямоугольниками.**

Заметим, что стандартный прямоугольник может включать в себя любое подмножество точек, лежащих на его сторонах. Как известно, каждый стандартный прямоугольник имеет площадь, равную произведению длин его смежных сторон.

При определении площади фигуры в общем случае, как и в случае криволинейной трапеции, мы можем действовать по аналогии с **критерием Римана** существования определенного интеграла.

Для этого естественно для плоской ограниченной фигуры P ввести понятие **верхней площади фигуры** (по аналогии с верхней суммой Дарбу) как точную нижнюю грань площадей $\mu(P_1)$ всех открытых простейших плоских фигур P_1, описанных вокруг P, т.е. $P \subset P_1$; а также **нижнюю площадь** этой фигуры как верхнюю грань площадей $\mu(\bar{P}_2)$ всех замкнутых простейших фигур $\bar{P}_2$, вписанных в P, т.е. $\bar{P}_2 \subset P$.

Введенная таким образом верхняя площадь обозначается через $\mu^*(P)$, а нижняя — через $\mu_*(P)$.

Заметим, что для простейшей фигуры P имеем

$$\mu_*(P) = \mu(P) = \mu^*(P).$$

Если для фигуры P справедливо равенство $\mu^*(P) = \mu_*(P)$, то эта величина называется **площадью фигуры** P и обозначается через $\mu(P)$. Точно так же обстоит дело и с объемом трехмерных фигур, т.е. аналогично определяются верхний и нижний объемы трехмерной фигуры. Для них используются те же самые обозначения: $\mu_*(P), \mu^*(P), \mu(P)$, где, по определению, для измеримой фигуры P полагают $\mu(P) = \mu_*(P) = \mu^*(P)$.

Введенное понятие площади фигуры называется **мерой Жордана**, а сами фигуры, которым с помощью этого определения приписывается значение площади (или объема в трехмерном пространстве) — **квадрируемыми** (или **кубируемыми** в случае объема) или **измеримыми по Жордану.** Для таких фигур вычисление площади (или объема) сводится к вычислению **определенного интеграла Римана.**

Примеры. 1. Плоская мера Жордана отрезка l, параллельного одной из осей координат, равна нулю. Этот отрезок содержится внутри прямоугольника, одна из сторон которого имеет длину, равную нулю.

2. Любой отрезок l имеет нулевую меру Жордана, так как этот отрезок можно поместить в простейшую фигуру сколь угодно малой площади.

3. Пусть P — простейшая фигура. Тогда мера Жордана ее границы ∂P равна нулю. Границей P служат стороны прямоугольников, составляющих фигуру P. Их конечное число, и каждый из них можно поместить в прямоугольник с одной стороной, имеющей длину, равную нулю.

4. Объединение, пересечение и разность простейших фигур является простейшей фигурой.

Действительно, пересечение двух стандартных прямоугольников будет стандартным прямоугольником. Поэтому для фигур $A = \bigcup\limits_k P_k$ и $B = \bigcup\limits_l Q_l$, состоящих из стандартных прямоугольников P_k, Q_l, их пересечение $A \cap B = A = \bigcup\limits_{k,l} (P_k \cap Q_l)$ является простейшей фигурой. Разность двух стандартных прямоугольников является простейшей фигурой. Покажем, что разность $A \setminus B$ двух простейших множеств A и B является простейшим множеством. Пусть P — прямоугольник, содержащий $A \cup B$, тогда $A \setminus B = A \cap (P \setminus B)$.

§ 2. КРИТЕРИЙ ИЗМЕРИМОСТИ МНОЖЕСТВА ПО ЖОРДАНУ

Как и в случае интеграла Римана, можно сформулировать критерий квадрируемости фигуры, аналогичный критерию Римана с омега - суммами (по форме он напоминает критерий Лебега). Для этого введем понятие границы ∂P фигуры P, которое, в свою очередь, использует следующие понятия.

1. Пусть $\delta > 0$. Тогда **δ-окрестностью точки x_0 на плоскости** назовем множество точек x, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке x_0.

2. Точка x_0 называется **внутренней** точкой множества P, если найдется δ-окрестность $E(x_0, \delta)$ точки x_0 целиком принадлежащая P, т.е. $E(x_0, \delta) \subset P$.

3. Точка x_1 называется **внешней** точкой множества P, если существует окрестность $E(x_1, \delta)$ такая, что $E(x_1, \delta) \cap P = \varnothing$.

4. Если точка x не является ни внутренней, ни внешней точкой множества P, то она называется **граничной** точкой множества P.

5. Множество всех граничных точек фигуры P называется его **границей** и обозначается через ∂P.

Т е о р е м а (Критерий квадрируемости фигуры). *Фигура P — квадрируема тогда и только тогда, когда мера ее границы равна нулю, т.е. $\mu(\partial P) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Нам надо доказать, что если P — квадрируемая фигура, то $\mu(\partial P) = 0$. Для этого достаточно при любом $\varepsilon > 0$ указать простейшую фигуру H такую, что $\partial P \subset H$ и $\mu(H) < \varepsilon$.

Поскольку фигура P — квадрируема, существует величина $\mu(P) = \mu_*(P) = \mu^*(P)$. Следовательно, для всякого $\varepsilon_1 > 0$ найдутся открытая простейшая фигура P_1 и замкнутая простейшая фигура P_2 такие, что $P_2 \subset P \subset P_1$ и, кроме того, справедливы неравенства

$$\mu(P) = \mu^*(P) \leq \mu(P_1) < \mu(P) + \varepsilon_1,$$

$$\mu(P) - \varepsilon_1 < \mu(P_2) \le \mu(P) = \mu_*(P).$$

Рассмотрим фигуру $P_3 = P_1 \setminus P_2$. Она является простейшей. Пусть $H = \bar{P}_3$. Тогда вне этой фигуры H содержатся только внешние или внутренние точки фигуры P. Поэтому $\partial P \subset H$. Далее, имеем $P_1 = P_2 \cup P_3$, $P_2 \cap P_3 = \varnothing$, следовательно, $\mu(P_1) = \mu(P_2) + \mu(P_3)$, откуда

$$\mu(P_3) = \mu(P_1) - \mu(P_2) < \mu(P) + \varepsilon_1 - \mu(P) + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1.$$

Заметим, что $\mu(P_3) = \mu(\bar{P}_3)$, так как граница простейшей фигуры имеет нулевую меру.

Возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, получим, что $\mu(H) < \varepsilon$, $\partial P \subset H$, следовательно, $\mu(\partial P) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Нам дано, что граница ∂P фигуры P имеет нулевую меру. Надо доказать, что фигура P измерима по Жордану, т.е. имеет место равенство $\mu^*(P) = \mu_*(P)$.

Для этого потребуется одна лемма, полезная и сама по себе.

Лемма (О связности отрезка на плоскости). *Пусть на плоскости заданы отрезок L с концами A_1 и A_2 и некоторое множество M, причем $A_1 \in M$, $A_2 \notin M$. Тогда существует точка $A_0 \in l$ такая, что $A_0 \in \partial M$.*

Доказательство леммы. Для каждой точки $\alpha \in l$ рассмотрим функцию $\rho(\alpha)$, равную расстоянию от нее до точки A_1. Очевидно, что для любой точки $\alpha \in l$ справедливо неравенство $\rho(\alpha) \le |l|$. Пусть $B = l \cap M$. Тогда множество B непусто, так как точка A_1 принадлежит и отрезку l, и множеству M. Пусть, далее, $\rho_0 = \sup\limits_{A \in B} \rho(A)$. Рассмотрим точку α_0, лежащую на расстоянии ρ_0 от точки A_1. Любая точка α, удаленная от точки A_1 на расстояние $\rho(\alpha) > \rho_0$, не принадлежит как B, так и M, поэтому α_0 не может быть внутренней точкой множества M. С другой стороны, в любой окрестности точки α_0 на отрезке l найдется точка, принадлежащая $B \subset M$. Поэтому точка α_0 не является внешней точкой множества M, следовательно, $\alpha_0 \in \partial M$. Лемма доказана.

Итак, пусть $\mu(\partial P) = 0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует открытая простейшая фигура P_3 такая, что $\partial P \subset P_3$, $\mu(P_3) < \varepsilon$. Граница ее ∂P_3 состоит из конечного числа отрезков, параллельных осям координат. Заключим эти фигуры P и P_3 в квадрат K со сторонами, параллельными осям координат. Далее, продолжим отрезки границы ∂P_3, параллельные оси Ox, до пересечения со сторонами квадрата K. Тогда квадрат K и фигура P_3 разобьются на отдельные стандартные прямоугольники. Пусть это будут прямоугольники $h_1, \ldots, h_m$ (каждый из них будем раассматривать без границы). Тогда прямоугольники h_s, $s = 1, \ldots, m$, либо целиком принадлежат P_3, либо $h_s \cap P_3 = \varnothing$.

Покажем, что если прямоугольник h_s не является подмножеством P_3, но имеет хотя бы одну общую точку с фигурой P, то $h_s \subset P$. Действительно, если в этом прямоугольнике $x_1 \in P$, $x_2 \notin P$, то некоторые точки отрезка l, соединяющего эти точки (а он тоже целиком принадлежит прямоугольнику h_s), принадлежат P, а некоторые точки не принадлежат P. По лемме отрезок l содержит точку $x_0 \in \partial P$, т.е. точка $x_0 \in h_s$, $x_0 \in \partial P \subset P_3$, а это значит, что $h_s \subset P_3$, что противоречит условию, что прямоугольник h_s не является подмножеством P_3.

Таким образом, если $h_s \cap P \notin \varnothing$, то прямоугольник h_s целиком лежит в P. Объединим все такие прямоугольники h_s во множество P_2. Очевидно, что $P_2 \subset P$.

Рассмотрим еще простейшее множество $P_1 = P_2 \tilde{\cup} P_3$. Докажем, что $P \subset P_1$. Действительно, фигура P, как и всякая фигура, состоит из внутренних точек, образующих множество $P \setminus \partial P$, и некоторого подмножества $\Gamma \subset \partial P$, — множества своих граничных точек. Достаточно показать, что $\partial P \subset P_1$, $P \setminus \partial P \subset P_1$.

Включение $\partial P \subset P_1$ следует из того, что $\partial P \subset P_3 \subset P_1$. А всякая внутренняя точка множества P по построению принадлежит: 1) либо P_3; 2) либо некоторому открытому прямоугольнику h_s; 3) либо его границе ∂h_s. Но тогда в первом случае точка $x \in P_3 \subset P_1$, и, следовательно, она принадлежит P_1; во втором случае $x \in h_s$, $x \in P$, а это значит, что $h_s \subset P_2$ (по способу построения множества P_2), т.е. $x \in h_s \subset P_2 \subset P_1$; в третьем случае имеем, что внутренняя точка множества P лежит на границе открытого прямоугольника h_s. Но тогда некоторая ϵ - окрестность этой точки целиком состоит из точек множества P и в то же время в ней содержатся точки из прямоугольника h_s, тогда $h_s \subset P_2$, откуда $\partial h_s \subset \bar{P}_2$, а потому $x \in \partial h_s \subset \bar{P}_2 \subset P$. Отсюда имеем: $P \subset P_1$. Далее, имеем $P_2 \cap P_3 = \varnothing$, кроме того, P_1, P_2 и P_3 — простейшие фигуры. Поэтому

$$\mu(P_1) = \mu(\bar{P}_2) + \mu(P_3) < \mu(\bar{P}_2) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\mu(P_2) \le \mu_*(P) \le \mu^*(P) \le \mu(P_1) < \mu(\bar{P}_2) + \varepsilon.$$

Таким образом, получим

$$0 \le \mu^*(P) - \mu_*(P) < \mu(\bar{P}_2) + \varepsilon - \mu(\bar{P}_2) = \varepsilon.$$

Но так как $\epsilon > 0$ — произвольно, то, следовательно, $\mu^*(P) = \mu_*(P)$, т.е. фигура P — измерима по Жордану. Теорема доказана полностью.

§ 3. СВОЙСТВА МЕРЫ ЖОРДАНА

Проверим, что неотрицательная функция $\mu(P)$, определенная нами для измеримых фигур на плоскости, обладает свойствами монотонности, инвариантности относительно движений плоскости и аддитивности, имеющих место для простейших фигур.

Во-первых, покажем, что множество измеримых фигур замкнуто относительно теоретико-множественных операций: объединения, пересечения и разности множеств. Другими словами, если фигуры P_1 и P_2 — измеримы, то измеримыми по Жордану являются фигуры $P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2$, $P_1 \setminus P_2$.

Докажем сначала измеримость объединения двух множеств. В силу критерия измеримости множества по Жордану достаточно показать, что $\mu(\partial(P_1 \cup P_2)) = 0$. Докажем, что

$$\partial(P_1 \cup P_2) \subset \partial P_1 \cup \partial P_2.$$

Возьмем любое $x \in \partial(P_1 \cup P_2)$. Предположим, что $x \notin \partial P_1$, $x \notin \partial P_2$. Тогда точка x является либо внутренней точкой P_1, либо внутренней точкой P_2, либо внешней точкой и P_1, и P_2. Отсюда следует, что точка x по отношению ко множеству $P_1 \cup P_2$ является либо внутренней, либо внешней точкой. Но это противоречит тому факту, что точка x принадлежит границе множества $P_1 \cup P_2$. Следовательно, граница объединения двух множеств является подмножеством объединения границ этих множеств.

Поместим измеримые множества P_1 и P_2 в стандартный квадрат K. Тогда множества $K \setminus P_1$ и $K \setminus P_2$ являются измеримыми по Жордану, так как их граница содержится в объединении границ множеств K, P_1 и P_2. Отсюда следует измеримость множеств

$$P_1 \setminus P_2, \ P_1 \cap P_2 = K \setminus (K \setminus P_1) \cup (K \setminus P_2).$$

Перейдем теперь к свойству монотонности функции $\mu(P)$. Если $P_1 \subset P_2$, то всякая простейшая фигура, описанная вокруг P_2, содержит и P_1, а потому $\mu^*(P_1) \leq \mu^*(P_2)$. Но так как фигуры P_1 и P_2 измеримы, то

$$\mu(P_1) = \mu^*(P_1) \leq \mu^*(P_2) = \mu(P_2).$$

Это и означает, что функция $\mu(P)$ является монотонной.

Инвариантность меры Жордана относительно параллельных переносов следует из того, что при параллельном переносе площадь простейшей фигуры не меняется, поэтому при сдвигах плоскости не меняется значение величин $\mu^*(P)$ и $\mu_*(P)$.

Далее, как известно, по теореме Шаля все движения плоскости сводятся либо к сдвигам, либо к поворотам плоскости относительно некоторой неподвижной точки. Так что для завершения доказательства инвариантности меры Жордана относительно движений плоскости нам достаточно показать, что она инвариантна относительно поворотов плоскости вокруг некоторой неподвижной точки. Заметим, что при повороте плоскости площадь простейшей фигуры не меняется, но, к сожалению, она уже перестает быть простейшей.

Итак, пусть задана измеримая по Жордану фигура P. Тогда существуют простейшие фигуры P_1, P_2 такие, что $P_1 \subset P \subset P_2$, причем

$$\mu(P_1) \le \mu(P) < \mu(P_1) + \varepsilon,\ \mu(P_2) - \varepsilon < \mu(P) \le \mu(P_2),$$

и P_1, P_2 представляются в виде объединения конечного числа стандартных прямоугольников. При повороте плоскости вокруг неподвижной точки фигуры P, P_1 и P_2 перейдут соответственно в измеримые фигуры Q, Q_1 и Q_2, причем $Q_1 \subset Q \subset Q_2$. Очевидно, достаточно показать, что если стандартный прямоугольник при повороте переходит в прямоугольник Π, то его можно заключить в открытую простейшую фигуру Π_1 и вписать в него замкнутую простейшую фигуру Π_2, такие, что $\Pi_2 \subset \Pi \subset \Pi_1$ и разность $\mu(\Pi_1) - \mu(\Pi_2)$ может быть сделана сколь угодно малой. Для этого обрамляем прямоугольник Π прямоугольником Π_0 со сторонами, параллельными сторонам Π и находящихся от них на достаточно малом расстоянии. Затем вписываем в Π_0 простейшую фигуру, которая содержит Π. Она и будет искомой.

Докажем теперь свойство аддитивности меры Жордана. Заметим сначала, что для простейших фигур справедливо неравенство

$$\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B).$$

Далее, пусть фигуры P_1 и P_2 измеримы по Жордану и пусть $P = P_1 \cup P_2, P_1 \cap P_2 = \varnothing$. Тогда по критерию измеримости множества фигура P измерима, поскольку граница объединения двух множеств содержится в объединении границ самих множеств. Докажем, что имеет место равенство

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

В силу измеримости фигур P_1 и P_2 для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся простейшие фигуры Q_1 и Q_2, R_1 и R_2 такие, что

$$\mu(Q_1) \le \mu(P_1) < \mu(Q_1) + \varepsilon,\ \mu(Q_2) - \varepsilon < \mu(P_1) \le \mu(Q_2),$$

$$\mu(R_1) \le \mu(P_2) < \mu(R_1) + \varepsilon, \ \mu(R_2) - \varepsilon < \mu(P_2) \le \mu(R_2).$$

Кроме того, для простейших фигур Q_1 и R_1 с условием $Q_1 \cap R_1 = \varnothing$ имеем $\mu(Q_1 \cup R_1) = \mu(Q_1) + \mu(R_1)$, а также $\mu(Q_2 \cup R_2) \le \mu(Q_2) + \mu(R_2)$. Поэтому, учитывая теоретико-множественные включения

$$Q_1 \cup R_1 \subset P_1 \cup P_2 = P \subset Q_2 \cup R_2,$$

получим

$$\mu(Q_1) + \mu(R_1) = \mu(Q_1 \cup R_1) \le \mu(P) \le \mu(Q_2 \cup R_2) \le$$

$$\le \mu(Q_2) + \mu(R_2) < \mu(Q_1) + \mu(R_1) + 2\varepsilon.$$

Очевидно также имеем

$$\mu(Q_1) + \mu(R_1) \le \mu(P_1) + \mu(P_2) < \mu(Q_1) + \mu(R_1) + 2\varepsilon.$$

Из последних неравенств найдем

$$|\mu(P) - \mu(P_1) - \mu(P_2)| < 2\varepsilon.$$

В силу же произвольности выбора $\varepsilon > 0$ будем иметь

$$\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2).$$

Это и доказывает свойство аддитивности меры Жордана.

§ 4. ИЗМЕРИМОСТЬ СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ

Цель этого параграфа показать, что если L — спрямляемая кривая, то ее плоская мера Жордана равна нулю. А значит, в силу критерия измеримости фигуры по Жордану будет измеримой фигура, ограниченная спрямляемой кривой.

Для дальнейшего нам потребуется одна полезная лемма о спрямляемых кривых.

Л е м м а. *Пусть кривая L задается уравнениями вида $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a,b]$ и является спрямляемой кривой. Тогда длина $s(t)$ части этой кривой, соответствующей отрезку $[a,t]$, где $t \in [a,b]$, является непрерывной и монотонно возрастающей функцией параметра t.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возрастание функции $s(t)$ следует из свойства аддитивности длины дуги кривой. Действительно, при $t_1 < t_2$ имеем $s(t_2) = s(t_1) + s_0$, где s_0 — длина дуги кривой, находящейся между точками $A_1 = (\varphi(t_1), \psi(t_1))$ и $A_2 = (\varphi(t_2), \psi(t_2))$, т.е. величина s_0 — положительна. Отсюда имеем: $s(t_2) > s(t_1)$.

Докажем, что функция $s(t)$ не имеет разрывов. В самом деле, пусть в точке t_0 функция $s(t)$ имеет разрыв. Тогда в силу монотонности $s(t)$ точка t_0 является точкой разрыва первого рода со скачком $h > 0$. Значит, для любого отрезка $[t_1, t_2]$, содержащего эту точку t_0, длина дуги кривой, отвечающей этому отрезку $[t_1, t_2]$, превосходит h.

Далее, исходная кривая L является спрямляемой, поэтому для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует вписанная ломаная l такая, что $0 < s(L) - s(l) < \varepsilon$. Эта ломаная порождает неразмеченное разбиение $T : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, отрезка $[a, b]$, и каждая точка $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$ отвечает некоторому узлу ломаной l. Очевидно, для любого наперед заданного положительного числа δ можно считать, что $\Delta_T < \delta$. Ясно, что длина l_k звена ломаной с номером k удовлетворяет условию

$$l_k \leq s(t_k) - s(t_{k-1}).$$

Пусть точка t_0 принадлежит некоторому интервалу (t_{k-1}, t_{k+1}). В силу равномерной непрерывности функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на отрезке $[a, b]$ существует положительное число δ такое, что для всех t', t'' с условием $|t' - t''| < \delta$ выполняются неравенства

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \frac{h}{8}, \ |\psi(t') - \psi(t'')| < \frac{h}{8}.$$

Следовательно, имеем

$$l_k = \sqrt{(\varphi(t') - \varphi(t''))^2 + (\psi(t') - \psi(t''))^2} < \frac{h}{4}, l_{k+1} < \frac{h}{4}.$$

Отсюда и из условия спрямляемости кривой получим

$$\frac{h}{2} = h - 2\frac{h}{4} < s(t_{k+1}) - s(t_k) - (l_k + l_{k+1}) \leq s(L) - s(l) < \varepsilon.$$

Последнее неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$, но при $\varepsilon = \frac{h}{2} > 0$ оно противоречиво. Следовательно, предположение о разрывности функции $s(t)$ не имеет места. Лемма доказана.

Т е о р е м а. *Пусть L — спрямляемая кривая. Тогда она имеет плоскую меру Жордана, равную нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разделим кривую L на n дуг, длина каждой из которых равна $a = \frac{s(L)}{n}$. Это возможно, поскольку функция $s(t)$ является монотонной и непрерывной. Тогда k-я дуга кривой L при $k = 1, \ldots, n$ целиком лежит внутри квадрата со сторонами, параллельными осям координат и равными $2a$, и центром в k-й точке деления кривой L. Объединение всех квадратов образует простейшую фигуру P, целиком покрывающую L, причем

$$\mu(P) \leq n(2a)^2 = 4n \cdot \frac{s^2(L)}{n^2} = \frac{4s^2(L)}{n}.$$

Устремим n к бесконечности, получим $\mu^*(L) = 0$, а значит, и $\mu(L) = 0$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть граница фигуры P является спрямляемой кривой. Тогда P измерима по Жордану.*

Доказательство. В силу критерия измеримости и предыдущей теоремы получаем измеримость фигуры P, что и требовалось доказать.

§ 5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ИНТЕГРИРУЕМОСТЬЮ ФУНКЦИИ ПО РИМАНУ И ИЗМЕРИМОСТЬЮ ПО ЖОРДАНУ ЕЕ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

Рассмотрим криволинейную трапецию P, ограниченную кривыми $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$. Имеет место следующий критерий интегрируемости функции по Риману.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ ограничена и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Тогда для интегрируемости функции $f(x)$ по Риману необходимо и достаточно, чтобы криволинейная трапеция P, отвечающая кривой $y = f(x)$, была измерима по Жордану.*

Доказательство. Необходимость. Нам дано, что функция $f(x)$ интегрируема по Риману. Тогда в силу критерия интегрируемости имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение отрезка $[a, b]$ такое, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$, где $S(T), s(T)$ — соответственно верхняя и нижняя суммы Дарбу, отвечающие разбиению T.

Заметим далее, что замкнутая простейшая фигура P_1, соответствующая верхней сумме Дарбу $S(T)$, объемлет криволинейную трапецию P, а замкнутая простейшая фигура P_2, соответствующая нижней сумме Дарбу $s(T)$, вписана в нее, т.е. имеют место теоретико-множественные включения $P_2 \subset P \subset P_1$ и отвечающие им неравенства

$$s(T) = \mu(P_2) \leq \mu_*(P) \leq \mu^*(P) \leq \mu(P_1) = S(T).$$

Поскольку справедливо неравенство $S(T) - s(T) = \mu(P_1) - \mu(P_2) < \varepsilon$, то $\mu^*(P) - \mu_*(P) < \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ будем иметь, что $\mu^*(P) = \mu_*(P)$, т.е. криволинейная трапеция P измерима по Жордану. Необходимость доказана.

Достаточность. В силу критерия измеримости граница ∂P криволинейной трапеции P имеет плоскую жорданову меру нуль. Следовательно, плоская мера Жордана ее части: кривой L вида $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, — равна нулю. Поэтому для всякого $\varepsilon > 0$ существует простейшая фигура Q такая, что $L \subset Q$, $\mu(Q) < \varepsilon$. Продолжим вертикальные отрезки сторон стандартных прямоугольников, составляющих фигуру Q, до пересечения с осью Ox. Эти точки пересечения дадут разбиение T отрезка $[a, b]$. Обозначим через Q_1

простейшую фигуру, лежащую под фигурой Q в области $y \geq 0$, а через Q_2 обозначим фигуру $Q \cup Q_1$. Тогда имеем

$$Q_1 \subset P \subset Q_2, \ \mu(Q_2) - \mu(Q_1) = \mu(Q) < \varepsilon.$$

Заметим, что фигуре Q_1 соответствует нижняя сумма Дарбу, а фигуре Q_2 — верхняя сумма Дарбу. Следовательно, $S(T) - s(T) < \varepsilon$, т.е. имеем

$$\inf_T (S(T) - s(T)) = 0,$$

значит, по критерию интегрируемости функция $f(x)$ является интегрируемой. Теорема доказана.

Примеры. 1. Соображения, использованные нами при доказательстве первой части предыдущей теоремы, показывают, что площадь криволинейной трапеции

$$P: \ y = f(x) \geq 0, \ y = 0, \ x = a, \ x = b,$$

равна

$$\mu(P) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. Площадь криволинейного сектора P, граница которого задана в полярных координатах уравнениями $r = f(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, определяется по формуле

$$\mu(P) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Доказательство этой формулы опирается на свойство монотонности меры Жордана. Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ на n равных частей точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_n = \beta$. Кривая $r = f(\varphi)$ точками $A_k(r_k, \varphi_k)$, $r_k = f(\varphi_k)$, разбивается на n дуг, а сектор P — на n малых секторов P_k. Пусть

$$f_k = \min_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} f(\varphi), \ F_k = \max_{\varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]} f(\varphi).$$

Тогда площадь k -го криволинейного сектора содержит круговой сектор радиуса f_k и находится внутри сектора радиуса F_k. Используя формулу площади кругового сектора и свойство монотонности площади, имеем

$$\frac{1}{2} f_k^2 \Delta\varphi_k \leq \mu(P_k) \leq \frac{1}{2} F_k^2 \Delta\varphi_k, \ \Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k.$$

Откуда получим

$$s_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \Delta\varphi_k \le \mu(P) \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} F_k^2 \Delta\varphi_k = S_n.$$

Суммы s_n и S_n являются нижними и верхними суммами Дарбу для интеграла

$$I = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Поскольку функция $f(\varphi)$ — непрерывна, $f^2(\varphi)$ — непрерывна и интегрируема, а потому при $n \to \infty$ имеем $s_n \to I$, $S_n \to I$. Отсюда получим $\mu(P) = I$. Утверждение доказано.

Аналогично можно вычислять и объемы различных фигур, вписывая в них и описывая вокруг них простейшие фигуры, зависящие от некоторого параметра n, и устремляя потом его к бесконечности. Подобным образом находил площади и объемы еще Архимед, т.е. мы применили **метод исчерпывания**, принадлежащий Архимеду.

Итак, понятие измеримости по Жордану позволяет значительно расширить класс фигур P на плоскости и в пространстве, которым можно приписать значение площади или объема $\mu(P)$. Однако легко можно указать пример плоского множества P, не измеримого по Жордану. Например, рассмотрим функцию Дирихле $\chi(x)$ на отрезке $[0,1]$:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Пусть P есть криволинейная трапеция, соответствующая этой функции, т.е. множество точек (x, y) на плоскости xOy, определяемое для всякого x, принадлежащего отрезку $[0,1]$, условиями $0 \le y \le \chi(x)$.

Очевидно, что любая простая фигура, содержащая P, должна содержать единичный квадрат, и поэтому верхняя мера ее $\mu^*(P)$ равна единице. Но в то же время простые фигуры, вписанные в P, могут, очевидно, состоять только из конечного числа отрезков, и они имеют поэтому нулевую площадь, следовательно, нижняя мера фигуры P равна нулю. Значит, фигура P неизмерима по Жордану. Но здравый смысл говорит о том, что фигуре P, тем не менее, разумно приписать меру нуль, и вот по какой причине.

Как известно, рациональные точки отрезка можно занумеровать, потому фигура P состоит из счетного числа отрезков. Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и накроем первый отрезок прямоугольником, площадь которого равна $\varepsilon/2$, второй отрезок — прямоугольником площадью $\varepsilon/2^2$, и т.д. Тогда вся фигура покроется счетным количеством стандартных прямоугольников, а их общая площадь не превышает величины

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2^3} + \cdots = \varepsilon.$$

Так как фигура P накрыта прямоугольниками, общая площадь которых не превышает ε, то, естественно, считать, что и площадь фигуры P тоже не превосходит ε, а это может быть только в том случае, если она равна нулю.

Мы подошли тем самым к способу определения понятия площади даже для тех фигур, которые неизмеримы по Жордану. Развивая этот подход, приходим к понятию **меры Лебега**, которое можно построить для пространства любой фиксированной размерности, в том числе и для прямой $\mathbb{R}$.

Глава XII
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕРЫ И ИНТЕГРАЛА ЛЕБЕГА. ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА

Лекция 15

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА МЕРЫ ЛЕБЕГА

Рассмотрим случай плоской меры Лебега.

Определение 1. *Пусть* **ограниченная** *плоская фигура P покрыта конечным или счетным множеством стандартных открытых прямоугольников h_n, $n = 1, \ldots$. Совокупность $H = \{h_n\}$ всех этих прямоугольников назовем* **покрытием** *плоского множества P (или фигуры P). Величину*

$$\mu_H = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{s=1}^{n} h_s\Big)$$

назовем **мерой покрытия** *H. Множество H называется простейшим множеством.*

Заметим, что величина μ_H всегда неотрицательна.

Определение 2. *Число $\mu^*(P) = \inf\limits_H \mu_H$, где инфимум берется по всем возможным покрытиям простейшими множествами фигуры P, называется* **верхней мерой Лебега** *фигуры P.*

Очевидно, имеем $0 \le \mu^*(P) < +\infty$, поскольку в силу ограниченности фигуры P найдется стандартный квадрат K со стороной l такой, что $P \subset K$. Отсюда получим, что $\mu^*(P) \le l^2$.

Определение 3. *Пусть $CP = K \setminus P$, где K — стандартный квадрат, покрывающий фигуру P.* **Нижней мерой Лебега** *плоского множества P назовем число*

$$\mu_*(P) = \mu(K) - \mu^*(CP).$$

Определение 4. *Плоское множество P называется* **измеримым по Лебегу,** *если*

$$\mu^*(P) = \mu_*(P) = \mu(P),$$

а число $\mu(P)$ называется **плоской мерой Лебега.**

Докажем следующий критерий измеримости множества по Лебегу.

Т е о р е м а 1. *Пусть A — ограниченное множество. Тогда для измеримости по Лебегу множества A необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для всякого $\varepsilon > 0$ существовало бы простейшее множество $B = B(\varepsilon)$, такое, что справедливо неравенство*

$$\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon.$$

Это значит, что любое измеримое по Лебегу множество с любой степенью точности может быть аппроксимировано простейшими множествами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. В силу ограниченности множества A существует стандартный квадрат K, покрывающий A, т.е. $A \subset K$. Нам дано, что множество A — измеримо. Следовательно, $\mu^*(A) = \mu_*(A)$, т.е. $\mu^*(A) + \mu^*(K \setminus A) = \mu(K)$.

Далее, из определения верхней меры Лебега имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность открытых стандартных прямоугольников $\{C_n\}$, покрывающая множество A, т.е. $A \subset C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, и такая, что

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n) < \mu^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично, найдется последовательность стандартных прямоугольников $\{D_n\}$ такая, что

$$K \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D, \mu^*(K \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n) < \mu^*(K \setminus A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отметим, что множества C и D образуют покрытие квадрата K.

Далее, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(C_n)$ сходится, то существует номер $k = k(\varepsilon/2)$ такой, что $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \mu(C_n) < \varepsilon/2$.

Положим

$$B = \bigcup_{n=1}^{k} C_n, \; P = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} C_n, \; Q = B \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right).$$

Заметим, что множества B и P образуют покрытие множества A, т.е. $B \cup P \supset A$, и, следовательно, множество P содержит $A \setminus B$.

Имеем также, что множество Q содержит $B \setminus A$. В самом деле,

$$Q = B \cap D \supset B \cap (K \setminus A) = B \setminus A.$$

Таким образом,

$$P \cup Q \supset (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A\Delta B.$$

Оценим сверху величину $\mu(P \cup Q)$.

Поскольку для любых двух простейших множеств F и G справедливо равенство

$$\mu(F \cup G) = \mu(F) + \mu(G) - \mu(F \cap G),$$

получим

$$\mu(P \cup Q) = \mu(C \cap D) = \mu(C) + \mu(D) - \mu(C \cup D) <$$

$$< \mu^*(A) + \frac{\epsilon}{2} + \mu^*(K \setminus A) + \frac{\epsilon}{2} - \mu(K) = \epsilon.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ мы нашли множество $B = B(\varepsilon)$ такое, что

$$\mu^*(A\Delta B) \leq \mu(P \cup Q) < \varepsilon.$$

А это и завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Нам дано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует простейшее множество $B = B(\varepsilon/2)$ такое, что $\mu^*(A\Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, поскольку $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$, $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$, справедливы неравенства

$$\mu(B) + \mu^*(A \setminus B) \geq \mu^*(A), \ \mu^*(A) + \mu^*(B \setminus A) \geq \mu(B).$$

Отсюда и из условия $A \setminus B \subset A\Delta B$, $B \setminus A \subset A\Delta B$ имеем

$$\mu^*(A) - \mu(B) \leq \mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*(A\Delta B) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\mu(B) - \mu^*(A) \leq \mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*(A\Delta B) < \frac{\varepsilon}{2},$$

т.е. $|\mu^*(A) - \mu(B)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Далее, поскольку множество A ограничено, существует стандартный квадрат K такой, что $K \supset A$. Очевидно, имеем

$$(K \setminus A)\Delta(K \setminus B) = A\Delta B.$$

Поэтому, как и раньше, получим

$$|\mu^*(K \setminus A) - \mu(K \setminus B)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя равенство $\mu(B) + \mu(K \setminus B) = \mu(K)$, получим

$$|\mu^*(A) + \mu^*(K \setminus A) - \mu(K)| \leq |\mu^*(A) - \mu(B)| + |\mu^*(K \setminus A) - \mu(K \setminus B)| < \epsilon,$$

т.е. $|\mu^*(A) + \mu^*(K \setminus A) - \mu(K)| < \varepsilon$. В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что

$$\mu^*(A) + \mu^*(K \setminus A) - \mu(K) = 0,$$

т.е. $\mu^*(A) = \mu(K) - \mu^*(K \setminus A) = \mu_*(A)$. Последнее равенство и означает, что множество A измеримо. Теорема 1 доказана.

Исходя из доказанного критерия, очевидно, имеем, что для любых измеримых множеств A и B их объединение, пересечение, разность и симметрическая разность являются измеримыми множествами. Более того, если измеримые множества A и B не пересекаются, то

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Мы не будем детально изучать свойства множеств, измеримых по Лебегу, но следует отметить, что это ненамного сложнее, чем изучение измеримости по Жордану. Тем не менее, мера Лебега обладает существенным преимуществом перед мерой Жордана, так как помимо свойств инвариантности относительно движений плоскости и монотонности, она обладает свойством **счетной аддитивности** взамен свойства конечной аддитивности, которым обладала мера Жордана. Уточним, что имеется в виду.

Теорема 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — бесконечная последовательность непересекающихся множеств, измеримых по Лебегу. Пусть их объединение $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ является ограниченным множеством. Тогда множество A измеримо по Лебегу, причем*

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Доказательство. Так как множество A — ограничено, то существует стандартный квадрат K, содержащий A. В силу этого и свойства конечной аддитивности для любого фиксированного числа $k \geq 1$ имеем соотношения

$$\sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) \leq \mu(K).$$

Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ сходится, и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $k_0 = k_0(\varepsilon)$ такое, что для любого числа $k > k_0$ выполняется неравенство $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Зафиксируем какое-нибудь число k, большее k_0. Тогда множество $C = \bigcup\limits_{n=1}^{k} A_n$ — измеримо, следовательно, по критерию измеримости (теорема 1) для всякого $\varepsilon > 0$ существует простейшее множество $B = B(\frac{\varepsilon}{2})$ такое, что $\mu^*(C \Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Очевидно, справедливо следующее соотношение:

$$A\Delta B \subset (C\Delta B) \cup (\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n).$$

Тогда, используя неравенство

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2},$$

получим, что $\mu^*(A\Delta B) < \varepsilon$. Следовательно, множество A — измеримо. Аналогично доказывается, что и множество $C_k = \bigcup\limits_{n=k+1}^{\infty} A_n$ является измеримым.

Далее, в силу свойства конечной аддитивности имеем

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{k} \mu A_n + \mu(C_k).$$

Кроме того, ранее мы показали, что $\lim\limits_{k\to\infty} \mu C_k = 0$. А это значит, что $\mu(A) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu A_n$. Теорема доказана.

Важным следствием доказанного выше свойства счетной аддитивности меры Лебега является измеримость пересечения счетного числа измеримых множеств, а также измеримость объединения счетного или конечного числа измеримых множеств при условии ограниченности этого объединения.

В частности, отсюда имеем измеримость любого ограниченного открытого множества как объединения не более чем счетного числа открытых стандартных прямоугольников. Но тогда и любое замкнутое множество будет измеримым как дополнение до открытого множества, а следовательно, будет измеримым по Лебегу и любое не более, чем счетное, объединение и пересечение открытых и замкнутых множеств.

Докажем еще одно полезное свойство меры Лебега: **свойство непрерывности.**

Теорема 3. *Пусть $A_1, \dots, A_n, \dots$ — измеримые множества, и пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — ограниченное множество. Кроме того, пусть $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$. Тогда $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.*

Доказательство. Имеем

$$A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus A_{n-1}), \; A = A_1 \bigcup_{s=2}^{\infty} (A_s \setminus A_{s-1}),$$

причем для любых $s,t \geq 2, s \neq t$, справедливы соотношения

$$A_1 \cap (A_s \setminus A_{s-1}) = \varnothing, \; (A_s \setminus A_{s-1}) \cap (A_t \setminus A_{t-1}) = \varnothing.$$

Тогда в силу свойства счетной аддитивности меры получим

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) + \sum_{s=2}^{\infty} \mu(A_s \setminus A_{s-1}) = \mu(A).$$

Теорема 3 доказана.

Отметим, что не всякое множество на плоскости измеримо по Лебегу, но неизмеримые множества имеют довольно экзотический вид.

Можно поставить вопрос о том, как связаны между собой понятия измеримых множеств для разных размерностей. Например, если мы имеем измеримую плоскую фигуру P и будем пересекать ее прямыми, параллельными одной из осей координат. Тогда в сечении будут получаться линейные ограниченные множества. Измеримы ли они по Лебегу? Этот вопрос на самом деле имеет принципиально важное значение и вот ответ на него. Да; но за исключением некоторого множества прямых, которое в пересечении с другой осью координат образует множество линейной меры нуль.

Вообще, если какое-нибудь условие выполнено для всех точек множества $M \subset \mathbb{R}$, за исключением множества точек $M' \subset M$, мера которого равна нулю, $\mu(M') = 0$, то говорят, что это условие имеет место для *почти всех* точек множества M. Термин *почти все* в смысле меры Лебега означает, что некоторое свойство выполняется на всем множестве, за исключением, быть может, множества меры нуль.

Рассмотрим теперь линейную меру Лебега, т.е. меру Лебега для ограниченных множеств на числовой прямой $\mathbb{R}$. Очевидно, что счетное множество имеет меру нуль. Возможен тогда второй вопрос: существуют ли несчетные множества меры нуль? Да, существуют, например, канторово совершенное множество M, являющееся подмножеством отрезка $[0,1]$ и состоящее из тех чисел, которые записываются в троичной системе счисления в виде бесконечной дроби, не содержащей цифры 1. Например, числа $0,2$; $0,200202$; $0,222\ldots2\cdots = 1$ и т.д.

Очевидно, множество M имеет мощность континуума, в то же время оно получается так: отрезок $[0,1]$ делится на три равные части и выбрасывается средний интервал $(1/3, 2/3)$, затем эта процедура повторяется с каждым из двух отрезков, полученных после первого деления, и т.д.

Пусть E_0 — исходный отрезок $[0,1]$, E_1 — то множество, которое осталось после первого шага, E_2 — множество, оставшееся после второго шага, и т.д.

Очевидно, $E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$ и множество M равно $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Тогда при любом $n \geq 1$ для верхней меры множества M справедливы оценки $\mu^*(M) \leq \mu(E_n)$. Очевидно, имеем

$$\mu(E_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu(E_0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, мера множества M равна 0.

На этом мы завершаем изучение основ теории меры Лебега.

Лекция 16

§ 2. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

Понятие линейной меры Лебега позволяет расширить класс интегрируемых функций с помощью введения понятия интеграла Лебега. Для того чтобы сказать, что это такое, сначала введем понятие измеримой функции.

Определение 1. *Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, называется* **измеримой** *на этом отрезке, если для всякого $y \in \mathbb{R}$ множество E точек $x \in [a,b]$, для которых выполняется неравенство $f(x) < y$, является измеримым множеством на отрезке $[a,b]$ в смысле линейной меры Лебега.*

Из свойств меры Лебега, доказанных в предыдущем параграфе, имеем, что вместе с множеством E измеримыми будут множества точек $x \in [a,b]$, для которых справедливы соотношения

$$f(x) \geq y,\ f(x) = y,\ z < f(x) \leq y.$$

В частности, любая непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ измерима, поскольку множество $I_y = \{x \in [a,b] |\ f(x) \geq y\}$ будет замкнутым, а любое замкнутое множество является измеримым.

В качестве второго примера измеримой на отрезке $I = [a,b]$ функции $f(x)$ рассмотрим ограниченную функцию, имеющую разрывы на множестве лебеговой меры нуль. В силу критерия Лебега она будет интегрируема по Риману. Покажем, что эта функция является измеримой.

Возьмем любое число $y \in \mathbb{R}$. Достаточно показать, что множество

$$I_y = \{x \in I\ |f(x) \geq y\}$$

является измеримым. Предельные точки x_0 множества I_y могут быть двух видов: точками непрерывности функции $f(x)$ и ее точками разрыва. Если такая точка x_0 — точка непрерывности, то она обязана принадлежать I_y. Действительно, поскольку x_0 — предельная точка множества I_y, существует последовательность точек $x_n \in I_y$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,\ f(x_n) \geq y.$$

Отсюда в силу непрерывности $f(x)$ в точке x_0 имеем

$$y \leq \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0),$$

т.е. точка x_0 принадлежит I_y.

Если же предельная точка x_0 множества I_y не принадлежит ему, то она является точкой разрыва функции $f(x)$. Обозначим множество всех таких точек x_0 через F. Множество F имеет меру нуль как подмножество множества нулевой меры Лебега.

В силу того, что множество $A = I_y \cup F$ — замкнуто, оно измеримо. Следовательно, множество I_y — измеримо, как разность измеримого множества и множества меры нуль.

Тем самым установлена измеримость функции, имеющей множество точек разрыва нулевой меры Лебега.

Рассмотрим далее функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[a, b]$, ограниченную и измеримую на нем. Тогда для некоторого $M > 0$ для всех точек $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x)| < M$. Отрезок $[-M, M]$ на оси ординат разобьем на n равных частей: $-M < y_0 < y_1 \cdots < y_n = M$. Множество точек x, удовлетворяющих условию $y_s \leq f(x) < y_{s+1}$, обозначим через E_s, $s = 0, \ldots, n-1$. Заметим, что множество E_s — измеримо. Положим $\mu_s = \mu(E_s)$.

Определение 2. *Сумму* $S_n = \sum\limits_{s=0}^{n-1} \mu_s y_s$ *назовем* **интегральной суммой Лебега.**

Можно доказать, что всегда существует предел $I = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Этот предел называется **интегралом Лебега** от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается так: $(L)\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Поскольку для любой интегрируемой по Риману функции множество точек разрыва имеет меру нуль (критерий Лебега), в силу доказанного выше она измерима по Лебегу. Более того, интеграл Лебега от этой функции равен интегралу Римана. Действительно, пусть $T : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x), M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$. Тогда для интеграла Лебега имеют место неравенства

$$m_i \Delta x_i \leq (L)\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \leq M_i \Delta x_i.$$

Следовательно, в силу аддитивности интеграла Лебега, для верхней $S(T)$ и нижней $s(T)$ сумм Дарбу получим

$$s(T) \leq (L)\int\limits_a^b f(x)\,dx \leq S(T).$$

Отсюда, переходя к пределу при диаметре Δ_T разбиения T, стремящемся к нулю, будем иметь

$$\lim_{\Delta_T \to 0} s(T) = \lim_{\Delta_T \to 0} S(T) = (R) \int_a^b f(x)\, dx.$$

Таким образом, мы доказали, что интеграл Лебега равен интегралу Римана, если последний существует. Заметим, что поэтому для интеграла Лебега используется то же обозначение, что и для интеграла Римана.

Перейдем теперь к рассмотрению неограниченных измеримых функций на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим сначала случай неотрицательной функции $f(x)$. Для любого вещественного числа y определим функцию $f_y(x)$ следующим образом:

$$f_y(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad |f(x)| \le y, \\ y, & \text{если} \quad |f(x)| > y. \end{cases}$$

Эта функция измерима. Тогда **интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется предел

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{y \to \infty} \int_a^b f_y(x)\, dx.$$

Если этот предел конечен, то функция $f(x)$ называется **суммируемой.** Очевидно, что суммируемая функция может обращаться в бесконечность лишь на множестве лебеговой меры нуль.

Пусть теперь функция $f(x)$ принимает значения произвольного знака. Тогда определим функции

$$f_+(x) = \max(f(x), 0), \; f_-(x) = \max(-f(x), 0).$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ **суммируема,** если суммируемы обе функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$, и интеграл от функции $f(x)$ равен разности интегралов от функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$.

Отметим, что в случае ограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ понятия суммируемой и измеримой функций совпадают. Из определения суммируемой функции непосредственно следует, что:

1) вместе с $f(x)$ будет суммируемой функция $|f(x)|$, при этом модуль интеграла от подынтегральной функции $f(x)$ не превосходит интеграла от модуля этой функции;

2) если $f(x)$ — измерима и $|f(x)|$ — суммируема, то функция $f(x)$ — суммируема;

3) если $f(x)$ — измерима и модуль ее не превосходит суммируемой функции $g(x)$, то функция $f(x)$ — суммируема;

4) если $f(x)$ — суммируема и $g(x)$ — ограниченная измеримая функция, то их произведение является суммируемой функцией;

5) если $f(x)$ — суммируемая функция и $g(x)$ не совпадает с ней на множестве меры нуль, то функция $g(x)$ — суммируема, и интегралы от этих функций равны между собой.

Отметим еще, что для интеграла Лебега от суммируемой функции верны те же свойства, что и для интеграла Римана, но кроме этого добавляется еще одно важное свойство: **свойство счетной аддитивности интеграла Лебега.** Его можно сформулировать так.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано счетное разбиение единицы, т.е. задано счетное множество измеримых функций $g_n(x)$, принимающих всего два значения 0 и 1, причем для любого $x \in [a, b]$ одна и только одна функция $g_n(x)$ отлична от нуля. Тогда для всякой суммируемой функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f(x) g_n(x)\,dx.$$

Это свойство можно сформулировать и по-другому. Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на непересекающееся семейство измеримых множеств E_n. Тогда интегралы от функции $f(x)$ по множествам E_n существуют и имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)\,dx.$$

Интеграл по множеству E_n можно записать и так:

$$\int_{E_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x) g_n(x)\,dx,$$

где $g_n(x)$ — индикаторная функция множества E_n, т.е.

$$g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in E_n, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin E_n. \end{cases}$$

В заключение отметим, что в случае интеграла Лебега упрощается по сравнению с интегралом Римана предельный переход под знаком интеграла. Приведем точную формулировку этого утверждения.

Т е о р е м а (теорема Лебега). *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *последовательность измеримых функций* $f_n(x)$ *сходится к функции* $f(x)$ *и пусть для некоторой суммируемой функции* $g(x)$ *на отрезке* $[a,b]$ *выполнено неравенство* $|f_n(x)| \le g(x)$. *Тогда предельная функция* $f(x)$ — *суммируема и имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы абсолютные величины функций $f_n(x)$, $n \ge 1$, не превосходят суммируемой функции $\varphi(x)$. Следовательно, и абсолютная величина предельной функции $f(x)$ не превосходит $\varphi(x)$, и значит, она является суммируемой функцией.

Нам надо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b g_n(x)\,dx = 0$, где $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$.

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Для каждого $n \ge 1$ определим множество A_n тех точек x, для которых $|g_n(x)| \ge \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$. Тогда в силу упомянутого выше свойства счетной аддитивности меры Лебега справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n = 0$. В противном случае нашлась бы точка x такая, что для бесконечного множества значений n выполнялось неравенство $|g_n(x)| \ge \varepsilon_1$. А это противоречит тому, что

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0.$$

Представим интеграл $J = \int\limits_a^b g_n(x)\,dx$ в виде

$$J = J_1 + J_2, \text{где} \quad J_1 = \int\limits_{I\setminus A_n} g_n(x)\,dx, J_2 = \int\limits_{A_n} g_n(x)\,dx, \quad I = [a,b].$$

По теореме о среднем имеем

$$|J_1| \le \epsilon_1(b-a) = \frac{\epsilon}{3},$$

а для интеграла J_2 справедлива оценка

$$|J_2| \le \int\limits_{A_n} |g_n(x)|\,dx \le 2\int\limits_{A_n} \varphi(x)\,dx.$$

Пусть $B_m = \{x \in A_n \mid \varphi(x) \ge m\}$. Тогда в силу сходимости интеграла $\Phi = \int\limits_{A_n} \varphi(x)\,dx$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{B_m} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Следовательно, существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $m > m_0$ имеет место неравенство $\left|\int\limits_{B_m} \varphi(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Далее, представим интеграл Φ в виде $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где

$$\Phi_1 = \int\limits_{B_m} \varphi(x)\,dx,\ \Phi_2 = \int\limits_{A_n\setminus B_m} \varphi(x)\,dx.$$

В силу теоремы о среднем имеем

$$|\Phi_2| \le m\mu(A_n \setminus B_m) \le m\mu(A_n).$$

Поскольку мера множества A_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то при любом фиксированном $m > m_0$ можно указать $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ справедливо неравенство

$$|\Phi_2| \le m\mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, для любого $\epsilon > 0$ мы нашли $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_a^b g_n(x)\,dx\right| < \varepsilon, \quad \text{т.е.} \quad \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b g_n(x)\,dx = 0.$$

Теорема доказана.

Отметим еще один факт, состоящий в том, что для ограниченной неотрицательной функции интегрируемость по Лебегу эквивалентна измеримости по Лебегу ее криволинейной трапеции.

Для более полного изучения теории интеграла Лебега можно познакомиться со следующими оригинальными работами: H. Lebesgue. Intégrale, Longueur, Aire. Thèse, Paris, 1902; C. de la Vallée Poussin. Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire. Gauthier – Villars et C^{ie}, Paris, 1916; А. Лебег. Интегрирование и отыскание примитивных функций, М. - Л., 1934; Н. Н. Лузин. Интеграл и тригонометрический ряд, ГИТТЛ, М. - Л., 1951; Ш. де ла Валле Пуссен. Курс анализа бесконечно малых. Т.1, ГТТИ, М. - Л., 1933.

Лекция 17

§ 3. ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА

Имеется еще одно обобщение понятия интеграла Римана — это **интеграл Стильтьеса.** Он отражает другую особенность интеграла Римана по сравнению с интегралом Лебега. Если мера Лебега и интеграл Лебега вводились для того, чтобы расширить класс измеримых множеств и класс интегрируемых функций, то введением интеграла Стильтьеса мы решаем другую задачу. Дело в том, что на интеграл

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

можно посмотреть вот с какой стороны. При фиксированном отрезке $[a,b]$ интеграл I — это число, которое ставится в соответствие каждой интегрируемой функции. Тем самым, интеграл Римана задает некоторую числовую функцию, определенную на множестве $\{f\}$ всех функций, интегрируемых на отрезке $[a,b]$. Сузим класс функций и будем рассматривать непрерывные функции, определенные на отрезке $[a,b]$. Множество всех таких функций принято обозначать символом $C[a,b]$, причем для каждой функции $f \in C[a,b]$ определяют величину $\|f\| = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, называемую **нормой функции** $f(x)$ в пространстве $C[a,b]$. Пусть $f \in C[a,b]$, тогда, как мы знаем, f — интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

$I(f)$ — линейная числовая функция, т.е. для любых $f,g \in C[a,b]$ и любых α, $\beta \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$.

Напомним, что числовые функции, определенные на множестве, элементами которого являются функции, во избежание путаницы, называют **функционалами.** Более того, функционал I, ставящий всякой функции $f \in C[a,b]$ в соответствие число $I(f)$, называется **линейным функционалом,** если выполняются следующие свойства:

1^0. Аддитивность: $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$ $\forall f_1, f_2 \in C[a,b]$;

2^0. Однородность: $I(cf) = cI(f)$ $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall f \in C[a,b]$;

3^0. Ограниченность: существует $M > 0$ такое, что для любой функции $f \in C[a,b]$ справедливо неравенство $|I(f)| \le M\|f\|$. Наименьшее из таких чисел M называется **нормой линейного функционала** I и обозначается $\|I\|$.

Таким образом, интеграл Римана $I(f)$ задает линейный функционал на пространстве $C[a,b]$. С помощью интеграла Римана на пространстве $C[a,b]$ можно построить много других линейных функционалов. Например, для любой фиксированной интегрируемой по Риману функции $g(x)$ на пространстве $C[a,b]$ можно задать линейный функционал

$$I_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Заметим, что, если функция $G(x)$ такова, что для всякого $x \in [a,b]$ справедливо равенство $g(x) = G'(x)$, то $I_g(f)$ можно представить в виде

$$I_g(f) = \int_a^b f(x)\,dG(x).$$

Для развития теории интегрирования и для некоторых ее приложений, например, для теории вероятностей, вариационного исчисления, теоретической механики, важно иметь ответ на вопрос: любой ли линейный функционал $\varphi(f)$ на пространстве $C[a,b]$ можно представить в таком виде, т.е. всегда ли найдется такая функция $g(x)$, что

$$\varphi(f) = I_g(f) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dG(x).$$

Легко понять, что если мы имеем дело с обычным интегралом Римана, то ответ отрицательный, так как тогда, например, функционал $\varphi(f) = f(x_0)$, где x_0 — фиксированная точка отрезка $[a,b]$ (в частности, $x_0 = \frac{a+b}{2}$) в таком виде представить нельзя. Но можно расширить понятие интеграла Римана таким образом, что уже любой линейный функционал $\varphi(f)$ на пространстве $C[a,b]$ можно будет представить в виде

$$\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dG(x).$$

Расширение понятия интеграла Римана в указанном направлении и достигается введением понятия **интеграла Стильтьеса**. Для этого нам потребуется определить новый класс функций.

Определение. *Функция $u(x)$ называется* **функцией с ограниченным изменением** *или, что то же самое,* **функцией ограниченной вариации** *на отрезке $[a,b]$, если существует вещественное число*

$M > 0$ такое, что для любого разбиения $T:\ a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ выполняется неравенство

$$V(f;T) = \sum_{s=1}^{n} |u(t_s) - u(t_{s-1})| < M.$$

Величина, равная $\sup\limits_{T} V(f;T) = V_a^b(f)$, называется **полным изменением или полной вариацией** функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Отметим следующие свойства функций с ограниченным изменением на отрезке.

1^0. Сумма двух функций с ограниченным изменением есть функция с ограниченным изменением.

Действительно, пусть $h(x) = f(x)+g(x)$. Тогда для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство $V(h,T) \le V(f,T) + V(g,T)$. Отсюда следует, что полное изменение $V_a^b(h)$ функции $h(x)$ не превосходит суммы полных изменений функций $f(x)$ и $g(x)$.

2^0. Ограниченная монотонная функция на отрезке $[a,b]$ — функция с ограниченным изменением.

Рассмотрим только случай неубывающей функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Имеем

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a).$$

3^0. Пусть $a < c < b$ и функция $f(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$, тогда имеет место равенство $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

Возьмем любые разбиения T_1 и T_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ и положим $T = T_1 \cup T_2$. Тогда $V(f,T) = V(f,T_1) + V(f,T_2)$. Так как

$$\sup_{T_1} V(f,T_1) = V_a^c(f),\ \sup_{T_2} V(f,T_2) = V_c^b(f),$$

то, переходя в предыдущем равенстве к супремумам по разбиениям T_1 и T_2, получим

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) = \sup_{T=T_1\cup T_2} V(f,T) \le V_a^b(f).$$

Возьмем теперь любое разбиение T отрезка $[a,b]$ и добавим к нему точку c. Получим разбиения T_1 отрезка $[a,c]$ и T_2 отрезка $[c,b]$. Тогда

$$V(f,T) \le V(f,T_1) + V(f,T_2).$$

Переходя в этом неравенстве к супремумам по всем разбиениям T, получим

$$V_a^b(f) \le \sup_{T}(V(f,T_1) + V(f,T_2)) \le V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

Вместе с ранее доказанным противоположным неравенством это дает

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

4^0. Каждая функция с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ может быть представлена как разность двух ограниченных монотонно возрастающих функций.

Положим $\varphi(x) = V_a^x(f)$. Тогда функция $\varphi(x)$ не убывает и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Далее, положим $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$. При $x_1 > x_2$ имеем

$$\psi(x_1) - \psi(x_2) = V_a^{x_1} - V_a^{x_2} - f(x_1) + f(x_2) = V_{x_2}^{x_1} - (f(x_1) - f(x_2)) \geq 0,$$

так как

$$V_{x_2}^{x_1} = \sup_T V(f, T) \geq \sup_T |\sum_{s=1}^{n}(f(a_s) - f(a_{s-1}))| = |f(x_2) - f(x_1)|.$$

5^0. Функция с конечным числом максимумов и минимумов на отрезке $[a, b]$ является функцией с ограниченным изменением.

Пусть отрезки $[x_{s-1}, x_s]$, $s = 1, \ldots, n$, задают участки монотонности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$V_a^b(f) = \sum_{s=1}^{n} V_{x_{s-1}}^{x_s}(f), \quad \text{где} \quad V_{x_{s-1}}^{x_s}(f) = |f(x_s) - f(x_{s-1})|.$$

Пример. Найти полное изменение функции $f(x) = \sin x$ при $x \in [0, 2\pi]$.

Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ на отрезки монотонности функции $\sin x$: $[0, \frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Тогда согласно свойствам 5^0 и 3^0 будем иметь:

$$V_0^x(\sin x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 2 - \sin x, & \text{если} \quad \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2, \\ 4 + \sin x, & \text{если} \quad 3\pi/2 \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция и $u(x)$ — функция с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$, и пусть $V = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,\ \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — размеченное разбиение отрезка $[a, b]$ и $T = T(V)$ — соответствующее ему неразмеченное разбиение. Пусть, кроме того,

$$\Delta_s u = u(t_s) - u(t_{s-1}),\ \sigma(V) = \sigma_u(V) = \sum_{s=1}^{n} f(\xi_s)\Delta_s u.$$

Тогда $\sigma(V)$ называется **интегральной суммой Стильтьеса.**

Если существует предел

$$\lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I_u(f),$$

то функция $f(x)$ называется **интегрируемой по функции** $u(x)$ на отрезке $[a,b]$, а величина $I = I_u(f)$ — **интегралом Стильтьеса** от функции $f(x)$ по функции $u(x)$ (или относительно функции $u(x)$) и обозначается так:

$$I = I_u(f) = \int_a^b f(x)\, du(x).$$

Этот предел можно рассматривать как предел по базе B, окончаниями которой $b = b_\delta$ служат множества, состоящие из размеченных разбиений U с диаметром $\Delta_U < \delta$. Следовательно, предел I единственен.

Докажем теперь одно достаточное условие существования интеграла Стильтьеса.

Теорема (достаточное условие интегрируемости). *Пусть функция $u(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$. Тогда для существования интеграла Стильтьеса $\int_a^b f(x)\, du(x)$ достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на $[a,b]$.*

Доказательство. По критерию Коши имеем, что существование предела интегральных сумм Стильтьеса, $\lim\limits_{\Delta_U \to 0} \sigma(U)$, эквивалентно выполнению условия Коши: для всякого $\varepsilon > 0$ должно найтись число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых размеченных разбиений U_1 и U_2 с условием $\Delta_{U_1} < \delta$, $\Delta_{U_2} < \delta$, следует, что справедливо неравенство $|\sigma(U_1) - \sigma(U_2)| < \varepsilon$.

Обозначим через v полное изменение функции $u(x)$ на отрезке $[a,b]$. Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых x_1, x_2 с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_1 = \varepsilon/2v$. Возьмем теперь любые размеченные разбиения U_1 и U_2 с диаметрами Δ_{U_1} и Δ_{U_2}, меньшими δ. Пусть $T_1 = T(U_1)$ и $T_2 = T(U_2)$ — соответствующие им неразмеченные разбиения отрезка $[a,b]$. Разбиение $T_3 = T_1 \cup T_2$ является измельчением разбиений T_1 и T_2, и пусть U_3 — произвольное разбиение с условием $T_3 = T(U_3)$. Тогда

$$|\sigma(U_1) - \sigma(U_3)| = \Big|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i u - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} f(x_{i,j})\Delta_{i,j} u\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} (f(x_i) - f(x_{i,j}))\Delta_{i,j} u\Big| < \epsilon_1 v.$$

Аналогично доказывается, что $|\sigma(U_2)-\sigma(U_3)|<\epsilon_1 v$. Следовательно,

$$|\sigma(U_1)-\sigma(U_2)|<|\sigma(U_1)-\sigma(U_3)|+|\sigma(U_3)-\sigma(U_2)|<2\epsilon_1 v=\epsilon.$$

Теорема доказана.

Укажем основные свойства интеграла Стильтьеса.

1^0. Если функция $u(x)$ дифференцируема, то имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,du(x)=\int\limits_a^b f(x)u'(x)\,dx,$$

где последний интеграл понимается как интеграл Римана.

2^0. *Свойство линейности:*

$$\int\limits_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,du(x)=\int\limits_a^b f_1(x)\,du(x)+\int\limits_a^b f_2(x)\,du(x),$$

$$\int\limits_a^b \alpha f(x)\,du(x)=\alpha\int\limits_a^b f(x)\,du(x)\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

3^0. При $a<c<b$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,du(x)=\int\limits_a^c f(x)\,du(x)+\int\limits_c^b f(x)\,du(x),$$

(*свойство аддитивности*).

4^0. Если $f'(x)$ и $u(x)$ интегрируемы по Риману, то имеет место следующее *правило интегрирования по частям:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,du(x)=f(x)u(x)\big|_a^b-\int\limits_a^b f'(x)u(x)\,dx,$$

где последний интеграл понимается как интеграл Римана.

5^0. Если $u(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[a,b]$ и $f(x)\geq g(x)$ на этом отрезке, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,du(x)\geq\int\limits_a^b g(x)\,du(x).$$

Приведем примеры вычисления интегралов Стильтьеса.

1. Пусть $\{x\}$ — дробная часть числа x, т.е. $\{x\} = x - [x]$, где $[x] = m \in \mathbb{Z}$ — целая часть числа x, $m \leq x < m + 1$. Найти значение интеграла $\int\limits_0^3 x\, d\{x\}$.

Имеем:

$$\int\limits_0^3 x\, d\{x\} = \int\limits_0^3 x\, dx + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = -1,5.$$

2. Пусть

$$u(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad 0 \leq x < \pi, \\ \cos x, & \text{если} \quad \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

Вычислить интеграл $I = \int\limits_0^{2\pi} x\, du(x)$.

Имеем:

$$I = \int\limits_0^{\pi} x\, d\sin x + \int\limits_{\pi}^{2\pi} x\, d\cos x + (-1) \cdot \pi = -2.$$

В заключение приведем теорему об общем виде линейного функционала в пространстве $C[a, b]$.

Т е о р е м а. *1) Пусть функция $u(x)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a, b]$. Тогда интеграл Стильтьеса*

$$I(f) = \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

является линейным функционалом в пространстве $C[a, b]$.

2) Пусть $I(f)$ — любой линейный функционал в $C[a, b]$. Тогда существует функция $u(x)$ с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ такая, что $I(f)$ представляется в виде

$$I(f) = \int\limits_a^b f(x)\, du(x).$$

Мы не будем давать полного доказательства этой теоремы, остановимся только на его основных моментах.

1) Аддитивность и однородность $I(f)$ следует из линейности интегральных сумм Стильтьеса $\sigma(U)$, соответствующих размеченному разбиению U отрезка $[a, b]$, $T = T(U)$. Для этой суммы справедливо неравенство

$$|\sigma(U)| \leq \|f\| \cdot V(u, T) \leq \|f\| \cdot V_a^b(u).$$

Переходя в нем к пределу при $\Delta_V \to 0$, получим

$$|\int_a^b f(x)\,du(x)| \le \|f\| V_a^b(u).$$

Тем самым, доказана ограниченность $I(f)$.

2) Пусть $I(f)$ — линейный функционал на пространстве $C[a,b]$. Этот функционал можно продолжить на пространство ступенчатых функций. Пусть отрезок $[a,\beta]$ содержится в отрезке $[a,b]$. Тогда положим

$$\chi_\beta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = a,\ \beta < x \le b, \\ 1, & \text{если} \quad a < x \le \beta. \end{cases}$$

Далее определим функцию $I_\beta(\chi) = u(\beta)$. Эта функция $u(\beta)$ имеет ограниченное изменение на отрезке $[a,b]$.

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Тогда в силу равномерной непрерывности $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ будем иметь, что существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x_1, x_2 с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Возьмем теперь размеченное разбиение $U : \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ с диаметром Δ_U, меньшим δ.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(\xi_1)\chi_{x_1}(x) + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)(\chi_{x_k}(x) - \chi_{x_{k-1}}(x)).$$

Отсюда имеем

$$I(\varphi) = f(\xi_1)u(x_1) + \sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)(u(x_k) - u(x_{k-1})).$$

Далее, из определения функции $\varphi(x)$ получим, что для любого $x \in [a,b]$ справедливо неравенство $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Следовательно, имеем

$$|If - I\varphi| = |I(f - \varphi)| \le \varepsilon\|I\|.$$

А это означает, что при $\Delta_U \to 0$ величина If является пределом величин $I\varphi$, но предел $I\varphi$ представляет собой интеграл Стильтьеса

$$\int_a^b f(x)\,du(x).$$

На этом и завершается доказательство теоремы.

Глава XIII
НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Лекция 18

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ

В предыдущей главе было показано, что с помощью интеграла Стильтьеса можно выражать линейные функционалы, определенные на пространстве непрерывных функций $C[a, b]$. На примере пространства $C[a, b]$ мы познакомились с функциональным пространством. Может возникнуть вопрос: почему множество $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций называется пространством? Ответ достаточно прост. Дело в том, что термин "пространство" по существу эквивалентен термину "множество". Отличие состоит в том, что термин пространство "в чистом виде" употребляется редко, а чаще в сочетании с другими терминами, например: топологическое пространство, метрическое, линейное, нормированное пространства и т.д. Все эти понятия играют важную роль в математике вообще и в математическом анализе в частности. Здесь мы познакомимся с некоторыми из них. Рассмотрим следующую схему.

Пространства

↙ ↘

Топологические   Линейные (векторные)

↓ ↘ ↓

Хаусдорфовы   Линейные топологические

↓ ↓

Метрические ⟶ Нормированные

↙ ↙

Полные ⟶ Банаховы ⟶ Гильбертовы ⟶ Евклидовы

На этой схеме показаны те некоторые из рассматриваемых в математике пространств, определения которых мы дадим. Стрелки имеют следующий смысл: то пространство, на которое указывает стрелка, является частным случаем того, из которого она "выходит".

Перейдем к определению пространств, указанных на схеме.

Пусть X — некоторое множество, $\Sigma = \Sigma_X$ — множество, состоящее из некоторых подмножеств множества X, т.е. $\Sigma \subset \Omega(X)$, где $\Omega(X)$ — множество всех подмножеств X. Пусть Σ обладает следующими свойствами:

1^0. $X \in \Sigma$, $\varnothing \in \Sigma$;

2^0. а) Если A и $B \in \Sigma$, то $A \cap B \in \Sigma$;

б) Объединение любого числа элементов из Σ принадлежит Σ.

Для того чтобы указать, что элементами Σ являются некоторые подмножества множества X, говорят, что Σ есть некоторая **система подмножеств.**

Определение 1. *Каждая система подмножеств Σ, удовлетворяющая свойствамм 1^0 и 2^0, называется* **топологией** *на множестве X.*

Определение 2. *Пара множеств (X, Σ) называется* **топологическим пространством.**

Часто говорят просто, что X — топологическое пространство, если на нем задана топология Σ. Каждый элемент $\sigma \in \Sigma$, т.е. каждое подмножество $\sigma \subset X$, принадлежащее системе Σ, называется **открытым множеством** (в топологии Σ).

Любое подмножество $A \subset X$ такое, что $X \setminus A \in \Sigma$, называется **замкнутым множеством** (в топологии Σ).

Пусть x — некоторая точка, принадлежащая X. Тогда любой элемент $\sigma \in \Sigma$, которому принадлежит точка x, называется **окрестностью точки** x, т.е. любое открытое множество, содержащее точку x, называется ее окрестностью. Фиксированные окрестности точки x часто обозначают символом σ_x.

Определение 3. *Топологическое пространство $T = (X, \Sigma)$ называется* **хаусдорфовым,** *если любые две различные точки x и y этого пространства имеют непересекающиеся окрестности σ_x* и $\sigma_y \in \Sigma$, т.е.

$$\sigma_x \cap \sigma_y = \varnothing.$$

Пример хаусдорфова пространства $(\mathbb{R}, \Sigma)$. Пусть множество Σ состоит из всевозможных подмножеств вещественной оси $\mathbb{R}$, имеющих в своем составе конечное или счетное число непересекающихся интервалов. Тогда пространство $(\mathbb{R}, \Sigma)$ является хаусдорфовым, поскольку любые две различные точки x и y можно окружить непересекающимися открытыми δ-окрестностями.

Отметим, что изучение различных топологических пространств составляет предмет теоретико-множественной топологии.

Определение 4. *Пусть задан декартов квадрат $X^2 = X \times X$ некоторого множества X и пусть на множестве X^2 определена числовая функция $\rho(x_1, x_2)$ со следующими свойствами:*

1) для любых $(x_1, x_2) \in X^2$ имеем $\rho(x_1, x_2) \geq 0$, причем $\rho(x_1, x_2) = 0$, если $x_1 = x_2$ (неотрицательность);

2) для любых $(x_1, x_2) \in X^2$ имеем $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$ (симметричность);

3) для любых $x, y, z \in X$ справедливо неравенство треугольника: $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Тогда пара (X, ρ) или само множество X называется **метрическим пространством**, *а функция $\rho(x_1, x_2)$ называется* **метрикой** *этого пространства, или* **расстоянием** *от точки x_1 до точки x_2, или* **функцией расстояния.**

Примеры. 1. Пусть X — произвольное множество и

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = y, \\ 1, & \text{если} \quad x \neq y, \end{cases}$$

тогда пара (X, ρ) является метрическим пространством.

2. Пусть на множестве вещественных чисел расстояние задается по формуле $\rho(x, y) = |x - y|$, тогда пара $(\mathbb{R}, \rho)$ является метрическим пространством.

Отметим, что метрику на одном и том же множестве X можно задавать по-разному. При этом получаются различные метрические пространства. Например, на плоскости $\mathbb{R}^2$ можно задать расстояние между точками $\bar{x} = (x_1, x_2)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2)$ как по формуле

$$\rho_0(\bar{x}, \bar{y}) = \max\left(|x_1 - y_1|, \ |x_2 - y_2|\right),$$

так и по формуле

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Для всякого числа $\varepsilon > 0$ определим открытые ε-окрестности точек $x \in X$ в метрическом пространстве (X, ρ) (обозначим их через $\sigma_x(\epsilon)$) как множество точек, содержащееся в X и состоящее изо всех точек точек $y \in X$ с условием $\rho(x, y) < \varepsilon$. Множества σ, являющиеся объединением любой совокупности, составленной из ε-окрестностей различных точек $x \in X$, назовем **открытыми.** Тогда можно показать, что система множеств $\Sigma = \{\sigma\}$ задает на множестве X **топологию** и превращает это множество в **топологическое хаусдорфово пространство.** Заданная топология называется **топологией, порожденной метрикой** ρ.

Определение 5. *Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ метрического пространства (X, ρ) называется* **последовательностью Коши** *или чаще* **фундаментальной последовательностью,** *если она удовлетворяет* **условию Коши,** *а именно: для всякого числа $\epsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\epsilon)$ такой, что для всех номеров $n_1, n_2 > n_0$ имеем $\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) < \epsilon$.*

Определение 6. *Последовательность $\{x_n \in X\}$ называется* **сходящейся** *к точке $a \in X$, если числовая последовательность $\rho_n = \rho(x_n, a)$ сходится к нулю при n, стремящемся к бесконечности.*

Этот факт записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Из неравенства треугольника легко можно показать, что такая точка $a \in X$ единственна.

Определение 7. *Метрическое пространство (X, ρ) называется* **полным,** *если всякая последовательность Коши сходится к некоторой точке $a \in X$.*

Теперь обратимся к линейным пространствам, которые должны быть знакомы из курса высшей алгебры.

Определение 8. *Множество $X = \{x\}$ назовем* **линейным пространством,** *если выполнены следующие условия:*

1) для любых двух элементов $x, y \in X$ однозначно определен элемент z такой, что $z = x + y$, называемый их *суммой,* причем:
а) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
б) $x + y = y + x$;
в) существует нулевой элемент 0, такой, что для любого $x \in X$ имеем $x + 0 = x$;
г) для всякого $x \in X$ существует обратный элемент $(-x)$, такой, что $x + (-x) = 0$;
2) для любого вещественного числа α и любого $x \in X$ определен элемент $\alpha x \in X$ (произведение элемента $x \in X$ на число $\alpha \in \mathbb{R}$), причем:
а) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
б) $1 \cdot x = x$;
3) операции сложения и умножения связаны свойством дистрибутивности:
а) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
б) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Примерами линейных пространств являются n-мерное векторное пространство, пространство непрерывных функций $C[a, b]$.

Элементы линейного пространства называются **векторами.**

Определение 9. *Линейное пространство X называется* **нормированным,** *если для любого вектора x определена его норма $\|x\|$, обладающая следующими свойствами:*

1) $\|0\| = 0$;
2) для любого $x \neq 0$ имеем $\|x\| > 0$;
3) для всякого вещественного числа α имеем $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
4) для любых элементов $x, y \in X$ справедливо неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Заметим, что пространство $C[a, b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, является нормированным пространством с нормой

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Утверждение. *Функция $\rho(x, y) = \|x - y\|$, определенная на декартовом квадрате X^2, где X — нормированное пространство, является метрикой на пространстве X.*

Доказательство. Покажем, что функция $\rho(x, y)$ является метрикой. Для этого надо проверить, что функция $\rho(x, y)$: 1) неотрицательна; 2) симметрична и 3) удовлетворяет неравенству треугольника.

Действительно, имеем:

1) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ и $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) $\rho(x, y) = \|x - y\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \rho(y, x)$;
3) пусть $a = x - z$, $b = z - y$, тогда имеем

$$\rho(x, y) = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| = \|x - z\| + \|z - x\| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Утверждение доказано.

Определение 10. *Полное нормированное пространство называется* **банаховым** *пространством.*

Теперь мы переходим к определению **гильбертова** пространства. Для этого нам потребуется определение скалярного произведения. Пусть на множестве X задана структура линейного пространства. Определим функцию $f(a, b)$ на декартовом квадрате X^2, т.е. на множестве пар (a, b), где $a \in X$, $b \in X$. Пусть далее функция $f(a, b)$ обладает следующими свойствами.

1^0. Для любого элемента $a \in X$ имеем $f(a, a) > 0$ при $a \neq 0$ (положительность).

2^0. Для любых элементов $a, b \in X$ имеем $f(a, b) = f(b, a)$ (симметричность).

3^0. Для любых элементов $a, b, c \in X$ имеем $f(a, b+c) = f(a, b)+f(a, c)$ (аддитивность).

4^0. Для любых элементов $a, b \in X$ и любого вещественного числа λ справедливо равенство $f(\lambda a, b) = f(a, \lambda b) = \lambda f(a, b)$ (однородность).

Функцию $f(a, b)$ со свойствами 1^0 – 4^0 называют **скалярным произведением.** Будем записывать ее просто как (a, b).

Оказывается, что функция $\sqrt{(a, a)} = ||a||$ является нормой, и само пространство X с этой нормой, таким образом, является **нормированным.**

В самом деле, неотрицательность и однородность функции $\sqrt{(a, a)}$ очевидна. Осталось проверить неравенство треугольника. Сначала докажем **неравенство Коши:**

$$(x, y)^2 \le (x, x)(y, y).$$

Положим $x_1 = \frac{x}{||x||}$, $y_1 = \frac{y}{||y||}$. Тогда последнее неравенство следует из того, что $|(x_1, y_1)| \le 1$. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $(x_1, y_1) \ge 0$, и тогда имеем

$$0 \le (x_1 - y_1, x_1 - y_1) = (x_1, x_1) + (y_1, y_1) - 2(x_1, y_1) = 2 - 2(x_1, y_1),$$

откуда получим $(x_1, y_1) \le 1$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь **неравенство треугольника:**

$$\sqrt{(x + y, x + y)} \le \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}.$$

Используя неравенство Коши, имеем

$$||x + y||^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + 2(x, y) \le$$

$$\le ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| = (||x|| + ||y||)^2.$$

Полное метрическое пространство X с метрикой $\rho(x, y) = ||x - y||$ называется **гильбертовым** пространством. Следовательно, гильбертово пространство — частный случай банахова пространства X с нормой $||x|| = \sqrt{(x, x)}$. Конечномерное гильбертово пространство называется **евклидовым** пространством. Рассмотрением этих пространств мы и ограничимся, и в дальнейшем более подробно будем изучать метрические пространства.

Лекция 19

§ 2. ХАУСДОРФОВОСТЬ МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА В ЕСТЕСТВЕННОЙ ТОПОЛОГИИ

Сначала введем понятие открытого множества в метрическом пространстве.

Определение 1. *При любом $\varepsilon > 0$* **открытым шаром** *$O(a,\varepsilon)$ радиуса ε с центром в точке a в метрическом пространстве (X,ρ) называется множество, состоящее из всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию*

$$\rho(a,x) < \varepsilon.$$

Определение 2. *Шар $O(a,\varepsilon)$ называется также* **ε-окрестностью** *точки a.*

Определение 3. *Множество точек $K(a,\varepsilon)$, определяемое условием $\rho(a,x) \le \varepsilon$, называется* **замкнутым** *шаром радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке a.*

Заметим, что при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ имеем

$$O(a,\varepsilon_1) \subset O(a,\varepsilon_2), \ K(a,\varepsilon_1) \subset K(a,\varepsilon_2).$$

Определение 4. *Точка $a \in M \subset X$ называется* **внутренней** *точкой множества M, если она имеет ε-окрестность, целиком составленную из точек множества M.*

Определение 5. *Множество M называется* **открытым,** *если любая его точка является внутренней.*

Пример. Для всякой точки $a \in X$ любая ее ε-окрестность будет открытым множеством.

Действительно, если точка $y \in O(a,\varepsilon)$, то имеем $\rho_0 = \rho(a,y) < \varepsilon$. Возьмем ε_1 - окрестность точки y, где $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon-\rho_0}{2}$. Тогда эта окрестность целиком принадлежит множеству $O(a,\varepsilon)$, так как для всякой точки $z \in O(y,\varepsilon_1)$ из неравенства треугольника имеем

$$\rho(a,z) \le \rho(a,y) + \rho(y,z) < \rho_0 + \frac{\varepsilon - \rho_0}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\rho_0}{2} < \varepsilon,$$

т.е. $\rho(a,z) < \varepsilon$, следовательно, точка $z \in O(a,\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Докажем несколько свойств открытых и замкнутых множеств.

Утверждение 1. *Пересечение двух открытых в X множеств M_1 и M_2 — открытое множество.*

Доказательство. Пусть $x \in M_1 \cap M_2$, тогда $x \in M_1$, $x \in M_2$. Поскольку M_1 и M_2 — открытые множества, найдется ε_1-окрестность точки x, содержащаяся в M_1, и найдется ε_2-окрестность точки x, содержащаяся в M_2. Возьмем $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Тогда ε-окрестность точки x принадлежит и множеству M_1, и множеству M_2, т.е. ε-окрестность точки x содержится в $M_1 \cap M_2$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Объединение V любого числа открытых множеств M является открытым множеством.*

Доказательство. Возьмем любую точку $x \in V$. Тогда существует множество $M \subset V$ такое, что $x \in V$, и точка x — внутренняя точка множества M. Следовательно, существует ε-окрестность точки x, целиком содержащаяся в M, а значит, содержащаяся в V, что и требовалось доказать.

Итак, введенные нами открытые множества образуют топологию, которую называют **естественной топологией** метрического пространства. Это пространство будет и хаусдорфовым. Действительно, пусть x, y — любые точки метрического пространства X и $x \neq y$, $\rho(x, y) = \rho_0 > 0$, тогда окрестности $O(x, \frac{\rho_0}{3})$ и $O(y, \frac{\rho_0}{3})$ этих точек, согласно неравенству треугольника, не пересекаются. Если бы существовал элемент $z \in O(x, \frac{\rho_0}{3}) \cap O(y, \frac{\rho_0}{3})$, то

$$\rho_0 = \rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{\rho_0}{3} + \frac{\rho_0}{3} = \frac{2\rho_0}{3},$$

т.е. $\rho_0 = 0$, но это не так.

§ 3. ВНУТРЕННИЕ, ВНЕШНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Определение 1. *Любое открытое множество σ, содержащее точку x, называется* **окрестностью** *точки x.*

Определение 2. *Всякое множество $\varkappa$ метрического пространства X, дополнение которого $\sigma = X \backslash \varkappa$ — открыто, называется* **замкнутым.**

Определение 3. Внешней *точкой множества A называется всякая внутренняя точка его дополнения $B = X \setminus A$.*

Определение 4. *Точка z называется* **граничной** *точкой множества A, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой этого множества.*

Множество $\{z\}$ всех граничных точек A называется **границей** и обозначается через ∂A.

Утверждение 1. *Пусть $B = X \setminus A$. Тогда $\partial A = \partial B$, т.е. множества A и B имеют общую границу.*

Действительно, если z — граничная точка множества A, то любая ее окрестность содержит как точки из множества A, так и точки из множества B, а потому z — граничная точка множества B. И наоборот, если $z \in \partial B$, то $z \in \partial A$. Следовательно, границы множеств A и B совпадают, т.е. $\partial A = \partial B$, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Если множество A — замкнуто, то $\partial A \subset A$.*

Действительно, в силу того, что множество $B = X \setminus A$ — открыто, точки его границы ∂B не принадлежат B, а значит, они принадлежат его дополнению, т.е. множеству A и $\partial B \subset A$, но так как $\partial A = \partial B$, то $\partial A \subset A$, что и требовалось доказать.

Определение 5. а) *Точка a называется* **предельной** *точкой множества A, если в любой ε-окрестности точки a содержится хотя бы одна точка $x \in A$ такая, что $x \neq a$.*

б) *Точка a называется* **предельной** *точкой множества A, если существует последовательность точек $\{x_n\} \subset A$, $x_n \neq a$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

Утверждение 3. *Определения* а) *и* б) *эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что из а) следует б). Для этого нам надо построить последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к a, $x_n \neq a$. Строим ее так. Точку $x_1 \in A$ выбираем произвольно в 1-окрестности точки a, точку x_2 — в $1/2$-окрестности точки a и т.д. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ вне любой ε-окрестности точки a содержится не более $n_0 = n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ точек последовательности $\{x_n\}$, т.е. точка a является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Докажем теперь, что из б) следует а). Поскольку последовательность $\{x_n\}$ бесконечна и вне любой окрестности точки a лежит лишь конечное число членов последовательности, в ней содержится хотя бы один член этой последовательности, что и требовалось доказать.

Определение 6. *Если точка $x \in A$, но не является предельной точкой множества A, то она называется* **изолированной** *точкой множества A.*

Теперь заметим, что в определении сходимости в полном метрическом пространстве последовательности $\{x_n\}$ к точке a не обязательно требовать, чтобы $\{x_n\}$ была фундаментальной, так как, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого $n > n_0$ выполнено неравенство $\rho(x_n, a) < \varepsilon/2$, то тогда для любых $n_1, n_2 > n_0$ имеем

$$\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) \le \rho(x_{n_1}, a) + \rho(x_{n_2}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.

Докажем еще одно простое утверждение.

Утверждение 4. *Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный числу a, то a — единственная ее предельная точка.*

Действительно, пусть b — другая предельная точка. Тогда $\rho(a,b) = \rho_0 > 0$. Возьмем $\rho_0/2$-окрестность точки a. Вне ее находится лишь конечное число точек последовательности. Тогда внутри $\rho_0/2$-окрестности точки b будет находиться лишь конечное число членов этой последовательности, быть может, ни одного. Противоречие. Следовательно, последовательность, имеющая предел, имеет единственную предельную точку, что и требовалось доказать.

Докажем теперь критерий замкнутости множества.

Теорема. а) *Множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

б) *Множество A замкнуто тогда и только тогда, когда его граница ∂A содержится в нем, т.е. $\partial A \subset A$.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение а).

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \in A$. Надо доказать, что $a \in A$. Точка a не может быть внешней для множества A, так как в любой ее окрестности есть точки из A. Значит, она является либо внутренней, либо граничной, т.е. $a \in A$ или $a \in \partial A \subset A$, и в обоих случаях точка a принадлежит множеству A. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть множество A содержит все свои предельные точки. Нам надо доказать, что его дополнение $B = X \setminus A$ является открытым множеством, т.е. любая точка $x \in B$ является внутренней точкой множества B. Если $x \in B$, то точка x или внутренняя точка B, или граничная точка B. В первом случае доказывать нечего. Разберем второй случай $x \in B$ и $x \in \partial B$, т.е. x — граничная точка множества B. Но с одной стороны эта точка не принадлежит A, так как $x \in B$, а с другой стороны — точка $x \in \partial B = \partial A$, т.е. в любой окрестности точки x есть точка из множества A, и потому $x \in A$ по условию теоремы, но это невозможно, так как $x \in B$, по нашему предположению, и $A \cap B = \varnothing$. Следовательно, точка $x \notin \partial B$, т.е. имеет место только первый случай: x — внутренняя точка множества B, что и требовалось доказать.

Докажем теперь утверждение б). *Необходимость.* Ранее мы уже доказали, что если A — замкнуто, то $\partial A \subset A$.

Достаточность. Нам надо доказать, что если $\partial A \subset A$, то множество $B = X \setminus A$ — открыто. Мы знаем, что $\partial A = \partial B$, и поэтому $\partial B \subset A$, откуда $\partial B \cap B = \varnothing$. Это значит, что граничные точки множества B в него не входят, а входят только внутренние точки B, т.е. точки множества B — внутренние. Следовательно, множество B — открыто, а значит, множество A — замкнуто.

Теорема доказана полностью.

§ 4. ЛЕММА О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СТЯГИВАЮЩИХСЯ ШАРОВ. ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим два свойства полных метрических пространств. Первое — лемма о последовательности стягивающихся шаров.

Лемма. *Пусть $K(x_1, r_1) \supset K(x_2, r_2) \supset \ldots$ — последовательность вложенных замкнутых шаров в полном метрическом пространстве X, причем $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Тогда существует единственная точка x_0, принадлежащая всем шарам.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что последовательность центров шаров $\{x_n\}$ будет фундаментальной. Действительно, зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Тогда существует $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для всякого $n > n_0$ имеем $r_n < \varepsilon$, а потому при любых $n_1 > n_2 > n_0$ согласно включению $K(x_{n_1}, r_{n_1}) \supset K(x_{n_2}, r_{n_2})$ имеем $\rho(x_{n_1}, x_{n_2}) \le r_{n_1} < \varepsilon$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет определению фундаментальной последовательности.

Так как $\{x_n\}$ — фундаментальна, то в силу полноты пространства X существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in X$, причем x_0 является предельной точкой для каждого шара, а поскольку они замкнуты, то для любого натурального числа n имеем $x_0 \in K(x_n, r_n)$.

Покажем, что точка x_0 является единственной точкой, принадлежащей одновременно всем шарам. Пусть это не так, т.е. найдется точка $y_0 \in \cap K(x_n, r_n)$, $\rho(x_0, y_0) = \rho$. Очевидно, существует n такое $r_n < \frac{\rho}{2}$. Из неравенства треугольника получим

$$\rho = \rho(x_0, y_0) \le \rho(x_n, x_0) + \rho(x_n, y_0) < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho.$$

Противоречие. Следовательно, x_0 является единственной общей точкой для всех шаров. Лемма доказана.

Определение. *Пусть X — полное метрическое пространство, и пусть $f : X \to X$ — отображение этого пространства в себя, причем существует вещественное число α с условием $0 < \alpha < 1$ такое, что для любых $a, b \in X$ имеем*

$$\rho(f(a), f(b)) \le \alpha\rho(a, b).$$

Тогда отображение f называется **сжимающим.**

Докажем теперь **принцип сжимающих отображений.**

Теорема. *Если $f : X \to X$ — сжимающее отображение, то существует единственная точка $x_0 \in X$ такая, что $f(x_0) = x_0$.*

Точка x_0 называется **неподвижной** точкой сжимающего отображения f.

Доказательство. Пусть x_1 — любая точка, принадлежащая X, $x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Действительно, пусть $\rho_n = \rho(x_n, x_{n+1})$. Тогда

$$\rho_n = \rho(x_n, x_{n+1}) = \rho(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha\rho(x_{n-1}, x_n) = \alpha\rho_{n-1}.$$

Следовательно, $\rho_n \leq \alpha^{n-1}\rho_1$. Отсюда, используя неравенство треугольника, получим

$$\rho(x_n, x_{n+m}) \leq \rho_n + \rho_{n+1} + \cdots + \rho_{n+m-1} \leq$$

$$\leq (\alpha^{n-1} + \alpha^n + \cdots + \alpha^{n+m-2})\rho_1 < \frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\rho_1.$$

Поскольку $0 < \alpha < 1$, при $n \to \infty$ имеем $\alpha^{n-1} \to 0$. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при любом $n > n_0$ и любом $m \geq 1$ выполняется неравенство $\rho(x_n, x_{n+m}) < \varepsilon$, что и означает фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Так как X — полное метрическое пространство, то существует точка x_0, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Теперь докажем, что $f(x_0) = x_0$. От противного. Пусть $f(x_0) = y_0 \neq x_0$ и $\rho(x_0, y_0) = h > 0$. Возьмем число $n_0 = n_0(h/2)$ такое, что для любого $n > n_0$ имеем $\rho(x_n, x_0) < h/2$. Тогда

$$\rho(x_{n+1}, y_0) = \rho(f(x_n), f(x_0)) \leq \rho(x_n, x_0) < \rho(x_n, x_0).$$

Следовательно,

$$\rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, y_0) < \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h = \rho(x_0, y_0),$$

что при $h > 0$ невозможно. Итак, x_0 — неподвижная точка отображения f. Она будет единственной неподвижной точкой, так как если a и b — неподвижные точки, т.е. $f(a) = a$, $f(b) = b$, то

$$\rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \leq \alpha\rho(a, b) < \rho(a, b),$$

что невозможно. Теорема доказана полностью.

Лекция 20

§ 5. НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Определение. *Пусть заданы два метрических пространства* (X, ρ_X) *и* (Y, ρ_Y), *и пусть определено отображение* $F : X \to Y$. *Тогда отображение* F *называется* **непрерывным в точке** x_0, *если для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для любого* x *с условием* $\rho_X(x, x_0) < \delta$ *имеет место неравенство* $\rho_Y(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$, т.е. *в пространстве* Y *любая* ε*-окрестность* $O_Y(F(x_0), \varepsilon)$ *точки* $F(x_0) \in Y$ *содержит целиком образ некоторой* δ*-окрестности этой точки при отображении* F, *а именно:*

$$F(O_X(x_0, \delta)) \subset O_Y(F(x_0), \varepsilon).$$

Пример. Сжимающее отображение $F : X \to X$ является непрерывным. В этом случае достаточно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Определим базу множеств $x \to x_0$ для точек метрического пространства X как множество всех открытых δ-окрестностей точки x_0. Тогда определение непрерывности выглядит так: $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, где $x, x_0 \in X$, $F(x), F(x_0) \in Y$.

Заметим также, что определение предела по базе множеств B отображения $F : X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y будет иметь вид: точка $y_0 \in Y$ называется пределом отображения $F : X \to Y$ по базе B, если для всякого $\epsilon > 0$ найдется окончание $b = b(\epsilon) \in B$ такое, что для всякой точки $x \in b$ имеем $\rho_Y(F(x), y_0) < \epsilon$. Для числовых функций остается прежнее определение предела функции $f : X \to \mathbb{R}$ по базе B со всеми доказанными ранее свойствами предела.

Докажем теперь теорему о непрерывности сложного отображения.

Т е о р е м а 1. *Пусть отображения* $F : X \to Y$ *и* $G : Y \to Z$ *таковы, что отображение* F *непрерывно в точке* $x_0 \in X$, *а отображение* G *непрерывно в точке* $y_0 = F(x_0) \in Y$. *Тогда композиция отображений* F *и* G, т.е. *отображение* $H : X \to Z$, *где* $H(x) = G(F(x))$, *является непрерывной функцией в точке* x_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $z_0 = G(y_0)$. Тогда справедливы равенства $H(x_0) = G(F(x_0)) = G(y_0) = z_0$. Так как отображение G непрерывно в точке y_0, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом $y \in O_Y(y_0, \delta)$ имеем $G(y) \in O_Z(z_0, \varepsilon)$.

Далее, в силу непрерывности отображения F в точке x_0 найдется $\delta_1 = \delta_1(\delta(\varepsilon)) > 0$, такое, что для всякого $x \in O_X(x_0, \delta_1)$ имеем $F(x) \in O_Y(y_0, \delta) = O_Y(y_0, \delta(\varepsilon))$.

Отсюда следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta_1 = \delta_1(\delta(\varepsilon)) > 0$ такое, что при любом $x \in O_X(x_0, \delta_1)$ имеем $H(x) = G(F(x)) \in O_Z(z_0, \varepsilon)$, т.е. отображение $H(x)$ непрерывно в точке x_0, что и требовалось доказать.

Т е о р е м а 2. *Пусть последовательность $\{x_n\}$ в метрическом пространстве X сходится к точке x_0, а отображение $F : X \to Y$ непрерывно в точке x_0. Тогда имеем*

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x_0), \text{ т.е. } F(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности отображения F для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого $x \in O_X(\delta)$ имеем $F(x) \in O_Y(F(x_0), \varepsilon)$.

Далее, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то можно указать $n_0 = n_0(\delta) = n_0(\delta(\varepsilon))$ такое, что для любого $n > n_0$ имеем $x_n \in O_X(x_0, \delta)$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Задачи. 1. Пусть функция $f(x, y)$ определена во всех точках квадрата $K \in \mathbb{R}^2$, и пусть для любого фиксированного y функция $g(x) = f(x, y)$ непрерывна для каждой точки x. Тогда внутри квадрата K найдется точка непрерывности $f(x, y)$ как функции двух переменных.

2. Пусть функция $f(x, y)$ определена на $\mathbb{R}^2$, и пусть для каждого фиксированного значения одной переменной она является многочленом по другой переменной. Тогда функция $f(x, y)$ является многочленом от двух переменных.

3. Построить замкнутое множество A, содержащееся внутри замкнутого единичного квадрата на плоскости xOy, которое обладает следующим свойством: для любого линейного замкнутого множества L на отрезке $[0, 1] \subset Ox$ найдется точка $y_L \in [0, 1] \subset Oy$ такая, что проекция на ось Ox множества точек плоскости, лежащих на пересечении с горизонтальной прямой $y = y_L$, точно совпадает с множеством L.

§ 6. ПОНЯТИЕ КОМПАКТА. КОМПАКТЫ В $\mathbb{R}^N$ И ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^N$. СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА КОМПАКТЕ

Определение 1. *Множество K в метрическом пространстве X называется* **компактом**, *если из любого покрытия открытыми множествами этого компакта можно выделить конечное подпокрытие.*

Определение 2. *Множество B метрическом пространстве называется* **ограниченным,** *если оно содержится в некотором шаре $O(x_0, r)$ с центром в точке x_0 и радиуса r.*

Лемма 1. *Компакт является ограниченным множеством.*

Доказательство. Пусть K обозначает компакт. Возьмем любую точку $x_0 \in K$. Тогда шары $O_n = O(x_0, n)$ в совокупности покрывают все пространство X, в том числе и K. В силу компактности K из них можно выделить конечное подпокрытие

$$\{O_{t_1} \subset O_{t_2} \subset \dots \subset O_{t_s},\ t_1 < t_2 < \dots < t_s;\ K \subset O_{t_s}\},$$

а это означает, что компакт K является ограниченным множеством. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть K — компакт. Тогда любая бесконечная последовательность $\{x_n\} \subset K$ имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую K.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Пусть последовательность $\{x_n\}$ не имеет предельных точек, принадлежащих K. Тогда любую точку $x \in K$ можно окружить своей ε-окрестностью $O(x, \varepsilon)$, внутри которой не будет точек из $\{x_n\}$, кроме, может быть, самой точки x. Получим покрытие компакта K открытыми множествами. Выберем из него конечное подпокрытие. Но тогда получим, что точками K, принадлежащими последовательности $\{x_n\}$, могут быть только центры выбранных ε-окрестностей, а их конечное число. Следовательно, множество точек последовательности $\{x_n\}$ — конечно. Противоречие. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Компакт K является замкнутым множеством.*

Доказательство. Достаточно показать, что компакт K содержит все предельные точки. Действительно, пусть x_0 — любая предельная точка K. Тогда можно указать последовательность $\{x_n\} \subset K$ такую, что при $n \neq m$ имеем $x_n \neq x_m$ и $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Отсюда по лемме 2 получим, что $x_0 \in K$. Лемма 3 доказана.

Перейдем теперь к описанию компактов в n-мерном пространстве и доказательству полноты пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Любой замкнутый куб в $\mathbb{R}^n$, т.е. множество точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ с условием $a_s \leq x_s \leq x_s + l$, $s = 1, \dots, n$, является компактом.*

Доказательство. Будем рассматривать только случай $\mathbb{R}^2$, так как общий случай $\mathbb{R}^n$ принципиальных отличий не имеет. Итак, пусть h — замкнутый квадрат покрыт бесконечной системой открытых множеств $\{U\}$. Надо доказать, что из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. Докажем это утверждение от противного. Разделим h на 4 равных квадрата прямыми, проходящими через середины его сторон, параллельно осям координат. Так как квадрат h не допускает конечного подпокрытия, то, по крайней мере, один из четырех новых замкнутых квадратов не допускает конечного подпокрытия. Тогда этот квадрат делим на 4 равных квадрата и т.д.

Мы получим систему вложенных квадратов. Их проекции на любую из двух осей образуют систему стягивающихся отрезков, которая имеет единственную общую точку, т.е. существует точка x_0 на оси Ox, и аналогично, точка y_0 на оси Oy такие, что x_0 принадлежит проекциям всех вложенных квадратов на ось Ox, а y_0 — проекциям на ось Oy. Но тогда точка $A = (x_0, y_0)$ принадлежит всем квадратам. Кроме того, она покрыта каким-то открытым множеством U_0 из покрытия $\{U\}$. Следовательно, найдется ε-окрестность $O(A, \varepsilon) \subset U_0$, целиком накрывающая некоторый квадрат из построенной системы вложенных квадратов. В частности, таким может быть квадрат K_0 с длиной стороны меньшей, чем $\varepsilon/\sqrt{2}$. Но тогда квадрат K_0 будет покрыт всего лишь одним множеством U_0. Противоречие. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть для любых двух точек $a, b \in \mathbb{R}^n$ определено скалярное произведение (a, b) и метрика $\rho(a, b)$ задается равенством $\rho(a, b) = \sqrt{(a - b, a - b)}$. Тогда метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ с метрикой ρ является полным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что любая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу этого пространства. Очевидно, что $\{x_n\}$ ограничена, и потому ее можно покрыть замкнутым кубом K. Поскольку K — компакт, по лемме 2 существует предельная точка $x_0 \in K$ последовательности $\{x_n\}$. Следовательно, $\{x_n\}$ сходится к x_0, так как фундаментальная последовательность не может иметь более одной предельной точки. Теорема 2 доказана.

Докажем теперь критерий компактности множества в $\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 3. *Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ является компактом тогда и только тогда, когда K ограничено и замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Если K — компакт, то по леммам 1 и 3 это множество ограничено и замкнуто.

Достаточность. Проведем доказательство от противного. Сначала в силу ограниченности K поместим его внутрь куба h. Предположим, что существует покрытие множества K открытыми множествами $\{U\}$, не допускающее конечного подпокрытия. Тогда куб h можно разбить на 2^n равных куба (аналогично разбиению теоремы 1). Далее возьмем один из получившихся кубов h_1, не допускающий конечного подпокрытия, и т.д. Последовательность кубов $\{h_n\}$ сходится к одной точке x_0, которая является предельной точкой K и потому принадлежит K. Некоторое открытое множество $U \in \{U\}$ покрывает эту точку. В силу того, что это множество открыто, оно будет покрывать и некоторый куб h_n, что противоречит построению h_n. Теорема 3 доказана.

Напомним, что числовой функцией на множестве A называется отображение $F : A \to \mathbb{R}$. Далее под термином "функция" мы будем понимать только числовые функции. Докажем несколько свойств функций, непрерывных на компакте.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$. Тогда:*

1) $f(x)$ — ограничена на K;

2) существуют x_1, $x_2 \in K$ такие, что

$$f(x_1) = M = \sup_{x\in K} f(x), \; f(x_2) = m = \inf_{x\in K} f(x).$$

Доказательство. 1) Для каждой точки $x \in K$ найдется окрестность $O(x, \delta(x))$ этой точки, в которой функция $f(x)$ ограничена. Эти окрестности образуют покрытие открытыми множествами. Выделим из него конечное подпокрытие и получим, что $f(x)$ ограничена на всем компакте K.

2) Проведем доказательство от противного. Пусть ни в какой точке функция $f(x)$ не принимает максимальное значение. Тогда функция $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ является непрерывной на компакте K. Следовательно, по утверждению 1) этой теоремы она ограничена. Отсюда имеем

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < M_1, \quad \text{или} \quad f(x) < M - \frac{1}{M_1},$$

т.е. число $M - \frac{1}{M_1}$ — верхняя грань значений функции $f(x)$, меньшая, чем M. Это противоречит определению числа M. В случае нижней грани значений функции $f(x)$ доказательство проводится аналогично. Теорема 4 доказана.

§ 7. СВЯЗНЫЕ МНОЖЕСТВА И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Определение 1. *Множество A в метрическом пространстве X называется* **связным**, *если при любом его разбиении на два непустых непересекающихся подмножества A_1 и A_2 они будут иметь общую граничную точку, принадлежащую A, т.е. точку a с условиями:*

1) $a \in A$;

2) в любой ϵ-окрестности точки a есть как точки из множества A_1, так и точки из множества A_2, отличные от a.

Примерами связных множеств на плоскости являются отрезок, прямоугольник, круг.

Связное открытое множество называется **областью**, а связное множество, являющееся компактом, — **континуумом.**

Т е о р е м а 1. *Пусть A — связное множество в $\mathbb{R}^n$, функция $F(x)$ непрерывна на A, и пусть существуют точки $x_1, x_2 \in A$, $F(x_1) = a$, $F(x_2) = b$, $a < b$. Тогда для любого числа $c \in (a, b)$ существует точка $x_3 \in A$ такая, что $F(x_3) = c$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим два множества

$$M_1 = \{x \in A \mid F(x) < c\}, \; M_2 = A \setminus M_1.$$

В силу связности множества A существует точка x_3, являющаяся граничной точкой как для множества M_1, так и для множества M_2. В каждой из окрестностей $O_n = O(x_3, 1/n)$ есть точка $a_n \in M_1$ и точка $b_n \in M_2$. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся к x_3. Тогда из непрерывности функции $F(x)$ имеем:

$$F(x_3) = F(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} F(a_n) \le c,$$

$$F(x_3) = F(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} F(b_n) \ge c,$$

т.е. в точке x_3 функция $F(x)$ равна c. Теорема 1 доказана.

Глава XIV
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Лекция 21

§ 1. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ В $\mathbb{R}^N$

Еще раз обратим внимание на тот факт, что поскольку понятие непрерывности функции определяется как предел функции по базе, над непрерывными функциями n переменных в точке $\bar{x} = \bar{x}_0$ можно совершать арифметические операции с сохранением их непрерывности с обычной оговоркой о необращении в нуль знаменателя частного $\frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}$ в точке $\bar{x} = \bar{x}_0$. Справедливы также теоремы о неравенствах для непрерывных функций в точке $\bar{x} = \bar{x}_0$ типа таких: если $f(\bar{x}_0) \geq g(\bar{x}_0)$, то в некоторой окрестности точки $\bar{x} = \bar{x}_0$ имеем $f(\bar{x}) \geq g(\bar{x})$.

Будем, как и раньше, говорить, что функция $f(\bar{x})$, заданная на множестве $A \subset \mathbb{R}^n$, является непрерывной на множестве $B \subset A$, если $f(\bar{x})$ непрерывна для любой точки $\bar{x} \in B$. Напомним, что для функции, непрерывной на компакте, справедливы теоремы об ограниченности функции на нем, о достижении ею точной верхней и точной нижней граней и о равномерной непрерывности, а для непрерывной функции, заданной на связном множестве, справедлив аналог теоремы о промежуточном значении.

Но кроме этих свойств есть свои специфические особенности функций многих переменных.

Пусть $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — некоторая точка из $\mathbb{R}^n$ и функция $f(\bar{x})$ определена в некоторой окрестности точки $\bar{a}$. Выделим одну из координат точки $\bar{a}$. Пусть это будет координата с номером s, $1 \leq s \leq n$, и обозначим через $M \subset \mathbb{R}^n$ множество всех тех точек, у которых все координаты, кроме s-й, совпадают с координатами точки $\bar{a}$. Если в качестве аргумента $\bar{x}$ рассматривать точки $\bar{x} \in M$, то мы получим функцию $\varphi(x_s)$ одной переменной x_s, $\varphi(x_s) = f(a_1, \ldots, x_s, \ldots, a_n)$. Например, если $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2$, то $\varphi(x_2) = a_1^2 + a_1 x_2$.

Определение 1. *Будем говорить, что функция $f(\bar{x})$* **непрерывна в точке $\bar{a}$ по переменной x_s**, *если $\varphi(x_s)$ непрерывнf в точке $x_s = a_s$.*

Можно дать более общее определение непрерывности функции $f(\bar{x})$ по любому направлению.

Определение 2. Направлением *в $\mathbb{R}^n$ называется любой единичный вектор $\bar{e} \in \mathbb{R}^n$.*

Определение 3. *Множество всех точек $\bar{x}$ вида $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{e}$ называется:*

а) **открытым лучом,** *выходящим из точки $\bar{a}$ в направлении $\bar{e}$, если $t > 0$;*

б) **замкнутым лучом,** — *если $t \geq 0$;*

в) **прямой,** *проходящей через точку $\bar{a}$ в направлении $\bar{e}$, если t — произвольное вещественное число.*

Рассмотрим функцию $\psi(t) = f(\bar{a} + t\bar{e})$.

Определение 4. *Будем говорить, что* **функция** $f(\bar{x})$ **непрерывна в точке** $\bar{a}$ **по направлению** $\bar{e}$, *если $\psi(t)$ непрерывна в точке $t = 0$.*

Имеет место следующее очевидное свойство. Если $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x} = \bar{a}$ как функция n переменных, то она непрерывна в точке $\bar{a}$ по любому направлению $\bar{e}$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Примеры. 1. Пусть функция $f(x, y)$ задана следующим образом:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Она непрерывна в нуле по x и по y, но разрывна в этой точке как функция двух переменных x, y.

2. Пусть функция $f(x, y)$ задана соотношениями:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{если} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = y = 0. \end{cases}$$

Она является непрерывной по любому направлению, проходящему через точку $x = 0, y = 0$, но разрывна как функция двух переменных в этой точке.

Рассмотрим теперь отображение $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Этому отображению однозначно соответствуют m функций $\varphi_1(\bar{x}), \ldots, \varphi_m(\bar{x})$, которые представляют собой координаты точки $\bar{y} = F(\bar{x}) \in \mathbb{R}^m$, т.е.

$$\bar{y} = (\varphi_1(\bar{x}), \ldots, \varphi_m(\bar{x})), \; y_s = \varphi_s(\bar{x}), \; s = 1, \ldots, m.$$

Утверждение. *Для непрерывности отображения $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы все функции $\varphi_s(\bar{x})$ были бы непрерывны в точке $\bar{x} = \bar{x}_0$.*

Доказательство непосредственно следует из определения непрерывного отображения, поскольку

$$|a_s - b_s| \leq \sqrt{\sum_{t=1}^{n}(a_t - b_t)^2}.$$

Переформулируем теперь теорему о непрерывности сложного отображения метрических пространств на случай функций многих переменных.

Теорема 1. *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to R^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, и пусть отображение $f(\bar{x})$ непрерывно в точке $\bar{x} = \bar{x}_0$, а функция $g(\bar{y})$ непрерывна в точке $\bar{y}_0 = f(\bar{x}_0)$. Пусть также в некоторой окрестности точки $\bar{x}_0$ определена сложная функция $h(\bar{x}) = g(f(\bar{x}))$. Тогда функция $h(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x} = \bar{x}_0$.*

Определение 5. *Функция $F : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, называется* **равномерно непрерывной на множестве** *A, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $\bar{x}, \bar{y} \in A$ с условием $\rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$ имеем $|F(\bar{x}) - F(\bar{y})| < \varepsilon$.*

Теорема 2. *Функция F, непрерывная на компакте K, является равномерно непрерывной на нем.*

Доказательство. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Возьмем число $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ и для каждой точки $\bar{x} \in K$ рассмотрим окрестность $O(\bar{x}, \delta_{\bar{x}}(\varepsilon_1))$ точек $\bar{y}$ с условием $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon_1$. Тогда "усеченные" окрестности $O(x, \frac{1}{2}\delta_x(\varepsilon_1))$ покрывают компакт K. По определению компакта из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. В качестве $\delta = \delta(\varepsilon)$ возьмем минимальный из конечного числа радиусов выбранных шаровых окрестностей.

Если теперь возьмем любые $\bar{x}, \bar{y}$ с условием $\rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$, то оказывается для точки $\bar{x}$, покрытой некоторой окрестностью $O(\bar{x}_0, \frac{1}{2}\delta_{\bar{x}_0}(\varepsilon_1))$, выполняются неравенства

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon_1, \quad \rho(\bar{x}, \bar{x}_0) < \frac{1}{2}\delta_{x_0}(\varepsilon_1).$$

Кроме того, имеем $\rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta \le \frac{1}{2}\delta_{\bar{x}_0}(\varepsilon_1)$. Поэтому

$$\rho(\bar{y}, \bar{x}_0) \le \rho(\bar{y}, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, \bar{x}_0) < \delta_{x_0}(\varepsilon_1),$$

откуда следует, что $|f(\bar{y}) - f(\bar{x}_0)| < \varepsilon_1$. Значит,

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \le |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| + |f(\bar{x}_0) - f(\bar{y})| < 2\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ мы указали $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любых $\bar{x}, \bar{y} \in K$ с условием $\rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$ выполнено неравенство $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \varepsilon$, следовательно, функция $f(\bar{x})$ — равномерно непрерывна на компакте K. Теорема 2 доказана.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ В $\mathbb{R}^N$

Пусть числовая функция $f(\bar{x})$ определена в некоторой окрестности точки $\bar{x} = \bar{a} \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. Приращением $\Delta f(\bar{x})$ функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ *называется разность* $\Delta f(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{a})$. *Разность* $\Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{a}$ *называется* **приращением аргумента** $\bar{x}$.

Длина вектора $\Delta\bar{x}$ обозначается через $|\Delta\bar{x}|$ и равна $\rho(\bar{x}, \bar{a})$.

Утверждение 1. *Если функция $f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x} = \bar{a}$, то приращение ее $\Delta f(\bar{x})$ стремится к нулю при $\Delta\bar{x}$, стремящемся к нулю, т.е. $\Delta f(\bar{x}) = o(1)$.*

Доказательство очевидно следует из определения и свойств предела функции по базе множеств.

Определение 2. *Линейная функция от приращения аргумента $\Delta\bar{x}$ называется* **дифференциалом** $df(\bar{x})$ **функции** $f(\bar{x})$ **в точке** $\bar{x} = \bar{a}$, *если приращение $\Delta f(\bar{x})$ при $\Delta\bar{x} \to 0$ можно представить в виде*

$$\Delta f(\bar{x}) = df(\bar{x}) + o(|\Delta\bar{x}|).$$

Будем говорить, что функция $f(\bar{x})$ **дифференцируема в точке** $\bar{x} = \bar{a}$, *если существует дифференциал $df(\bar{x})$ функции в точке $\bar{x} = \bar{a}$.*

Утверждение 2. *Если функция дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a}$, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство очевидно следует из того, что приращение $\Delta f(\bar{x})$ стремится к нулю при $\Delta\bar{x} \to 0$.

Итак, подчеркнем еще раз, что дифференциалом $df(\bar{x})$ функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ называется линейная или главная часть приращения функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Поскольку $df(\bar{x})$ — линейная функция, ее можно записать в виде

$$df(\bar{x}) = A_1(x_1 - a_1) + \cdots + A_n(x_n - a_n) = \sum_{s=1}^{n} A_s \Delta x_s,$$

где A_s — некоторые вещественные числа и $\Delta x_s = x_s - a_s$. Если $f(\bar{x}) = x_s$, то $df(\bar{x}) = dx_s = \Delta x_s$.

Теорема 1. *Пусть $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a}$, тогда все координатные функции $\varphi_s(x_s) = f(a_1, \ldots, x_s, \ldots, a_n)$ дифференцируемы в точках $x_s = a_s$, $s = 1, \ldots, n$, причем $A_s = \varphi_s'(a_s)$.*

Доказательство. В формуле для приращения $\Delta f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ через его дифференциал положим $x_r = a_r$ при $r \neq s$. Получим

$$\Delta f(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = A_s \Delta x_s + o(|\Delta x_s|).$$

Тогда согласно определению функции $\varphi_s(x_s)$ будем иметь

$$f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = \varphi_s(x_s) - \varphi_s(a_s) = A_s\Delta x_s + o(|\Delta x_s|),$$

т.е.

$$A_s = \lim_{\Delta x_s \to 0} \frac{\varphi_s(x_s) - \varphi_s(a_s)}{\Delta x_s} = \varphi_s'(a_s).$$

Определение 3. *Производная $\varphi_s'(a_s)$, когда она существует, называется* **частной производной функции** $f(\bar{x})$ **в точке** $\bar{x} = \bar{a}$ **по** s**-й переменной** *и обозначается так:*

$$\varphi_s'(a_s) = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_s} = \left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}\right|_{\bar{x}=\bar{a}}.$$

Следствие. *Дифференциал функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ однозначно записывается в виде*

$$df(\bar{x})|_{\bar{x}=\bar{a}} = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_n}\Delta x_n.$$

Доказательство очевидно.

Пример. Пусть $f(x,y) = x^2 + xy$. Тогда

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y, \ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x, df(x,y) = (2x+y)dx + xdy.$$

Итак, необходимым условием дифференцируемости функции в точке является существование всех ее частных производных в этой точке. Докажем теперь одно достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Теорема 2. *Пусть в некоторой окрестности точки $\bar{a}$ существуют все ее частные производные $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}$, $s = 1,\dots,n$, и эти частные производные непрерывны в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Тогда функция $f(\bar{x})$ является дифференцируемой в этой точке.*

Доказательство. Только для краткости записи будем считать, что $n = 2$. Приращение $\Delta f(x,y)$ функции $f(x,y)$ в точке (a,b) можно записать так:

$$\Delta f(x,y) = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) =$$

$$= (f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b+\Delta y)) + (f(a, b+\Delta y) - f(a,b)).$$

К каждой из двух разностей в скобках можно применить формулу конечных приращений Лагранжа, поскольку в рассматриваемой окрестности точки (a,b) функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные по x и по y. Получим

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(a+\xi\Delta x, b+\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(a, b+\eta\Delta y)}{\partial y}\Delta y,$$

где ξ, η — некоторые постоянные, $0 < \xi, \eta < 1$.

Далее, в силу непрерывности частных производных при $\Delta x \to 0$ имеем следующие соотношения:

$$\frac{\partial f(a+\xi\Delta x, b+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} + o(1),$$

$$\frac{\partial f(a, b+\eta\Delta y)}{\partial y} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} + o(1).$$

Отсюда следует, что

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\Delta y + o(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

Поскольку

$$|\Delta x| \le |\Delta \bar{x}|,\ |\Delta y| \le |\Delta \bar{x}|, \Delta \bar{x} = (\Delta x, \Delta y),$$

имеем

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial f(a,b)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}dy + o(|\Delta \bar{x}|) = df(\bar{x}) + o(|\Delta \bar{x}|),$$

т.е. функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x,y) = (a,b)$. Теорема доказана.

Приведем пример непрерывной, имеющей частные производные, функции в окрестности точки $(0,0)$, но недифференцируемой в этой точке: $z = \sqrt{|xy|}$.

Частные производные этой функции, очевидно, существуют при $x^2 + y^2 \ne 0$. По определению они существуют в точке $(0,0)$:

$$\frac{\Delta z(0,0)}{\Delta x} = \frac{z(\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = 0, \qquad \frac{\Delta z(0,0)}{\Delta y} = 0,$$

следовательно, $z'_x(0,0) = 0$, $z'_y(0,0) = 0$.

Если же $\Delta x = \Delta y > 0$, то приращение функции $z(x,y)$ в точке $(0,0)$ равно Δx, но по определению дифференциала оно должно быть $o(\Delta x)$.

Таким образом, функция $z = \sqrt{|xy|}$ не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

Лекция 22

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Т е о р е м а. *Пусть $\varphi(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_m(\bar{x}))$ есть отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, определенное в некоторой окрестности точки $\bar{x} = \bar{a}$ и дифференцируемое в этой точке. Пусть, далее, для всякого $\epsilon > 0$ при отображении φ образ некоторой δ-окрестности $O(\bar{a}, \delta)$ содержится в ϵ-окрестности точки $\bar{b} = \varphi(\bar{a})$. Пусть, наконец, для любой точки $\bar{y} \in O(\bar{b}, \epsilon)$ определена числовая функция $f(\bar{y})$, которая является дифференцируемой в точке $\bar{b}$. Тогда сложная функция $h(\bar{x}) = f(\varphi(\bar{x}))$ является дифференцируемой в точке $\bar{x} = \bar{a}$, причем имеют место равенства*

$$\frac{\partial h}{\partial x_s} = \frac{\partial h}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \dots + \frac{\partial h}{\partial y_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_s}, \ s = 1, \dots, n.$$

Здесь частные производные по переменной x_s рассматриваются в точке $\bar{x} = \bar{a}$, а частные производные по $\bar{y}_l$, $l = 1, \dots, m$ — в точке $\bar{y} = \bar{b}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду дифференцируемости функции $f(\bar{y})$ в точке $\bar{y} = \bar{b}$ приращение функции Δf при произвольном приращении аргумента $\Delta\bar{y} = \bar{y} - \bar{b}$ можно представить так:

$$\Delta f = df + o(|\Delta\bar{y}|),$$

где

$$df = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_l} \Delta y_l.$$

Подставим вместо Δy_l приращение $\Delta\varphi_l$ функции $\varphi_l(\bar{x})$ соответствующее приращению $\Delta\bar{x}$ аргумента $\bar{x}$. Тогда слева в этой формуле мы получим $\Delta h(\bar{x})$ и она принимает вид

$$\Delta h(\bar{x}) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_l} \Delta\varphi_l(\bar{x}) + o(|\Delta\varphi(\bar{x})|).$$

В силу дифференцируемости функций $\varphi_l(\bar{x})$ имеем

$$\Delta\varphi_l(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_s} \Delta x_s + o(|\Delta\bar{x}|), \quad l = 1, \dots, m.$$

Частные производные функций $\varphi_l(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ — это конкретные вещественные числа. Поэтому существует число $M > 0$, такое, что они по абсолютной величине не превосходят M. Тогда имеем

$$|\Delta\varphi_l(\bar{x})| \le 2Mn|\Delta\bar{x}|, \ |\Delta\varphi| \le 2Mn^2|\Delta\bar{x}|.$$

Отсюда найдем

$$o(|\Delta\varphi(\bar{x})|) = o(|\Delta\bar{x}|).$$

Подставляя теперь значения $\Delta\varphi_l(\bar{x})$ в формулу для $\Delta h(\bar{x})$, получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие 1 (инвариантность формы первого дифференциала). *Если в выражение для первого дифференциала $df(\bar{y})$ вместо независимого приращения Δy_s подставить дифференциал функции $y_s = \varphi_s(\bar{x})$, то полученное выражение будет дифференциалом сложной функции $h(\bar{x}) = f(\varphi(\bar{x}))$. Другими словами, форма первого дифференциала функции не изменится, если независимые переменные оказываются зависимыми функциями.*

Доказательство. Утверждение следствия — простая переформулировка утверждения теоремы.

Следствие 2 (правила дифференцирования). *Справедливы следующие формулы:*

а) $d(cu) = cdu \quad \forall c \in \mathbb{R}$;

б) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

в) $d(uv) = udv + vdu$;

г) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ · *при* $v(\bar{x}_0) \ne 0$.

Доказательство. Ограничимся доказательством только свойства в). Пусть $z = z(u, v) = uv$, тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv = vdu + udv.$$

В случае, если u и v являются функциями от других независимых переменных, то воспользуемся свойством инвариантности формы первого дифференциала (следствие 1). Свойство в) доказано.

§ 4. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ. ГРАДИЕНТ

Пусть задано направление $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$, $|\bar{e}| = 1$, и $\bar{k}_1, \dots, \bar{k}_n$ — направления векторов осей координат $Ox_1, \dots, Ox_n$. Тогда, очевидно, если α_s есть угол между $\bar{k}_s$ и $\bar{e}$, то

$$e_s = (\bar{e}, \bar{k}_s) = |\bar{e}| \cdot |\bar{k}_s| \cos\alpha_s = \cos\alpha_s.$$

В силу этого определения числа $e_1, \ldots, e_n$ называются **направляющими косинусами** направления $\bar{e}$.

Пусть $f(\bar{x})$ — дифференцируемая функция в точке $\bar{x} = \bar{a}$, и $\bar{e}$ — некоторое направление. Рассмотрим сложную функцию $h(t) = f(\bar{a}+t\bar{e})$. Она является функцией от одной переменной t, и в силу теоремы о дифференцируемости сложной функции при $t = 0$ справедливо равенство

$$dh(t) = h'(0)dt = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} \cdot e_s \, dt.$$

Тогда имеем

$$h'(0) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} \cdot e_s = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} \cdot \cos \alpha_s.$$

Определение 1. *Эта величина* $h'(0)$ *называется* **производной функции** $f(\bar{x})$ **по направлению** $\bar{e}$ *в точке* $\bar{a}$. Обозначение:

$$\frac{\partial f}{\partial e} = \left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial e}\right|_{\bar{x}=\bar{a}} = h'(0).$$

Определение 2. *Вектор*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \nabla f$$

называется **градиентом функции** $f(\bar{x})$ *в точке* $\bar{x} = \bar{a}$ *и обозначается так:*

$$\nabla f = \operatorname{grad} f.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial e} = (\bar{e}, \operatorname{grad} f) = (\bar{e}, \nabla f),$$

где

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

называется оператором “набла”.

Отметим некоторые свойства производной по направлению.

1^0. Максимальное значение производной функции $f(\bar{x})$ по направлению равно длине вектора градиента и достигается при $\bar{e} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$.

2^0. Производная по направлению равна нулю, если вектор градиента равен нулю или он ортогонален вектору направления.

3^0. Минимальное значение производной функции $f(\bar{x})$ по направлению равно $-|\operatorname{grad} f|$, если $\bar{e} = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$.

Отсюда видно, что скорость возрастания функции в направлении градиента — наибольшая.

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Для простоты изложения будем рассматривать функции двух переменных.

Определение 1. *Поверхностью P в $\mathbb{R}^3$ называется* **график всякой непрерывной функции** $z = f(x, y)$, *заданной в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Другими словами, поверхность P — это множество точек $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, где координата $z \in \mathbb{R}$ и точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ связаны соотношением $z = f(x, y)$.*

Напомним, что под областью понимают связное открытое множество.

Определение 2. *Говорят, что поверхности $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$* **касаются** *друг друга в точке (a, b, c), если $c = f_1(a, b) = f_2(a, b)$ и разность*

$$r(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y)$$

является величиной $o(|\bar{x} - \bar{a}|)$ при $|\bar{x} - \bar{a}| \to 0$.

График линейной функции $z = kx + ly + m$, $k, l, m \in \mathbb{R}$ является плоскостью в $\mathbb{R}^3$.

Т е о р е м а. *Пусть функция $f(\bar{x})$, $\bar{x} \in O(\bar{a}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ — дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a} = (a_1, a_2)$ и $z_0 = f(\bar{a})$. Тогда плоскость Π, задаваемая линейным уравнением вида*

$$z - z_0 = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}(x_1 - a_1) + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_2}(x_2 - a_2),$$

касается поверхности $P : z = f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим плоскость Π как график линейной функции $g(\bar{x})$, где

$$g(\bar{x}) = z_0 + df(\bar{x}).$$

Поскольку функция $f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a}$, имеем

$$f(\bar{x}) - g(\bar{x}) = f(\bar{a}) + df(\bar{x}) + o(|\Delta\bar{x}|) - z_0 - df(\bar{x}) = o(|\Delta\bar{x}|).$$

Следовательно, исходя из определения поверхности, Π и P касаются друг друга. Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобится понятие нормали к поверхности.

Определение 3. Нормалью *к поверхности $P : z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) называется прямая, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0), параллельно вектору $(f'_x, f'_y, -1)$.*

Лекция 23

§ 6. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Пусть $f(\bar{x})$ имеет в некоторой ε-окрестности $O(\bar{a},\varepsilon)$ все первые частные производные $\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}$, $s=1,\ldots,n$. Эти частные производные сами являются функциями от n переменных и могут иметь частные производные, т.е. можно определить следующие величины

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}=f''_{x_s x_r}=\left(f'_{x_s}\right)'_{x_r}, \quad s,r=1,\ldots,n.$$

Эти величины называются **частными производными второго порядка.** Если $s\neq r$, то они называются **смешанными производными.**

Имеют место следующие теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка.

Теорема 1 (теорема Шварца). *Пусть функция $f(\bar{x})$ в некоторой окрестности точки $\bar{x}=\bar{a}$ имеет смешанные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$, причем они непрерывны в точке $\bar{x}=\bar{a}$. Тогда в точке $\bar{x}=\bar{a}$ эти производные равны между собой, т.е.*

$$f''_{x_2 x_1}(\bar{a})=f''_{x_1 x_2}(\bar{a}).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $n=2$ и $f(\bar{x})=f(x_1,x_2)$. Положим

$$\Delta^2 f=f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2+h_2)+f(a_1,a_2),$$

$$\varphi(x)=f(x,a_2+h_2)-f(x,a_2).$$

Применяя дважды формулу Лагранжа конечных приращений, получим

$$\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)=h_1\varphi'(a_1+\theta_1 h_1)=$$

$$=h_1\left(f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+h_2)-f'_{x_1}(a_1+\theta_1 h_1,a_2)\right)=$$

$$=h_1 h_2 f''_{x_1 x_2}(a_1+\theta_1 h_1,a_2+\theta_2 h_2).$$

В силу непрерывности функции $f''_{x_1 x_2}(x_1,x_2)$ в точке $\bar{x}=\bar{a}$ имеем

$$\varphi(a_1+h_1)-\varphi(a_1)=h_1 h_2(f''_{x_1 x_2}(a_1,a_2)+o(1)).$$

С другой стороны,

$$\varphi(a_1 + h_1) - \varphi(a_1) = \psi(a_2 + h_2) - \psi(a_2),$$

где $\psi(x) = f(a_1 + h_1, x) - f(a_1, x)$.

Вновь применяя теорему Лагранжа, находим

$$\psi(a_2 + h_2) - \psi(a_2) = h_2(f'_{x_2}(a_1 + h_1, a_2 + \theta'_2) - f'_{x_2}(a_1, a_2 + \theta'_2)) =$$
$$= h_1 h_2 f''_{x_2 x_1}(a_1 + \theta'_1 h_1, a_2 + \theta'_2 h_2) = h_1 h_2(f''_{x_2 x_1}(a_1, a_2) + o(1)).$$

Отсюда

$$h_1 h_2(f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2) + o(1)) = h_1 h_2(f''_{x_2 x_1}(a_1, a_2) + o(1)),$$

т.е. получаем справедливость равенства

$$f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2) = f''_{x_2 x_1}(a_1, a_2).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (теорема Юнга). *Пусть функции $f'_{x_1}(x_1, x_2)$ и $f'_{x_2}(x_1, x_2)$ определены в некоторой окрестности точки $\bar{x} = \bar{a} = (a_1, a_2)$ и дифференцируемы в точке $\bar{a}$. Тогда*

$$f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2) = f''_{x_2 x_1}(a_1, a_2).$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$\Delta^2 f = f(a_1 + h, a_2 + h) - f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2 + h) + f(a_1, a_2),$$
$$\varphi(x) = f(x, a_2 + h) - f(x, a_2).$$

Имеем

$$\Delta^2 f = \varphi(a_1 + h) - \varphi(a_1).$$

Из теоремы Лагранжа следует, что

$$\Delta^2 f = h\varphi'(a_1 + \theta_1 h) = h\left(f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h, a_2 + h) - f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h, a_2)\right).$$

В силу того что функция $f'_{x_1}(x_1, x_2)$ дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a}$,

$$f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h, a_2 + h) - f'_{x_1}(a_1, a_2) = \theta_1 h f''_{x_1 x_1}(\bar{a}) + h f_{x_1 x_2}(\bar{a}) + o(h),$$
$$f'_{x_1}(a_1 + \theta_1 h, a_2) - f'_{x_1}(a_1, a_2) = \theta_1 h f''_{x_1 x_1}(\bar{a}) + o(h).$$

Следовательно,

$$\Delta^2 f = h^2 f''_{x_1 x_2}(\bar{a}) + o(h^2).$$

С другой стороны,

$$\Delta^2 f = \psi(a_2 + h) - \psi(a_2),$$

где $\psi(y) = f(a_1 + h, y) - f(a_1, y)$. Аналогично предыдущему получим

$$\Delta^2 f = h^2 f''_{x_2 x_1}(\bar{a}) + o(h^2).$$

Таким образом,

$$f''_{x_1 x_2}(a_1, a_2) = f''_{x_2 x_1}(a_1, a_2).$$

Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е. *Теоремы Юнга и Шварца имеют место при* $n > 2$.

Доказательство. Надо зафиксировать все переменные, кроме x_r, x_s, и применить доказанные теоремы к получившимся функциям.

Определение. *Функция* $f(\bar{x})$ *называется* **дважды дифференцируемой в точке,** *если все первые производные дифференцируемы. Вообще, функция* $f(\bar{x})$ *называется* n **раз дифференцируема,** *если все частные производные* $(n-1)$*-го порядка являются дифференцируемыми функциями.*

Т е о р е м а 3 (достаточное условие дифференцируемости). *Для того чтобы функция* $f(\bar{x})$ *была* n *раз дифференцируема в точке, достаточно, чтобы все частные производные порядка* n *были непрерывны в этой точке.*

Доказательство проводится по индукции.

С л е д с т в и е (из теоремы Юнга). *Если функция* $f(\bar{x})$ *является* n *раз дифференцируемой, то смешанные частные производные до порядка* n *не зависят от порядка, в котором производится дифференцирование.*

Доказательство получается индукцией из теоремы Юнга.

§ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Пусть функция $f(\bar{x})$ дважды дифференцируема в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Зафиксируем приращение $d\bar{x} = \bar{h}$. Тогда получим новую функцию $g(\bar{x}) = g(\bar{x}, \bar{h})$, определяемую выражением

$$g(\bar{x}) = df(\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} h_s \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}.$$

Это дифференцируемая функция в точке $\bar{x} = \bar{a}$, и ее дифференциал равен

$$dg(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial g(\bar{a})}{\partial x_r} \cdot \Delta x_r,$$

т.е.

$$dg(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} h_s \Delta x_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s} \right) \Big|_{\bar{x}=\bar{a}}$$

Положим теперь $h_s = \Delta x_s = dx_s$. Тогда получим

$$d^2 f(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_s \partial x_r} dx_s dx_r.$$

Это выражение называется **вторым дифференциалом функции** $f(\bar{x})$ **в точке** $\bar{x} = \bar{a}$. Аналогично определяется дифференциал $d^k f(\bar{x})$ порядка k:

$$d^k f(\bar{x}) = \sum_{r=1}^{n} \cdots \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^k f(\bar{x})}{\partial x_s \ldots \partial x_r} dx_s \ldots dx_r.$$

Очевидно, это выражение можно символически записать так:

$$d^k f(\bar{x}) = \left(\sum_{s=1}^{n} dx_s \frac{\partial}{\partial x_s} \right)^k f(\bar{a}),$$

где для получения развернутого выражения надо формально возвести выражение в скобках в степень как многочлен, считая символы dx_s, $\frac{\partial}{\partial x_s}$ как бы независимыми переменными, а затем к числителю выражения $\frac{\partial^k}{\partial x_s \ldots \partial x_r}$ справа приписать $f(\bar{a})$.

Отметим, что $d^r f(\bar{x})$ при $r \geq 2$, вообще говоря, не обладает свойством **инвариантности**, т.е. если, скажем, вместо dx_s в выражение для $d^2 f(\bar{x})$ подставить первые дифференциалы $d\varphi_s(\bar{t})$ функций $x_s = \varphi_s(\bar{t})$, то получится выражение, которое уже не будет вторым дифференциалом.

Действительно, если $h(\bar{t}) = f(\varphi(\bar{t}))$, то

$$d^2 h(\bar{t}) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \partial x_r} d\varphi_s d\varphi_r + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_s} d^2 \varphi_s.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} d\varphi_s \right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_s} \right) d\varphi_s + \frac{\partial f}{\partial x_s} d^2 \varphi_s.$$

Но если $\varphi_s(\bar{t})$ — линейные функции, т.е.

$$\varphi_s(\bar{t}) = \lambda_{0,s} + \lambda_{1,s} t_1 + \cdots + \lambda_{n,s} t_n,$$

то $d^2 \varphi_s = 0$ и инвариантность второго дифференциала все же имеет место. Аналогичное утверждение справедливо и для третьего дифференциала и т.д.

В силу этого, например, если $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{e}$ и $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{e})$, то

$$d^r f(\bar{a} + t\bar{e})\big|_{t=0} = d^r g(t)\big|_{t=0} = g^{(r)}(0)(dt)^r,$$

т.е. функция $g(t)$ является r раз дифференцируемой.

Воспользуемся последним замечанием для вывода формулы Тейлора для функции от n переменных.

Теорема 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть функция $f(\bar{x})$ дифференцируема k раз в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Тогда при $\bar{x}$, стремящемся к $\bar{a}$, справедлива следующая формула*

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + r(\bar{x}),$$

где

$$P(\bar{x}) = f(\bar{a}) + df(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{1}{2!}\, d^2 f(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{k!}\, d^k f(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}, \quad r(\bar{x}) = o(|\bar{x} - \bar{a}|^k).$$

Доказательство. Применим метод математической индукции по параметру k. При $k = 1$ утверждение теоремы следует из определения дифференциала функции. Предположим теперь, что $k > 1$.

Из условия теоремы вытекает, что функция $r(\bar{x})$ в некоторой окрестности U точки $\bar{x} = \bar{a}$ имеет все производные до порядка $(k-1)$ включительно. Кроме того, в точке $\bar{a}$ сама функция и все ее частные производные до k-го порядка включительно равны нулю.

Далее, пусть $\bar{x} \in U$ и $\Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{a}$. Тогда имеем

$$r(\bar{x}) = r(\bar{x}) - r(\bar{a}) = r(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - r(\bar{a}) = D_1 + \cdots + D_n,$$

где при $s = 1, \ldots, n$ величины D_s определены равенствами

$$D_s = r(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_s + \Delta x_s, a_{s+1}, \ldots, a_n) -$$

$$- r(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_{s-1} + \Delta x_{s-1}, a_s, \ldots, a_n) = g(a_s + \Delta x_s) - g(a_s).$$

Отсюда, применяя формулу Лагранжа к каждой величине D_s, при некоторых ξ_s с условием $0 < \xi_s < 1$ получим

$$D_s = g'_{x_s}(a_s + \xi_s \Delta x_s)\Delta x_s = r'_{x_s}(\bar{a} + \bar{v}_s)\Delta x_s,$$

где $\bar{v}_s = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_{s-1}, \xi_s \Delta x_s, 0, \ldots, 0)$. Следовательно,

$$r(\bar{x}) = r'_{x_1}(\bar{a} + \bar{v}_1)\Delta x_1 + \cdots + r'_{x_n}(\bar{a} + \bar{v}_n)\Delta x_n.$$

Заметим, что точка $\bar{a} + \bar{v}_s \in \dot{U}$ для каждого $s = 1, \ldots, n$. Поэтому к частным производным в правой части последнего равенства можно применить предположение индукции с заменой значения параметра k на $k - 1$. Тогда при всех s от 1 до n будем иметь

$$r'_{x_s}(\bar{a} + \bar{v}_s) = o(|\bar{x} - \bar{a}|^{k-1}).$$

Отсюда следует, что $r(\bar{x}) = o(|\bar{x} - \bar{a}|^k)$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть функция $f(\bar{x})$ имеет $(k+1)$-й дифференциал для любого $\bar{x} \in O(\bar{a}, \varepsilon)$, где ε — некоторое положительное число. Тогда для любой точки $\bar{b} \in O(\bar{a}, \varepsilon)$ существует точка $\bar{c} = \bar{a} + \theta(\bar{b} - \bar{a})$, $0 < \theta < 1$, такая, что*

$$f(\bar{b}) = f(\bar{a}) + \sum_{s=1}^{k} \frac{d^s f(\bar{a})}{s!}\bigg|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{d^{k+1} f(\bar{c})}{(k+1)!}\bigg|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g(t) = f(\bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}))$. Тогда по формуле Тейлора для одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \cdots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!},$$

где $0 < \theta < 1$ — некоторая постоянная. Поскольку справедливы равенства

$$g(0) = f(\bar{a}),\ g'(0) = df(\bar{a})|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}}, \ldots, g^{(k)}(0) = d^k f(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}},$$

$$g^{(k+1)}(\theta) = d^{k+1} f(\bar{c})\big|_{d\bar{x}=\bar{b}-\bar{a}},$$

подставляя их в предыдущее соотношение, получим утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Замечание. Подчеркнем разницу в условиях существования формулы Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа (теоремы 1 и 2). Она состоит в том, что в первом случае k-кратная дифференцируемость функции $f(x)$ предполагается только в точке $\bar{x} = \bar{a}$, в то время как во втором случае требуется $(k+1)$-кратная дифференцируемость ее в окрестности $O(\bar{a}, \varepsilon)$. Обратим внимание на то, что в случае функции одной переменной k-кратная дифференцируемость ее в точке $x = a$ обеспечивает $(k-1)$-кратную дифференцируемость в окрестности, в кратном же случае это условие дает существование в этой окрестности только частных производных до $(k-1)$-го порядка включительно.

Лекция 24

§ 8. ПРИЛОЖЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА. ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение точки локального экстремума для функции многих переменных дословно совпадает с аналогичным понятием для функции одной переменной, и, вообще, для функций, определенных в любом метрическом пространстве, только ε-окрестность точки, в которой функция имеет экстремум, определяется соответствующей метрикой.

Определение 1. *Точка $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ называется* **точкой строгого локального максимума функции** $f(\bar{x})$, *если существует ε-окрестность $O(\bar{a}, \varepsilon)$ точки $\bar{a}$ такая, что для любой точки $\bar{x} \neq \bar{a}$ и $\bar{x} \in O(\bar{a}, \varepsilon)$ имеем неравенство $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$;*

если $f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$, то точка $\bar{a}$ — **точка нестрогого максимума;**

если $f(\bar{x}) > f(\bar{a})$, то точка $\bar{a}$ — **точка строгого минимума;**

если $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$, то точка $\bar{a}$ — **точка нестрогого минимума.**

Строгие локальные максимумы и минимумы в точке называются **локальными экстремумами в точке**, *а нестрогие —* **нестрогими локальными экстремумами в точке.**

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). *Если $\bar{a}$ — точка локального экстремума (нестрогого) функции $f(\bar{x})$ и существует дифференциал $df(\bar{x})$ ее в этой точке, то для любого приращения $\bar{\Delta}x$ имеем*

$$df(\bar{x})|_{\bar{x}=\bar{a}} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{grad} f(\bar{x})|_{\bar{x}=\bar{a}} = \bar{0}.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что при $s = 1, \ldots, n$ выполняются равенства

$$\left.\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_s}\right|_{\bar{x}=\bar{a}} = 0.$$

Рассмотрим функцию $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{e}_s)$, где $\bar{e}_s$ — направляющий вектор оси Ox_s. Тогда ясно, что $g(t)$ имеет в нуле точку локального экстремума, откуда $g'(0) = 0$. Но так как

$$\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_s} = g'(0) = 0,$$

то это доказывает утверждение теоремы 1.

Определение 2. *Точка $\bar{a}$, в которой градиент функции $f(\bar{x})$ обращается в $\bar{0}$, называется* **стационарной точкой функции** $f(\bar{x})$.

Заметим, что второй дифференциал $d^2f(\bar{x})$ функции $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a} \in \mathbb{R}^n$ является квадратичной формой от n переменных $dx_1, \ldots, dx_n$.

Определение 3. *Стационарная точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ называется* **регулярной,** *если в этой точке существует второй дифференциал $d^2f(\bar{x})$, и он является невырожденной квадратичной формой от переменных $dx_1, \ldots, dx_n$, т.е. определитель матрицы этой квадратичной формы отличен от нуля.*

Перейдем теперь к выводу достаточного условия экстремума функции.

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). *Пусть $\bar{a}$ есть регулярная стационарная точка функции $f(\bar{x})$, т.е. дифференциал этой функции в точке $\bar{a}$ обращается в нуль и существует второй дифференциал в этой точке с невырожденной квадратичной формой от переменных $dx_1, \ldots, dx_n$. Тогда*

1) если в этой точке $d^2f(\bar{x})$ является положительно определенной квадратичной формой, то в точке $\bar{x} = \bar{a}$ функция $f(\bar{x})$ имеет локальный минимум;

2) если $d^2f(\bar{x})$ — отрицательно определена, то $\bar{a}$ — точка локального максимума;

3) если $d^2f(\bar{x})$ является неопределенной формой, то точка $\bar{a}$ не является точкой локального экстремума.

Доказательство. Рассмотрим пункт 1). Обозначим через A матрицу квадратичной формы $d^2f(\bar{x})$ от переменных Δx_s, $s = 1, \ldots, n$, а через $S(\bar{a})$ — множество точек $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ с условием $|\Delta\bar{x}| = 1$.

Множество $S(\bar{a})$ ограничено и является замкнутым, так как совпадает со своей границей $\partial S(\bar{a})$, и поэтому содержит эту границу. Следовательно, $S(\bar{a})$ — компакт, а потому на множестве $S(\bar{a})$ второй дифференциал как функция от приращения $\Delta\bar{x}$ достигает своего минимума m, т.е. найдется вектор $\bar{e}_0$, $|\bar{e}_0| = 1$ такой, что

$$d^2f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\Delta\bar{x}=\bar{e}_0} = m > 0.$$

Заметим, что для любого вектора $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{x} = |\Delta\bar{x}|\bar{e}$, $|\bar{e}| = 1$, имеем

$$d^2f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\Delta\bar{x}} = |\Delta\bar{x}|^2 \, d^2f(\bar{x})\big|_{\bar{x}=\bar{a},\bar{e}}\,.$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано получим

$$\Delta f(\bar{x}) = df(\bar{a}) + \frac{1}{2}d^2f(\bar{a}) + o(|\Delta\bar{x}|^2) \geq \frac{1}{2}|\Delta\bar{x}|^2 m(1 + o(1)),$$

т.е. найдется $\varepsilon > 0$, такое, что для любой точки $\bar{x} \in O(\bar{a},\varepsilon)$ выполняется неравенство $\Delta f(\bar{x}) > 0$. Первый пункт рассмотрен.

Пункт 2) рассматривается аналогично. Перейдем к третьему пункту. В силу неопределенности квадратичной формы $d^2f(\bar{a})$ получим $m < 0 < M$, где

$$M = \sup_{|\Delta\bar{x}|=1} d^2f(\bar{a}), \; m = \inf_{|\Delta\bar{x}|=1} d^2f(\bar{a}),$$

причем величина M достигается на векторе $\bar{e}_1$, а величина m — на векторе $\bar{e}_2$. Тогда функция $g_1(t) = f(\bar{a}+t\bar{e}_1)$ при $t = 0$ имеет локальный максимум, а функция $g_2(t) = f(\bar{a}+t\bar{e}_2)$ — локальный минимум, а сама функция $f(\bar{x})$ в любой окрестности точки $\bar{a}$ принимает значения, как большие $f(\bar{a})$, так и меньшие $f(\bar{a})$, т.е. точка $\bar{a}$ не является точкой локального экстремума. Теорема 2 доказана.

§ 9. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

Пусть заданы точка $(\bar{a}, b) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \in \mathbb{R}^n$, некоторая ее ε-окрестность и множество точек, принадлежащих этой ε-окрестности и удовлетворяющих уравнению $f(\bar{x}, y) = 0$.

Определение 1. *Функция $\varphi(\bar{x})$, зависящая от $(n-1)$-й переменной $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и заданная в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a}$, называется* **неявной функцией,** *соответствующей уравнению $f(\bar{x}, y) = 0$, если для любой точки $\bar{x}$ из этой δ-окрестности имеет место равенство*

$$f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0.$$

Определение 2. *Функция $f(\bar{x})$ называется* **гладкой** *в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, если для любой точки $\bar{x} \in \Omega$ она является дифференцируемой и ее частные производные непрерывны.*

Докажем теперь теорему о неявной функции.

Т е о р е м а (теорема о неявной функции). *Пусть:*

1) функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой ε-окрестности Ω точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$;

2) $f(a, b) = 0$;

3) для любой точки $(x, y) \in \Omega$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ являются непрерывными функциями;

4) $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} > 0$.

Тогда существует единственная функция $y = \varphi(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки a, такая, что:

1) $\varphi(a) = b$;

2) для любой точки x, принадлежащей δ-окрестности, имеет место равенство $f(x, \varphi(x)) = 0$; Более того, оказывается, что эта функция $\varphi(x)$ является **гладкой**, *причем*

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x, y)\big|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x, y)\big|_{y=\varphi(x)}}.$$

Доказательство. Так как $f'_y(x,y)$ — непрерывна на Ω и $f'_y(a,b)>0$, то существует замкнутый квадрат $K\subset\Omega$ с центром в точке (a,b) и со сторонами, параллельными осям координат, длины $2h$, внутри которого минимальное значение $f'_y(x,y)$ равно $m>0$. В силу того, что $f'_y(x,y)>0$, функция $f(a,y)$ возрастает. Далее, так как $f(a,b)=0$, то $f(a,b+h)>0$ и $f(a,b-h)<0$. В силу непрерывности функции $f(x,y)$ существует число $\delta>0$ такое, что для любого значения $x\in[a-\delta,a+\delta]$ имеем $f(x,b+h)>0$ и $f(x,b-h)<0$.

Отсюда следует, что на отрезке, соединяющем точки $A_1=A_1(x)=$ $=(x,b-h)$ и $A_2=A_2(x)=(x,b+h)$, монотонная функция $g(y)=f(x,y)$ обращается в нуль только в одной точке y_x.

Каждой точке $x\in[a-\delta,a+\delta]$ поставим в соответствие точку y_x. Оно определяет функцию $y=\varphi(x)=y_x$, для которой

$$f(x,\varphi(x))=f(x,y_x)=0,$$

при этом из равенства $f(a,b)=0$ имеем $\varphi(a)=y_a=b$.

Функция $\varphi(x)$ и является искомой. Надо только доказать, что $y=\varphi(x)$ дифференцируема внутри интервала $(a-\delta,a+\delta)$, причем

$$\varphi'(x)=-\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}.$$

Докажем сначала непрерывность $\varphi(x)$. Пусть точки x и x_0 принадлежат интервалу $(a-\delta,a+\delta)$. Покажем, что $\Delta\varphi(x_0)=\varphi(x)-\varphi(x_0)\to 0$ при $\Delta x=x-x_0\to 0$. Положим

$$y=\varphi(x), y_0=\varphi(x_0), \Delta y=\Delta\varphi(x).$$

Имеем $f(x,y)=f(x_0,y_0)=0$. Следовательно, для функции $g(t)=$ $f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$ справедливы равенства $g(0)=g(1)=0$. Функция $g(t)$ при любом $t\in[0,1]$ имеет производную

$$g'(t)=f'_x(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\Delta y.$$

По теореме Ролля существует число $\theta\in(0,1)$ такое, что $g'(\theta)=0$. Отсюда получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{f'_x(\bar\xi)}{f'_y(\bar\xi)},$$

где $\bar\xi=(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$. Следовательно,

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|\le\frac{M}{m},\ M=\max_K|f'_x(x,y)|,\ m=\min_K|f'_y(x,y)|>0,$$

т.е. величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — ограничена. Поэтому имеем, что $\Delta y = \Delta x \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $\varphi(x)$ является непрерывной функцией. Кроме того, так как при $\Delta x \to 0$ имеем, что $\Delta y \to 0$, то $\bar{\xi} \to (x_0, y_0)$. Далее, в силу непрерывности частных производных f'_x и $f'_y > 0$ получим

$$\varphi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x,y)\big|_{y=\varphi(x)}}{f'_y(x,y)\big|_{y=\varphi(x)}}.$$

Теорема доказана.

Замечания. 1. Случай $f'_y(x,y) < 0$ сводится к рассмотренному заменой функции f на $g = -f$.

2. График функции $y = \varphi(x)$ является частью линии уровня $z = 0$ для поверхности $z = f(x,y)$.

Следствие (общая теорема о неявной функции). *Пусть:*

1) функция $f(\bar{x}, y)$ непрерывна в некоторой ε-окрестности Ω точки $(\bar{a}, b) = (a_1, \ldots, a_{n-1}, b) \in \mathbb{R}^2$;

2) $f(\bar{a}, b) = 0$;

3) для любой точки $(\bar{x}, y) \in \Omega$ частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ являются непрерывными функциями;

4) $\frac{\partial f(\bar{a}, b)}{\partial y} > 0$.

Тогда существует единственная функция $y = \varphi(\bar{x})$, определенная в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a}$ такая, что:

1) $\varphi(\bar{a}) = b$;

2) для любой точки $\bar{x}$, принадлежащей δ-окрестности, имеет место равенство $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$;

3) функция $\varphi(\bar{x})$ является гладкой, причем

$$\varphi'_{x_s}(\bar{x}) = -\frac{f'_{x_s}(\bar{x}, y)\big|_{y=\varphi(\bar{x})}}{f'_y(\bar{x}, y)\big|_{y=\varphi(\bar{x})}}.$$

Доказательство, по существу, дословно совпадает с доказательством теоремы. Надо только вместо точек $(a, b \pm h)$ рассмотреть точки $(\bar{a}, b \pm h)$, а вместо интервала $(a - \delta, a + \delta)$ — шар $O(\bar{a}, \delta)$.

В качестве приложения предыдущей теоремы рассмотрим задачу об арифметических свойствах неявных функций, представимых степенными рядами. Приводимый здесь результат является частным случаем одной теоремы Эйзенштейна.

Теорема 2. *Пусть задано алгебраическое уравнение $F(x,y) = 0$ с целыми коэффициентами, причем $F(0,0) = 0$ и $F'_y(0,0) \neq 0$. Пусть также степенной ряд $y = y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является решением этого* *уравнения, т.е. $y = y(x)$ — алгебраическая функция. Пусть, далее, коэффициенты a_k, $k \geq 0$, — рациональные числа. Тогда существует такое целое число l, что при замене x на lx коэффициенты степенного ряда, получившегося из ряда $y = y(x)$, будут целыми числами, за исключением, быть может, a_0.*

Доказательство. В силу теоремы о неявной функции существует единственная функция $y_0 = y_0(x)$, удовлетворяющая уравнению $F(x, y) = 0$ в некоторой окрестности точки $(0, 0)$. Следовательно, эта функция совпадает со степенным рядом $y = y(x)$.

Запишем многочлен $F(x, y)$ в виде

$$F(x, y) = P_0 + P_1 y + \dots + P_m y^m,$$

где $P_0 = P_0(x), \dots, P_m = P_m(x)$ — многочлены от переменной x. Так как $F(0, 0) = 0$, то $P_0(0) = 0$. Из условия $F'_y(0, 0) \neq 0$ получим: $P_1(0) \neq 0$ Представим многочлены $P_0 = P_0(x), \dots, P_m = P_m(x)$ в следующей форме:

$P_0 = g_0 x + h_0 x^2 + \dots,$

$P_1 = g_1 + h_1 x + \dots,\ g_1 \neq 0,$

$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$

$P_m = g_m + h_m x + \dots .$

Положим теперь

$$\begin{cases} x = g_1^2 t, \\ y = g_1 u, \end{cases}$$

где t и u — новые переменные.

Сократим равенство $F(g_1^2 t, g_1 u)$ на g_1^2. Получим

$$G_0 t + H_0 t^2 + \dots + (1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots)u + (G_m + H_m t + \dots)u^m = 0,$$

где $G_0, H_0, \dots, G_1, H_1, \dots, G_m, H_m, \dots$ — целые числа.

Из последнего уравнения имеем

$$u = -\frac{G_0 t + H_0 t^2 + \dots}{1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots} - \dots - \frac{G_m + H_m t + \dots}{1 + G_1 t + H_1 t^2 + \dots} u^m .$$

Далее при $|z| < 1$ воспользуемся равенством

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots .$$

Тогда предыдущее выражение для величины u принимает вид:

$$u = (A_1 t + A_2 t^2 + \dots) + (B_0 + B_1 t + \dots)u^2 + \dots .$$

Будем искать функцию $u = u(t)$ в следующей форме:

$$u = m_1 t + m_2 t^2 + m_3 t^3 + \dots .$$

Коэффициенты $m_1, m_2, m_3, \dots$ тогда определяются из равенств

$$m_1 = A_1,$$

$$m_2 = A_2 + B_0 m_1^2,$$

$$m_3 = A_3 + 2B_0 m_1 m_2 + B_1 m_1^2,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad .$$

Отсюда следует, что числа m_1, m_2, m_3, ... — целые. Теорема 2 доказана.

В частности, из последней теоремы следует, что функции

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}; \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

не являются алгебраическими.

§ 10. СИСТЕМА НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим отображение

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})).$$

Пусть все функции $f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})$ являются гладкими в ε-окрестности $O(\bar{a}, \varepsilon)$ точки $\bar{a}$. Тогда такое отображение называется **гладким.**

Определение 1. *Пусть функции $f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})$ дифференцируемы в точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Тогда матрица*

$$J = J_f = \left\| \frac{\partial f_k(\bar{x})}{\partial x_s} \right\|, \ k = 1, \ldots, m; \ s = 1, \ldots, n;$$

имеющая m строк и n столбцов, называется **матрицей Якоби отображения** $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x}))$.

Строки матрицы Якоби представляют собой градиенты функций $f_k(\bar{x})$, $k = 1, \ldots, m$.

Пусть $m \leq n$. Рассмотрим какие-либо m различных столбцов матрицы J. Они образуют подматрицу $J(k_1, \ldots, k_m)$ порядка $m \times m$ матрицы J, где $k_1, \ldots, k_m$ — номера выбранных столбцов.

Определение 2. *Определитель H матрицы $J(k_1, \ldots, k_m)$ называется* **якобианом** *(одним из якобианов) отображения $f(\bar{x})$ и обозначается так:*

$$H = \frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_{k_1}, \ldots, x_{k_m})}.$$

Определение 3. *Дифференцируемое отображение $f(\bar{x})$ называется* **невырожденным в точке** $\bar{x} = \bar{a}$, *если один из якобианов этого отображения отличен от нуля.*

Это означает, что:

1) матрица J имеет максимальный ранг или

2) градиенты функций $f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})$ — линейно независимы в этой точке.

Т е о р е м а (теорема о системе неявных функций). *Пусть $n = m + p$, $p > 0$, и пусть:*

1) отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — невырожденное в точке $(\bar{a}, \bar{b})$, где $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, и гладкое в некоторой окрестности $\Omega = O((\bar{a}, \bar{b}), \varepsilon)$ точки $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{a}, \bar{b})$;

2) $f(\bar a,\bar b)=0$;

3) $H(\bar y)=\frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}\neq 0$.

Тогда в некоторой окрестности $O(\bar a,\delta)=\Omega_1\subset\mathbb{R}^p$ *точки* $\bar a$ *существует единственное гладкое отображение* $\varphi(\bar x)=(\varphi_1(\bar x),\dots,\varphi_m(\bar x))$, *где* $\bar x=(x_1,\dots,x_p)$, *обладающее следующими свойствами:*

1) $f(\bar a,\varphi(\bar a))=0$;

2) для всех $x\in\Omega_1$ *имеем* $f(\bar x,\varphi(\bar x))=0$;

3) $J_\varphi(\bar x)=-A^{-1}B$, *где* $A=J_f(\bar y)$, $B=J_f(\bar x)$.

Здесь A *и* B *— две части матрицы Якоби* J_f, *отвечающие переменным* $y_1,\dots,y_m$ *и* $x_1,\dots,x_p$ *соответственно.*

Другими словами, эта теорема утверждает, что система уравнений

$$f_k(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_m)=0,\ k=1,\dots,m,$$

разрешима относительно переменных $y_1,\dots,y_m$ как функций от переменных $(x_1,\dots,x_p)$ таким образом, что функции $y_1=\varphi_1(\bar x),\dots,y_m=\varphi_m(\bar x)$ удовлетворяют тождествам

$$f_k(\bar x,\varphi(\bar x))\equiv 0\ \forall\bar x\in\Omega_1,$$

где Ω_1 — некоторая окрестность точки $\bar a$, причем:

а) $f(\bar a,\varphi(\bar a))=0$;

б) $f(\bar x,\bar y)$ является невырожденным гладким отображением в некоторой окрестности точки $(\bar a,\bar b)$ с условием

$$\frac{D(f_1,\dots,f_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}\neq 0.$$

Замечания. 1. Матричное равенство п. 3 дает выражение для всех частных производных вида

$$\frac{\partial\varphi_k(\bar x)}{\partial x_s},\ k=1,\dots,m,\ s=1,\dots,p.$$

2. Если $f(\bar x)$ — линейное отображение, то утверждение теоремы есть простой факт из линейной алгебры о решениях системы линейных уравнений.

Доказательство. Рассмотрим определитель Якоби $H(\bar y)$ матрицы A. Разложим его по последнему столбцу. Получим:

$$H(\bar y)=H_1\frac{\partial f_1}{\partial y_m}+H_2\frac{\partial f_2}{\partial y_m}+\dots+H_m\frac{\partial f_m}{\partial y_m}.$$

Так как $H(\bar y)$ не обращается в нуль в точке $(\bar a,\bar b)$, то по крайней мере один из миноров матрицы A не равен нулю. Без ограничения общности можно считать, что $H_1\neq 0$.

Будем проводить доказательство методом математической индукции по числу уравнений m. При $m=1$ утверждение теоремы доказано в предыдущем параграфе. Предположим, что теорема верна для $m-1$ уравнения. Докажем ее для m уравнений.

Поскольку $H_1 \neq 0$, применяя предположение индукции к функциям $f_2(\bar{x},\bar{y}),\ldots,f_m(\bar{x},\bar{y})$, получим, что существуют функции

$$y_1 = \psi_1(\bar{x}, y_m), \ldots, y_{m-1} = \psi_{m-1}(\bar{x}, y_m),$$

удовлетворяющие условиям

$$f_k(\bar{x}, \psi_1, \ldots, \psi_{m-1}, y_m) = 0, \; k = 2, \ldots, m,$$

для любой точки $(\bar{x}, y_m)$ в некоторой окрестности Ω_0 точки $(\bar{a}, b_m)$.

Подставим теперь $\psi_1, \ldots, \psi_{m-1}$ в функцию $f_1(\bar{x},\bar{y})$. Имеем:

$$f_1(\bar{x}, \psi(\bar{x}, y_m), \ldots, \psi_{m-1}(\bar{x}, y_m), y_m) = \Phi(\bar{x}, y_m).$$

Покажем, что $\frac{\partial\Phi}{\partial y_m} \neq 0$ в точке $(\bar{a}, b_m)$. Действительно,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_m} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_1}{\partial y_m},$$

$$0 = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_2}{\partial y_m},$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$0 = \frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial y_m} + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial\psi_{m-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial f_m}{\partial y_m}.$$

Домножим первое уравнение на H_1, второе — на H_2 и т.д. Сложим получившиеся выражения. В результате будем иметь

$$H_1\frac{\partial\Phi}{\partial y_m} = H,$$

так как при $k \neq m$ справедливо равенство

$$\sum_{s=1}^{m} H_s\frac{\partial f_s}{\partial y_k} = 0,$$

а при $k = m$ эта сумма равна H.

Далее, поскольку H и H_1 не равны нулю,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_m} = \frac{H}{H_1} \neq 0.$$

Следовательно, по теореме о неявной функции существует единственная функция $y_m = \varphi_m(\bar{x})$, такая, что $f_1(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \equiv 0$ в некоторой окрестности Ω точки $\bar{a}$, где

$$\varphi_1(\bar{x}) = \psi_1(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x}), \ldots, \varphi_{m-1}(\bar{x}) = \psi_{m-1}(\bar{x}, \varphi_m(\bar{x})).$$

При $k = 2, \ldots, m$ в области Ω имеем $f_k(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) \equiv 0$.

В силу инвариантности формы первого дифференциала при $k = 1, \ldots, m$ имеем

$$0 = df_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial x_p} dx_p + \frac{\partial f_k}{\partial y_1} d\varphi_1(\bar{x}) + \cdots + \frac{\partial f_k}{\partial y_m} d\varphi_m(\bar{x}).$$

В векторном виде это можно записать так:

$$Bd\bar{x} + Ad\varphi(\bar{x}) = 0,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_p} \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{pmatrix},$$

$$d\varphi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} d\varphi_1(\bar{x}) \\ \cdots \\ d\varphi_m(\bar{x}) \end{pmatrix}, d\bar{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \cdots \\ dx_m \end{pmatrix}.$$

Далее, имеет место равенство

$$d\varphi(\bar{x}) = J_\varphi(\bar{x}) d\bar{x},$$

где

$$J_\varphi(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_p} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получим

$$AJ_\varphi(\bar{x})d\bar{x} + Bd\bar{x} = 0, \text{ т.е. } (J_\varphi(\bar{x}) + A^{-1}B)d\bar{x} = 0.$$

Итак, линейное отображение переводит любой вектор $d\bar{x} \in \mathbb{R}^p$ в нулевой вектор. Следовательно, это нулевое отображение и

$$J_\varphi(\bar{x}) + A^{-1}B = \bar{0}, \text{ т.е. } J_\varphi(\bar{x}) = -A^{-1}B.$$

Теорема доказана полностью.

С л е д с т в и е (теорема об обратном отображении). *Пусть гладкое отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ в окрестности точки $\bar{x} = \bar{a}$, невырожденное в этой точке. Тогда существует обратное гладкое отображение $\psi(\bar{y}) = \varphi^{-1}(\bar{y})$, определенное в некоторой δ-окрестности точки $\bar{b} = \varphi(\bar{a})$, т.е. такое отображение, что $\psi(\varphi(\bar{x})) = \bar{x}$, причем матрица Якоби J_ψ отображения $\psi(\bar{y})$ равна*

$$J_\psi = J_\varphi^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта теорема является прямым следствием теоремы о системе неявных функций. Надо только записать равенство $\bar{y} - \varphi(\bar{x}) = 0$ в виде системы неявных функций

$$f_1(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_1(\bar{x}) - y_1 = 0,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$f_n(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_n(\bar{x}) - y_n = 0,$$

а затем по этой теореме выразить $\bar{x}$ через $\bar{y}$.

§ 11. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение 1. *Пусть Ω — область точек $\mathbb{R}^n$, на которой определены гладкие функции $\varphi_1(\bar{x}), \dots, \varphi_m(\bar{x})$, $m < n$. Тогда множество $\Omega_1 \subset \Omega$ решений системы уравнений $\varphi(\bar{x}) = 0$, $k = 1, \dots, m$, называется* **многообразием,** *порожденным функциями $\varphi_1, \dots, \varphi_m$. Уравнение $\varphi_k(\bar{x}) = 0$ называется* **уравнением связи** *для многообразия Ω_1.*

Определение 2. *Точка $\bar{a}$ называется* **точкой условного локального максимума на многообразии** *Ω, если в некоторой окрестности точки $\bar{a}$ для любой точки $\bar{x}$, принадлежащей этой окрестности и многообразию Ω, справедливо неравенство $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$.*

Аналогично определяются точки условного локального минимума и экстремума.

Замечание. Если связи отсутствуют, то условный локальный экстремум называется **безусловным** экстремумом.

Определение 3. *Точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ называется* **особой,** *если $\operatorname{grad} f(\bar{a}) = \bar{0}$, и* **неособой,** *если $\operatorname{grad} f(\bar{a}) \neq \bar{0}$.*

Определение 4. *Многообразие Ω_1 называется* **невырожденным,** *если для любой точки $\bar{x} \in \Omega_1$ векторы градиентов $\Phi_s = \operatorname{grad} \varphi_s(\bar{x})$ при $s = 1, \dots, m$ являются линейно независимыми.*

Т е о р е м а (необходимое условие условного экстремума). *Для того чтобы неособая точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ была бы точкой условного экстремума функции $f(\bar{x})$ на невырожденном многообразии Ω_1, необходимо, чтобы вектор $\bar{F} = \operatorname{grad} f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$ выражался в виде линейной комбинации градиентов $\bar{\Phi}_1 = \operatorname{grad} \varphi_1(\bar{x}), \ldots, \bar{\Phi}_m = \operatorname{grad} \varphi_m(\bar{x})$ в этой точке, т.е. чтобы существовали вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что*

$$\bar{F} = \lambda_1 \bar{\Phi}_1 + \cdots + \lambda_m \bar{\Phi}_m.$$

Утверждение этой теоремы допускает следующую переформулировку для практического нахождения условного экстремума.

С л е д с т в и е (метод множителей Лагранжа). *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — независимые вещественные переменные. Рассмотрим функцию Лагранжа*

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}) - \lambda_1 \varphi_1(\bar{x}) - \cdots - \lambda_m \varphi_m(\bar{x}).$$

Для того чтобы неособая точка $\bar{a}$ функции $f(\bar{x})$ была бы точкой условного экстремума этой функции на невырожденном многообразии Ω_1, необходимо, чтобы при некотором $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$ имело место равенство

$$dL(\bar{x}, \lambda)\big|_{\bar{x}=\bar{a}, \bar{\lambda}=\bar{\lambda}_0} = 0,$$

т.е. чтобы все частные производные функции $L(\bar{x}, \bar{\lambda})$ по переменным x_s и λ_r обращались в нуль.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия. Если мы приравняем к нулю частные производные по переменным λ_r, то получим уравнения связи. А если продифференцируем по x_s, $s = 1, \ldots, n$, то получим условие выражения градиента функции $f(\bar{x})$ в виде линейной комбинации градиентов функций $\varphi_r(\bar{x})$, что по теореме и является необходимым условием. Следствие доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Идея доказательства состоит в том, чтобы найти $n - m$ линейно независимых векторов $\bar{\alpha}_{m+1}, \ldots, \bar{\alpha}_n \in \mathbb{R}^n$ таких, что каждый из этих векторов одновременно перпендикулярен вектору $\bar{F}$ и векторам $\bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_m$. Отсюда будет следовать, что линейное пространство $\mathbb{L}$, состоящее из всевозможных линейных комбинаций этих векторов, обладает свойством $\bar{F} \perp \mathbb{L}$ и $\bar{\Phi}_k \perp \mathbb{L}$, $k = 1, \ldots, m$. Ортогональное дополнение пространства $\mathbb{L}$, т.е. пространство $\mathbb{L}^\perp$, состоящее из всех векторов $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, ортогональных к $\mathbb{L}$, содержит вектора $\bar{F}$ и $\bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_m$. Размерность пространства $\mathbb{L}^\perp$ равна $n-m$. Поскольку вектора $\bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_m$ — линейно независимы, они образуют базис $\mathbb{L}$. Следовательно, вектор $\bar{F}$ есть линейная комбинация векторов $\bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_m$.

Заметим, что на самом деле $\mathbb{L}$ состоит из всех векторов, лежащих в каждой из касательных плоскостей к поверхностям $\varphi_s(\bar{x}) = 0$, $s = 1, \ldots, m$, в точке $\bar{x} = \bar{a}$.

Итак, осталось указать векторы $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{n-m} \in \mathbb{L}^{\perp}$. Их мы будем выбирать следующим образом. Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0.$$

По теореме о системе неявных функций в некоторой ε-окрестности точки $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ существует m гладких функций $\psi_1(\bar{z}), \ldots, \psi_m(\bar{z})$, где $\bar{z} = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ таких, что

$$\varphi_k(\psi_1(\bar{z}), \ldots, \psi_m(\bar{z}), \bar{z}) \equiv 0,$$

а также

$$\varphi_k(\psi_1(\bar{z}_0), \ldots, \psi_m(\bar{z}_0), \bar{z}_0) \equiv 0, (\psi_1(\bar{z}_0), \ldots, \psi_m(\bar{z}_0), \bar{z}_0) = \bar{a}.$$

Пусть $\bar{e}_r$ — направляющий вектор оси Ox_r, $r = m+1, \ldots, n$. Рассмотрим функции

$$h_{k,r}(t) = \varphi_k(\psi_1(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \ldots, \psi_m(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \bar{z}_0 + t\bar{e}_r) = 0,$$

где $k = 1, \ldots, m$, а также функцию

$$h_{0,r}(t) = f(\psi_1(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \ldots, \psi_m(\bar{z}_0 + t\bar{e}_r), \bar{z}_0 + t\bar{e}_r).$$

В точке $t = 0$ производные всех функций равны нулю: у первой, ..., m-й — потому, что они есть тождественно равные нулю функции, а у функции $h_{0,r}(t)$ — потому, что точка $t = 0$ должна быть точкой локального экстремума этой функции.

Вычисляя $h'_{k,r}(t)\Big|_{t=0}$ по теореме о производной сложной функции, получим

$$h'_{k,r}(t)\big|_{t=0} = \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_r} + \cdots + \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_r} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_r},$$

$$h'_{0,r}(t)\big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_r} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial\psi_m}{\partial x_r} + \frac{\partial f}{\partial x_r},$$

где $k = 1, \ldots, m$; $r = m+1, \ldots, n$; т.е. имеем

$$h'_{k,r}(t)\big|_{t=0} = (\bar{\Phi}_k, \bar{\alpha}_r) = 0, \quad h'_{0,r}(t)\big|_{t=0} = (\bar{F}, \alpha_r) = 0,$$

причем

$$\bar{\alpha}_r = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_r}, \ldots, \frac{\partial\psi_m}{\partial x_r}, 0, \ldots, 1, \ldots, 0\right),$$

число 1 находится на $m+r$-м месте.

Таким образом, все векторы $\bar{\alpha}_{m+1}, \ldots, \bar{\alpha}_n$ перпендикулярны каждому из векторов $\bar{F}, \bar{\Phi}_1, \ldots \bar{\Phi}_m$, при этом, очевидно, векторы $\bar{\Phi}_1, \ldots \bar{\Phi}_m$ в силу невырожденности многообразия Ω_1 будут линейно независимы. Теорема доказана.

§ 12. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. МАТРИЦА ЯКОБИ

Покажем, что матрица Якоби отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ обладает некоторым важным свойством, аналогичным свойству производной функции.

Определение 1. *Пусть отображение $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определено в некоторой окрестности точки $\bar{x} = \bar{0}$. Тогда будем говорить, что $\alpha(\bar{x})$ есть* **o-малое от длины вектора** $\bar{x}$, *и обозначать это так:*

$$\alpha(\bar{x}) = o(|\bar{x}|), \quad \text{если} \quad \lim_{\bar{x} \to 0} \frac{|\alpha(\bar{x})|}{|\bar{x}|} = 0.$$

Определение 2. *Линейное отображение $l(\Delta\bar{x})$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ называется* **дифференциалом отображения** $f(\bar{x})$ *в точке $\bar{x} = \bar{a}$, если*

$$\Delta f(\bar{x}) = l(\Delta\bar{x}) + o(|\Delta\bar{x}|).$$

Обозначение: $l(\Delta\bar{x}) \equiv df(\bar{x})|_{\bar{x}=\bar{a}, \bar{h}=\Delta\bar{x}}$. Если существует дифференциал отображения в точке, то оно называется **дифференцируемым** в этой точке. Дифференциал отображения можно определить следующим равенством:

$$\lim_{\Delta\bar{x} \to 0} \frac{|\Delta f(\bar{x}) - df(\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|} = 0.$$

Утверждение 1. *Если дифференциал отображения существует, то он определен однозначно.*

Доказательство. Пусть $l_1(\Delta\bar{x})$ и $l_2(\Delta\bar{x})$ — дифференциалы отображения $f(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{a}$. Положим $l(\Delta\bar{x}) = l_1(\Delta\bar{x}) - l_2(\Delta\bar{x})$.

Из неравенства треугольника имеем

$$|l(\Delta\bar{x})| \le |\Delta f(\bar{x}) - l_1(\Delta\bar{x})| + |\Delta f(\bar{x}) - l_2(\Delta\bar{x})|.$$

В силу определения дифференциала отображения отсюда получим

$$\lim_{\Delta\bar{x} \to 0} \frac{|l(\Delta\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|} = 0.$$

Далее, поскольку отображение $l(\Delta\bar{x})$ — линейно, для любого приращения $\Delta\bar{x}$ будем иметь

$$\frac{|l(\Delta\bar{x})|}{|\Delta\bar{x}|} = \lim_{t\to 0}\frac{|l(t\Delta\bar{x})|}{|t\Delta\bar{x}|} = 0.$$

Таким образом, отображение $l(\Delta\bar{x})$ переводит все линейное пространство в нулевой вектор. Следовательно, отображение $l(\Delta\bar{x})$ — нулевое, что и требовалось доказать.

Утверждение 2. *Пусть $f(\bar{x})$ — дифференцируемое отображение. Тогда имеет место равенство*

$$\Delta f(\bar{x}) = J_f(\bar{a})\cdot\Delta\bar{x} + o(|\Delta x|),$$

где выражение $J_f(\bar{a})\cdot\Delta\bar{x}$ понимается как умножение матрицы Якоби $J_f(\bar{a})$ на вектор $\Delta\bar{x}$.

Доказательство очевидно.

Приведем еще несколько свойств дифференциала отображения, которые непосредственно выводятся из его определения.

1^0. Дифференциал $df(\bar{x})$ отображения $f(\bar{x})$ существует тогда и только тогда, когда существуют все дифференциалы $df_k(\bar{x})$ функций $f_k(\bar{x})$, $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}),\ldots,f_m(\bar{x}).)$

2^0. Если отображение $\bar{y} = g(\bar{x})$ дифференцируемо в точке $\bar{a}$, а отображение $f(\bar{y})$ дифференцируемо в точке $\bar{b} = g(\bar{a})$, и образ некоторой окрестности точки $\bar{a}$ при отображении g содержится в некоторой окрестности точки $\bar{b}$, то отображение $h(\bar{x}) = f(g(\bar{x}))$ дифференцируемо и

$$J_h(\bar{x}) = J_f(g(\bar{x}))\cdot J_g(\bar{x}).$$

3^0. Отображение $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, которое является гладким в некотором шаре $O(\bar{a},\varepsilon)$, $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$, заведомо будет дифференцируемым во всем шаре $O(\bar{a},\varepsilon)$.

ЧАСТЬ III
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ.

В последнее время в преподавании университетского курса математики наметился отход от излишней абстрактности изложения в сторону его содержательности. До известной степени это перекликается с представлениями математиков прошлого. Прекрасным примером сочетания четкости изложения с конкретностью и идейной ясностью является учебник Ш.Ж. ла Валле-Пуссена “Курс анализа бесконечно малых” (Л.; М., 1933), который во многом служил для нас образцом.

Эта часть книги охватывает материал, излагаемый в третьем семестре, в рамках курса математического анализа на механико-математическом факультете МГУ. Как мы отмечали в предисловии к первой части, замысел этого учебника предполагает соединение краткости изложения, свойственной конспекту лекций, с доступностью и полнотой учебника. С другой стороны, наша концепция курса включает в себя выделение роли понятия предельного перехода во всевозможных его проявлениях как фундаментальный принцип изложения предмета. Следует также отметить, что материал третьего семестра несет в себе наиболее существенные элементы всего курса математического анализа, связанные с одновременным рассмотрением и перестановкой порядка выполнения нескольких предельных переходов в сочетании с понятием двойного предела.

Здесь мы рассматриваем такие приложения общей теории, как бесконечные произведения и бесконечные определители, основы теории эйлеровских интегралов, задача Кеплера о движении двух тел и функции Бесселя, формула Лагранжа для обратной функции, обобщающая формулу Тейлора, формула суммирования Пуассона и вычисление точного значения суммы Гаусса. Другое приложение теории — это изложение асимптотических методов Лапласа и стационарной фазы, являющихся, как известно, вещественной интерпретацией метода перевала в теории функций комплексного переменного. Обратим внимание читателя на то обстоятельство, что лекции, в которых излагается материал приложений, как правило, превосходят по объему отдельные лекции, содержащие теоретические основы курса. Заметим еще, что выбор приложений обусловлен нашим стремлением привить студентам определенный математический вкус и любовь к предмету.

Глава XV
ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Лекция 1

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ. КРИТЕРИЙ КОШИ

Эта часть курса математического анализа охватывает три большие темы, а именно:

1) числовые и функциональные ряды;

2) интегралы, зависящие от параметра;

3) ряды и интегралы Фурье.

Заметим, что третья тема при формальном подходе должна быть отнесена к двум первым, однако ввиду особой важности и специфических особенностей ее традиционно выделяют в самостоятельный раздел. Изложение материала начинается с числовых рядов.

Понятие числового ряда вскользь рассматривалось еще в первом семестре при изложении темы о числовых последовательностях. Теперь остановимся на этом вопросе более детально.

Напомним основные определения.

Определение 1. *Пусть $\{a_n\}$ — произвольная числовая последовательность.* **Числовым рядом** *или просто* **рядом** *называется формальная бесконечная сумма S вида*

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots .$$

Обычно используется следующая сокращенная запись:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

или просто $\sum a_n$.

Здесь натуральный параметр n в знаке суммы определяет номер члена последовательности. При фиксированном n соответствующий ее член a_n называется n-м **членом ряда**. В то же время символ a_n, рассматриваемый как функция своего номера, называется **общим членом ряда**. Вместо буквы n можно, разумеется, использовать любую другую букву, обозначающую переменную, принимающую натуральные значения.

Рассмотрим теперь новую последовательность s_n, задаваемую равенством

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Определение 2. *Последовательность s_n называется* **последовательностью частичных (или частных) сумм** *ряда $\sum a_n$, а ее n-й член называется* **n-й частичной суммой** *этого ряда.*

Определение 3. *Если последовательность s_n частичных сумм ряда $\sum a_n$ сходится к числу s, т.е. если $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, то ряд $\sum a_n$ называется* **сходящимся** *(к s), а число s — его* **суммой.** *В этом случае пишут:*

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Если же последовательность $\{s_n\}$ не имеет предела, то говорят, что ряд $\sum a_n$ **расходится.**

В основном нас будут интересовать сходящиеся ряды.

Определение 4. *Если ряд $\sum a_n$ сходится к числу s, то последовательность $r_n = s - s_n$ называется* **остаточным членом** *или* **остатком** *ряда.*

Заметим, что так как $s_n \to s$ при $n \to \infty$, то $r_n \to s - s = 0$ при $n \to \infty$.

Несколько модифицируем введенные определения и обозначения. Если в числовой последовательности a_n отбросить несколько начальных членов, например, в количестве $m > 0$, то оставшиеся члены $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ в совокупности можно снова рассматривать как некую новую последовательность b_n, задаваемую равенством $b_n = a_{m+n}$.

Рассматривая b_n как общий член ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, для его частичных сумм s_n' получим равенство

$$s_n' = b_1 + \cdots + b_n = a_{m+1} + \cdots + a_{m+n} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{m+k} = \sum_{k=m+1}^{m+n} a_k = s_{m+n} - s_n.$$

Кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ как формальную бесконечную сумму можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n.$$

Таким образом, бесконечную сумму $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} a_n$ тоже можно рассматривать как ряд.

Далее будем рассматривать также формальные ряды вида $\sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{n_s}$, где n_s — какая-либо последовательность натуральных чисел, и исследовать их на сходимость.

Утверждение 1. *Остаточный член r_n ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ можно представить в виде ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ в том смысле, что:*

1) его сумма равна r_n, когда исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

2) это представление понимается как формальное равенство, когда оба ряда расходятся;

3) другие случаи не имеют места.

Доказательство начнем с п.3. При $k \geq 1$ для частичных сумм s'_k ряда $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ и s_{k+n} ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет место равенство $s'_k = s_{k+n} - s_n$.

Ясно, что при фиксированном n сходимость и расходимость последовательностей s'_k и s_{k+n} имеют место одновременно, что и означает справедливость утверждения п. 3.

В случае 1, т.е. когда оба ряда сходятся, можно перейти к пределу при $k \to \infty$ в равенстве $s'_k = s_{k+n} - s_n$. Тогда получим

$$s' = \lim_{k\to\infty} s'_k = \lim_{k\to\infty} s_{k+n} - s_n = s - s_n = r_n;$$

тем самым утверждение п. 1 доказано.

Относительно утверждения п. 2 следует заметить, что формальное равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+n}$$

можно рассматривать как определение одной из возможных операций над формальными числовыми рядами. При введении подобных операций необходимо только требовать, чтобы правые и левые части равенств переходили бы в равенство между числами в случае наличия сходимости хотя бы для одной из частей равенства, что действительно имеет место в нашем случае. Доказательство утверждения 1 закончено.

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится, и его сумма равна 1. Действительно, имеем

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\to 1$$

при $n\to\infty$, т.е. $s=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=1$.

2. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии вида

$$a+aq+\dots+aq^n+\dots,\quad \text{при}\quad a\neq 0.$$

В случае $q=1$ имеем $s_n=na$, и ряд расходится. При $q\neq 1$ справедливо равенство

$$s_n=a+aq+\dots+aq^{n-1}=a(1+q+\dots+q^{n-1})=$$

$$=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

Известно, что $q^n\to 0$ при $|q|<1$ и $\{q^n\}$ расходится при $|q|\geq 1$.

Таким образом, указанный ряд сходится к сумме $s=\frac{a}{1-q}$ при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1, a\neq 0$.

3. Гармонический ряд $\sum 1/n=1+1/2+\dots+1/n+\dots$ расходится, а ряд $\sum 1/n^\alpha=1+1/2^\alpha+\dots+1/n^\alpha+\dots$ сходится при $\alpha>1$.

Заметим прежде всего, что расходимость ряда есть расходимость последовательности его частичных сумм, т.е. надо доказать, что $s_n=1+\dots+1/n$ расходится. Для этого достаточно показать, что эта последовательность не ограничена.

При $n=2^k$ имеем

$$s_n=s_{2^k}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\dots$$

$$\dots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^k}\right)\geq$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+\dots+2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}=1+\frac{k}{2}>\frac{k}{2}.$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было число $M>0$, всегда найдется номер $n=2^k$, такой, что $s_n>k/2>M$. Для этого достаточно выбрать натуральное число k большим, чем $2M$. Другими словами, подпоследовательность s_{2^k} не ограничена и потому она расходится, как и сам гармонический ряд.

Для доказательства сходимости ряда $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ по теореме Вейерштрасса достаточно доказать ограниченность его частичных сумм

$$t_n = 1 + 1/2^\alpha + \dots + 1/n^\alpha,$$

поскольку они монотонно возрастают. Рассмотрим какое-либо k с условием $n < 2^k$. Тогда справедлива следующая оценка

$$t_n < t_{2^k} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{(2^{k-1}+1)^\alpha} + \dots + \frac{1}{2^{k\alpha}}\right) \le$$

$$\le 1 + 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{(2^{(k-1)\alpha}} + \dots + \frac{1}{2^{(k-1)\alpha}}\right) \le$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2^\alpha} + 2 \cdot \frac{1}{2^{2\alpha}} + \dots + 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^{(k-1)\alpha}} \le 1 + \frac{1}{1 - 2^{\alpha-1}}.$$

Таким образом, частичные суммы $\{t_n\}$ ограничены в совокупности, что и означает сходимость искомого ряда.

Установим теперь несколько простейших свойств сходящихся рядов.

Утверждение 2. *Отбрасывание любого конечного числа членов в бесконечной сумме или добавление к ней любого конечного числа новых слагаемых не влияет на сходимость ряда.*

Доказательство. Рассмотрим случай отбрасывания слагаемых, так как второй случай разбирается аналогично. Итак, пусть мы отбросили члены ряда $\sum a_n$ с номерами $n_1 < \dots < n_k$. Оставшиеся слагаемые перенумеруем в порядке возрастания их прежних номеров. Общий член получившейся таким образом последовательности обозначим через b_n. Тогда при любом $m > n_k$ будем иметь

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m-k} b_n + a_{n_1} + \dots + a_{n_k}.$$

Отсюда следует, что последовательности частичных сумм этих рядов $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ и $s'_m = \sum\limits_{n=1}^{m-k} b_n = s_m - a_{n_1} - \dots - a_{n_k}$ сходятся и расходятся одновременно. Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Если* $\sum a_n = s$ *и* $c \in \mathbb{R}$, *то* $\sum ca_n = cs$.

Утверждение 4. *Если* $\sum a_n = s$ *и* $\sum b_n = t$, *то* $\sum(a_n + b_n) = s + t$.

Доказательство утверждений 3 и 4 есть прямое следствие определения суммы ряда и арифметических свойств сходящихся последовательностей s_n и t_n как частичных сумм рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Доказательство закончено.

Утверждение 5 (необходимый признак сходимости ряда). *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится, то* $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Другими словами,* a_n *есть бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Имеем $a_n = s_n - s_{n-1}$. Отсюда при $n \to \infty$ получим $a_n \to s - s = 0$, что и требовалось доказать.

Примеры. 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ расходится, так как $a_n = (-1)^{n-1}$ не стремится к нулю. Заметим, что Л. Эйлер приписывал этому ряду сумму, равную $1/2$. И хотя в рамках наших определений это неверно, существует иной, более общий взгляд на проблему, и он позволяет придать утверждению Эйлера строгий математический смысл. Речь идет о корректной и продуктивной постановке задачи суммирования расходящихся рядов. Например, можно сумму расходящегося ряда рассматривать как значение особого линейного функционала, определенного на последовательности $\{a_n\}$, и т.п. Однако здесь мы этих вопросов, по существу, касаться не будем.

2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin n$ расходится. Чтобы доказать это утверждение, достаточно установить, что равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = 0$ не имеет места. Действительно, пусть $\sin n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда, так как

$$\sin n = \sin\left((n-1)+1\right) = \sin(n-1)\cos 1 + \sin 1 \cos(n-1),$$

$$\sin 1 \neq 0, \cos 1 \neq 0,$$

то, переходя к пределу в предыдущем равенстве, получим

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sin n = \cos 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \sin(n-1) + \sin 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \cos(n-1) =$$

$$= 0 + \sin 1 \cdot \lim_{n\to\infty} \cos(n-1).$$

Отсюда имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(n-1) = 0$. Но тогда при $n \to \infty$

$$1 = (\sin n)^2 + (\cos n)^2 \to 0 + 0 = 0,$$

что невозможно. Следовательно, ряд $\sum \sin n$ расходится, что и требовалось доказать.

Рассмотренные примеры показывают, что даже простейшие признаки сходимости ряда оказываются полезными при исследовании рядов на сходимость. С другой стороны, наличие общего критерия Коши для сходимости последовательности позволяет установить соответствующий критерий и для числового ряда.

Теорема 1 (критерий Коши). *Для сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при всяком натуральном p и всех $n > n_0(\varepsilon)$ имело место неравенство*

$$|s_{n+p} - s_n| = \left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Утверждение теоремы равносильно критерию Коши для сходимости последовательности s_n частичных сумм ряда, что согласно определению и есть сходимость его самого. Тем самым теорема 1 доказана.

Теорему 1 можно переформулировать таким образом, чтобы иметь критерий расходимости ряда $\sum a_n$ в прямой форме.

Теорема 2 (критерий Коши для расходимости ряда). *Для расходимости ряда $\sum a_n$ необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно $\varepsilon > 0$ с условием, что для любого $n_0 \geq 1$ найдутся натуральные $n > n_0$ и p, для которых справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \geq \varepsilon.$$

Определение 5. *Всякое выражение вида* $s_{n+p} - s_n = \sum\limits_{m=n+1}^{n+p} a_m$ *называется* **отрезком ряда** $\sum a_n$.

Примеры. 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ сходится.

Для доказательства воспользуемся теоремой 1. Имеем

$$|s_{n+p} - s_n| = \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)^2} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{(n+p)^2}\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Требуемое неравенство $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ будет выполнено, если, например, $1/n < \varepsilon$, т.е. $n > 1/\varepsilon$. Положим $n_0(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$. Тогда $n_0(\varepsilon) > 1/\varepsilon$ и для любого натурального p и любого $n > n_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$1/n < 1/n_0(\varepsilon) < \varepsilon, \quad |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon,$$

следовательно, по теореме 1 ряд сходится.

2. Гармонический ряд $1 + 1/2 + 1/3 + \dots$ расходится. Применим теорему 2. При всех n и $p = n$ имеем

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, условия теоремы 2 будут выполнены, если положить $\varepsilon = 1/2$ и при любом $n_0 \geq 1$ в качестве n и p взять числа $n = p = n_0$. Тем самым расходимость ряда установлена.

3. Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \frac{1}{2 \ln 2} + \dots + \frac{1}{n \ln n} + \dots$$

расходится. Действительно, при любом натуральном k имеем

$$\sum_{n=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{n \ln n} \geq \frac{2^k}{2^{k+1}(k+1)\ln 2} = \frac{1}{2(k+1)\ln 2}.$$

Следовательно, при $k \geq 1$ получим

$$s_{2^{2k}} - s_{2^k} \geq \frac{1}{2(k+1)\ln 2} + \dots + \frac{1}{4k \ln 2} > \frac{k}{4k \ln 2} = \frac{1}{4 \ln 2}.$$

Положим $\varepsilon = 1/(4 \ln 2)$. Тогда, если в качестве n и $n+p$ взять числа $n = 2^k$ и $n + p = 2^{2k}$, то при любом $k \geq 1$ выполняются условия теоремы 2, и, значит, данный ряд расходится.

Обратим еще раз внимание на тесную связь между теорией сходимости рядов и последовательностей. Мы установили, что всякий ряд порождает последовательность частичных сумм, которая определяет его сходимость. Имеет место и обратный результат, а именно: всякую последовательность можно рассматривать как последовательность частичных сумм некоторого ряда. Действительно, если $\{b_n\}$ — некоторая последовательность, то с ней можно связать ряд $\sum a_n$, полагая $a_1 = b_1$ и $a_{n+1} = b_{n+1} - b_n$ при $n \geq 1$.

Лекция 2

§ 2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Определение 1. *Ряд* $\sum a_n$ *называется* **рядом с неотрицательными членами,** *если при всех* n *имеем* $a_n \geq 0$.

Ряды с неотрицательными членами — это простейший тип числовых рядов. Их свойства используют при изучении рядов общего вида, и поэтому изложение теории рядов обычно начинают именно с рядов с неотрицательными членами. Для общего члена такого ряда будем преимущественно использовать обозначение p_n (вместо a_n). В основном нас будут интересовать вопросы сходимости этих рядов.

Теорема 1. *Для сходимости ряда* $\sum p_n$, *где* $p_n \geq 0$ *при всех* n, *необходима и достаточна ограниченность последовательности его частичных сумм.*

Доказательство. Пусть s_n — n-я частичная сумма ряда $\sum p_n$. Поскольку $p_n \geq 0$, имеем, что последовательность $\{s_n\}$ не убывает. Теперь требуемый результат вытекает из критерия Вейерштрасса для сходимости монотонной последовательности. Доказательство закончено.

Пример. Пусть $b_n \to +\infty$ и $\{b_n\}$ не убывает и положительна. Тогда ряд $\sum(b_{n+1} - b_n)$ расходится, а ряд $\sum \left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right)$ сходится.

Действительно, для частичных сумм s_n и t_n этих рядов имеем

$$s_n = b_{n+1} - b_n \to +\infty,\ t_n = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_{n+1}} < \frac{1}{b_1}.$$

Теперь требуемый результат вытекает из теоремы 1.

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть* $\sum p_n$ *и* $\sum q_n$ — *два ряда с неотрицательными членами и пусть, начиная с некоторого* n_0, *для всех* $n \geq n_0$ *имеем* $0 \leq q_n \leq p_n$. *Тогда:*

а) *сходимость ряда* $\sum p_n$ *влечет за собой сходимость ряда* $\sum q_n$;

б) *из расходимости ряда* $\sum q_n$ *следует расходимость ряда* $\sum p_n$.

Доказательство. Без нарушения сходимости можно отбросить первые n_0 членов каждого ряда. При всех $n > n_0$ полагаем

$$s_n = \sum_{m=n_0+1}^{n} p_m,\ t_n = \sum_{m=n_0+1}^{n} q_m.$$

Тогда для любого $n > n_0$ имеем $0 \le t_n \le s_n$. В случае а) последовательность $\{s_n\}$ ограничена, следовательно, и $\{t_n\}$ тоже ограничена и ряд $\sum q_n$ сходится. В случае б) последовательность $t_n \to +\infty$, поэтому $s_n \to +\infty$, т.е. ряд $\sum p_n$ расходится. Теорема доказана.

Определение 2. *Ряд* $\sum p_n$ *в теореме 2 называется* **мажорантой** *для ряда* $\sum q_n$, *а ряд* $\sum q_n$ — **минорантой** *для ряда* $\sum p_n$. *Говорят еще, что ряд* $\sum p_n$ **мажорирует** *ряд* $\sum q_n$, *а последний, в свою очередь, его* **минорирует**.

Аналогичное определение имеет место и для неотрицательных числовых последовательностей.

Схема применения признака сравнения состоит в подборе подходящей мажоранты для доказательства сходимости ряда или миноранты для доказательства его расходимости. Обычно в качестве мажоранты и миноранты используются ряды с общим членом более простого вида, чем у исходного ряда, либо ряды общеизвестные, например гармонический ряд, геометрическая прогрессия и т.д.

Пример. *(Признак разрежения Коши).* Если последовательность $p_n \ge 0$ не возрастает, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k p_{2^k}$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Поскольку $p_n \ge 0$, последовательность частичных сумм ряда $\sum p_n$ не убывает, а любая ее подпоследовательность s_{n_k} сходится и расходится одновременно с s_n. Далее, для любого натурального n найдется целое число k с условием $2^{k-1} < n \le 2^k$. Для таких n и k определим последовательность $b_n = p_{2^k}$. Тогда согласно условию выполнены неравенства

$$b_n = p_{2^k} \le p_n \le p_{2^{k-1}} = b_{2^{k-1}},$$

$$2^{k-1}p_{2^k} \le p_{2^{k-1}+1} + \cdots + p_{2^k} \le 2^{k-1}p_{2^{k-1}}.$$

Следовательно, для частичных сумм $\sigma_{2^{k-1}}$ и σ_{2^k} ряда $\sum b_n$ имеем

$$\sigma_{2^k} = \sum_{n=1}^{2^k} b_n = \sum_{m=1}^{k} 2^{m-1}p_{2^m} \le \sum_{n=1}^{2^k} p_n =$$

$$= s_{2^k} \le 2\sum_{n=1}^{2^{k-1}} b_n = \sum_{m=1}^{2^{k-1}} 2^m p_{2^m} = 2\sigma_{2^{k-1}}.$$

Это значит, что σ_{2^k} является минорантой, а $2\sigma_{2^{k-1}}$ — мажорантой для s_{2^k}. Таким образом, ряды $\sum p_n$ и $\sum 2^k p_{2^k}$ сходятся и расходятся одновременно, что и утверждалось выше.

Идея, заложенная в признаке сравнения, позволяет вывести и некоторые другие полезные утверждения подобного рода. Следующая теорема относится к их числу.

Т е о р е м а 3 (обобщенный признак сравнения). *Если в условии теоремы 2 неравенство $q_n \le p_n$ заменить неравенством $\frac{q_{n+1}}{q_n} \le \frac{p_{n+1}}{p_n}$, то ее утверждение также будет иметь место.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку отбрасывание нескольких первых членов ряда не влияет на его сходимость, с самого начала можно считать, что $n_0 = 1$. Перемножая все неравенства из условия теоремы до номера n включительно, приходим к неравенствам вида

$$\frac{q_n}{q_1} \le \frac{p_n}{p_1}, \quad q_n p_1 \le p_n q_1.$$

Применяя теорему 2, мы получаем требуемый результат относительно рядов $p_1 \sum_{n=1}^{\infty} q_n$ и $q_1 \sum_{n=1}^{\infty} p_n$, а так как умножение всех членов ряда на одно и то же число, отличное от нуля, не влияет на сходимость, то тем самым теорема 3 доказана полностью.

Т е о р е м а 4 (признак Даламбера). *Пусть для членов ряда $\sum p_n$, начиная с некоторого номера n_0, выполнены условия:*

1) $p_n > 0$;

2) $D_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} \le q$, где $0 < q < 1$.

Тогда ряд $\sum p_n$ сходится. Если же при всех $n \ge n_0$ вместо неравенства 2 имеем $p_{n+1}/p_n \ge 1$, то ряд $\sum p_n$ расходится.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сравним ряд $\sum p_n$ со сходящимся рядом $\sum b_n$, где $b_n = q^n$. При $n \ge n_0$ имеем

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \le q = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Поэтому первое утверждение теоремы 4 вытекает из теоремы 3.

Во втором случае надо положить $b_n = 1$ для всех n. Тогда ввиду расходимости ряда $\sum b_n$ и неравенств

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \ge 1 = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

из той же теоремы 3 следует расходимость ряда $\sum p_n$. Теорема 4 доказана полностью.

Т е о р е м а 5 (признак Даламбера в предельной форме). *Рассмотрим ряд* $\sum p_n$ *с условием* $p_n > 0$ *для всех* n. *Положим*

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n}, \quad r = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

Тогда при $q < 1$ *ряд* $\sum p_n$ *сходится, а при* $r > 1$ — *расходится.*

Напомним, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \inf_{m\in N} \sup_{\substack{n\\ n\geq m}} a_n, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n = \sup_{m\in N} \inf_{\substack{n\\ n\geq m}} a_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала первый случай. Положим $q_1 = \frac{q+1}{2}$. Тогда $q < q_1 < 1$. Поскольку $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n} = q$, при некотором n_0 имеем

$$\sup_{\substack{n\\ n\geq n_0}} \frac{p_{n+1}}{p_n} < q_1 = \frac{q+1}{2} = q + \frac{1-q}{2} < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum p_n$ сходится в силу первого утверждения теоремы 4.

Рассмотрим теперь второй случай. Положим $r_1 = \frac{r+1}{2}$. Тогда имеем $r > r_1 > 1$. Поскольку $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{p_{n+1}}{p_n} = r$, при некотором n_1 имеем оценку

$$\inf_{\substack{n\\ n\geq n_1}} \frac{p_{n+1}}{p_n} > r_1 = \frac{r+1}{2} = 1 + \frac{r-1}{2} > 1.$$

Тем самым ряд $\sum p_n$ расходится по второму утверждению теоремы 4. Теорема 5 доказана полностью.

Замечание. При $q = 1$ вопрос о сходимости ряда $\sum p_n$ в теоремах 4 и 5 остается открытым. Для примера можно указать на ряды $\sum 1/n^2$ и $\sum 1/n$, один из которых сходится, а второй — расходится, но в обоих случаях имеем $q = 1$. Для исследования сходимости подобных рядов требуются более "тонкие" признаки, которые будут рассмотрены позже.

Несколько более тонкий признак дает следующая теорема.

Т е о р е м а 6 (признак Коши). *Если для членов ряда* $\sum p_n$ *с условием* $p_n \geq 0$, *начиная с некоторого номера* n_0, *имеет место неравенство* $p_n^{1/n} \leq q$, *где число* $q < 1$ *и фиксировано, то ряд* $\sum p_n$ *сходится.*

Если же для бесконечно многих n имеем $p_n^{1/n} \geq 1$, то этот ряд расходится.

Доказательство. Рассмотрим сначала первый случай. Последовательно имеем $p_n^{1/n} \leq q$, $p_n \leq q^n$, и так как $q < 1$, то ряд $\sum p_n$ сходится по признаку сравнения вместе с рядом $\sum q^n$.

Во втором случае для бесконечного количества значений n имеем $p_n^{1/n} \geq 1$, $p_n \geq 1$. Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} p_n \neq 0$ и ряд $\sum p_n$ расходится, поскольку условие необходимого признака сходимости ряда ($p_n \to 0$ при $n \to \infty$) не выполняется. Теорема 6 доказана.

Теорема 7 (признак Коши в предельной форме). *Пусть*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} p_n^{1/n} = q,$$

где $p_n \geq 0$ при всех n.

Тогда при $q < 1$ ряд $\sum p_n$ сходится, а при $q > 1$ — расходится.

Доказательство. Положим сначала $q_1 = \frac{q+1}{2}$ и допустим, что $q < 1$. Тогда при некотором $n_0 \geq 1$ имеем

$$\sup_{\substack{n \\ n\geq n_0}} p_n^{1/n} < q_1 < 1.$$

Поэтому по первому случаю признака Коши ряд $\sum p_n$ сходится.

Если же $q > 1$, то при всех $n_1 \geq 1$ имеем оценку

$$\sup_{\substack{n \\ n\geq n_1}} p_n^{1/n} > q_1$$

Это означает существование бесконечного множества значений n, для которых справедливо неравенство $p_n^{1/n} > q_1 > 1$. Следовательно, ряд $\sum p_n$ расходится по второму случаю признака Коши. Теорема 7 доказана.

Признак Коши, как и признак Даламбера, является довольно грубым. Он, например, тоже не позволяет решить вопрос о сходимости рядов $\sum 1/n$ и $\sum 1/n^2$. Однако он тоньше или, как еще говорят, сильнее признака Даламбера, поскольку можно указать ряд, к которому признак Коши применим, а признак Даламбера нет, но не наоборот. Точнее, можно доказать, что если для ряда $\sum p_n$ выполнены условия признака Даламбера с некоторыми q и n_0, то для него выполнены и условия признака Коши с тем же значением q и, возможно, иным значением n_0.

Лекция 3

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ РЯДОВ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Рассмотренные ранее признаки сходимости рядов относятся к числу простейших и являются исходными для построения основных признаков сходимости. Например, гораздо более тонким признаком сходимости ряда является признак Раабе, который мы сейчас докажем.

Т е о р е м а 1 (признак Раабе). *1. Ряд $\sum p_n$ сходится, если для всех n, начиная с некоторого значения n_0, и некоторого $\alpha > 1$ имеет место неравенство*

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \le 1 - \frac{\alpha}{n}.$$

2. Ряд $\sum p_n$ расходится, если, начиная с некоторого n_1, выполнено неравенство

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \ge 1 - \frac{1}{n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Для доказательства воспользуемся теоремой 3 § 2. Рассмотрим вспомогательный ряд вида $\sum 1/n^\beta$, где $\beta = \frac{\alpha+1}{2}$, $\alpha > \beta > 1$. Этот ряд сходится (см. пример 3 к утверждению 1 §1). Обозначим его общий член через $q_n = 1/n^\beta$. Тогда при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Но так как $\alpha > \beta$, то при достаточно больших n, т.е. при $n > n_1$, где n_1— некоторое число, имеем

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1 - \frac{\alpha}{n} \ge \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

Тем самым для ряда $\sum p_n$ выполнены условия теоремы 3 § 2 и поэтому он сходится.

2. При $n \ge 2$ положим $b_n = \frac{1}{n-1}$ и $b_1 = 1$. Неравенство п.2 при $n \ge 2$ можно переписать в виде

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \ge \frac{n-1}{n} = \frac{1/n}{1/(n-1)} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Поскольку ряд $\sum b_n$ расходится (это просто гармонический ряд), по второму утверждению теоремы 3 § 2 ряд $\sum p_n$ тоже расходится. Теорема доказана полностью.

Т е о р е м а 2 (признак Раабе в предельной форме). *Пусть $p_n > 0$ для всех n и существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{p_{n+1}}{p_n}\right) = l.$$

Тогда при $l > 1$ ряд $\sum p_n$ сходится, а при $l < 1$ — расходится.

Эта теорема выводится из предыдущей теоремы 1 аналогично тому, как теорема 7 § 2 из теоремы 6 § 2 или теорема 5 § 2 из теоремы 4 § 2.

Замечание. Иногда вместо последовательности b_n в формулировке теоремы 2 рассматривают последовательность

$$B_n = n\left(\frac{p_n}{p_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{1}{D_n} - 1\right).$$

При этом в обоих случаях имеем соотношение $D_n = p_{n+1}/p_n \to 1$ при $n \to \infty$. А так как имеет место равенство $b_n = B_n D_n$, то $b_n \sim B_n$ при $n \to \infty$. Следовательно, в теореме 2 замена b_n на B_n допустима. Из подобных соображений неравенство в условии 1) можно заменить на неравенство $B_n \geq 1 + \alpha$, а неравенство в условии 2) этой теоремы — неравенством $B_n \leq 1$.

Т е о р е м а 3 (признак Куммера). *Пусть $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$— две последовательности положительных чисел.*

1. Если существует $\alpha > 0$ и номер n_0 такие, что для всех $n > n_0$ имеем

$$c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha,$$

то ряд $\sum a_n$ сходится.

2. Если найдется число n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ выполнено неравенство

$$c_n - c_{n+1}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$$

и ряд $\sum \frac{1}{c_n}$ расходится, то и ряд $\sum a_n$ тоже расходится.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 3, обратим внимание на замечательную ее особенность, состоящую в том, что заключение о сходимости выводится относительно одного только ряда $\sum a_n$, в то время как вторая последовательность $\{c_n\}$ никак не фиксируется, что предоставляет возможности для ее подбора в каждом случае применения признака Куммера к исследованию сходимости конкретного числового ряда.

Доказательство теоремы 3. Без ограничения общности будем считать, что $n_0 = 1$, так как ясно, что члены с номерами $n < n_0$ можно просто отбросить.

В случае 1 имеем

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \alpha a_n.$$

Суммируя это неравенство по n при всех $n = 1, \dots, m$, получим

$$c_1 a_1 - c_{m+1} a_{m+1} \geq \alpha(a_1 + \dots + a_m),$$

откуда

$$s_m = a_1 + \dots + a_m \leq \frac{c_1 a_1 - c_{m+1} a_{m+1}}{\alpha} < \frac{c_1 a_1}{\alpha}.$$

Это означает, что все частичные суммы s_m ряда $\sum a_n$ ограничены в совокупности и по теореме 1 § 2 этот ряд сходится.

Неравенство п. 2 можно переписать в виде

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{1/c_{n+1}}{1/c_n}.$$

Но так как по условию ряд $\sum 1/c_n$ расходится, то по теореме 3 расходится и ряд $\sum a_n$. Теорема доказана полностью.

Рассмотрим некоторые следствия из теоремы 3.

Следствие 1. *Положим $c_n = 1$ для всех n. Условие сходимости ряда $\sum a_n$ тогда запишется в виде:*

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha \quad \textit{или} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \alpha.$$

Для расходимости в этом случае имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \geq 0 \quad \textit{или} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1.$$

Таким образом мы получаем новое доказательство признака Даламбера.

Следствие 2. *Положим $c_n = n - 1$. Тогда сходимость ряда $\sum a_n$ имеет место при выполнении условия*

$$n - 1 - n\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha, \quad \text{т.е.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha + 1}{n}.$$

Расходимость ряда $\sum a_n$ наступает при условии

$$c_n = n - 1, \quad n\frac{a_{n+1}}{a_n} - (n-1) \geq 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Другими словами, мы получаем признак Раабе.

С л е д с т в и е 3 (признак Бертрана).

1. Ряд $\sum a_n$, $a_n > 0$ сходится, если существует $\alpha > 0$ и номер n_0 такие, что при всех $n > n_0$ выполнены неравенства

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1+\alpha}{n \ln n}.$$

2. Данный ряд расходится, если при всех достаточно больших n имеет место неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. В качестве c_n в признаке Куммера положим $c_n = (n-1)\ln(n-1)$. Тогда условие сходимости в нем запишется так:

$$(n-1)\ln(n-1) - n \ln n \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \alpha,$$

т.е.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} + \frac{(n-1)\ln(1-1/n)}{n \ln n} - \frac{\alpha}{n \ln n}. \qquad (*)$$

Далее, поскольку

$$(n-1)\ln(1-1/n) = \ln(1-1/n)^{n-1} > -1,$$

неравенство (*) вытекает из следующего неравенства:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1+\alpha}{n \ln n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{(n-1)\ln(1-1/n)}{n \ln n} - \frac{\alpha}{n \ln n},$$

т.е. выполнение условия сходимости в признаке Бертрана обеспечивает справедливость условия сходимости в признаке Куммера.

Таким образом, признак Бертрана для сходимости ряда доказан.

2. Положим в признаке Куммера $c_n = (n-2)\ln(n-1)$. Тогда расходимость ряда $\sum a_n$ будет иметь место, если выполнено неравенство

$$(n-1)\ln n \frac{a_{n+1}}{a_n} - (n-2)\ln(n-1) \geq 0.$$

Достаточно показать, что оно является следствием условия расходимости в признаке Бертрана вида

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n},$$

т.е. доказать при всех n, больших некоторого n_0, следующее неравенство:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n} \geq \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{\ln(n-1)}{\ln n}.$$

Оно, в свою очередь, вытекает из следующей цепочки неравенств $(n \geq 3)$:

$$\ln(1 - 1/n) < -1/n,$$

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n} \geq \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{n \ln n}\right) \geq$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{n-1}\right)\left(1 + \frac{\ln(1 - 1/n)}{\ln n}\right) = \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{\ln(n-1)}{\ln n}.$$

Таким образом, признак Бертрана полностью доказан.

Простым следствием признаков Даламбера, Раабе и Бертрана является признак Гаусса.

Теорема 4 (признак Гаусса). *Если $a_n > 0$ для всех натуральных n, $\varepsilon > 0$ — некоторая постоянная и*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + O(n^{-1-\varepsilon}),$$

то:

1) ряд $\sum a_n$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$;

2) если $\lambda = 1$, то ряд сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu \leq 1$.

Доказательство. 1) Имеем $D_n = a_{n+1}/a_n \to 1/\lambda$ при $n \to \infty$, поэтому по теореме 5 §2 ряд $\sum a_n$ сходится при $\lambda > 1$ и расходится при $\lambda < 1$, что и утверждалось в п. 1).

2) Если $\lambda = 1$ и $\mu \neq 1$, то $B_n = n(a_n/a_{n+1} - 1) \to \mu$ Поэтому согласно замечанию к теореме 2 ряд сходится при $\mu > 1$ и расходится при $\mu < 1$. Если же $\lambda = \mu = 1$, то при некотором $\varepsilon_0 > 0$ и $n \to \infty$ имеет место предельное соотношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O(n^{-1-\varepsilon_0}).$$

Но поскольку $\ln n = o(n^{\varepsilon_0})$, при всех достаточно больших n выполнено неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + O(n^{-1-\varepsilon_0}) > 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n}.$$

Таким образом, при $\lambda = \mu = 1$ ряд $\sum a_n$ расходится по признаку Бертрана. Теорема 4 доказана полностью.

Комбинируя полученные выше результаты и снова привлекая, по существу, те же соображения, что и выше, можно получать все более и более тонкие и сложные признаки сходимости. Однако на практике реально используется один гораздо более простой и более сильный признак сходимости рядов, а именно, интегральный признак Коши – Маклорена, к доказательству которого мы переходим.

Теорема 5 (интегральный признак Коши – Маклорена). *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[1,+\infty)$ и $f(x)$ убывает на нем. Тогда:*

1) если $0 \le p_n \le f(n)$ при всех $n \ge n_0$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ сходится, то ряд $\sum p_n$ тоже сходится;

2) если $p_n \ge f(n) \ge 0$ при всех $n \ge n_0$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд $\sum p_n$.

Доказательство. Как и выше, без ограничения общности будем считать, что $n_0 = 1$. Далее, поскольку $f(x)$ монотонно убывает, при всяком натуральном k и $k \le x \le k+1$ имеем

$$f(k) \ge f(x) \ge f(k+1).$$

Интегрируя это неравенство по указанному промежутку, получим

$$f(k) = \int\limits_k^{k+1} f(k)dx \ge \int\limits_k^{k+1} f(x)dx \ge \int\limits_k^{k+1} dx = f(k+1).$$

При всяком $n \ge 2$ просуммируем эти неравенства по k от 1 до $n-1$. Получим

$$s_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \ge \int\limits_1^n f(x)dx \ge \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right) - f(1) = s_n - f(1).$$

Далее каждый из двух случаев будем рассматривать отдельно.

1. В этом случае интеграл $I = \int\limits_1^\infty f(x)dx$ сходится, поэтому при всех $n \ge 2$ для частичных сумм s_n ряда $\sum f(n)$ имеет место единообразная оценка вида $s_n \le I + f(1)$, и поскольку $f(n) \ge 0$ для всех натуральных n, ряд $\sum f(n)$ сходится, а вместе с ним сходится и мажорируемый им ряд $\sum p_n$, что и требовалось доказать.

2. Поскольку в этом случае интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$ расходится, $\int\limits_1^n f(x)dx \to +\infty$ при $n \to \infty$. Но так как

$$s_n \geq s_{n-1} \geq \int\limits_1^n f(x)dx,$$

то и $s_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. А это означает, что ряд $\sum f(n)$ расходится вместе с рядом $\sum p_n$, для которого первый ряд по условию является минорантой. Теорема 5 доказана полностью.

Замечание. Очевидно, что в условии теоремы 5 интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ можно заменить интегралом $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, где $a > 1$ — произвольное число.

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из интегрального признака.

1. Ранее мы доказали, что при $s > 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty 1/n^s$ сходится. Его сумма обозначается символом $\zeta(s)$ и называется "дзета-функцией Римана". Дадим другое доказательство сходимости этого ряда. Действительно, при таких значениях s несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty x^{-s}dx$ сходится и легко вычисляется. Имеем

$$\int\limits_1^\infty x^{-s}dx = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_1^\infty = \frac{1}{s-1}.$$

Следовательно, по теореме 5 ряд $\sum n^{-s}$ тоже сходится, что и требовалось доказать. Если же $s \leq 1$, то интеграл $\int\limits_1^\infty x^{-s}dx$ расходится, а вместе с ним расходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty 1/n^s$.

Замечание. Ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty 1/n^s$ при некоторых значениях s впервые рассматривал Л. Эйлер. Более того, при s, равном четному натуральному числу, он нашел точные значения для его суммы $\zeta(s)$. Позднее Б. Риман определил функцию $\zeta(s)$ для всех значений аргумента s, исключая точку $s = 1$, причем не только вещественных, но и комплексных. Он детально исследовал свойства этой функции, и поэтому она носит его имя. Дзета-функция Римана играет огромную роль в теории чисел. Относительно некоторых свойств этой функции Риман высказал ряд гипотез, которые давно уже доказаны. Все, кроме одной. Она известна как гипотеза Римана о нулях ζ-функции. На сегодняшний день эта гипотеза вместе с последней теоремой Ферма являются двумя самыми престижными математическими проблемами.

2. Валле Пуссен показал [35], что при $s > 1$ справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} + \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right) \right), \qquad (*)$$

причем ряд в правой части сходится при $s > 0$. Действительно, общий член p_n последнего ряда можно представить в виде

$$0 < p_n = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}.$$

Следовательно, ряд $\sum p_n$ сходится при $s > 0$. Равенство (*) при $s > 1$ получим, раскрывая скобки в правой части его и используя при тех же s равенство

$$\frac{1}{n^{s-1}} = \frac{1}{n^{s-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}} \right).$$

3. Опираясь на интегральный признак, исследуем сходимость ряда $\sum p_n$, где $p_n = \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Имеем

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = -\int_2^{\infty} d\left(\frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1}{\ln 2},$$

т.е. несобственный интеграл сходится и потому ряд $\sum p_n$ тоже сходится.

§ 4. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ. РЯДЫ ЛЕЙБНИЦА

Мы снова возвращаемся к рассмотрению числовых рядов общего вида.

Определение 1. *Ряд* $\sum a_n$ *называется* **абсолютно сходящимся,** *если сходится ряд* $\sum |a_n|$.

Ясно, что всякий сходящийся ряд с неотрицательными членами абсолютно сходится. В то же время легко построить сходящийся ряд, который не является абсолютно сходящимся. В качестве примера можно привести следующий ряд:

$$-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\cdots.$$

Его сумма равна нулю, и в то же время ряд, составленный из модулей его членов, расходится в силу расходимости гармонического ряда.

Определение 2. *Сходящийся ряд* $\sum a_n$ *называется* **условно сходящимся,** *если ряд* $\sum |a_n|$ *расходится.*

Согласно этому определению, рассмотренный выше ряд является условно сходящимся. Заметим, что про абсолютно (или условно) сходящийся ряд говорят еще, что ряд сходится абсолютно (или условно). Целесообразность введенных понятий подкрепляется следующей теоремой.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum a_n$ *абсолютно сходится, то он является сходящимся.*

Доказательство. По критерию Коши из сходимости ряда $\sum |a_n|$ следует, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $p \geq 1$ и $n > n(\varepsilon)$ имеем

$$\sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \varepsilon,$$

откуда

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |a_m| < \varepsilon.$$

Но это означает выполнение критерия Коши. Теорема 1 доказана.

Определение 3. *Числовой ряд* $\sum a_n$ *называется* **знакочередующимся,** *если все его соседние члены имеют разные знаки.*

Определение 4. *Знакочередующийся ряд вида* $\sum a_n$ *называется* **рядом Лейбница,** *если модуль его общего члена* $|a_n|$ *монотонно стремится к нулю.*

Теорема 2. *Всякий ряд Лейбница* $\sum a_n$ *сходится.*

Доказательство. Покажем сначала, что всякий отрезок этого ряда мажорируется модулем его первого члена. Пусть $\sum\limits_{m=n+1}^{n+p} a_m$ — некоторый отрезок ряда. Мы хотим доказать неравенство вида

$$\left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \le |a_{n+1}|.$$

Положим $b_k = |a_k|$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|a_k + a_{k+1}| = |a_k| - |a_{k+1}| = b_k - b_{k+1} < b_k.$$

Кроме того, при всех k числа $(a_k + a_{k+1})$ имеют один и тот же знак. Следовательно, при четном $p = 2r$ имеем

$$0 \le |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+2r-1} + a_{n+2r}| =$$

$$= (b_1 - b_2) + \dots + (b_{2r-1} - b_{2r}) =$$

$$= b_1 - (b_2 - b_3) - \dots - (b_{2r-2} - b_{2r-1}) - b_{2r} \le b_1 = |a_{n+1}|.$$

Если же $p = 2r + 1$ нечетное, то

$$0 \le |a_{n+1} + \dots + a_{n+2r+1}| = (b_1 - b_2) + \dots + (b_{2r-1} - b_{2r}) + b_{2r+1} =$$

$$= b_1 - (b_2 - b_3) - \dots - (b_{2r} - b_{2r+1}) \le b_1 = |a_{n+1}|.$$

Таким образом, в обоих случаях действительно

$$T_{n,p} = \left|\sum_{m=n+1}^{n+p} a_m\right| \le |a_{n+1}| = b_{n+1}.$$

Но теперь, так как $b_{n+1} \to 0$, мы при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$ и достаточно большом n имеем

$$T_{n,p} \le b_{n+1} < \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности p, исходя из критерия Коши, заключаем, что ряд $\sum a_n$ сходится. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3 (оценка остатка ряда Лейбница). *Для остатка* r_n *ряда Лейбница* $\sum a_n$ *справедлива оценка* $|r_n| \leq |a_{n+1}|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2 ряд $\sum a_n$ сходится, поэтому

$$|r_n| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} a_n \right|.$$

Заметим, что при доказательстве теоремы 2 для любого натурального p нами получена оценка

$$\left| \sum_{m=n+1}^{n+p} a_n \right| \leq |a_{n+1}|.$$

Устремляя $p \to \infty$, получаем требуемое неравенство. Теорема 3 доказана.

§ 5. ПРИЗНАКИ АБЕЛЯ И ДИРИХЛЕ

Признаки Абеля и Дирихле применяются при доказательстве достаточно широкого класса числовых рядов общего вида. Доказательство обоих признаков основано на **формуле дискретного преобразования Абеля,** которую мы сейчас докажем.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $A_k = \sum\limits_{m=N+1}^{k} a_m$. *Тогда при* $M > N$ *имеют место формулы:*

$$\sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k = A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right); \tag{1}$$

$$\sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k = A_M b_{M+1} + \sum_{k=N+1}^{M} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что правые части формул равны между собой, так как, вычитая правую часть формулы (2) из правой части формулы (1), получаем

$$A_M b_M - A_M b_{M+1} - A_M \left(b_M - b_{M+1}\right) = 0.$$

Следовательно, достаточно доказать только формулу (1). Преобразуя ее правую часть, имеем

$$A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) = A_M b_M + \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k b_k - \sum_{k=N+1}^{M-1} A_k b_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=N+1}^{M} A_k b_k - \sum_{l=N+2}^{M} A_l b_l = A_{N+1} b_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{M} (A_k - A_{k-1})\, b_k =$$

$$= a_{N+1} b_{N+1} + \sum_{k=N+2}^{M} a_k b_k = \sum_{k=N+1}^{M} a_k b_k.$$

Тем самым теорема 1 доказана.

Признаки Абеля и Дирихле применяются к рядам вида $\sum a_n b_n$.

Т е о р е м а 2. *Справедливы следующие утверждения.*

(А) (признак Абеля). *Если последовательность b_n монотонна и ограничена, а ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum a_n b_n$ также сходится.*

(Д) (признак Дирихле). *Если последовательность b_n монотонна и $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, а последовательность s_n частичных сумм ряда $\sum a_n$ ограничена, то ряд $\sum a_n b_n$ сходится.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся рассмотрением случая, когда $b_n \geq 0$ и b_n убывает. Все прочие случаи легко сводятся к данному следующим образом. Если $b_n \leq 0$, то надо изменить знаки у всех a_n и b_n. Если же $b_n \uparrow$, то b_n надо представить в виде $b_n = b_0 - d_n$, где $b_0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, и свести теорему к исследованию ряда $\sum a_n d_n$. Здесь уже имеем $d_n \downarrow$.

Доказательство теоремы проведем, применяя критерий Коши к ряду $\sum a_n b_n$. Для этого применим формулу (1) преобразования Абеля к отрезку этого ряда $T_{n,p}$. Используя обозначение $A_k = s_k - s_n$ и учитывая, что $b_k - b_{k+1} \geq 0$, получим

$$|T_{n,p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| = \left|A_{n+p} b_{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1})\right| \leq$$

$$\leq |A_{n+p}|\, b_{n+p} + \max_{n<k<n+p} |A_k| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k - b_{k+1}) \leq$$

$$\leq \max_{n<k\leq n+p} |A_k|\, b_{n+1}.$$

Рассмотрим теперь случай (А). Поскольку b_n ограничена, при некотором $c > 0$ для всех n имеем $|b_{n+1}| < c$. Далее, так как ряд $\sum a_n$ сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > n_0(\varepsilon)$ и $k > n$ имеем

$$|A_k| = \left|\sum_{m=n+1}^{k} a_m\right| = |s_k - s_n| \leq |s_k| + |s_n| < \varepsilon.$$

Тогда при указанных n и любом p для величины $T_{n,p}$ справедлива оценка

$$|T_{n,p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \le c\varepsilon.$$

Но так как ε произвольно, а c фиксировано, то последнее неравенство означает, что ряд $\sum a_n b_n$ удовлетворяет критерию Коши и поэтому сходится. Тем самым признак Абеля доказан.

В случае (Д) ограничены частные суммы A_k ряда $\sum a_n$, и поэтому существует c, для которого $|A_k| < c$ при всех k. Кроме того, $b_n \to 0$. Следовательно, при произвольном $\varepsilon > 0$, достаточно большом $n > n_0(\varepsilon)$ и произвольном $p \ge 1$ имеем оценку

$$|T_{n,p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| < c\varepsilon.$$

Отсюда, как и в случае А, заключаем, что по критерию Коши ряд $\sum a_n b_n$ сходится. Теорема 2 доказана полностью.

Лекция 5

§ 6. ПЕРЕСТАНОВКИ ЧЛЕНОВ РЯДА

Определение 1. *Пусть $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение натурального ряда на самого себя. Тогда ряд $\sum b_n$, где $b_n = a_{\sigma(n)}$, называется* **перестановкой ряда** $\sum a_n$.

Теорема 1. *Любая перестановка $\sum b_n$ абсолютно сходящегося ряда $\sum a_n = A$ абсолютно сходится к той же сумме A.*

Доказательство. Положим

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,\ A' = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|\,, A'_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,.$$

Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Пусть n_1 настолько велико, что $A' - A'_{n_1} < \varepsilon$. Тогда при любом $n > n_1$ для остатка $r_n = A - A_n$ ряда $\sum a_n$ имеем оценку

$$|r_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right| \le \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| = A' - A'_{n_1} < \varepsilon.$$

Пусть теперь n_2 таково, что среди чисел $\sigma(1), ..., \sigma(n_2)$ содержатся все целые числа отрезка $[1, n_1]$. Положим $m = \max(\sigma(1), ..., \sigma(n_2))$. Тогда при всех $n > n_2$ имеем

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{n_1} a_k + \sum_{k=n_1+1}^{m}{}' a_k.$$

Штрих в последней сумме означает, что некоторые слагаемые в ней опущены. Для этой суммы, очевидно, имеют место оценки

$$|B_n - A_{n_1}| = \left|\sum_{k=n_1+1}^{m}{}' a_k\right| \le \sum_{k=n_1+1}^{m}{}' |a_k| = A'_m - A'_{n_1} \le A' - A'_{n_1} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что при всех $n > n_2$

$$|A - B_n| \le |A - A_{n_1}| + |B_n - A_{n_1}| \le \left(A' - A_{n_1}'\right) + \left(A' - A'_{n_1}\right) < 2\varepsilon.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ это означает, что $B_n \to A$ при $n \to \infty$, т.е. ряд $\sum b_n$ сходится и $\sum b_n = \sum a_n$. Отсюда, в частности, следует, что и ряд $\sum |b_n|$ сходится к сумме A', т.е. ряд $\sum b_n$ сходится абсолютно. Теорема 1 доказана полностью.

Основное отличие в свойствах абсолютно и условно сходящихся рядов обнаруживается при перестановке их членов. Как показывает теорема 1, бесконечная сумма абсолютно сходящегося ряда в этом случае ведет себя точно так же, как и конечная сумма, т.е. при перестановке слагаемых сумма не изменяется. Гораздо более сложная ситуация имеет место для условно сходящегося ряда. Тем не менее, она достаточно полно описывается следующей теоремой.

Теорема 2 (теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда). *Каково бы ни было вещественное число A, найдется сходящаяся перестановка $\sum b_n$ условно сходящегося ряда $\sum a_n$ такая, что $\sum b_n = A$.*

Доказательство. Для простоты будем считать, что $a_n \neq 0$ при всех n. Сначала в ряде $\sum a_n$ выделяем все положительные слагаемые p_k и отрицательные слагаемые $-q_l$, нумеруя их индексами k и l в порядке следования в ряде $\sum a_n$. Затем составляем перестановку $\sum b_n$ ряда $\sum a_n$: в качестве b_1 берем p_1, если $A \geq 0$, и $-q_1$, если $A < 0$. Подчеркнем, что все p_k и q_l положительны.

Далее мы добавляем в общую сумму $\sum\limits_{m=1}^{n} b_m$ очередные слагаемые по следующему правилу: если сумма не превышает A, то добавляем очередное положительное слагаемое $b_{n+1} = p_{k_1}$, а если она превосходит A, то добавляем очередное отрицательное слагаемое $b_{n+1} = -q_{l_1}$. В результате этого сумма все время колеблется вокруг значения A, причем размах колебаний постепенно убывает до нуля, и в пределе для суммы ряда $\sum b_n$ мы получаем требуемое значение A.

Для того чтобы доказательство теоремы было полным, достаточно в приведенной схеме обосновать только некоторые ее моменты.

Докажем, что оба ряда $\sum p_k$ и $\sum (-q_l)$ расходятся. Действительно, если бы оба они сходились, то исходный ряд $\sum a_n$ сходился бы абсолютно, а если бы один ряд расходился, а другой сходился, то частичная сумма ряда $\sum a_n$, составленная из двух частичных сумм рядов $\sum p_k$ и $\sum q_l$ соответственно, тоже расходилась, что неверно. Далее заметим, что поскольку $\{p_k\}$ и $\{-q_l\}$ являются подпоследовательностями для $\{a_n\}$, $p_k \to 0$ при $k \to \infty$ и $-q_l \to 0$ при $l \to \infty$.

Для определенности будем считать, что $A > 0$. Тогда по построению ряд b_n имеет такую структуру:

$$\sum b_n = \underbrace{p_1 + \cdots + p_{k_1}}_{P_1} - \underbrace{q_1 - \cdots - q_{l_1}}_{Q_1} +$$

$$+ \underbrace{p_{k_1+1} + \cdots + p_{k_2}}_{P_2} - \underbrace{q_{l_1+1} - \cdots - q_{l_2}}_{Q_2} + \cdots .$$

Здесь числа $P_1, P_2, \ldots, Q_1, Q_2, \ldots$ обозначают суммы подряд идущих слагаемых одного знака в ряде $\sum b_n$. Количество групп слагаемых одинакового знака в этой сумме бесконечно, так как в противном случае ряд $\sum b_n$ отличался бы от $\sum p_k$ или от $\sum(-q_l)$ лишь конечным числом членов, и тогда он расходился бы к $+\infty$ или к $-\infty$ соответственно. Но это не имеет места, так как по построению величина частичной суммы s_n ряда на каждом шаге изменяется в направлении приближения к числу A, если только $s_n \neq A$. В силу этого, в сумму $\sum b_n$ войдут все числа p_k и $-q_l$, а следовательно, и все a_n, т.е. $\sum b_n$ — действительно перестановка ряда $\sum a_n$.

Теперь оценим разность $r_n = s_n - A$. При всяком n член ряда b_n в зависимости от своего знака попадает в одну из сумм P_m или Q_m. Следовательно, мы имеем одно из равенств: $b_n = p_k$ или $b_n = -q_l$.

По построению ряда $\sum b_n$ величина r_n меняет знак в том случае, если $b_n = p_{k_m}$ или $b_n = -q_{l_m}$. Тогда в обоих случаях имеет место оценка

$$|r_n| = |s_n - A| \leq |b_n|.$$

Для всех прочих n при добавлении очередного слагаемого $|r_n|$ значения частичной суммы s_n от числа A убывает, поэтому тогда справедливо неравенство $|r_n| < |r_{n-1}|$. Следовательно, всегда имеем

$$|s_n - A| < p_{k_m} + q_{l_m} + q_{l_{m-1}}.$$

Здесь номер m можно рассматривать как монотонно стремящуюся к бесконечности функцию от n, и поэтому для последовательности d_n, где $d_n = p_{k_m} + q_{l_m} + q_{l_{m-1}}$, в силу того, что p_k и $q_l \to 0$ при k и $l \to \infty$, имеем $d_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда при $n \to \infty$ окончательно получим $r_n = s_n - A \to 0$ и $s_n \to A$. Теорема 2 доказана.

Лекция 6

§ 7. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД СХОДЯЩИМИСЯ РЯДАМИ

Мы уже встречались с некоторыми действиями над числовыми рядами такими, как почленное сложение, одновременное умножение всех членов ряда на одно и то же число, перестановки членов ряда. Все эти действия будем называть **арифметическими операциями над рядами.** Кроме того, здесь мы рассмотрим и другие математические операции, а именно: расстановку и раскрытие скобок, а также операцию умножения рядов. Начнем с наиболее простого — с расстановки скобок.

Утверждение 1. *Если в сходящемся ряде $\sum a_n$ некоторые группы слагаемых заключить в скобки, то его сходимость не нарушится и сумма не изменится.*

Доказательство. Любая формальная расстановка скобок в бесконечной сумме $\sum a_n$ приводит к новой бесконечной сумме вида

$$(a_1 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots = b_1 + b_2 + \cdots ,$$

где при $s = 0, 1, \ldots$ имеем $b_s = a_{k_{s-1}+1} + \cdots + a_{k_s}$ и $k_0 = 0$.

Очевидно, что последовательность $\{B_s\}$ частичных сумм ряда $\sum b_s$ не что иное, как подпоследовательность $\{A_{k_s}\}$ частичных сумм ряда $\sum a_n$. Но так как всякая подпоследовательность сходится к тому же пределу, что и сама последовательность, то для $A_k \to A$ имеем, что $B_s = A_{k_s} \to A$ при $s \to \infty$, что и требовалось доказать.

Пример сходящегося ряда $(1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0$ показывает, что обратное утверждение не всегда справедливо. Однако имеет место, например, следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть ряд, составленный из скобок, сходится к сумме B, точнее, пусть $\sum b_n = B$, где $b_n = (a_{n1} + \cdots + a_{nk})$, причем k фиксировано, и пусть каждая из k последовательностей является бесконечно малой, т.е. $a_{ns} \to 0$ при $n \to \infty$ и всех $s = 0, \ldots, k$. Тогда в ряде $\sum b_n$ можно раскрыть скобки. Другими словами, ряд*

$$a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1k} + a_{21} + \cdots = d_1 + d_2 + \cdots + d_k + d_{k+1} + \cdots ,$$

где $d_{k(n-1)+s} = a_{ns}$, сходится, причем к той же самой сумме, что и ряд $\sum b_n$.

Доказательство. Оно тоже очень просто вытекает из свойств сходящихся последовательностей. Действительно, для частичных сумм D_n и B_m рядов $\sum d_n$ и $\sum b_m$ при $n = km$ имеем равенство

$$D_{km} = B_m \to B \text{ при } m \to \infty.$$

Заметим, что разность $\alpha_n = D_n - D_{km}$ при $m = [n/k]$ и $s = n - km$ равна

$$\alpha_n = d_{km+1} + \dots + d_{km+s} = a_{m,1} + \dots + a_{m,s}.$$

А так как $a_{m,s}$ при любом $s = 1, \dots, k$ — бесконечно малая величина при $m \to \infty$, то поскольку $m \to \infty$ при $n \to \infty$, имеем

$$|\alpha_n| \le |a_{m,1}| + \dots + |a_{m,s}| \le |a_{m,1}| + \dots + |a_{m,n}| \to 0,$$

$$\alpha_n \to 0, \quad D_n = D_{mk} + \alpha_n \to B + 0 = B.$$

Утверждение доказано.

Заметим, что если в некоторых скобках содержится менее k слагаемых, то можно подразумевать вместо отсутствующих слагаемых нули. Другими словами, доказанное утверждение справедливо и в этом, несколько более общем, случае.

Более сложным является вопрос о произведении числовых рядов. Нам потребуются новые определения.

Определение 1. *Занумеруем каким-либо образом счетное множество пар (m, n) натуральных чисел m и n, т.е. поставим каждой паре в соответствие свой номер k. Тем самым мы получим две последовательности: $m = m(k)$ и $n = n(k)$, принимающие натуральные значения. Такую нумерацию будем называть* **линейной нумерацией** *пар. Если теперь $\sum a_n$ и $\sum b_n$ — два числовых ряда и $h_k = a_{m(k)} b_{n(k)}$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ будем называть их* **произведением, отвечающим данной линейной нумерации пар индексов** *(m, n) или данной перестановке попарных произведений $a_m b_n$.*

Задача (теорема Штейница). *Пусть $\{\bar{c}_n\}$ — последовательность, составленная из векторов k-мерного пространства R^k $(k \ge 2)$. Пусть для любого вектора $\bar{f} \in R^k$, $\bar{f} \ne 0$, ряд $\sum a_n$, где $a_n = (\bar{c}_n, \bar{f}_n)$ — скалярное произведение векторов $\bar{c}_n$ и $\bar{f}$, условно сходится.*

Требуется доказать, что для всех $\bar{b} \in \mathbb{R}^k$ существует перестановка $\sum \bar{c}_{\sigma(n)}$ такая, что $\lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{m} \bar{c}_{\sigma(n)} = \bar{b}$.

Определение 2. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$, где $h_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$, называется* **формальным произведением** (*или просто* **произведением**) *двух рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$.*

Т е о р е м а 1. *Если оба ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$ абсолютно сходятся, причем $\sum a_n = A$, а $\sum b_n = B$, то при любой перестановке попарных произведений их членов ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ абсолютно сходится к сумме AB.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем какую-либо перестановку попарных произведений $k \leftrightarrow (m(k), n(k))$. Докажем сначала, что ряд $\sum h_k$ сходится абсолютно. Пусть H'_k — последовательность частичных сумм ряда $\sum |h_k|$ и пусть r — какой-либо номер. Тогда имеем

$$H'_r = \sum_{k=1}^{r} \left|a_{m(k)} b_{n(k)}\right|.$$

Положим $m_0 = \max\limits_{k \le r} m(k)$, $n_0 = \max\limits_{k \le r} n(k)$. В этом случае, очевидно,

$$H'_r = \sum_{k=1}^{r} \left|a_{m(k)}\right| \cdot \left|b_{n(k)}\right| \le \sum_{k=1}^{m_0} |a_k| \sum_{k=1}^{n_0} |b_k| \le A'B',$$

где $A' = \sum |a_n|$, $B' = \sum |b_n|$.

Таким образом, частичные суммы ряда $\sum |h_k|$ ограничены в совокупности, а это значит, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k$ абсолютно сходится к некоторой своей сумме H. Но тогда при любой перестановке его членов сходимость не нарушается и сумма не изменяется. Переставим эти члены так, чтобы при любом $k = n^2$ частичная сумма H_k имела вид $H_k = (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n) = A_n B_n$. Тогда при $n \to \infty$ будем иметь $H_{n^2} \to AB$. В силу сходимости ряда $\sum h_k$ последовательность H_k его частичных сумм сходится к H, и так как H_{n^2} — подпоследовательность H_k, то $H = AB$.

Итак, если абсолютно сходятся оба ряда $\sum a_n$ и $\sum b_n$, то сумма произведений рядов равна произведению их сумм.

В общей ситуации на такое равенство рассчитывать не приходится. Действительно, если ряд $\sum a_n$ сходится условно, а в качестве $\sum b_n$ взят простейший ряд вида $\sum b_n = 1 + 0 + 0 + \cdots$, то, исходя из определения, можно убедиться, что их произведение, отвечающее некоторой перестановке пар (m, n), дает ряд $\sum c_n$, являющийся некоторой перестановкой ряда $\sum a_n$. Но согласно теореме Римана при перестановках такого ряда его сумма может измениться.

Естественно, что при определенных ограничениях утверждение предыдущей теоремы допускает различные обобщения. Например, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2 (теорема Мертенса). *Пусть ряд $\sum a_n$ абсолютно сходится к сумме A и ряд $\sum b_n$ условно сходится к сумме B. Тогда формальное произведение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n$ этих рядов сходится к сумме AB.*

Доказательство. Пусть H_n — последовательность частичных сумм ряда $\sum h_n$. Имеем

$$H_n = \sum_{m=1}^{n} h_m = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_k b_{m-k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{n-k+1} b_l.$$

Обозначим $l = m - k + 1$. Очевидно, имеем $1 \le k \le m \le n$, откуда получим $1 \le m - k + 1 = l \le n - k + 1$. Следовательно,

$$H_n \doteq \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{n-k+1} b_l = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{n-k+1}.$$

Здесь B_{n-k+1} — соответствующая частичная сумма ряда $\sum b_n$.

Поскольку ряд $\sum b_n$ сходится к сумме B, разность $\beta_l = B - B_l$ является его остатком $\beta_l = \sum\limits_{n=l+1}^{\infty} b_n$, который стремится к нулю с ростом l. Поэтому, обозначив через A_n и α_n остаток и частичную сумму ряда $\sum a_n$, будем иметь

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} a_k B_{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_k(B - \beta_{n-k+1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k B - \sum_{n=1}^{\infty} a_k \beta_{n-k+1} = AB - \alpha_n B - \sum_{k=1}^{n} a_k \beta_{n-k+1}.$$

Осталось показать, что если $R_n = AB - H_n$, то $R_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но $\alpha_n \to 0$, поэтому $R'_n = \alpha_n B \to 0$ при $n \to \infty$. Рассмотрим теперь сумму $R''_n = \sum\limits_{n=1}^{n} a_k \beta_{n-k+1}$:

$$|R''_n| \le \sum_{n=1}^{n} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}| =$$

$$= \overbrace{\sum_{k\le n/2} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}|}^{\Sigma_1} + \overbrace{\sum_{n/2<k\le n} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}|}^{\Sigma_2} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Так как $\beta_k \to 0$, то при некотором $c > 0$ для всех k имеем неравенство $|\beta_k| < c$, откуда

$$\Sigma_2 \le \sum_{n/2<k\le n} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}| \le \sum_{n/2<k\le n} |a_k| c \le c \sum_{n/2<k\le n} |a_k| = cT.$$

Но ряд $\sum|a_n|$ сходится, поэтому, согласно критерию Коши, при всяком $\varepsilon > 0$ и достаточно большом $n > n_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство $T < \varepsilon$, откуда вытекает, что $\Sigma_2 < c\varepsilon$. С другой стороны, так как $\beta_n \to 0$, то при достаточно большом $l = n - k + 1 > n_1(\varepsilon)$ имеем $|\beta_l| < \varepsilon$. А это значит, что если $n/2 > n_1(\varepsilon)$ и $k \leq n/2$, то $|\beta_{n-k+1}| < \varepsilon$, откуда

$$\Sigma_1 = \sum_{k\leq n/2} |a_k| \cdot |\beta_{n-k+1}| \leq \varepsilon \sum_{k\leq n/2} |a_k| \leq \varepsilon A',$$

где A' — сумма сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Таким образом, при $n \geq 2n_1(\varepsilon) + n_0(\varepsilon)$ имеем

$$R_n'' < \varepsilon A' + \varepsilon c = \varepsilon(A' + c).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает, что $R_n'' \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда и $R_n = R_n' + R_n'' \to 0$, откуда $H_n \to AB$. Теорема 2 доказана.

Лекция 7

§ 8. ДВОЙНЫЕ И ПОВТОРНЫЕ РЯДЫ

Понятие произведения двух рядов можно рассматривать как пример более общего понятия двойных рядов, изучению которых посвящен этот параграф.

Определение 1. *Числовая функция* $a(m,n) = a_{m,n} = a_{mn}$ *двух натуральных аргументов* m *и* n *называется* **двойной последовательностью.**

Для таких последовательностей мы также будем использовать обозначение $\{a_{m,n}\}$.

Определение 2. Двойным рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{m,n} a_{m,n} = \sum a_{m,n}$$

называется формальная бесконечная сумма S *вида*

$$S = a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{21} + a_{22} + a_{23} + \cdots + a_{31} + a_{32} + a_{33} + \ldots .$$

Определение 3. *Конечная двойная сумма*

$$A_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} = a_{11} + \cdots + a_{1n} + \cdots + a_{m1} + \cdots + a_{mn}$$

называется (прямоугольной) **частичной суммой двойного ряда** *вида* $\sum a_{m,n}$. *Исходная последовательность* $a_{m,n}$ *называется* **общим членом ряда.**

Далее нам необходимо дать определение сходимости двойного ряда как предела частичных сумм $A_{m,n}$.

Определение 4. *Число* l *называется* **пределом двойной последовательности** $\{B_{m,n}\}$ *(или* **двойным пределом***), если для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдутся числа* $m_0(\varepsilon)$ *и* $n_0(\varepsilon)$ *такие, что для всех пар* (m,n) *с условием* $m > m_0(\varepsilon)$ *и* $n > n_0(\varepsilon)$ *выполнены неравенства*

$$|B_{m,n} - l| < \varepsilon.$$

Понятие предела двойной последовательности полностью согласуется с общим определением предела функции по базе B. В данном случае база B представляет собой совокупность окончаний b_{m_0,n_0}, каждое из которых образовано множеством пар (m,n) натуральных чисел m и n с условием $m > m_0, n > n_0$. Предел $A = \lim\limits_{B} A_{m,n}$ по этой базе и есть указанный выше двойной предел. Для самой базы B будем использовать обозначение $m \to \infty, n \to \infty$. Также будем писать:

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} A_{m,n} = A.$$

Для двойных пределов выполнены все свойства предела по базе множеств. Например, предел суммы равен сумме пределов, имеет место единственность предела. В частности, отсюда для сходящегося двойного ряда вытекает необходимый признак сходимости.

Утверждение 1 (необходимый признак сходимости двойного ряда). *Если ряд $\sum a_{m,n}$ сходится, то $a_{m,n} \to 0$ при $m \to \infty, n \to \infty$.*

Доказательство. Имеем $a_{m,n} = A_{m,n} - A_{m,n-1} - A_{m-1,n} + A_{m-1,n-1}$. Так как по условию $A_{m,n} \to A$, то

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} a_{m,n} = A - A - A + A = 0,$$

что и требовалось доказать.

Исходя из общей формулировки критерия Коши для существования предела функции по базе множеств, можно сформулировать критерий Коши для двойных рядов.

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы двойной ряд $\sum a_{m,n}$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали числа $m_0(\varepsilon)$ и $n_0(\varepsilon)$ такие, что при всех $m_1, m_2 > m_0(\varepsilon)$ и $n_1, n_2 > n_0(\varepsilon)$ справедливо неравенство*

$$|A_{m_1,n_1} - A_{m_2,n_2}| < \varepsilon.$$

В важном случае двойных рядов с неотрицательным общим членом $p_{m,n} \geq 0$ справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для сходимости двойного ряда $\sum_m \sum_n p_{m,n}$ с условием $p_{m,n} \geq 0$ необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы $P_{m,n}$ были бы ограничены в совокупности, т.е. чтобы существовало число $C > 0$, для которого $P_{m,n} < C$ при всех натуральных m и n.*

Доказательство. Достаточность. Заметим сначала, что если $m_1 < m_2$, $n_1 < n_2$, то $P_{m_1,n_1} \leq P_{m_2,n_2}$. Далее из ограниченности частичных сумм $P_{m,n}$ следует, что существует число M такое, что

$M = \sup\limits_{m,n} P_{m,n}$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ число $M - \varepsilon$ уже не является верхней гранью для $\{P_{m,n}\}$, поэтому найдутся $m_0(\varepsilon)$ и $n_0(\varepsilon)$ такие, что $M - \varepsilon < P_{m_0,n_0} \le M$. Но в этом случае при всех $m > m_0$ и $n > n_0$ имеем

$$M - \varepsilon < P_{m_0,n_0} \le P_{m,n} \le M,$$

откуда $|P_{m,n} - M| < \varepsilon$. Это значит, что $P_{m,n} \to M$ при $m \to \infty, n \to \infty$, т.е. $\sum_m \sum_n p_{m,n} = M$.

Необходимость. Заметим, что ограниченность последовательности $P_{m,n}$ в случае ее сходимости есть следствие соответствующего общего свойства функции, имеющей предел по базе. Теорема 2 доказана.

Определение 5. *Двойной ряд $\sum_m \sum_n a_{m,n}$ называется* **абсолютно сходящимся,** *если сходится ряд $\sum_m \sum_n |a_{m,n}|$, составленный из модулей его членов.*

Теорема 3. *Двойной абсолютно сходящийся ряд $\sum\sum a_{m,n}$ сходится.*

Доказательство. Положим

$$p_{m,n} = \frac{|a_{m,n}| + a_{m,n}}{2}, \quad q_{m,n} = \frac{|a_{m,n}| - a_{m,n}}{2}.$$

Тогда имеем $|a_{m,n}| = p_{m,n} + q_{m,n}$ и

$$a_{m,n} = \frac{p_{m,n} - q_{m,n}}{2}, \quad p_{m,n} \ge 0, \quad q_{m,n} \ge 0.$$

Поскольку ряд $\sum_m \sum_n |a_{m,n}|$ сходится, найдется число $C > 0$ с условием

$$A'_{m,n} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{k,l}| < C$$

при всех m и n. Но для частичных сумм $P_{m,n}$ и $Q_{m,n}$ справедливы неравенства $P_{m,n} \le A'_{m,n}, Q_{m,n} \le A'_{m,n}$, поэтому по теореме 2 ряды $\sum\sum p_{m,n}$ и $\sum\sum q_{m,n}$ сходятся. Следовательно, ряд $\sum\sum a_{m,n}$, равный их разности, тоже сходится. Теорема 3 доказана.

Бесконечная сумма вида $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ позволяет рассматривать и иную важную конструкцию использования предельного перехода, которая приводит к понятию повторного ряда.

Определение 6. *Пусть $\{a_{m,n}\}$ — двойная последовательность. Зафиксируем параметр m и рассмотрим формальный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$. Обозначим его символом b_m. Тогда формальная бесконечная сумма*

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right)$$

называется **повторным рядом.**

Очевидно, с одной и той же двойной последовательностью $a_{m,n}$ можно связать еще один двойной ряд, а именно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n} \right),$$

где $\beta_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$.

Заметим, что если здесь опустить скобки, то, вообще говоря, выражение $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ можно рассматривать и как двойной ряд, и как повторный ряд, и это может приводить к недоразумениям. Там, где эти недоразумения возможны, необходимо ставить скобки или специально оговаривать точный смысл выражения.

Введем понятие сходимости повторного ряда и рассмотрим связи между сходимостью двойного и повторного рядов.

Определение 7. *Если при любом m ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$ сходится к сумме b_m и ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ тоже сходится к некоторому числу A, то повторный ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right)$ называют* **сходящимся к сумме** *A и записывают в виде*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right) = A.$$

Определение 8. *Пусть $(m(k), n(k))$ — некоторая линейная нумерация совокупности всех пар (m, n). Тогда обычный числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$, где $d_k = a_{m(k),n(k)}$, называется* **линейной перестановкой двойного ряда** *$\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$, отвечающей данной нумерации его членов.*

Т е о р е м а 4. *Пусть $a_{m,n} \geq 0$ для всех пар (m, n) и пусть ряд $\sum d_k$ — некоторая его линейная перестановка. Тогда если сходится хотя бы один из трех рядов*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \right) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} d_k,$$

то два других тоже сходятся к той же сумме.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через A, B и D сумму каждого из рассматриваемых рядов. Требуется доказать, что если существует хотя бы одно из этих трех чисел, то существуют и два других и все они равны между собой. Для этого достаточно доказать три утверждения: 1) если существует сумма A, то существует сумма B и $B \le A$; 2) если существует сумма B, то существует сумма D и $D \le B$; 3) если существует сумма D, то существует сумма A и $A \le D$. Рассмотрим их по порядку.

1) Существование числа A означает сходимость частичных сумм $A_{m,n}$ ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{m,n}$ к его сумме A при $m \to \infty, n \to \infty$. Ранее было доказано, что в этом случае $A = \sup\limits_{m,n} A_{m,n}$, откуда $A_{m,n} \le A$ при всех натуральных m, n. Очевидно, что при этом справедливы неравенства

$$b_m(n) = \sum_{l=1}^{n} a_{m,l} \le \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} = A_{m,n} \le A.$$

Следовательно, при любом m существуют числа

$$b_m = \sup_n b_m(n) = \sum_{k=1}^{\infty} b_m(k).$$

Далее, так как

$$\sum_{k=1}^{m} b_k(n) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l} = A_{m,n} \le A,$$

то, устремляя $n \to \infty$, при любом m имеем

$$A \ge \sum_{k=1}^{m} b_k = B_m.$$

Но B_m не убывает, поэтому при $m \to \infty$ последовательность B_m сходится к некоторому числу B, причем $B \le A$. Утверждение 1 доказано.

2) Пусть B существует. Тогда для любой частичной суммы $D_k = \sum\limits_{r=1}^{k} d_k$ найдется пара чисел (m_0, n_0) с условием, что $m(r) \le m_0$ и $n(r) \le n_0$ при всех $r \le k$. Но тогда все слагаемые d_r одновременно будут входить и в суммы A_{m_0,n_0}, причем

$$A_{m_0,n_0} = \sum_{k=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{n_0} a_{k,l} \le \sum_{k=1}^{m_0}\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l} = \sum_{k=1}^{m_0} b_k = B_{m_0} \le B.$$

Другими словами, все частичные суммы D_k ограничены сверху числом B и поэтому при некотором D имеем $D_k \to D \le B$ при $k \to \infty$. Утверждение 2 доказано.

3) Пусть существует D. Тогда для любого $A_{m,n}$ можно найти номер k_0 такой, что сумма $D_{k_0} = \sum\limits_{k=1}^{k_0} d_k$ содержит все слагаемые $a_{k,l}$, входящие в сумму $A_{m,n}$. Но тогда при всех m, n имеем $A_{m,n} \le \le D_{k_0} \le D$. Следовательно, существует $A = \sup\limits_{m,n} A_{m,n}$ и $A \le D$, что и требовалось доказать. Теорема 4 доказана полностью.

Т е о р е м а 5. *Утверждение теоремы 4 останется в силе, если условие $a_{m,n} \ge 0$ опустить, а сходимость рядов рассматривать как абсолютную.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Числа $a_{m,n}$ представим в виде $a_{m,n} = p_{m,n} - q_{m,n}$, где

$$p_{m,n} = \frac{|a_{m,n}| + a_{m,n}}{2} \ge 0, \quad q_{m,n} = \frac{|a_{m,n}| - a_{m,n}}{2} \ge 0.$$

Далее достаточно применить теорему 4 к рядам с общими членами $p_{m,n}$ и $q_{m,n}$ и рассмотреть их разность. Теорема 5 доказана.

Т е о р е м а 6. *Любая перестановка членов двойного абсолютно сходящегося ряда не нарушает его сходимости и не изменяет его суммы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\sum\sum b_{m,n}$ — перестановка двойного абсолютно сходящегося ряда $\sum\sum a_{m,n} = A$. Рассмотрим соответствующие рядам $\sum\sum a_{m,n}$ $\sum\sum b_{m,n}$ однократные ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d'_k$ из теоремы 4. Тогда ряд $\sum d_k = A$ абсолютно сходится, а ряд $\sum d'_k$ является некоторой его перестановкой. Но тогда он тоже абсолютно сходится, а вместе с ним абсолютно сходится и ряд $\sum\sum b_{m,n}$, причем

$$A = \sum\sum a_{m,n} = \sum d'_k = \sum d_k = \sum b_{m,n}.$$

Теорема 6 доказана.

Т е о р е м а 7. *В повторном абсолютно сходящемся ряде вида $\sum_m \left(\sum_n a_{m,n}\right)$ можно менять порядок суммирования. При этом ряд остается абсолютно сходящимся и его сумма не изменяется.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 5 двойной ряд $\sum\sum a_{m,n}$ также абсолютно сходится, а вместе с ним по той же теореме абсолютно сходится и ряд $\sum_n \left(\sum_m a_{m,n} \right)$, причем суммы всех трех рядов совпадают. Теорема 7 доказана.

В заключение подчеркнем, что вообще свойство сохранять сумму при изменении порядка суммирования будет в дальнейшем представлять особый интерес. Теорема 7 дает первый пример возможности изменения последовательности выполнения предельных переходов.

Глава XVI
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Лекция 8

§ 1. СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО РЯДА

Понятия функциональной последовательности и функционального ряда связаны между собой так же тесно, как и в обычном числовом случае. С этими понятиями мы, по существу, ранее уже встречались. Примерами могут служить бесконечная геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \quad \text{при} \quad |q| < 1$$

или дзета-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{при} \quad s > 1.$$

Если в первом случае зафиксировать q, а во втором s, то мы получим обычные числовые ряды. Но эти же параметры можно рассматривать как аргументы числовых функций, и тогда суммы рядов тоже будут представлять собой некоторые числовые функции. Подобные соображения приводят нас к следующим определениям.

Определение 1. Функциональной последовательностью *называется занумерованное множество функций $\{f_n(x)\}$, имеющих одну и ту же область определения $D \subset \mathbb{R}$. При этом множество D называется областью определения функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$.*

Здесь термин "занумеровать" означает "поставить во взаимно однозначное соответствие с натуральным рядом $\mathbb{N}$".

Определение 2. *Пусть $\{a_n(x)\}$ — некоторая функциональная последовательность (ф. п.), определенная на множестве D. Формальная бесконечная сумма вида*

$$a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x),$$

или просто $\sum a_n(x)$, называется **функциональным рядом**, *определенным на D.*

Фиксируя какое-либо значение $x = x_0 \in D$, получаем обычный числовой ряд $\sum a_n(x_0)$. Как и в числовом случае, определим понятие частичной суммы функционального ряда.

Определение 3. *При всех $n \in \mathbb{N}$ функция $A_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)$ называется (n-й)* **частичной суммой** *функционального ряда $\sum a_n(x)$ и $a_n(x)$ —* его **общим членом.**

В дальнейшем пусть D обозначает область определения функционального ряда $\sum a_n(x)$, т.е. последовательности $\{A_n(x)\}$.

Определение 4. *Если при фиксированном $x = x_0 \in D$ сходится числовой ряд $\sum a_n(x_0)$, то говорят, что функциональный ряд $\sum a_n(x)$* **сходится в точке** $x = x_0$.

Определение 5. *Множество $D_0 \subset D$, состоящее из тех точек x_0, в которых ряд $\sum a_n(x)$ (или последовательность $A_n(x)$) сходится, называется* **областью сходимости** *этого ряда (или этой последовательности).*

Замечание. Область сходимости функционального ряда обычно бывает у́же, чем область ее определения. Пример — бесконечная геометрическая прогрессия $\frac{q}{1-q} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$.

Определение 6. *Пусть D_0 — область сходимости функциональной последовательности $\{A_n(x)\}$ и пусть $A(x)$ есть предельное значение этой последовательности при фиксированном значении $x \in D_0$. Тогда множество пар $(x, A(x))$ при всех $x \in D_0$ задает некоторую функцию $y = A(x)$, определенную на всем множестве D_0. Эта функция называется* **предельной функцией** *функциональной последовательности $\{A_n(x)\}$. Если при этом $A_n(x)$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n(x)$, то функция $A(x)$ называется* **суммой** *этого ряда. Итак, сумма функционального ряда — это некоторая функция, определенная на его области сходимости. При $x \in D_0$* **остаток ряда** *$r_n(x)$тоже представляет собой некоторую функцию от x, $r_n(x) = A(x) - A_n(x)$, причем $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и при любом $x \in D_0$.*

Многие свойства суммы $A(x)$ такие, например, как непрерывность суммы ряда $\sum a_n(x)$, связаны с поведением его остатка $r_n(x)$ при $n \to \infty$. Для описания этого поведения далее будет введено важное понятие равномерной сходимости функциональных рядов и функциональных последовательностей на множестве. Для того чтобы подчеркнуть отличие от него введенного выше понятия простой сходимости, последнюю называют еще **поточечной сходимостью.**

Важные примеры функциональных рядов возникают из разложения различных функций по формуле Тейлора. Например, разлагая в точке $x_0 = 0$ функцию $y = \sin x$ при $x \in \mathbb{R}$, имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ — остаточный член формулы. Записывая его в форме Лагранжа, получим

$$r_n(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin^{(2n)} z$$

при некоторой точке z с условием, что она лежит между точками 0 и x. Отсюда

$$|r_n(x)| \le \frac{|x|^{2n}}{(2n)!}.$$

Но при $n > x^2$ имеют место следующие неравенства:

$$(2n)! > n^{n+1}, \quad \frac{x^{2n}}{(2n)!} < \frac{x^2}{n^2} < \frac{1}{n},$$

т.е. $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, полагая

$$a_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

при всех $x \in \mathbb{R}$ имеем разложение $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$.

Определение 7. *Степенной ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ *называется* **рядом Тейлора** *функции* $f(x)$ *в точке* $x = a$, *а также* **разложением функции** $f(x)$ **в ряд Тейлора в этой точке.**

Примеры рядов Тейлора для некоторых функций:

1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(\forall x \in R)$;

2) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $(-1 < x \le 1)$;

3) $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(\forall x \in R)$;

4) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(\forall x \in R)$;

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ $(-1 < x \le 1)$;

6) $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $(|x| \le 1)$;

7) $\arcsin x = x + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x| < 1)$.

§ 2. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Определение 1. *Пусть последовательность функций $\{r_n(x)\}$ сходится к нулю при всех $x \in M$. Тогда говорят, что $r_n(x)$* **сходится к нулю равномерно на множестве** M, *если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, что при всех $n > n_0$ и одновременно при всех $x \in M$ выполнено неравенство $|r_n(x)| < \varepsilon$.*

В этом случае используют обозначение: $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.

Замечание. Слово "одновременно" в этом определении, вообще говоря, является избыточным и его можно опустить, однако оно обращает внимание на главное отличие равномерной сходимости от поточечной, состоящее в том, что в первом случае число $n_0(\varepsilon)$ в определении предела одно и то же для всех точек $x \in M$, а во втором случае оно может зависеть еще и от x, т.е. $n_0(\varepsilon) = n_0(\varepsilon, x)$.

Определение 2. *Если функция $A(x) = A_n(x) + r_n(x)$, где $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, то последовательность $A_n(x)$ называют* **равномерно сходящейся к функции** $A(x)$ **на множестве** M *при $n \to \infty$ и это обозначают так:*

$$A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x) \text{ при } n \to \infty.$$

Символ M здесь можно опустить, если по смыслу понятно, о каком множестве идет речь. Далее, если при этом $A_n(x)$ — последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n(x)$, то этот ряд называют **равномерно сходящимся к** $A(x)$ **на множестве** M.

Важность введенного понятия равномерной сходимости видна на примере следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть каждая из функций $a_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ и ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится к функции $A(x)$ на интервале $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$ — некоторое фиксированное число. Тогда сумма $A(x)$ является непрерывной функцией в точке $x = x_0$.*

Доказательство. По определению равномерной сходимости имеем

$$A(x) = A_n(x) + r_n(x), \quad r_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0 \quad (n \to \infty),$$

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x), \quad r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x).$$

Используя обозначение $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$, где $f(x)$ — любая функция, получим

$$\Delta A(x) = \Delta A_n(x) + \Delta r_n(x) = \Delta A_n(x) + r_n(x) - r_n(x_0).$$

Отсюда
$$|\Delta A(x)| \le |\Delta A_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)|.$$
Поскольку $r_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ $(n \to \infty)$, при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon_1)$ такой, что для всех $n > n_0$ и для всех $x \in I$ имеем
$$|r_n(x)| < \varepsilon_1, \quad |r_n(x_0)| < \varepsilon_1.$$

Заметим теперь, что функция $A_n(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, поэтому для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что при всех x с условием $|x - x_0| < \delta_1$ выполнено неравенство
$$|\Delta A_n(x)| = |A_n(x) - A_n(x_0)| < \varepsilon_1.$$
Теперь при заданном $\varepsilon > 0$ можно взять $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$, и тогда при всех x с условием $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon_1)$ и при $n = n_0(\varepsilon_1) + 1 = n_0(\varepsilon)$ получим
$$|\Delta A(x)| \le |\Delta A_n(x)| + |r_n(x)| + |r_n(x_0)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = \varepsilon.$$
Но это и означает, что функция $A(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$. Теорема 1 доказана.

Далее рассмотрим некоторые простые свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

Определение 3. *Последовательность функций $\{A_n(x)\}$ называется* **равномерно ограниченной на множестве** *M, если существует такое число C, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и при всех $x \in M$ имеем*
$$|A_n(x)| < C.$$

Утверждение 1. *Равномерно сходящаяся на множестве M последовательность $A_n(x)$, состоящая из ограниченных на M функций, является равномерно ограниченной на M.*

Доказательство. Пусть $B_m = \sup\limits_{x \in M} |A_m(x)|$ для каждого натурального числа m. В определении равномерной сходимости возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда при всех достаточно больших $n > n_0$ и при всех $x \in M$
$$|A(x) - A_n(x)| < 1, \quad |A(x)| \le |A_n(x)| + 1 \le B_m + 1.$$
Это значит, что $A(x)$ ограничена.

Далее, пусть $B_0 = \sup\limits_{x \in M} |A(x)|$, $B = \max\limits_{0 \le k \le n_0} B_k$. Положим $C = B + 1$. Тогда при $k \le n_0$ справедлива оценка
$$|A_k(x)| \le B < B + 1 = C,$$
а при $k > n_0$ имеем
$$|A_k(x)| \le |A(x) - (A(x) - A_k(x))| \le |A(x)| + |A(x) - A_k(x)| \le$$
$$\le B_0 + 1 \le B + 1 = C.$$
Таким образом, утверждение 1 доказано полностью. Попутно доказано еще одно утверждение.

Утверждение 2. *Если функция* $A(x)$ *является ограниченной на множестве* M *и* $A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$, *то при некотором* $n_0 \in \mathbb{N}$ *функциональная последовательность* $B_n(x) = A_{n_0+n}(x)$ *равномерно ограничена на* M.

Следующие два утверждения приведем без доказательства, поскольку они доказываются точно так же, как и в аналогичных случаях для числовых рядов.

Утверждение 3. *Пусть при* $n \to \infty$ *имеем*

$$a_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} a(x), \quad b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} b(x).$$

Тогда:

1^0. $a_n(x) + b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} a(x) + b(x)$;

2^0. *если* $|b(x)| < C$ *при некотором* $C > 0$ *и всех* $x \in M$, *то*

$$a_n(x) \cdot b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} a(x) \cdot b(x);$$

3^0. $\frac{a_n(x)}{b_n(x)} \underset{M}{\rightrightarrows} \frac{a(x)}{b(x)}$, *если только* $1/|b(x)| > C > 0$ *при всех* $x \in M$.

Утверждение 4. *Если последовательность* $d_n(x)$ *является равномерно ограниченной и* $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ *при* $n \to \infty$, *то* $d_n(x) r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ *при* $n \to \infty$.

§ 3. КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Докажем теперь критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Теорема 1 (критерий Коши). *Для того чтобы функциональная последовательность $A_n(x)$ равномерно сходилась на множестве M, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех $m > n_0$ и $n > n_0$ и всех $x \in M$ имело бы место неравенство $|A_n(x) - A_m(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство. *Необходимость.* В этом случае $A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > n_0$ и для всех $x \in M$ имеем $|A_n(x) - A(x)| < \varepsilon/2$. Но тогда при $m > n_0$ и $n > n_0$ имеем

$$|A_m(x) - A_n(x)| \leq |A_m(x) - A(x)| + |A(x) - A_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. При каждом фиксированном $x \in M$ функциональная последовательность $A_n(x)$ превращается в числовую и для нее выполняется критерий Коши. Это значит, что она имеет предел $A(x)$, т.е. предельная функция существует на всем множестве M. Далее, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, по условию найдется номер $n_1 = n_1(\varepsilon/2)$ такой, что при всех m и $n > n_1$ имеем $|A_n(x) - A_m(x)| < \varepsilon/2$.

Снова произвольно зафиксируем $x \in M$ и устремим m к бесконечности. Получим неравенство

$$|A_n(x) - A(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Но тогда, полагая $n_0 = n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon/2)$, при всех $n > n_0$ и всех $x \in M$ будем иметь

$$|A_n(x) - A(x)| < \varepsilon,$$

т.е. $A_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$. Теорема 1 доказана.

Если $A_n(x)$ — последовательность частичных сумм функционального ряда $\sum a_n(x)$, то теорема 1 дает нам критерий Коши равномерной сходимости этого ряда. Сформулируем его в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. *Для равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$ на множестве M необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для каждого $n > n_0$, и для каждого $p \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in M$ выполнялось бы неравенство*

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)\right| < \varepsilon.$$

И наконец, исходя из теоремы 2 сформулируем в прямой форме критерий отсутствия равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$.

Т е о р е м а 3. *Утверждение о том, что ряд $\sum a_n(x)$ или последовательность $A_n(x)$ не являются равномерно сходящимися на множестве M, означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что найдутся две последовательности $\{n_m\}$ и $\{p_m\} \in \mathbb{N}$, причем $n_{m+1} > n_m$, а также последовательность $\{x_m\} \in M$, для которых имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{k=n_m+1}^{n_m+p_m} a_k(x_m)\right| \geq \varepsilon.$$

Примеры неравномерно сходящихся рядов и последовательностей.

1. Ряд $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n$ сходится неравномерно на $[0,2)$.

Действительно, сумма ряда $A(x)$ при $x \neq 0$ равна

$$A(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = x\frac{1}{1-(1-x)} = \frac{x}{x} = 1$$

и $A(0) = 0$. Это значит, что $x = 0$ — точка разрыва функции $A(x)$. Но если бы сходимость была равномерной, то функция $A(x)$ была бы непрерывной в силу теоремы 1 § 2, поскольку $a_n(x) = x(1-x)^n$ непрерывна в нуле. Но это не так. Следовательно, равномерной сходимости нет.

2. Если $A_n(x) = x^n$, то на множестве $M = (0,1)$ равномерная сходимость не имеет места.

Действительно, в теореме 3 положим $\varepsilon = 0,1$ и при каждом $m > 1$ возьмем $n_m = m$, $x_m = 1 - 1/m$, $p_m = m$. Тогда будем иметь

$$|A_m(x_m) - A_{2m}(x_m)| = \left|\left(1-\frac{1}{m}\right)^m - \left(1-\frac{1}{m}\right)^{2m}\right| =$$

$$= \left(1-\frac{1}{m}\right)^m\left(1-\left(1-\frac{1}{m}\right)^m\right) > \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} > 0,1 = \varepsilon.$$

Таким образом, по критерию Коши в форме теоремы 3 последовательность $A_n(x)$ не является равномерно сходящейся.

Задача. *Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны на $[0,1]$ при всех $n \in \mathbb{N}$ и $f_n(x) \to f_0(x)$ при $n \to \infty$. Доказать, что $f_0(x)$ имеет точку непрерывности на $(0,1)$.*

§ 4. ПРИЗНАКИ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

Докажем три признака равномерной сходимости функционального ряда, принадлежащие Вейерштрассу, Абелю и Дирихле. Эти признаки дают достаточные условия для равномерной сходимости, но они не являются необходимыми, т.е. ряд $\sum a_n(x)$ может сходиться равномерно, но не удовлетворять любому из них. Впрочем, та же ситуация имела место и для сходимости обычных числовых рядов. С другой стороны, отметим, что они соответствуют признакам сходимости числовых рядов того же названия и развивают заложенные в них принципы.

Рассмотрим сначала следующий критерий равномерной сходимости для бесконечно малой функциональной последовательности.

Теорема 1. *Для того чтобы $b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовала числовая последовательность β_n с условием $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $|b_n(x)| \le \beta_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in M$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть такая последовательность β_n существует. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для каждого $n > n_0$ справедлива оценка

$$\beta_n < \varepsilon.$$

Но тогда при тех же n и всех $x \in M$ имеем $|b_n(x)| \le \beta_n < \varepsilon$, т.е.

$$b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Необходимость. Пусть $b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$. Положим $\beta_n = \sup\limits_{x\in M} |b_n(x)|$. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для каждого $n > n_0$ справедливо неравенство $|b_n(x)| < \varepsilon$, при тех же n имеем $\beta_n = \sup\limits_{x\in M} |b_n(x)| \le \varepsilon$. Это значит, что $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание. Последовательность β_n в доказанной теореме называется **мажорантой** для $b_n(x)$, и утверждение этой теоремы означает, что равномерная сходимость бесконечно малой функциональной последовательности равносильна существованию бесконечно малой ее мажоранты.

Теперь рассмотрим признак Вейерштрасса для равномерной сходимости функционального ряда.

Определение 1. *Сходящийся числовой ряд $\sum p_n$ с условием $p_n \geq 0$ при всех n называется* **мажорантой** *функционального ряда $\sum a_n(x)$ на множестве M, если для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in M$ справедлива оценка $|a_n(x)| \leq p_n$. Говорят также, что ряд $\sum a_n(x)$* **мажорируется** *рядом $\sum p_n$ на множестве M.*

Теорема 2 (признак Вейерштрасса). *Пусть функциональный ряд*
$\sum a_n(x)$ на множестве M имеет мажоранту $\sum p_n$. Тогда он равномерно сходится на этом множестве.

Доказательство. Достаточно установить, что остаток ряда $r_n(x)$ равномерно сходится к нулю на M. Но заметим, что при любом фиксированном $x \in M$ числовой ряд $\sum a_n(x)$ сходится, поскольку имеет мажоранту $\sum p_n = P$. Кроме того, при каждом фиксированном x имеем

$$|r_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = \rho_n,$$

где ρ_n — остаток числового ряда $\sum p_n$ и $\rho_n \to 0$ при $n \to \infty$. Но по теореме 1 это означает, что $r_n(x)$ имеет бесконечно малую мажоранту ρ_n. Следовательно, $r_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$, т.е. ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится. Теорема 2 доказана.

Теорема 3.

(А) (признак Абеля). *Пусть:*

1) $\sum a_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} A(x)$;

2) последовательность $b_n(x)$ равномерно ограничена на M;

3) при всех фиксированных $x \in M$ числовая последовательность $b_n(x)$ монотонна.

Тогда ряд $\sum h_n(x)$, $h_n(x) = a_n(x)b_n(x)$, равномерно сходится на M.

(Д) (признак Дирихле). *Пусть:*

1) частичные суммы $A_n(x)$ равномерно ограничены на M;

2) $b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$;

3) при всех фиксированных $x \in M$ числовая последовательность $b_n(x)$ монотонна.

Тогда ряд $\sum h_n(x)$, $h_n(x) = a_n(x)b_n(x)$, равномерно сходится на M.

Доказательство. Применим ту же схему, что и при доказательстве одноименных признаков для числовых рядов. Как и раньше, сначала будем считать, что последовательность $b_n(x)$ убывает и $b_n(x) \geq 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Применяя преобразование Абеля к частичным суммам ряда $\sum h_n(x)$ и используя обозначения

$$H_k'(x) = \sum_{m=n+1}^{k} h_m(x),\ A_k'(x) = \sum_{m=n+1}^{k} a_m(x)$$

для отрезков рядов $\sum h_n(x)$ и $\sum a_n(x)$, получим

$$|H_p'(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x)b_k(x)\right| =$$

$$= \left|A_{n+p}'(x)b_{n+p}(x) + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k'(x)(b_k(x) - b_{k+1}(x))\right| \le$$

$$\le |A_{n+p}'(x)|b_{n+p}(x) + \sup_{n<k<n+p} |A_k'| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_k(x) - b_{k+1}(x)) =$$

$$= b_{n+1}(x) \sup_{n<k\le n+p} |A_k'(x)|.$$

Рассмотрим случай (А). В силу равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$ и согласно критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для каждого $k > n_0$ справедливо неравенство

$$\sup_{x\in M} |A_k'(x)| < \varepsilon.$$

Кроме того, в силу равномерной ограниченности $b_n(x)$ при некотором $C > 0$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всех $x \in M$ имеем $b_n(x) \le C$. Следовательно, при $n \ge n_0$ справедлива оценка $|H_p'(x)| \le C\varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это означает выполнение условия критерия Коши для равномерной сходимости ряда $\sum h_n(x)$, т.е. в случае (А) теорема доказана.

Рассмотрим теперь случай (Д). При этом в силу равномерной ограниченности сумм $A_k(x)$, а вместе с ними и $A_k'(x) = A_k(x) - A_n(x)$ найдется число $C > 0$ такое, что $|A_k'(x)| < C$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in M$. По критерию Коши при достаточно большом $n > n_0(\varepsilon)$ в силу п. 2 имеем $b_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$. Тогда получим $|b_{n+1}(x)| < \varepsilon$, откуда, как и раньше, получим $|H_p'(x)| \le C\varepsilon$. Тем самым утверждение (Д) тоже доказано.

Осталось освободиться от ограничений: 1) последовательность $b_n(x)$ убывает; 2) $b_n(x) \ge 0$ при всех n. Для того чтобы снять ограничение 1), можно поменять знаки на противоположные у всех функций $a_n(x)$ и $b_n(x)$ одновременно. Тогда условие возрастания $b_n(x)$ переходит в условие убывания $b_n(x)$, а все условия на ряд $\sum a_n(x)$ сохраняются. Чтобы освободиться от ограничения 2), рассмотрим функцию $b_0(x)$, где

$$b_0(x) = \inf_n b_n(x) = \lim_{n\to\infty} b_n(x).$$

Тогда $b_n(x) = b_0(x) + \beta_n(x)$, где $\beta_n(x) \geq 0\ \forall x \in M$ и $\beta_n(x)$ убывает. Отсюда

$$\sum a_n(x)b_n(x) = b_0(x)\sum a_n(x) + \sum a_n(x)\beta_n(x).$$

В случае (Д) первое слагаемое равно нулю, а в случае (А) оно представляет собой равномерно сходящийся ряд. Второй же ряд удовлетворяет условиям теоремы и обоим сделанным выше допущениям. Тем самым теорема 3 доказана полностью.

Докажем следующий изящный критерий равномерной сходимости синус-ряда (см. [36],[37]).

Теорема 4 (Критерий Чоунди – Джолиффе равномерной сходимости тригонометрического синус-ряда). *Пусть b_n — положительная, монотонно убывающая последовательность. Тогда для равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ на $\mathbb{R}$ необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$.

Доказательство. Необходимость. По критерию Коши имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $m > n_0$, всех $n > n_0$ и всех $x \in [0,\pi]$ справедливо неравенство $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} b_k \sin kx\right| < \varepsilon$. Возьмем $m = [n/2]$ и $x = \pi/(4n)$. Тогда при $m+1 \leq k \leq n$ получим $\sin kx \geq \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$. Следовательно,

$$\sum_{k=m+1}^{n} b_k \sin kx \geq (n-m)b_n\sqrt{2}/2 \geq nb_n\sqrt{2}/4.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|nb_n| < 4\varepsilon/\sqrt{2}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} nb_n = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Так как для любого натурального числа n функции $\sin nx$ — периодические с периодом 2π и нечетные, то достаточно доказать равномерную сходимость рассматриваемого ряда только на отрезке $[0,\pi]$. Из условия теоремы имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > n_0$ справедливо неравенство $|nb_n| < \varepsilon$ Возьмем любое $n > n_0$ и любое $p \geq 1$ и оценим сумму

$$\Sigma = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k \sin kx\right| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где

$$\Sigma_1 = \left|\sum_{k=n+1}^{[\pi/x]} b_k \sin kx\right|, \quad \Sigma_2 = \left|\sum_{k=[\pi/x]}^{n+p} b_k \sin kx\right|.$$

При $k \leq \pi/x$ имеем $\sin t \leq t$, поэтому

$$\Sigma_1 \leq \sum_{k=m+1}^{[\pi/x]} \frac{\varepsilon}{k} kx \leq \varepsilon\pi.$$

Для оценки суммы Σ_2 применим преобразование Абеля. Получим

$$\Sigma_2 \leq b_{[\pi/x]+1} \max_{1\leq q\leq p} \left| \sum_{k=[\pi/x]}^{n+q} \sin kx \right| < \frac{\varepsilon}{[\pi/x]+1} \cdot \frac{\pi}{x} \leq \varepsilon,$$

поскольку функция $\sin t/t$ монотонно убывает при $0 < t \leq \pi/2$ и

$$\left| \sum_{k=[\pi/x]}^{n+q} \sin kx \right| = \left| \frac{\cos(n+q-1/2)x - \cos([\pi/x]+1/2)x}{2\sin x/2} \right| \leq \frac{1}{\sin x/2} \leq \frac{\pi}{x}.$$

Следовательно, $\Sigma < \varepsilon(\pi+1)$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ нашлось число $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > n_0$, для всех $p \geq 1$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\Sigma < \varepsilon(\pi + 1)$, что в силу критерия Коши равномерной сходимости ряда означает равномерную сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Теорема 4 доказана полностью.

Отметим, что интересные обобщения этой теоремы даны Г. Х. Харди [37].

§ 5. ТЕОРЕМА ДИНИ

Докажем теорему Дини, которая важна для прояснения сущности понятия равномерной сходимости.

Т е о р е м а 1 (признак Дини). *Пусть последовательность неотрицательных функций $p_n(x)$, непрерывных на отрезке $I = [a, b]$, сходится поточечно к нулю на этом отрезке, причем $p_n(x) \geq p_{n+1}(x)$ при всех $x \in I$ и при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда эта сходимость равномерная на отрезке I, т.е. $p_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду поточечной сходимости последовательности $p_n(x)$ к нулю для всякого $\varepsilon > 0$ и для каждой точки $x \in I$ можно указать номер $n = n(\varepsilon, x)$ такой, что $p_n(x) < \varepsilon/2$. Но так как $p_n(x)$ непрерывна, то у точки x найдется некоторая δ-окрестность, где $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, для всех точек y которой имеем $p_n(y) < \varepsilon$. Совокупность всех таких окрестностей полностью покрывает отрезок I, и в силу того, что он является компактом, из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $O(\delta_1, x_1), \ldots, O(\delta_k, x_k)$. По построению каждому из чисел $x_1, \ldots, x_k$ соответствуют свои номера $n_1, \ldots, n_k$ и функция $p_{n_1}(y), \ldots, p_{n_k}(y)$ такие, что $0 \leq p_{n_s}(y) < \varepsilon$ при всех $y \in O(\delta_s, x_s)$. Положим $n_0 = \max_{1 \leq s \leq k} n_s$. Тогда имеем $0 \leq p_{n_0}(y) \leq$ $\leq p_{n_s}(y) < \varepsilon$ при любом $y \in O(\delta_{n_s}, x_{n_s})$ и $s = 1, \ldots, k$. Поскольку каждая точка y из отрезка I входит в некоторую такую окрестность, в каждой из них выполняется неравенство $0 \leq p_{n_0}(y) < \varepsilon$. Но тогда для всех $n > n_0 = n_0(\varepsilon)$ и одновременно для всех $y \in I$ имеем

$$|p_n(y)| < \varepsilon,$$

т.е. $p_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Если в теореме 1 в качестве $p_n(x)$ рассматривать последовательность остатков $r_n(x)$ функционального ряда $\sum a_n(x)$ с условием $a_n(x) \geq 0$, то вместе с доказанной ранее теоремой о сохранении непрерывности суммы ряда при его равномерной сходимости мы получим следующий критерий.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы сумма ряда, составленного из непрерывных и неотрицательных функций на отрезке $I = [a, b]$, была также непрерывна на I, необходимо и достаточно, чтобы ряд сходился равномерно на этом отрезке.*

Замечание. Для справедливости утверждения теоремы 1 существенно, что отрезок I является компактом. Если, например, в ее условии отрезок I заменить интервалом, то она уже не будет верной. Это подтверждает разобранный ранее пример ряда $\sum x(1-x)^n$, который не является равномерно сходящимся на интервале $(0,2)$.

§ 6. ПОЧЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ РЯДА

Наша дальнейшая цель состоит в нахождении условий, обеспечивающих возможность почленного дифференцирования и интегрирования функциональных рядов. Понятие равномерной сходимости ряда и здесь играет главную роль.

Обратим внимание на то, что теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда означает, что

$$A(x_0) = \lim_{x\to x_0} A(x) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{n\to\infty} A_n(x)) = \lim_{x\to x_0}\sum a_n(x) =$$

$$= \sum a_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} A_n(x_0) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to x_0} A_n(x)).$$

Другими словами, эта теорема позволяет менять порядок выполнения двух последовательных предельных переходов вида $x \to x_0$ и $n \to \infty$. Далее будет доказано утверждение весьма общего вида, а пока отметим, что почленное дифференцирование, как и почленное интегрирование, тоже можно рассматривать как изменение порядка выполнения предельных переходов относительно двух баз множеств разного типа.

Рассмотрим вопрос о почленном интегрировании ряда.

Т е о р е м а 1. *Сумма $A(x)$ равномерно сходящегося на $I = [\alpha,\beta]$ ряда $\sum a_n(x)$, составленного из функций, интегрируемых на $[\alpha,\beta]$ по Риману, тоже является интегрируемой по Риману функцией, причем*

$$B = \int_\alpha^\beta A(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \int_\alpha^\beta a_n(x)dx = \sum_{n=1}^\infty b_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно критерию Лебега интегрируемости функции по Риману мера множества T_n точек разрыва каждой из функций $a_n(x)$ равна нулю. Но тогда объединение T всех таких множеств, $T = \cup T_n$, также имеет лебегову меру нуль. Все остальные точки промежутка I будут общими точками непрерывности одновременно для всех функций $a_n(x)$. Поэтому в силу равномерной сходимости ряда $\sum a_n(x)$ сумма $A(x)$ этого ряда будет ограничена и в этих точках непрерывна. Другими словами, тогда лебегова мера точек разрыва ограниченной функции $A(x)$ тоже равна нулю и согласно критерию Лебега $A(x)$ интегрируема по Риману на $[\alpha,\beta]$. Тогда при всех $n\in\mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} A(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} A_n(x)dx + \int\limits_{\alpha}^{\beta} r_n(x).$$

Но так как $r_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ при $n\to\infty$, то $\sup\limits_{I}|r_n(x)| = \rho_n \to 0$ при $n\to\infty$. Отсюда получим

$$\left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} A(x)\,dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} A_n(x)\,dx\right| \le \int\limits_{\alpha}^{\beta} |r_n(x)|\,dx \le$$

$$\le \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho_n\,dx = \rho_n(\beta-\alpha) \to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

т.е. $(B - \sum\limits_{k=1}^{n} b_k) \to 0$ при $n\to\infty$ и $B = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. Теорема 1 доказана.

Полученный результат позволяет весьма просто доказать первое правило почленного дифференцирования ряда.

Т е о р е м а 2. *Ряд $\sum a_n(x)$ можно почленно дифференцировать, если:*

1) он сходится в некоторой точке x_0 отрезка $I=[\alpha,\beta]$;

2) производные всех его слагаемых $a_n(x)$ существуют и непрерывны на I;

3) ряд $\sum a_n'(x)$, составленный из этих производных, равномерно сходится на отрезке I.

Точнее, имеем:

1) $\sum_{k=1}^{n} a_k(x) = A_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} A(x)$;

2) $A'(x) = \sum a_n'(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия данной теоремы позволяют применить теорему 1 для почленного интегрирования ряда $\sum a_n'(x)$ на отрезке с концами x_0 и t при любом $t\in[\alpha,\beta]$. При этом с помощью формулы Ньютона – Лейбница получим

$$A(t) - A(x_0) = B(t) = \int\limits_{x_0}^{t} A'(x)dx = \int\limits_{x_0}^{t} \sum a_n'(x)dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{t} a_n'(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(t) - a_n(x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t).$$

Это равенство означает, что $A'(t) = B'(t) = \sum a_n'(t)$. Осталось показать, что ряд $\sum a_n(x)$ сходится равномерно на I. Имеем

$$\beta_n(t) = \int_{x_0}^{t} r_n'(x)\,dx = \int_{x_0}^{t} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n'(x)\,dx =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k(t) - a_k(x_0)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} b_n(t), \quad \beta_n(t) = B(t) - \sum_{k=1}^{n} b_k(t).$$

Но $r_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, поэтому существует последовательность p_n с условием $p_n \to 0$ и $|r_n'(x)| \le p_n$ при всех достаточно больших $n > n_0$ и всех $x \in I$. Следовательно,

$$|\beta_n(t)| \le \int_{x_0}^{t} |r_n'(x)|\,dx \le \int_{x_0}^{t} p_n dx = p_n(t - x_0) \le p_n(\alpha - \beta).$$

Это значит, что $\beta_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} 0$ при $n \to \infty$, т.е. ряд $\sum b_n(t)$ сходится равномерно на I, а вместе с ним и ряд $\sum a_n(x)$ тоже равномерно сходится, так как

$$A(t) = \sum a_n(t) = \sum b_n(t) + \sum a_n(x_0),$$

где $\sum a_(x_0)$ — сходящийся числовой ряд. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть:*

1) ряд $\sum a_n(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in I = [\alpha, \beta]$;

2) ряд $\sum a_n'(x)$ равномерно сходится на I.

Тогда ряд $\sum a_n(x)$ тоже равномерно сходится на I, причем его сумма $A(x)$ имеет производную $A'(x)$, равную сумме ряда $\sum a_n'(x)$.

Заметим прежде всего, что здесь нельзя воспользоваться формулой Ньютона – Лейбница, поскольку функции $a_n'(x)$ могут уже не интегрироваться по Риману и необходимо действовать по-иному.

Доказательство. Докажем сначала, что исходный ряд $\sum a_n(x)$ равномерно сходится на I. Для этого проверим выполнение для него критерия Коши. Точнее, мы будем рассматривать разность

$$\sum (a_n(x) - a_n(x_0)) = \sum h_n(x),$$

что допустимо, так как $\sum a_n(x) = \sum h_n(x) + \sum a_n(x_0)$, где числовой ряд $\sum a_n(x_0)$ сходится.

Применяя к отрезку ряда $\sum h_n(x)$ формулу конечных приращений Лагранжа, при некотором $t \in (x_0, x)$ будем иметь

$$T = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} h_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k(x) - a_k(x_0))\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} (x - x_0)a_n'(t)\right|.$$

Но тогда по критерию Коши для любого $\varepsilon > 0$ и при достаточно большом $n > n_0$ и любом $p \in \mathbb{N}$ имеем

$$T \leq |x - x_0| \cdot \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_n'(t)\right| < \varepsilon |x - x_0|.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, это означает, что условие критерия Коши для ряда $\sum h_n(x)$ тоже выполнено и он равномерно сходится вместе с рядом $\sum a_n(x)$.

Теперь необходимо показать, что его сумму $A(x)$ можно дифференцировать, причем производная суммы равна сумме производных во всякой точке x_1 отрезка $I = [\alpha, \beta]$. Для этого рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} = \frac{A(x) - A(x_1)}{x - x_1} = \frac{\Delta A_n(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta r_n(x)}{\Delta x} = D_n + R_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$ произвольно.

Снова применяя формулу конечных приращений, для величины R_n получаем оценку

$$|R_n| = \left|\frac{r_n(x) - r_n(x_1)}{x - x_1}\right| = \lim_{p\to\infty} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k(x) - a_k(x_1)}{x - x_1}\right| \leq$$

$$\leq \sup_p \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k(x) - a_k(x_1)}{x - x_1}\right| \leq \sup_{\substack{t\in I\\ p\in N}} \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k'(t)\right| = T_1.$$

В силу равномерной сходимости ряда $\sum a_n'(x)$ величина T_1 при любом заданном значении $\varepsilon > 0$ и достаточно большом $n > n_1(\varepsilon)$ становится меньше, чем ε. Поэтому при таких n имеем $|R_n| < \varepsilon$. Полагая $D(x) = \sum a_n'(x)$ и $d_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k'(x) = D(x) - A_n(x)$, при тех же n и всех $x \in I$, очевидно, имеем оценку

$$|d_n(x)| \leq T_1 < \varepsilon.$$

Далее, функция $A_n(x)$ дифференцируема при любом x, поэтому

$$D_n = \frac{\Delta A_n(x)}{\Delta x} = A_n'(x_1) + \gamma_n(x),$$

где $\gamma_n(x) \to 0$ при любом фиксированном n и $x \to x_1$.

Зафиксируем теперь какое-либо $n > n_0(\varepsilon)$, например $n = n_0(\varepsilon)+1$, и выберем число $\delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при данном n и всех x с условием $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $\gamma_n(x) < \varepsilon$. Тогда для всех таких x имеем

$$\left|\frac{\Delta A(x)}{\Delta x} - D(x_1)\right| = |D_n + R_n - D(x_1)| =$$

$$= |A_n'(x_1) + \gamma_n(x) + R_n - D(x_1)| = |\gamma_n(x) - d_n(x_1) + R_n| < 3\varepsilon,$$

а это значит, что $\Delta A(x)/\Delta x \to D(x_1)$ при $\Delta x \to 0$ или $A'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$. Теорема 3 доказана полностью.

Лекция 11

§ 7. ДВОЙНЫЕ И ПОВТОРНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПО БАЗЕ МНОЖЕСТВ

Встречавшиеся ранее примеры равенства повторных пределов различных типов ясно подсказывают целесообразность выработки возможно более общего взгляда на этот вопрос. Здесь мы рассматриваем его в связи с еще одним понятием — понятием предела по совокупности двух баз. Нам потребуется ряд новых определений.

Определение 1. *Пусть функция $f(x,y)$ определена на декартовом произведении $X\times Y$ двух множеств X и Y, т.е. на множестве всех пар (x,y), где $x\in X$ и $y\in Y$. Пусть на множестве X задана некоторая база B. Будем говорить, что* **функция $f(x,y)$ сходится к функции $g(y)$ по базе B равномерно на множестве** Y, *если для всякого $\varepsilon>0$ найдется окончание $b(\varepsilon)\in B$ такое, что при всех $x\in b(\varepsilon)$ независимо от $y\in Y$ справедливо неравенство $|f(x,y)-g(y)|<\varepsilon$.*
В этом случае будем писать:

$$f(x,y)\underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y).$$

Рассмотрим теперь базу $D=\{d\}$, заданную на множестве Y.

Определение 2. *Если $f(x,y)$ сходится к $g(y)$ по базе B, а функция $g(y)$ сходится к l_1 по базе D, то число l_1 назовем* **повторным пределом** *функции $f(x,y)$ по базам B и D. Этот предел будем обозначать символом $\lim\limits_{D}\lim\limits_{B} f(x,y)=l_1$.*

Изменяя порядок выполнения предельных переходов, можно рассматривать еще один повторный предел, а именно, $\lim\limits_{B}\lim\limits_{D} f(x,y)=l_2$. Далее введем понятие двойного предела по базам B и D.

Определение 3. *Рассмотрим в качестве основного множества декартово произведение $X\times Y$, состоящее из всевозможных пар (x,y), где $x\in X$ и $y\in Y$, и рассмотрим определенную на нем базу H, составленную из всех возможных сочетаний h вида $h=b\times d$, где $b\in B$ и $d\in D$. Эту базу будем называть* **декартовым произведением баз** *B и D и обозначать: $H=B\times D$.*

Легко убедиться в том, что множество H действительно образует базу множеств. В самом деле: 1) каждый ее элемент $h=b\times d$, очевидно, не пуст и 2) пересечение любых двух ее элементов $h_1\cap h_2=$ $=(b_1\times d_1)\cap(b_2\times d_2)$ содержит некоторый третий элемент $h_3=b_3\times d_3$, где окончания $b_3\in B$ и $d_3\in D$ удовлетворяют условиям $b_3\subset b_1\cap b_2$ и $d_3\subset d_1\cap d_2$.

Т е о р е м а 1 (теорема о двойном и повторном пределах по базам множеств). *Пусть* $f(x,y)\underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} F_1(y)$ *и* $f(x,y)\xrightarrow{D} F_2(x)$. *Тогда существуют оба повторных предела:*

$$\lim_D \lim_B f(x,y) = l_1, \quad \lim_B \lim_D f(x,y) = l_2$$

и двойной предел по базе $H = B \times D$:

$$\lim_H f(x,y) = l_3,$$

причем $l_1 = l_2 = l_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Поскольку $f(x,y)\underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} F_1(y)$, существует окончание $b = b(\varepsilon) \in B$ такое, что при всех $x \in b(\varepsilon)$ и при всех $y \in Y$ справедливо условие $|f(x,y) - F_1(y)| < \varepsilon/3$. Зафиксируем какое-либо $x = x_0 \in b(\varepsilon)$. В силу условия $f(x_0,y)\xrightarrow{D} F_2(x_0)$ найдется окончание $d = d(\varepsilon) \in D$, для всех точек y_1 и y_2 которого имеем $|f(x_0,y_1) - f(x_0,y_2)| < \varepsilon/3$. Но тогда при тех же y_1 и y_2 справедливо неравенство

$$|F_1(y_1) - F_1(y_2)| =$$

$$= |(F_1(y_1) - f(x_0,y_1)) + (f(x_0,y_1) - f(x_0,y_2)) + (f(x_0,y_2) - F_1(y_2))| \le$$

$$\le |F_1(y_1) - f(x_0,y_1)| + |f(x_0,y_1) - f(x_0,y_2)| + |f(x_0,y_2) - F_1(y_2)| <$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

По критерию Коши отсюда следует, что при некотором l имеем $F_1(y)\xrightarrow{D} l$, т.е. $\lim\limits_D \lim\limits_B f(x,y) = l$. Теперь покажем, что $f(x,y)\xrightarrow{H} l$, где $H = B \times D$. Поскольку $F_1(y)\xrightarrow{D} l$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется окончание $d = d(\varepsilon) \in D$ с условием $|F_1(y) - l| < \varepsilon/2$ при всех $y \in d(\varepsilon)$. Далее, в силу того, что $f(x,y)\underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} F_1(y)$, найдется окончание $b(\varepsilon)$ с условием $|f(x,y) - F_1(y)| < \varepsilon/2$ при всех $x \in b(\varepsilon)$ и $y \in Y$. Возьмем теперь в качестве $h = h(\varepsilon) \in H$ окончание $h(\varepsilon) = b(\varepsilon) \times d(\varepsilon)$. Тогда для всех его элементов (x,y) имеем неравенство

$$|f(x,y) - l| \le |f(x,y) - F_1(y)| + |F_1(y) - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Это значит, что $f(x,y)\xrightarrow{H} l$.

Осталось доказать, что $F_2(x)\xrightarrow{B} l$. Для этого в неравенстве

$$|f(x,y) - F_1(y)| < \varepsilon/2,$$

справедливом при всех $(x,y) \in h(\varepsilon) = b(\varepsilon) \times d(\varepsilon)$, при каждом фиксированном x рассмотрим предел по базе D. Тогда получим

$$|F_2(x) - l| \le \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Это и означает, что $F_2(x) \xrightarrow{B} l$. Теорема 1 доказана.

Профессор Т. П. Лукашенко обратил внимание на критерий существования и равенства повторных пределов по совокупности двух баз B и D, доказанный Р. А. Гордоном [32] в 1995 г. Это утверждение обобщает соответствующий критерий А. А. Маркова (1856 - 1922) для повторных рядов.

Теорема 2 (критерий существования повторных пределов по базам множеств). *Пусть на множестве $X = \{x\}$ задана база B, а на множестве $Y = \{y\}$ — база D. Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную на декартовом произведении $X \times Y$ и удовлетворяющую следующим условиям:*

$$f(x,y) \xrightarrow{B} g(y); \ f(x,y) \xrightarrow{D} h(x).$$

Тогда для того чтобы оба повторных предела $\lim\limits_{D} \lim\limits_{B} f(x,y) = \lim\limits_{D} g(y)$ и $\lim\limits_{B} \lim\limits_{D} f(x,y) = \lim\limits_{B} h(x)$ существовали и были равны между собой, необходимо и достаточно выполнения следующего условия: для любого $\varepsilon > 0$ найдется окончание $b(\varepsilon) \in B$ такое, что для каждой его точки x существует свое окончание $d = d_x(\varepsilon) \in D$, для всех точек y которого выполнено неравенство $|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость. Пусть оба повторных предела существуют и равны l. Тогда справедлива оценка

$$|f(x,y) - g(y)| = |(f(x,y) - h(x)) + (h(x) - l) + (l - g(y))| \le$$

$$\le |f(x,y) - h(x)| + |h(x) - l| + |l - g(y)|.$$

Так как оба повторных предела равны l, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся окончания $b \in B$ и $d \in D$ такие, что при всех $x \in b$ и при всех $y \in d$ имеем

$$|h(x) - l| < \varepsilon/3 \quad \text{и} \quad |g(y) - l| < \varepsilon/3.$$

Кроме того, при фиксированном $x \in b$ в силу условия $f(x,y) \xrightarrow{D} h(x)$ найдется окончание $d_1 \in D$, для всех точек y которого выполнено неравенство $|f(x,y) - h(x)| < \varepsilon/3$. Теперь в качестве искомого окончания $b(\varepsilon)$ возьмем окончание b, а в качестве $d_x(\varepsilon)$ возьмем некоторый элемент $d_0 \in D$, принадлежащий пересечению d и d_1, т.е. $d_x(\varepsilon) = d_0 \subset$

$d \cap d_1$. Тогда для всех точек $x \in b(\varepsilon)$ и всех $y \in d_x(\varepsilon)$ будут выполнены все три неравенства, откуда имеем

$$|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим окончание $b(\varepsilon) \in B$ из условия теоремы. Проверим выполнение критерия Коши для сходимости $g(y)$ по базе D. Для этого рассмотрим фиксированную вспомогательную точку $x \in b(\varepsilon)$ и соответствующее ей окончание $d_x(\varepsilon)$ базы D. Далее, в силу сходимости $f(x,y) \xrightarrow{D} h(x)$ из критерия Коши следует, что при данном x найдется окончание $d \in D$ такое, что для всех $y_1, y_2 \in d$ справедливо неравенство $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon$. Возьмем теперь окончание $d_0 \subset d \cap d_x(\varepsilon)$. Для любых точек y_1 и y_2, принадлежащих окончанию $d_0 \in D$, величина $\Delta = |g(y_1) - g(y_2)|$ оценивается так:

$$\Delta \le |g(y_1) - f(x,y_1)| + |f(x,y_1) - f(x,y_2)| + |f(x,y_2) - g(y_2)| < 3\varepsilon.$$

Это и означает, что при некотором l имеет место сходимость $g(y) \xrightarrow{D} l$.

Осталось показать, что $h(x) \xrightarrow{B} l$. Для этого снова возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и соответствующее ему окончание $b(\varepsilon) \in B$, и для каждой фиксированной точки $x \in b(\varepsilon)$ оценим величину $\Delta_1 = |h(x) - l|$. Из условий $f(x,y) \xrightarrow{D} h(x)$ и $g(y) \xrightarrow{D} l$ следует, что существует окончание $d \in D$ такое, что для всех $y \in d$ выполняется неравенство

$$|f(x,y) - h(x)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |g(y) - l| < \varepsilon.$$

Возьмем вспомогательную точку $y \in d \cap d_x(\varepsilon)$. Тогда справедлива оценка

$$\Delta_1 = |h(x) - l| \le |h(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - g(y)| + |g(y) - l| < 3\varepsilon.$$

Другими словами, имеем $h(x) \xrightarrow{B} l$. Теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Если в формулировке теоремы 2 положить $d_x(\varepsilon) = Y$, то получится условие равномерной сходимости по базе B относительно множества Y. В этом случае утверждение теоремы 2 будет следствием теоремы 1. Таким образом, теорема 2 позволяет осуществлять перестановку предельных переходов при более слабых ограничениях. Однако при этом двойной предел в общем случае уже не существует, так что обе теоремы имеют свои сферы применения. Тем не менее если в условии теоремы 2 считать, что в качестве $d_x(\varepsilon)$ можно взять окончание $d(\varepsilon)$ одним и тем же вне зависимости от точки $x \in b(\varepsilon)$, то двойной предел существует и равен повторному.

Отметим также, что утверждение теоремы 2, являясь критерием существования и равенства повторных пределов, симметрично относительно двух рассматриваемых баз, в то время как в ее условие обе базы входят неравноправно. Это дает определенную свободу выбора при ее использовании.

Лекция 12

§ 8. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Напомним, что степенной ряд — это ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = A(x)$, где x_0 — фиксированное вещественное число. Основные свойства степенных рядов практически не зависят от x_0, и поэтому часто считают, что $x_0 = 0$.

Примерами степенных рядов являются рассмотренные ранее ряды Тейлора. Оказывается, что всякий степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы. Рассмотрим вопросы, связанные с определением области сходимости степенного ряда.

Определение 1. *Число R называется* **радиусом сходимости степенного ряда** $\sum a_n(x-x_0)^n$, *если этот ряд сходится при всех x с условием $|x-x_0| < R$ и расходится при $|x-x_0| > R$.*

Корректность определения обеспечивается следующей теоремой.

Теорема 1 (теорема Коши – Адамара). *Пусть задан степенной ряд $\sum f_n(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$. Рассмотрим числовую последовательность $b_n = |a_n|^{1/n}$. Тогда:*

1) если b_n является неограниченной последовательностью, то этот ряд расходится при всех $x \neq x_0$;

2) если b_n ограничена и $l = \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то $R = 1/l$;

3) если $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то данный ряд сходится при всех $x \in \mathbb{R}$.

Напомним, что для всякой ограниченной последовательности существуют верхний и нижний пределы.

Доказательство. Для краткости записи будем считать, что число x_0 равно нулю. Для общего члена числового ряда имеем равенство

$$|f_n(x)| = |a_n x^n| = b_n^n\,|x|^n = (b_n\,|x|)^n\,.$$

В случае 1) общий член $f_n(x)$ не стремится к нулю и потому ряд расходится. В случае 2) при фиксированном $|x| < 1/l$ и любом $n > n_0$, применяя признак сходимости Коши в предельной форме к ряду $\sum |f_n(x)|$, имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} |f_n(x)|^{1/n} = x\varlimsup_{n\to\infty} b_n < l/l = 1.$$

Это значит, что все $x < 1/l$ принадлежат области сходимости ряда. Если же $|x| > 1/l$, то легко видеть, что общий член ряда, как и в случае 1), не стремится к нулю и ряд тоже расходится.

В случае 3) снова согласно признаку Коши при всех x имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f_n(x)|^{1/n} = |x| \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = 0 < 1,$$

т.е. ряд сходится. Теорема 1 доказана.

Замечание. Если $|x| = R$, то ряд $\sum f_n(x)$ в доказанной теореме может и сходиться и расходиться. Примером служит ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln \frac{1}{1-x},$$

для которого $R = 1$ и при $x = -1$ имеет место сходимость, а при $x = 1$ — расходимость.

Т е о р е м а 2. *Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$ и r — произвольное число с условием $0 < r < R$. Тогда на отрезке $[-r, r]$ этот ряд сходится абсолютно и равномерно, а его сумма $A(x)$ непрерывна на нем.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Точка $r_1 = (R + r)/2 < R$ принадлежит области сходимости ряда, поэтому при $x = r_1$ его общий член $a_n r_1^n$ ограничен, т.е. $|a_n| r_1^n < c$ при некотором $c > 0$ и всех n. В силу того, что $r < r_1$, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r_1^n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = c \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = \frac{c}{1 - r/r_1}.$$

Но тогда сходящийся ряд $\sum |a_n| r^2 < \infty$ будет мажорантой для $\sum a_n x^n$ на отрезке $[-r, r]$. Следовательно, на этом отрезке ряд сходится абсолютно и равномерно.

При тех же условиях сумма $A(x)$ ряда $\sum a_n x^n$ является непрерывной функцией на отрезке $[-r, r]$, поскольку он сходится там равномерно и его члены непрерывны. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. *Если $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n x^n$, то на любом отрезке $[-r, r] \subset [-R, R]$ этот ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать на интервале сходимости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формальное почленное дифференцирование степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ дает ряд $x^{-1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^n = x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$, а интегрирование его приводит к ряду $x \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n+1}$. Для величин $|b_n|^{1/n}$ и $|c_n|^{1/n}$ в теореме Коши – Адамара имеем равенства

$$|b_n|^{1/n} = n^{1/n} |a_n|^{1/n}, \quad |c_n|^{1/n} = (n+1)^{-1/n} |a_n|^{1/n}.$$

Но так как $(n+1)^{-1/n} \to 1$ при $n \to \infty$, то по этой теореме радиусы сходимости всех трех рядов равны и ряды сходятся равномерно на любом отрезке вида $[-r, r]$, $r \le R$. Но тогда их можно почленно дифференцировать и интегрировать на этом интервале сходимости. Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4 (теорема Абеля). *Пусть ряд* $\sum a_n x^n$ *сходится в точке* $x = c > 0$. *Тогда его сумма* $A(x)$ *непрерывна на отрезке* $I = [0, c]$. *Если же число* $c < 0$, *то функция* $A(x)$ *непрерывна на отрезке* $[c, 0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала случай $c > 0$. Представим общий член $a_n x^n$ этого ряда в виде

$$a_n x^n = \alpha_n(x)\beta_n(x),$$

где $\alpha_n(x) = a_n c^n$ и $\beta_n(x) = x^n/c^n$. Тогда к этому ряду на отрезке $I = [0, c]$ можно применить признак равномерной сходимости Абеля, так как:

1) ряд $\sum a_n c^n$ не зависит от x и поэтому сходится равномерно на отрезке I;

2) последовательность $\beta_n(x) = x^n/c^n$ монотонна и равномерно ограничена на I, так как $|x^n/c^n| \leq 1$ при всех $x \in I$.

Но тогда сумма $A(x)$ этого ряда непрерывна на I. Случай $c < 0$ сводится к рассмотренному заменой $y = -x$. Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5 (выражение коэффициентов степенного ряда через значения производных его суммы в точке разложения). *Пусть степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = A(x)$ *имеет положительный радиус сходимости* R. *Тогда* $a_0 = A(x_0)$ *и при всех* $n \geq 1$ *имеем равенства* $a_n = A^{(n)}(x_0)/n!$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 3 равенство $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ можно почленно дифференцировать. Поэтому при $x = x_0$ имеем

$$A(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0 - x_0)^n = a_0,$$

$$A'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x_0 - x_0)^{n-1} = a_1 \cdot 1!,$$

$$A''(x_0) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)(x_0 - x_0)^{n-2} = a_2 \cdot 2!,$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$A^{(k)}(x_0) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(x_0 - x_0)^{n-k} = a_k \cdot k!.$$

Отсюда и следует требуемое утверждение. Теорема 5 доказана.

Таким образом, степенной ряд $\sum a_n(x-x_0)^n$ с ненулевым радиусом сходимости всегда является разложением в точке $x = x_0$ в ряд Тейлора своей суммы $A(x)$. Представляет интерес вопрос о том, как связаны между собой радиусы сходимости двух тейлоровских разложений функции $A(x)$, взятые в различных точках x_0 и x_1. Здесь имеет место, например, следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $R_0 > 0$ — радиус сходимости степенного ряда $\sum a_n(x-x_0)^n$. Рассмотрим другое разложение функции $A(x)$ в ряд Тейлора в точке x_1, где $|x_0 - x_1| = r < R_0$. Тогда, если $b_0, b_1, \ldots$ — его коэффициенты, а R_1 — радиус сходимости, то $R_1 \geq R_0 - r$ и $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(x-x_1)^k$, если $|x-x_1| < R_1$.*

Доказательство. Будем для простоты считать, что $x_0 = 0$, и положим $x - x_1 = y$. Тогда $x - x_0 = x = y + x_1$, $|x_1| = |x_1 - x_0| = r$. Если $|y| < R_0 - r$, то $|y| + |x_1| < R_0 - r + r = R_0$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|(|y| + |x_1|)^n$ сходится абсолютно. Но тогда повторный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x_1^{n-k}$ тоже абсолютно сходится и его члены можно переставить произвольным образом. В силу этого имеем

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x_1^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_1^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k b_k,$$

где $b_k = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_1^{n-k} = \frac{1}{k!}\left(\sum\limits_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n x_1^{n-k}\right)$.

Тем самым мы установили, что разложение $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k y^k$ функции $A(x)$ в ряд Тейлора в точке x_1 с условием $|x_1 - x_0| = r < R_0$ сходится абсолютно к сумме $A(x)$ при всех $|y| < R_0 - r$. Теорема 6 доказана.

Введем следующее определение.

Определение 2. *Функция $A(x)$ называется* **аналитической в точке** $x = x_0$, *если в некоторой окрестности этой точки она может быть представлена степенным рядом, т.е. ее рядом Тейлора.*

Теорема 6 показывает, что в каждой точке внутри области сходимости степенного ряда его сумма $A(x)$ является аналитической функцией. Заметим еще, что внутренность области сходимости всегда является интервалом, возможно, бесконечного радиуса, так что говорят об интервале сходимости степенного ряда.

Возможно, что при разложении суммы $A(x)$ степенного ряда $\sum a_n(x-x_0)^n$ в какой-либо точке $x_1 \neq x_0$ из его области сходимости новый степенной ряд $\sum b_1(x-x_1)^n = A(x)$ будет иметь свой интервал сходимости, выходящий за пределы прежнего интервала. Рассмотрим, например, разложение вида

$$A(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x-1)/2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x-1}{2\cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{2\cdot 2^2} - \ldots$$

Здесь разложение по степеням x имеет радиус сходимости $R_0 = 1$, а по степеням $(x-1)$ — радиус $R_1 = 2$.

Определение 3. *Метод распространения области определения аналитической функции путем ее разложения в степенной ряд в точке, не совпадающей с центром первоначальной области определения, называется* **принципом аналитического продолжения функции**.

Особую ценность этот принцип приобретает при рассмотрении степенных рядов от комплексного аргумента. Дело в том, что формальная подстановка комплексного числа $z = a+bi$ вместо вещественного x в степенной ряд $\sum a_n(x-x_0)^n$ позволяет естественным образом распространить область определения функции $A(x)$ на точки комплексной плоскости. Для этого достаточно ввести понятие сходимости ряда, составленного из комплексных чисел. Самый простой способ сделать это состоит в том, чтобы считать ряд $\sum(a_n + ib_n)$ сходящимся к комплексному числу $A + Bi$, если одновременно $\sum a_n$ сходится к A и $\sum b_n$ сходится к B. Можно очень просто показать, что для сходимости рядов с комплексными членами верен мажорантный признак Вейерштрасса. Но тогда если, например, ряд $\sum a_n x^n$ сходится при некотором $x = x_0 \neq 0$, то при всех r с условием $r < |x_0|$ ряд $\sum |a_n|\cdot r^n$ тоже сходится. А если $z = a + bi$ и $|z| = r$, то сходится и ряд $\sum a_n z^n$. Это значит, что область сходимости ряда $\sum a_n z^n$ содержит на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ круг радиуса $R = |x_0|$ с центром в нуле. Используя принцип аналитического продолжения, можно определить значения аналитической функции и в других точках комплексной плоскости. Важно, что указанная процедура, по существу, дает в некотором смысле однозначное продолжение. Такой способ позволяет однозначно продолжить на комплексную плоскость все элементарные функции. Например, оказывается, что при вещественных a и b имеем

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b).$$

Аналитические функции на комплексной плоскости играют очень большую роль в математике. Связанные с ними проблемы составляют содержание обширной ее области — теории функций комплексного переменного, знакомство с которой входит в отдельный курс.

Задача. *Пусть $f(x)$ — функция, бесконечно дифференцируемая на интервале (a,b). Обозначим через k_n число решений уравнения $f^{(n)}(x) = 0$. Пусть $k_n < C$ при некотором C и всех $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что функция $f(x)$ является аналитической на интервале (a,b).*

Лекция 13

§ 9. БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Определение 1. *Рассмотрим числовую последовательность положительных чисел $\{b_n\}$. Формальное бесконечное произведение всех ее членов*

$$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdots b_n \cdots .$$

называется **бесконечным числовым произведением,** *или* **бесконечным произведением,** *или просто* **произведением.**

Бесконечное произведение обозначается так:

$$b_1 \cdot b_2 \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} b_n = \prod b_n.$$

Определение 2. *Конечное произведение Π_n вида $\Pi_n = b_1 \cdots b_n$ называется n-***м частичным произведением.**

Определение 3. *Если последовательность Π_n сходится к числу $\Pi \neq 0$ (т.е. $\Pi > 0$), то бесконечное произведение называется* **сходящимся** *(к числу Π). Если $\Pi = 0$, то это бесконечное произведение называется* **расходящимся к нулю,** *а если $\Pi \to +\infty$, то оно называется* **расходящимся к бесконечности.** *Если предела нет вообще, то оно называется просто* **расходящимся.**

Утверждение 1 (необходимый признак сходимости бесконечного произведения). *Если Πb_n сходится, то $b_n \to 1$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Если $\Pi_n \to \Pi \neq 0$, то

$$b_n = \frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} \to \frac{\Pi}{\Pi} = 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Сходимость бесконечного произведения Πb_n влечет за собой сходимость ряда $\ln b_n$, и наоборот, причем*

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} b_n = \sum \ln b_n.$$

Доказательство. Имеем $\ln \Pi_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln b_k$. Функция $y = \ln x$ устанавливает непрерывное взаимно однозначное соответствие между лучом $(0, +\infty)$ и всей вещественной осью $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Поэтому в силу положительности b_n для всех $n \in \mathbb{N}$ возможен переход к пределу в одной части равенства при сходимости другой его части, и при этом $\ln \Pi = \sum_{k=1}^{\infty} \ln b_k$. Сходимость к нулю левой части равенства эквивалентна сходимости к $-\infty$ правой его части. Утверждение доказано.

Замечание. Очевидно, что отбрасывание или добавление любого конечного числа ненулевых сомножителей не влияет на сходимость бесконечного произведения. Поэтому можно считать, что конечное число членов этого произведения могут быть и отрицательными.

Определение 4. *Бесконечное произведение* $\prod\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *называется* **абсолютно сходящимся,** *если абсолютно сходится ряд* $\sum \ln b_k$. *Это означает сходимость ряда* $\sum |\ln b_n|$. *Сходящееся бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *не являющееся абсолютно сходящимся, называется* **условно сходящимся.**

Из предыдущего утверждения и теоремы о сходимости абсолютно сходящегося ряда непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Абсолютно сходящееся произведение всегда сходится в обычном смысле.*

Поскольку мы считаем, что $b_n > 0$ при всех n, числа b_n обычно представляют в виде $b_n = 1 + a_n$, где $a_n > -1$. Тогда имеем

$$\prod_{n=1}^{\infty} b_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n).$$

Теорема 2 (критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения). *Бесконечное произведение* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum |a_n|$.

Доказательство. Так как $1 + a_n \to 1$ при $n \to \infty$, то $a_n \to 0$. Однако

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1 \quad \text{при} \quad x \to 0,$$

поэтому при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1, \quad \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} \to 1.$$

Следовательно, при достаточно большом $n > n_0$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{2} < \frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|} < \frac{3}{2}.$$

Если, например, сходится ряд $\sum |\ln(1+a_n)|$, то он будет мажорантой для ряда $\sum |a_n|/2$, а если сходится ряд $\sum |a_n|$, то он является мажорантой для ряда $\sum 2|\ln(1+a_n)|/3$. Но это означает, что ряды $\sum |a_n|$ и $\sum |\ln(1+a_n)|$ сходятся и расходятся одновременно.

Теорема 2 доказана.

Следствием этой теоремы является следующее утверждение.

Утверждение 3. *Если при достаточно большом $n > n_0$ все числа a_n имеют один и тот же знак, то сходимость произведения $\prod(1+a_n)$ эквивалентна сходимости ряда $\sum a_n$.*

Доказательство. Поскольку и сходимость ряда, и сходимость произведения влечет за собой соотношения

$$a_n \to 0, \quad \ln(1+a_n) \to 0, \quad \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

отсюда следует, что при достаточно большом $n > n_0$ величина $\ln(1+a_n)$ сохраняет знак вместе с a_n. Это означает, что сходимость рядов $\sum a_n$, $\sum \ln(1+a_n)$ и произведения $\Pi(1+a_n)$ эквивалентна их абсолютной сходимости. Теперь, применяя теорему 2, получаем требуемое утверждение.

Рассмотрим некоторые примеры бесконечных произведений.

Пример 1. Гамма-функция Эйлера $\Gamma(s)$. По определению имеем

$$\Gamma(s) = \frac{1}{se^{\gamma s}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n},$$

где $s \neq 0, -1, -2, \ldots$ — любое вещественное число (или даже комплексное число, если определение 3 распространить на комплексные числа), γ — постоянная Эйлера,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n) = 0,577\ldots .$$

Бесконечное произведение, через которое определяется гамма-функция Эйлера, сходится абсолютно при любом $s \neq 0, -1, -2, \ldots$, так как при достаточно большом $n > n_0$ в силу формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа справедлива оценка

$$|\ln b_n| = \left|\ln \left(\left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n}\right)\right| = \left|\frac{s}{n} - \ln\left(1 + \frac{s}{n}\right)\right| < \frac{s^2}{n^2},$$

и сходящийся ряд $\sum s^2/n^2$ является мажорантой для ряда $\sum |\ln b_n|$.

Утверждение 4 (формула Эйлера). *Имеет место следующая формула:*

$$\Gamma(s) = s^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^s (1 + s/n)^{-1}.$$

Доказательство. Уже доказано, что бесконечное произведение в определении гамма-функции сходится абсолютно в любой точке своей области определения. Поэтому из определения гамма-функции имеем

$$\Gamma(s) = s^{-1} \lim_{m\to\infty} e^{-s(1+1/2+\dots+1/m-\ln m)} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n} =$$

$$= s^{-1} \lim_{m\to\infty} m^s \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} = s^{-1} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} =$$

$$= s^{-1} \lim_{m\to\infty} \left(\prod_{n=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1}\right) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-s} =$$

$$= s^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 5 (функциональное уравнение для гамма-функции Эйлера $\Gamma(s)$). *Справедлива следующая формула:*

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(1) = 1.$$

Доказательство. По формуле Эйлера имеем, что $\Gamma(1) = 1$, а также

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = \frac{s}{s+1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^{s+1}}{(1+1/n)^s} \frac{1+s/n}{1+(s+1)/n} =$$

$$= \frac{s}{s+1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} \frac{n+s}{n+s+1} =$$

$$= \frac{s}{s+1} \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} \frac{2\cdot 3\dots(m+1)}{1\cdot 2\dots m} \frac{(1+s)\dots(m+s)}{(2+s)\dots(m+1+s)} =$$

$$= \frac{s}{s+1} \lim_{m\to\infty} (s+1)\frac{m+1}{m+1+s} = s.$$

Отсюда следует, что $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Утверждение доказано.

Из утверждения 5 непосредственно получаем такое следствие.

С л е д с т в и е. *Для натуральных чисел n имеем* $\Gamma(n+1) = n!$.

Далее будет доказано, что при $s > 0$ имеет место формула интегрального представления для $\Gamma(s)$ вида

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Пример 2. При всех вещественных x следующее бесконечное произведение сходится:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{\sin x}{x}.$$

Это равенство мы докажем позднее, а сходимость вытекает из утверждения 3.

Пример 3. Бесконечное произведение для дзета-функции Римана. При $s > 1$ функция $\zeta(s)$ определена сходящимся рядом $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Пусть $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \ldots$ — последовательно занумерованные простые числа натурального ряда.

Утверждение 6 (формула Эйлера бесконечного произведения дзета - функции Римана $\zeta(s)$). *При $s > 1$ имеет место следующая формула:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)^{-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\Pi_k = \prod_{m=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_m^s}\right)^{-1} = \prod_{m=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_m^s} + \frac{1}{p_m^{2s}} + \ldots\right).$$

Раскрывая скобки, согласно неравенству $p_k > k$, справедливому при всех $k \in \mathbb{N}$, получим

$$\Pi_k > \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$\Pi_k = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m^s},$$

где a_m — некоторая подпоследовательность натуральных чисел, которая не содержит повторений в силу однозначности разложения натурального числа на простые сомножители. Отсюда имеем неравенства

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} > \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{a_m^s} > \Pi_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}.$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$, получаем требуемый результат. Утверждение доказано.

При $s = 1$ справедлива оценка

$$\Pi_k = \prod_{m=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_m} + \frac{1}{p_m^2} + \ldots\right) > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k},$$

поэтому произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{p_k})^{-1}$ расходится к $+\infty$, а вместе с ним расходятся ряды $-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln(1 - \frac{1}{p_k})$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$.

§ 10. БЕСКОНЕЧНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Понятие определителя бесконечного порядка возникает в связи с изучением систем из бесконечного числа линейных уравнений от бесконечного количества неизвестных. Потребность в рассмотрении таких систем уравнений и таких определителей впервые возникла при исследовании задачи об определении движения перигелия лунной орбиты, которое провел Г. Хилл. Позже, в 1886 г. А. Пуанкаре дал строгое математическое обоснование метода Хилла. Еще одно приложение метода бесконечных определителей дано в работах Е. Фредгольма в 1903 г. при исследовании линейных интегральных уравнений.

Пусть b_{mn} — двойная последовательность вещественных чисел. Обозначим через $D_m = \|B_m\|$ определитель квадратной матрицы $B_m = (b_{kl})$, где индексы k и l пробегают значения от 1 до m. В этой матрице число b_{kl} находится на пересечении строки с номером k и столбца с номером l. Главную диагональ этой матрицы образуют числа b_{kk}, где $k = 1, \ldots, m$. Обозначим через B бесконечную матрицу $\|b_{mn}\|$, где $m, n = 1, 2, 3, \ldots$.

Определение 1. *Если последовательность определителей D_m сходится к числу D при $m \to \infty$, то будем говорить, что бесконечный определитель $D = \|B\|$ матрицы B* **сходится** *к числу D или что он равен D.*

Если последовательность D_m расходится, то этот определитель будем называть **расходящимся.**

Определители D_m будем называть **частичными определителями** бесконечного определителя D. Введем новые обозначения. Для диагональных элементов матрицы B положим $b_{nn} = 1 + a_{nn}$. Если же $m \neq n$, то будем считать, что $a_{mn} = b_{mn}$.

Определение 2. Мажорантой Пуанкаре *бесконечного определителя D назовем бесконечное произведение P вида*

$$P = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \right)$$

при условии, что все ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{mn}|$ сходятся и само произведение P тоже сходится.

Определение 3. *Конечное произведение P_m вида*

$$P_m = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \sum_{l=1}^{m} |a_{kl}|\right)$$

называется **мажорантой Пуанкаре** *определителя D_m.*

Теорема 1 (лемма Пуанкаре). *При всех $m \in \mathbb{N}$ справедливы оценки:*

1) $|D_m| \le P_m$;

2)$|D_{m+1} - D_m| \le P_{m+1} - P_m$.

Доказательство. 1. Определитель D_m состоит из $m!$ слагаемых вида

$$(-1)^{c(\sigma)} b_{1l_1} \cdot \ldots \cdot b_{ml_m}.$$

Здесь $c(\sigma)$ — функция четности подстановки $\sigma = (l_1, \ldots, l_m)$, $c(\sigma) = 0$ для четной и $c(\sigma) = 1$ для нечетной подстановки σ. Следовательно,

$$|D_m| = \sum_{\sigma} |b_{1l_1} \cdots b_{ml_m}| \le \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{m} |b_{kl}|\right) \le$$

$$\le \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \sum_{l=1}^{m} |a_{kl}|\right) = P_m.$$

Утверждение 1 доказано.

2. Разложим определитель D_{m+1} по элементам последней строки. Получим

$$D_{m+1} = a_{m+1,1}A_{m+1,1} + \cdots + a_{m+1,m}A_{m+1,m} + (1 + a_{m+1,m+1})D_m.$$

Здесь $A_{m+1,k}$ — алгебраические дополнения в матрице B_{m+1} к элементам $a_{m+1,k}$ ее последней строки

$$A_{m+1,l} = (-1)^{m+1+l} \begin{vmatrix} 1 + a_{1,1} & \ldots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \ldots & a_{1,m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,l-1} & a_{m,l+1} & \ldots & a_{m,m+1} \end{vmatrix}.$$

Как и выше (при доказательстве п. 1), имеем

$$|A_{m+1,l}| \le \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{\substack{n=1 \\ n \ne l}}^{m+1} |b_{k,n}|\right) \le \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \sum_{n=1}^{m+1} |a_{k,n}|\right) = Q_m.$$

Заметим, что $Q_m \ge P_m > 0$ и $P_{m+1} = Q_m(1 + \sum\limits_{l=1}^{m+1} |a_{m,l}|)$. Поэтому

$$|D_{m+1} - D_m| \le$$

$$\le |a_{m+1,1}| \cdot |A_{m+1,1}| + \cdots + |a_{m+1,m}| \cdot |A_{m+1,m}| + |a_{m+1,m+1}| \cdot |D_m| \le$$

$$\le Q_m(|a_{m+1,1}| + \cdots + |a_{m+1,m}| + |a_{m+1,m+1}|) = P_{m+1} - Q_m = P_{m+1} - P_m.$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (теорема Пуанкаре). *Бесконечный определитель сходится, если абсолютно сходятся бесконечное произведение его диагональных элементов и двойной ряд, составленный из его недиагональных элементов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $b_{m,m} = 1 + a_{m,m}$, то абсолютная сходимость $\prod\limits_{m=1}^{\infty} b_{m,m}$ произведения диагональных элементов эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{m,m}|$. Кроме этого, по условию сходится и двойной ряд $\sum\limits_{m \neq n} |a_{m,n}|$.

Но тогда сходится и бесконечное произведение P, где

$$P = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}| \right),$$

так как его сходимость обеспечена сходимостью повторного ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}|$. Представим значение определителя D матрицы B в виде суммы ряда:

$$D = D_1 + (D_2 - D_1) + (D_3 - D_2) + \dots = d_1 + d_2 + d_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} d_n.$$

Согласно теореме 1 при всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|d_{n+1}| = |D_{n+1} - D_n| \leq P_{n+1} - P_n = p_{n+1},$$

где P_n — мажоранты Пуанкаре определителя D_n и $P_n \leq P$. Отсюда следует, что сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{n+1} = P - P_1$ является мажорантой для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_{n+1}$, и поэтому сходится последний ряд, а также и последовательность его частичных сумм D_n. Но это и означает сходимость бесконечного определителя D. Теорема доказана.

Замечание. Аналогичная теорема имеет место и для бесконечного определителя D матрицы B вида $B = (b_{m,n})$, где $-\infty < m, n < +\infty$. Здесь частичные определители D_m и матрицы B_m имеют вид

$$D_m = \|B_m\|, \quad B_m = (b_{k,l}), \quad -m < k, l < m.$$

Задача. *Доказать теорему Коха о том, что необходимым и достаточным условием абсолютной сходимости определителя D вида*

$$D = \lim_{m\to\infty} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_m \\ 0 & 0 & \dots & \beta_m & 1 \end{vmatrix}$$

является абсолютная сходимость ряда $\sum \alpha_n\beta_n$. При этом абсолютная сходимость определителя D означает сходимость ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} |D_{m+1}-D_m|$.

В заключение дадим еще одно определение, обобщающее понятие мажоранты Пуанкаре.

Определение 4. *Пусть $A_n(x)$ — функциональная последовательность, а B_n – числовая последовательность, причем $B_n \to B$ при $n \to \infty$. Пусть также при всех $n \in \mathbb{N}$ для каждого $x \in D$ справедливо неравенство $|A_{n+1}(x) - A_n(x)| \le B_{n+1} - B_n$. Тогда числовая последовательность B_n называется* **мажорантой** *для последовательности функций $A_n(x)$ на множестве D.*

Очевидно, что последовательность $A_n(x)$, имеющая на множестве D мажоранту B_n, равномерно сходится на этом множестве.

§ 11. РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТЕОРЕМА АРЦЕЛА

Докажем теорему Арцела, важную главным образом для приложений за пределами основного курса математического анализа.

Определение 1. *Множество функций M называется* **равностепенно непрерывным** *на отрезке $I = [a, b]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой функции $f(x) \in M$ и любых x_1 и x_2 с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ справедливо неравенство*

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (теорема Арцела). *Если бесконечное множество функций M равномерно ограничено на отрезке I и равностепенно непрерывно на нем, то из всякой последовательности функций $f_n(x) \in M$ можно выбрать подпоследовательность $f_{n_k}(x)$, равномерно сходящуюся на I к некоторой непрерывной на I функции $f_0(x)$, не обязательно принадлежащей M.*

Доказательство. Будем для простоты считать, что $I = [0, 1]$. Идея доказательства состоит в замене с допустимой ошибкой произвольной точки x при использовании критерия Коши на близкую к ней двоично-рациональную точку с возможно меньшим знаменателем.

Занумеруем множество $\{x_n\}$ всех двоично-рациональных чисел $a/2^k$ этого отрезка в порядке возрастания показателя степени k при его различных значениях и в порядке возрастания числителя дроби a при равных значениях знаменателя дроби 2^k. Таким образом, имеем $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = 1/4$, $x_5 = 3/4, \ldots, x_{2^k+1} = (2^k - 1)/2^k$, $x_{2^k+2} = 1/2^{k+1}, \ldots$. Рассмотрим теперь множество чисел $B_1 = \{f_k(x_1)\}$, где $f_n(x)$ — исходная последовательность функций, $f_n(x) \in M$. Множество B_1 ограничено в силу условий, наложенных на M, и по теореме Больцано – Вейерштрасса из последовательности B_1 можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $f_{n_m}(x_1)$.

Рассмотрим последовательность номеров $n_1, \ldots, n_m, \ldots$ получившейся последовательности и образуем первую вспомогательную подпоследовательность функций $G_1 = \{g_{1,m}(x)\}$, полагая $g_{1,m}(x) = f_{n_m}(x)$. Тогда будем иметь, что последовательность $g_{1,m}(x_1) = f_{n_m}(x_1)$ сходится к некоторому значению y_1.

Далее образуем по тому же правилу подпоследовательность функций $G_2 = \{g_{2,1}(x), \ldots, g_{2,m}(x), \ldots\}$, используя в предыдущих рассуждениях последовательность $g_{1,m}(x)$ вместо $f_n(x)$ и точку x_2 вместо x_1. В результате получим, что $g_{2,m}(x)$ — подпоследовательность для $\{g_{1,m}(x)\}$ и $g_{2,m}(x_2) \to y_2$ при $m \to \infty$. Многократно повторяя этот процесс, получим подпоследовательности $G_3 = \{g_{3,m}(x)\}$, $G_4 = \{g_{4,m}(x)\}$ и т.д., причем тогда $g_{k,m}(x_k) \to y_k$ при $m \to \infty$ и последовательность $g_{k,m}(x)$ будет подпоследовательностью относительно $g_{k-1,m}(x)$ при всех $k \geq 2$.

Рассмотрим теперь "диагональную" последовательность функций $\{h_n(x)\}$, где $h_n(x) = g_{n,n}(x)$. По построению, начиная с номера $n = k$, все функции $h_n(x)$ при $n \geq k$ образуют подпоследовательность последовательности G_k, поскольку $h_n(x) = g_{n,n}(x) \in G_n \subset G_{n-1} \subset \cdots \subset G_k$. Отсюда следует, что при любом k и $n \geq k$ числовая последовательность $h_n(x_k)$ является подпоследовательностью для $g_n(x_k)$, и поэтому $h_n(x_k) \to y_k$ при $n \to \infty$.

Покажем, наконец, что последовательность функций $h_n(x)$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости. Рассмотрим произвольное число $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что при всех m и $n > n_0$ одновременно для всех $x \in I$ выполнено неравенство $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Для этого, используя равностепенную непрерывность множества функций M, найдем число $\delta = \delta(\varepsilon/3)$ такое, что при всех x_1 и $x_2 \in I$ с условием $|x_2 - x_1| < \delta$ и для любой функции $f(x) \in M$ имеем $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon/3$. Выберем число k из условия $\delta/2 \leq 2^{-k} < \delta$ и перенумеруем все двоично-рациональные точки $x_1, \ldots, x_{2^k+1}$ со знаменателями, не превосходящими 2^k, в порядке возрастания их величин. Если $z_1, \ldots, z_{2^k+1}$ — их новая нумерация, то

$z_{s+1} - z_s = 2^{-k} < \delta$ при всех $s = 1, \ldots, 2^k + 1$. По построению любая из числовых последовательностей $\{h(z_s)\}$ сходится, и поэтому для нее найдется номер n_s такой, что при всех n и $m > n_s$ имеем

$$|h_m(z_s) - h_n(z_s)| < \varepsilon/3.$$

Теперь в качестве $n_0(\varepsilon)$ выберем номер $n_0(\varepsilon) = \max\limits_{s \le 2^k = 1} n_s$ и покажем, что он удовлетворяет требуемым условиям. Действительно, пусть $x \in \in [0,1]$ и z_t — ближайшее к нему число из множества $z_1, \ldots, z_{2^k+1}$. Ясно, что $|x - z_t| < 2^{-k} < \delta$, откуда вытекает, что $|h_k(x) - h_k(z_t)| < \varepsilon/3$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Окончательно при всех m и $n > n_0(\varepsilon) \ge n_t$ имеем

$$|h_m(x) - h_n(x)| \le |h_m(x) - h_m(z_t)| + |h_m(z_t) - h_n(z_t)| + |h_n(z_t) - h_n(x)| <$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Это значит, что по критерию Коши последовательность $h_n(x)$ сходится равномерно на I. Теорема 1 доказана.

Замечание. Утверждение теоремы 1 можно рассматривать как достаточное условие компактности некоторого множества в пространстве $C[0,1]$ всех функций, непрерывных на отрезке $I = [0,1]$. Можно показать, что это условие является и необходимым для замкнутого множества функций, но здесь мы этого вопроса касаться не будем.

Глава XVII
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Лекция 15

§ 1. СОБСТВЕННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Изучение интегралов, зависящих от параметра, или параметрических интегралов, составляет вторую большую тему третьего семестра, охватывающую элементарную теорию собственных и несобственных интегралов. Сначала рассмотрим собственные интегралы от функций, зависящих от одного числового параметра.

Пусть функция $f(x,y)$ задана на прямоугольнике $\Pi = I_1 \times I_2$, где I_1 и I_2 — отрезки вида $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$. Другими словами, Π есть множество точек $\{(x,y)\}$ координатной плоскости xOy, удовлетворяющее условиям $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

Будем считать, что при любом фиксированном $y \in I_2$ функция $g(x) = g_y(x) = f(x,y)$ интегрируема по Риману на $[a,b]$.

Определение 1. *Интеграл* $\int_a^b f(x,y)dx = \varphi(y)$ *называется* **интегралом, зависящим от параметра** y. *Отрезок* $I_2 = [c,d]$ *в этом случае будем называть* **множеством значений параметра** y.

Разумеется, вместо I_2 в качестве множества значений параметра y может выступать любое подмножество M вещественной оси Oy, и в этом случае будем сохранять введенную выше терминологию. Помимо отрезка I_2, чаще всего в качестве такого множества мы будем рассматривать интервалы, открытые и замкнутые лучи, проколотые окрестности точек или саму вещественную прямую $\mathbb{R}$.

Теорема 1. *Если $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $\Pi = I_1 \times I_2$, где I_1 и I_2 — отрезки, $I_1 = [a,b], I_2 = [c,d]$, то функция*

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

непрерывна на отрезке I_2.

Доказательство. Поскольку прямоугольник Π является компактом, функция $f(x,y)$, непрерывная на нем, является равномерно непрерывной на Π. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$

найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любых точках (x_1, y_1) и $(x_2, y_2) \in \Pi$ справедливо неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем произвольно некоторую точку y_0 на I_2. Тогда для любого y из ее проколотой δ-окрестности на оси Oy и любого $x \in I_1 = [a, b]$ для разности $r(x) = r(x, y, y_0) = f(x, y) - f(x, y_0)$ имеем оценку

$$|r(x)| = |f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon,$$

поскольку расстояние $\rho(A, B)$ между точками $A = (x, y)$ и $B = (x, y_0)$, равное $|y - y_0|$, не превышает δ. Интегрируя $r(x)$ по отрезку I, получим

$$|\varphi(y) - \varphi(y_0)| = \left|\int\limits_a^b r(x)\, dx\right| \le \int\limits_a^b |r(x)|\, dx < \varepsilon(b - a).$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что $\varphi(y) \to \varphi(y_0)$ при $y \to y_0$, т.е. $\varphi(y)$ непрерывна в точке $y = y_0$, и так как точка y_0 выбрана произвольно, то $\varphi(y)$ непрерывна на I_2. Теорема 1 доказана.

Доказанная теорема допускает следующее простое обобщение.

Т е о р е м а 2. *Пусть функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны на $I_2 = [c, d]$ и удовлетворяют неравенствам $a \le \varphi_1(y) \le \varphi_2(y) \le b$. Тогда в условиях теоремы 1 функция $h(y)$, где*

$$h(y) = \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dx,$$

тоже непрерывна на I_2.

Прежде чем доказывать теорему 2, заметим, что функцию $h(y)$ тоже можно рассматривать как параметрический интеграл, поскольку

$$h(y) = \int\limits_a^b f_1(x, y) dx,$$

где $f_1(x, y) = f(x, y)$ при $\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$ и $f_1(x, y) = 0$ в противном случае.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Снова рассмотрим произвольную точку y_0 отрезка I_2. Для приращения $\Delta h(y_0) = h(y) - h(y_0)$ функции $h(y)$ в этой точке имеем соотношения

$$\Delta h(y_0) = \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dx - \int\limits_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x, y_0)\, dx =$$

$$= \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} (f(x,y) - f(x,y_0))\,dx + \left(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y_0)\,dx - \int\limits_{\varphi_1(y_0)}^{\varphi_2(y_0)} f(x,y_0)\,dx \right) =$$

$$= r_1(y) + r_2(y).$$

Оценим величины $r_1(y)$ и $r_2(y)$ в предположении, что $|y - y_0| < \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\varepsilon > 0$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1. Имеем

$$|r_1(y)| \le \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} |f(x,y) - f(x,y_0)|\,dx \le \varepsilon|\varphi_2(y) - \varphi_1(y)| \le \varepsilon(b-a).$$

Далее если $M = \sup\limits_{\Pi} |f(x,y)|$, то для величины $r_2(y)$ получим оценки

$$|r_2(y)| = \left| \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y_0)} f(x,y_0)\,dx + \int\limits_{\varphi_2(y_0)}^{\varphi_2(y)} f(x,y_0)\,dx \right| \le$$

$$\le M \left| \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y_0)} dx \right| + M \left| \int\limits_{\varphi_2(y_0)}^{\varphi_2(y)} dx \right| = M|\Delta\varphi_1(y_0)| + M|\Delta\varphi_2(y_0)|.$$

Поскольку функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны на I_2, при достаточно малом $|\Delta y_0| = |y - y_0| < \delta_1(\varepsilon)$ выполнены неравенства $|\Delta\varphi_1(y_0)| < \varepsilon$ и $|\Delta\varphi_2(y_0)| < \varepsilon$. Положим $\delta_0(\varepsilon) = \min(\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon))$. Тогда при всех y с условием $|y - y_0| < \delta_0(\varepsilon)$ будем иметь

$$|\Delta h(y_0)| \le |r_1(y)| + |r_2(y)| < \varepsilon(b-a) + 2\varepsilon M = \varepsilon(b - a + 2M).$$

Но так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда следует, что функция $h(y)$ непрерывна в точке $y = y_0 \in I_2$, а также и на всем отрезке I_2.

Теорема 2 доказана.

Следует заметить, что приведенное выше доказательство теоремы 1 фактически состоит из вывода следующих двух утверждений.

Утверждение 1. *Если функция $f(x,y)$ непрерывна на $\Pi = I_1 \times I_2$, где I_1 и I_2 — отрезки вида $I_1 = [a,b]$ и $I_2 = [c,d]$ и если функция $g(x) = g_y(x) = f(x,y)$, то при любом $y_0 \in I_2$ имеем*

$$g_y(x) \underset{I_1}{\rightrightarrows} g_0(x) = f(x,y_0) \quad \textit{при} \quad y \to y_0.$$

Утверждение 2. *Пусть для некоторого* $y_0 \in [c,d]$ *при* $y \to y_0$ *имеет место равномерная сходимость* $f(x,y) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} f(x,y_0)$. *Кроме того, в некоторой окрестности точки* y_0 *существует параметрический интеграл вида* $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$. *Тогда при* $y \to y_0$ *существует предел*

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)\,dx.$$

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Т е о р е м а 1 (правило Лейбница). *Пусть функция* $f(x,y)$ *непрерывна на* $\Pi = I_1 \times I_2$, *где* I_1 *и* I_2 *— отрезки,* $I_1 = [a,b]$, $I_2 = [c,d]$. *Пусть частная производная* $f'_y(x,y)$ *существует и непрерывна на* Π. *Тогда функция* $g(y)$, *где*

$$g(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx,$$

является дифференцируемой на I_2, *причем*

$$g'(y) = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольно точку $y \in I_2$. При любом $h \neq 0$ с условием $y+h \in I_2$ можем записать равенство

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \int\limits_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx.$$

Подынтегральная функция в правой части этого равенства непрерывна по x, и поэтому она интегрируема по Риману. Применяя к ней формулу конечных приращений Лагранжа, получим

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \int\limits_a^b f'_y(x,y+\theta h)dx, \quad 0<\theta<1.$$

Ввиду непрерывности $f'_y(x,y)$ на П и на основании утверждения 1 § 1 имеем

$$f'_y(x, y+\theta h) \underset{I_1}{\rightrightarrows} f'_y(x,y) \qquad \text{при} \quad h \to 0.$$

Наконец, используя утверждение 2 § 1, приходим к равенству

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(y+h)-g(y)}{h} = g'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx.$$

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2 (обобщенное правило Лейбница). *В условиях теоремы 1 будем считать, что $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ дифференцируемы на I_2 и $a \le \alpha(y), \beta(y) \le b$. Тогда имеет место формула*

$$g'(y) = \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right)'_y =$$

$$= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx + f(\beta(y),y)\beta'(y) - f(\alpha(y),y)\alpha'(y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, как и выше, $h \ne 0$ и точки $y, y+h \in I_2$. Рассмотрим выражение $d(h)$, где

$$d(h) = \frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{\alpha(y+h)}^{\beta(y+h)} f(x,y+h)dx - \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \right).$$

Используя стандартные обозначения $\Delta\alpha = \alpha(y+h) - \alpha(y)$, $\Delta\beta = \beta(y+h) - \beta(y)$, $\Delta f = f(x,y+h) - f(x,y)$, его можно записать в виде

$$d(h) = h^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} (f(x,y+h) - f(x,y))dx +$$

$$+ h^{-1} \int_{\alpha+\Delta\alpha}^{\alpha} f(x,y+h)dx + h^{-1} \int_{\beta}^{\beta+\Delta\beta} f(x,y+h)dx =$$

$$= A_1 + A_2 + A_3.$$

Дословно повторяя рассуждения теоремы 1, для интеграла A_1 при $h \to 0$ будем иметь

$$A_1 \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_y'(x,y)dx.$$

Далее, применяя теорему о среднем для интегралов A_2 и A_3 и используя непрерывность функции $f(x,y)$, получим

$$A_2 = -\frac{\Delta\alpha}{h} f(\alpha + \theta_1\Delta\alpha, y+h), \quad A_3 = \frac{\Delta\beta}{h} f(\beta + \theta_2\Delta\beta, y+h).$$

Отсюда при $h \to 0$ имеем

$$A_2 \to -\alpha'(y) f(\alpha(y), y), \quad A_3 \to \beta'(y) f(\beta(y), y).$$

Теорема 2 доказана.

Пояснение к доказательству теоремы 1. Проведем более подробно обоснование возможности предельного перехода

$$\lim_{h\to 0} \int\limits_a^b f_y'(x, y+\theta h)\, dx = \int\limits_a^b f_y'(x,y)\, dx,$$

опираясь на условие равномерной сходимости

$$f_y'(x, y+\theta h) \underset{I_1}{\rightrightarrows} f_y'(x,y) \quad \text{при} \quad h \to 0, \quad \text{где} \quad I_1 = [a,b].$$

Как известно, интеграл по отрезку I_1 от функции $F(x,h) = f_y'(x, y+\theta h)$ есть предел интегральных сумм

$$\sigma(T) = \sigma_F(T) = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, h)\Delta x_k.$$

Здесь предел берется по базе $\Delta_T \to 0$, определенной на основном множестве A, образованном всеми размеченными разбиениями $\{T\}$ отрезка $I_1 = [a,b]$. При этом точки $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ образуют разбиение, а точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ лежат соответственно на отрезках $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ и образуют его разметку, величины же $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ равны длинам соответствующих отрезков. Функция $\sigma_F(T)$ определена на множестве A, а величина Δ_T равна $\max\limits_k \Delta x_k$, и, наконец, окончания b_δ, $\delta > 0$, базы $\Delta_T \to 0$ состоят из всех размеченных разбиений T с условием $\Delta_T < \delta$.

Важно подчеркнуть, что если при некотором $\varepsilon > 0$ и всех $x \in I_1$ имеем

$$|F(x,h) - F(x,0)| = |f_y'(x, y+\theta h) - f_y'(x,y)| < \varepsilon,$$

то $|\sigma_{F(x,h)}(T) - \sigma_{F(x,0)}(T)| < \varepsilon$.

Отсюда следует, что если при $h \to 0$ выполнено условие

$$f'_y(x, y + \theta h) \underset{I_1}{\rightrightarrows} f'_y(x, y),$$

то и при $h \to 0$ также имеем

$$\sigma_{F(x,y)}(T) \underset{A}{\rightrightarrows} \sigma_{F(x,0)}(T).$$

Но тогда оба повторных предела существуют и равны между собой, т.е. существует предел

$$l = \lim_{h\to 0} \lim_{\Delta_T \to 0} \sigma_{F(x,h)}(T) = \lim_{\Delta_T\to 0} \lim_{h\to 0} \sigma_{F(x,h)}(T).$$

При этом имеем

$$\lim_{\Delta_T\to 0} \sigma_{F(x,h)}(T) = \int_a^b f'_y(x, y + \theta h)\, dx,$$

$$\lim_{h\to 0} f'_y(x, y + \theta h) = f'_y(x, y),$$

откуда

$$\lim_{h\to 0} \int_a^b f'_y(x, y + \theta h)\, dx = \int_a^b f'_y(x, y)\, dx,$$

что и утверждалось выше.

С другой стороны, аналогичное утверждение прямо доказано нами в теореме 1 § 1 на основе использования равномерной непрерывности подынтегральной функции. Точно так же мы могли бы рассуждать и в данном случае.

Теорема 3. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике* $\Pi = I_1 \times I_2$, *где* $I_1 = [a, b]$, $I_2 = [c, d]$, *то оба повторных интеграла*

$$H = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{и} \quad G = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

существуют и равны между собой.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(t, y)$, где

$$g(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx, \quad t \in [a, b], \quad y \in [c, d].$$

Покажем, что эта функция непрерывна на Π по совокупности переменных (t, y). Действительно,

$$|\Delta g| = |g(t+\Delta t, y+\Delta y) - g(t, y)| = \left| \int\limits_a^{t+\Delta t} f(x, y+\Delta y)dx - \int\limits_a^{t} f(x, y)dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int\limits_a^{t} (f(x, y+\Delta y) - f(x, y))dx \right| + \left| \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x, y+\Delta y)dx \right| \leq$$

$$\leq (b-a) \max_{x\in I_1} |\Delta_y f(x, y)| + c|\Delta t|,$$

где $c = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|$.

Поскольку функция $f(x, y)$ непрерывна, $\max\limits_{x\in I_1} \Delta_y f(x, y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Следовательно, $\Delta g \to 0$ при $(\Delta y, \Delta t) \to (0, 0)$, т.е. $g(x, t)$ непрерывна на Π.

Далее, $g'_t(t, y) = f(t, y)$, поэтому по теореме 1 для функции

$$G(t) = \int\limits_c^d g(t, y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^t f(x, y)dt$$

имеем

$$G(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_c^d g(t, y)dy = \int\limits_c^d g'_t(x, y)dy = \int\limits_c^d f(t, y)dy = h(t).$$

С другой стороны, функция $h(t) = \int\limits_c^d f(t, y)dy$ тоже непрерывна, поэтому по формуле Ньютона – Лейбница

$$h(t) = \frac{d}{dt} \int\limits_a^t h(x)dx = H'(t),$$

где $H(t) = \int\limits_a^t h(x)dx = \int\limits_a^t dx \int\limits_c^d f(x, y)dy$.

Следовательно, $h(t) = H'(t) = G'(t)$. Кроме того, очевидно, что $G(0) = H(0) = 0$, поэтому при всех $t \in I_2$ имеет место равенство $G(t) = H(t)$. В частности, при $t = b$ имеем $G = G(b) = H(b) = H$.

Теорема 3 доказана.

Лекция 16

§ 3. ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА

Дадим приложение обобщенного правила Лейбница (теорема 2 § 2) к выводу формулы Лагранжа с остаточным членом в интегральной форме. Этой формуле Лагранж посвятил две знаменитые работы, опубликованные в *Memoires de l'Academie de Berlin* (1768) и *Note* (1798, XI). Здесь мы приводим доказательство ее, предложенное Е.И.Золотаревым.

Теорема (формула Лагранжа). *Пусть функция $f(x)$ имеет n непрерывных производных для всех $x \in \mathbb{R}$. Пусть некоторая функция $x = x(u,t)$ будет решением уравнения*

$$u - x + tf(x) = 0.$$

Тогда для любой функции $F(y)$, имеющей n непрерывных производных, справедлива формула

$$F(x(u,t)) = F(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} \frac{d^{k-1}(F'(u)f^k(u))}{du^{k-1}} + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n \left(\int_u^{x(u)} F'(x)(u - x + tf(x))^n \, dx \right)}{du^n}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$S_k = S_k(u) = \int\limits_u^{x(u)} F'(x)(u - x + tf(x))^k dx.$$

Продифференцируем ее по параметру u. Из теоремы 2 получим

$$\frac{dS_k}{du} = kS_{k-1} - t^k F'(u) f^k(u),$$

т.е.

$$S_{k-1} = \frac{t^k}{k} F'(u) f^k(u) + \frac{1}{k} \frac{dS_k}{du}.$$

Продифференцируем последнее равенство $k-1$ раз. Имеем

$$\frac{d^{k-1} S_{k-1}}{du^{k-1}} = \frac{t^k}{k} \frac{d^{k-1}(F'(u)f^k(u))}{du^{k-1}} + \frac{1}{k} \frac{d^k S_k}{du^k}.$$

Перепишем это равенство при $k = 1, \ldots, n$. Получим

$$S_0 = tF'(u)f(u) + \frac{dS_1}{du},$$

$$\frac{dS_1}{du} = \frac{t^2}{2}\frac{d(F'(u)f^2(u))}{du} + \frac{1}{2}\frac{d^2S_2}{du^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}S_{n-1}}{du^{n-1}} = \frac{t^n}{n}\frac{d^{n-1}(F'(u)f^n(u))}{du^{n-1}} + \frac{1}{n}\frac{d^nS_n}{du^n}.$$

Подставим последнее выражение в предпоследнее и так далее до первого выражения. Будем иметь

$$S_0 = tF'(u)f(u) + \frac{t^2}{2!}\frac{d(F'(u)f^2(u))}{du} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\frac{d^{n-1}(F'(u)f^n(u))}{du^{n-1}} + \frac{1}{n!}\frac{d^nS_n}{du^n}.$$

Кроме того, для S_0 справедливо равенство

$$S_0 = \int\limits_u^{x(u)} F'(x)dx = F(x(u)) - F(u).$$

Подставим эту формулу в предыдущее выражение. Получим сформулированное в теореме утверждение

$$F(x(u)) = F(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!}\frac{d^{k-1}(F'(u)f^k(u))}{du^{n-1}} + R_n,$$

где

$$R_n = \frac{1}{n!}\frac{d^nS_n}{du^n} = \frac{1}{n!}\frac{d^n\left(\int_u^{x(u)} F'(x)(u - x + tf(x))^n\, dx\right)}{du^n}.$$

Теорема доказана.

Приведем два частных случая формулы Лагранжа.

1. В случае когда выполнено тождественное равенство $f(x) \equiv 1$, формула Лагранжа превращается в формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

2. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда функция $x = x(u)$ является решением уравнения Кеплера

$$x - t\sin x = u,$$

где t — эксцентриситет эллиптической орбиты в задаче двух тел.

Для функции $R(x) = 1 - t\cos x$ Лаплас получил разложение в ряд Лагранжа

$$R(x(u)) = 1 - t\cos u + t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\frac{d^{k-1}(\sin u)^{k+1}}{du^{k-1}}$$

и, по существу, установил его сходимость при $t < 0,662\ldots$

В заключение отметим, что о богатстве содержания понятия ряда Лагранжа позволяют судить исследования этого ряда, которые провели Эйлер, Ламберт, Лаплас, Бюрман, Пфафф, Шлемильх, Гейне, Коши, Якоби, дю Буа Раймон, Руше, П. Л. Чебышёв, Е. И. Золотарев, Ю. В. Сохоцкий, П. А. Некрасов. Исследования по вопросам сходимости обобщений ряда Лагранжа актуальны и сегодня.

Лекция 17

§ 4. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ ПО ГЕЙНЕ

Понятие равномерной сходимости функции по базе множеств является обобщением классического понятия равномерной сходимости и опирается в своей основе на понятие предела функции по Коши. В математическом анализе используется и другой тип определения предела — предела по Гейне, как обычного, так и равномерного. Оба определения равномерной сходимости — по Коши и по Гейне — эквивалентны, и каждое из них оказывается более предпочтительным в своей сфере применения. Ввиду удобства использования обоих этих определений в различных ситуациях, мы докажем теорему об эквивалентности понятий равномерной сходимости по Коши и по Гейне в общем случае сходимости по базе множеств.

Нам потребуется несколько новых определений.

Определение 1. *Пусть B — некоторая база, определенная на основном множестве X, и для любых ее окончаний b_1 и b_2 имеем или $b_1 \subset b_2$, или $b_2 \subset b_1$. Назовем последовательность $\{x_n\}, x_n \in$ $\in X$,* **фундаментальной по базе** *B, если вне любого окончания b содержится лишь конечное число членов этой последовательности.*

Определение 2. *Фундаментальную последовательность $\{x_n\}$ мы будем называть* **монотонной по базе** *B, если для любого окончания b условие $x_n \in b$ влечет за собой включение $x_{n+1} \in b$.*

Далее будем считать, что рассматриваемая база множеств B обладает хотя бы одной фундаментальной монотонной последовательностью. Кроме того, полагаем, что пересечение всех окончаний базы B пусто.

Рассмотрим, наконец, функцию $f(x)$, определенную на некотором окончании b базы множеств B.

Определение 3. *Число l называется* **пределом по Гейне** *функции $f(x)$ по базе B, если для всякой монотонной по базе B последовательности $\{x_n\}$ имеем, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.*

В этом случае пишем $Hm - \lim\limits_{B} f(x) = l$.

Имеет место теорема об эквивалентности определений предела по Гейне и в обычном смысле, т.е. по Коши. Приведем ее формулировку (см. ч. I, лекция 30).

Т е о р е м а 1. *Для существования предела $Hm - \lim\limits_{B} f(x)$ необходимо и достаточно существования $\lim\limits_{B} f(x)$ по Коши. При этом имеем*

$$Hm\text{-}\lim_{B} f(x) = \lim_{B} f(x).$$

Для того чтобы подчеркнуть, что $\lim_B f(x)$ есть обобщение предела по Коши, будем также писать

$$\lim_B f(x) = C\text{-}\lim_B f(x).$$

Доказательство этой теоремы опирается на две следующие леммы, имеющие самостоятельный интерес.

Л е м м а 1. *Пусть $\{x_n\}$ — монотонная последовательность по базе B. Тогда найдутся ее подпоследовательность $y_k = x_{n_k}$ и соответствующая ей последовательность окончаний $\{b_k \in B\}$ такие, что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $b_{k+1} \subset b_k, y_k \in b_k$, но $y_k \notin b_{k+1}$.*

Определение 4. *Последовательность окончаний $\{b_k\}$ из леммы 1 будем называть* **основной последовательностью окончаний**.

Ее члены обозначим символом $\bar{b}_k$.

Л е м м а 2. *Для любого окончания $b \in B$ найдется член $\bar{b}_k$ последовательности основных окончаний, для которого имеем $\bar{b}_k \subset b$.*

Введенные выше понятия позволяют по-новому подойти и к общему определению равномерной сходимости. Для этого определим на декартовом произведении $X \times Y$ двух множеств X и Y функцию $f(x, y)$ и будем считать, что на множестве X задана база B.

Определение 5. *Функция $f(x, y)$* **сходится к функции** *$g(y)$* **по базе** *B* **равномерно на множестве** *Y, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется окончание $b(\varepsilon) \in B$ такое, что при всех $x \in b(\varepsilon)$ независимо от $y \in Y$ справедливо неравенство $|f(x, y) - g(y)| < \varepsilon$.*

В этом случае пишем $f(x, y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$.

Определение 6. *Будем говорить, что функция $f(x, y)$* **сходится по Гейне к функции** *$g(y)$* **равномерно на** *Y, если для любой последовательности $\{x_n\}$, монотонной по базе B, функциональная последовательность $f_n(y) = f(x_n, y)$ сходится к $g(y)$ равномерно на множестве Y.*

В этом случае пишем $f(x, y) \underset{Y}{\overset{(B)Hm}{\rightrightarrows}} g(y)$.

§ 5. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ

Теперь мы можем перейти к теореме об эквивалентности понятий равномерной сходимости по Коши и по Гейне.

Т е о р е м а 1. *1. Если функция $f(x,y)$ сходится по Гейне к $g(y)$ по базе B равномерно на множестве Y, то тогда имеем $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$.*

2. Если $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$, то $f(x,y) \underset{Y}{\overset{(B)_{Hm}}{\rightrightarrows}} g(y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала утверждение 1. Будем рассуждать от противного. Допустим, что $f(x,y) \underset{Y}{\overset{(B)_{Hm}}{\rightrightarrows}} g(y)$ для любой монотонной по базе B последовательности $\{x_n\}$, но равномерная сходимость $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$ не имеет места. Последнее условие означает, что найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого окончания $b \in B$ найдутся точки $x_b \in b$ и $y_b \in Y$ такие, что $|f(x_b, y_b) - g(y_b)| \geq \varepsilon$. Возьмем сначала в качестве такого b окончание $\bar{b}_1$ из основной последовательности окончаний и обозначим через x_1 и y_1 соответствующие ему точки $x_{\bar{b}_1}$ и $y_{\bar{b}_1}$. Точка x_1 не может принадлежать сразу всем окончаниям b, так как их пересечение пусто. Поэтому найдется $b \in B$ с условием $x_1 \notin b$. По лемме 2 найдется число k_1 такое, что $\bar{b}_{k_1} \subset b$, и для него также имеем $x_1 \notin \bar{b}_{k_1}$. Теперь в качестве x_2 и y_2 возьмем точки $x_2 = x_{\bar{b}_{k_1}} \in \bar{b}_{k_1}$ и $y_2 = y_{\bar{b}_{k_1}} \in Y$ и повторим указанную процедуру снова и снова. Таким образом мы получим последовательность точек x_n и y_n, для которых справедливо неравенство $|f(x_n, y_n) - g(y_n)| \geq \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что последовательность x_n является монотонной по базе B. Для этого установим сначала ее фундаментальность. Заметим, что последовательность натуральных чисел k_n монотонно возрастает. Но всякое окончание $b_0 \in B$ по лемме 2 § 2 содержит некоторое $\bar{b}_{k_0}$, а при $k_n > k_0$ имеем $x_{n+1} \in \bar{b}_{k_n} \subset \bar{b}_{k_0} \subset b_0$, значит, вне b_0 лежит не более k_0 точек из последовательности $\{x_n\}$, т.е. она фундаментальна.

Чтобы доказать монотонность x_n, заметим, что $x_n \notin \bar{b}_{k_n}$, а $x_{n+1} \in \bar{b}_{k_n}$. Но если для некоторого $b_0 \neq \bar{b}_{k_n}$ мы имеем условие $x_n \in b_0$, то из двух допустимых включений $b_0 \subset \bar{b}_{k_n}$ или $b_0 \supset \bar{b}_{k_n}$ может иметь место именно второе, так как иначе $x_0 \in b_0 \subset \bar{b}_{k_n}$, т.е. $x_n \in \bar{b}_{k_n}$, что неверно. Но тогда $x_{n+1} \in \bar{b}_{k_n} \subset b_0$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ монотонна.

Итак, мы построили монотонную последовательность точек $x_n \in X$ такую, что при соответствующих $y_n \in Y$ справедливо неравенство $|f(x_n, y_n) - g(y_n)| \geq \varepsilon$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Это значит, что равномерная сходимость функциональной последовательности $f_n(y) = f(x_n, y)$ к функции $g(y)$ при $n \to \infty$ не имеет места, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, утверждение 1 доказано.

Рассмотрим утверждение 2. Поскольку $f(x,y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y)$, при любом $\varepsilon > 0$ найдется окончание $b = b(\varepsilon) \in B$, такое, что при всех $y \in Y$ и при всех $x \in b(\varepsilon)$ имеем $|f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$. Пусть теперь $\{x_n\}$ — любая монотонная последовательность по базе B. Тогда вне $b(\varepsilon)$ лежит лишь конечное множество точек x_n и при достаточно большом $n > n_0(\varepsilon)$

имеем, что $x_n \in b(\varepsilon)$, откуда при тех же n имеем $|f(x_n, y) - g(y)| < \varepsilon$, а это значит, что $f(x_n, y) \underset{Y}{\rightrightarrows} g(y)$ при $n \to \infty$.

Утверждение 2 и теорема 1 полностью доказаны.

В заключение подчеркнем, что в теореме 1 на базу B мы накладываем следующие ограничения:

1) каждое окончание b базы B непусто, но пересечение всех окончаний пусто;

2) для любых двух окончаний b_1 и b_2 имеем либо включение $b_1 \subset b_2$, либо включение $b_1 \supset b_2$;

3) существует хотя бы одна монотонная по базе B последовательность.

На первый взгляд может показаться, что эти ограничения весьма обременительны, особенно условие 2, которое ужесточает обычное условие, указывающее на существование $b_3 \subset b_1 \cap b_2$. Но это не совсем так, поскольку вместо базы B практически всегда можно рассматривать базу B_0, эквивалентную B в том смысле, что существование предела по базе B влечет за собой сходимость по B_0, и наоборот. При этом все три сформулированных выше условия для базы B_0 уже будут выполнены. К примеру, в случае прямого произведения баз $H = B \times D$, где B и D есть базы $x \to +\infty$ и $y \to +\infty$, в качестве соответствующего H_0 можно взять базу, составленную из окончаний вида $h = \{(x, y) | x > a, y > a\}$.

Для полноты изложения приведем еще обобщение критерия Коши равномерной сходимости функций по базе множеств.

Теорема 2 (критерий Коши для равномерной сходимости функции). *Для того чтобы функция $f(x, y)$, определенная на множестве $X \times Y$, сходилась к некоторой функции $g(y)$ по базе B, заданной на множестве X, равномерно на множестве Y, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ нашлось окончание $b = b(\varepsilon)$ базы B такое, что для любых его точек x_1 и x_2 и любого $y \in Y$ выполнялось бы условие*

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Если

$$f(x, y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y),$$

то для всякого $\varepsilon > 0$ существует окончание $b(\varepsilon)$ такое, что для всех $y \in Y$ справедливо неравенство

$$|f(x, y) - g(y)| < \varepsilon/2.$$

Тогда для любых x_1 и $x_2 \in b(\varepsilon)$ и любого $y \in Y$ имеем

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \le |f(x_1, y) - g(y)| + |g(y) - f(x_2, y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Достаточность. Зафиксируем произвольную точку $y \in Y$. Тогда функция $h(x) = h_y(x) = f(x, y)$ удовлетворяет обычному критерию Коши для сходимости по базе. Следовательно, существует число $g = g(y)$ такое, что $h(x) \xrightarrow{B} g$, т.е. имеет место поточечная сходимость

$$h(x) = h_y(x) = f(x, y) \xrightarrow{B} g(y),$$

где $g(y)$ — некоторая функция, определенная на множестве Y. Покажем, что данная сходимость является равномерной на Y. Действительно, рассмотрим окончание $b(\varepsilon)$ с условием, что при любых x_1 и $x_2 \in b(\varepsilon)$ и при любом $y \in Y$ выполняется условие

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon/2.$$

В этом неравенстве при фиксированном y перейдем к пределу по базе B применительно к переменной x_2. Тогда получим

$$|f(x_1, y) - g(y)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Последнее неравенство выполняется при любом $x_1 \in b(\varepsilon)$ и при любом $y \in Y$. Это означает, что

$$f(x, y) \underset{Y}{\overset{B}{\rightrightarrows}} g(y).$$

Теорема 2 полностью доказана.

В заключение в качестве прямого следствия теоремы 2 приведем прямую формулировку критерия Коши отсутствия равномерной сходимости на множестве Y для функции $f(x, y)$ по базе B, заданной на множестве X.

Теорема 3 (критерий отсутствия равномерной сходимости). *Пусть $(x, y) \in X \times Y$. Для того чтобы равномерная сходимость функции $f(x, y)$ на множестве Y по базе B, заданной на X, не имела места, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $\varepsilon > 0$ для любого окончания $b \in B$ существовала пара точек $x_1 \in b$ и $x_2 \in b$ и точка $y \in Y$ с условием*

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \geq \varepsilon.$$

Замечание. И в теореме 2, и в теореме 3 из двух возможных определений равномерной сходимости, по Коши и по Гейне, рассматривается первое определение. Если же опираться на второе определение, которое, как было показано выше, ему эквивалентно, то тогда вопрос по существу сводится к критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности, доказанному ранее в §3 гл. XVI.

Лекция 18

§ 6. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ НЕСОБСТВЕННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Дальнейшее развитие теории интегралов, зависящих от параметра, приводит к рассмотрению несобственных интегралов, которые составляют ее наиболее существенную часть. Из двух типов таких интегралов сосредоточим свое внимание главным образом на интегралах первого рода. Интегралов второго рода коснемся лишь вскользь, поскольку их теория не имеет принципиальных отличий от интегралов первого рода.

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, заданную на множесве $I \times Y$, где I — промежуток вида $[a,+\infty)$, а Y — некоторое множество вещественных чисел, т.е. $Y \subset \mathbb{R}$. Допустим, что при любом фиксированном $y \in Y$ функция $f(x,y)$ интегрируема по Риману на любом конечном отрезке вида $[a,b]$ и существует несобственный интеграл первого рода от этой функции по переменной $x \in I = [a,+\infty)$. Тогда этот интеграл сам представляет собой некоторую функцию от y, заданную на Y равенством

$$g(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)dx.$$

Определение 1. *Функция $g(y)$, представленная в указанном выше виде, называется* **несобственным интегралом первого рода,** *зависящим от параметра $y \in Y$.*

Замечание. Вместо несобственных интегралов по промежутку вида $[a,+\infty)$ можно, разумеется, рассматривать интегралы по промежуткам вида $(-\infty,b]$ или по всей вещественной прямой $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$. Все эти случаи сводятся к рассмотренному точно так же, как это делалось при изучении обычных несобственных интегралов. Например, интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx, \quad y \in Y,$$

достаточно представить в виде суммы интегралов

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

и сходимость этой суммы понимать как сходимость каждого из двух ее слагаемых. Первое слагаемое сводится ко второму заменой переменной

x на $-x$. Кроме того, можно, конечно, рассматривать и формальные несобственные параметрические интегралы и при этом ставить вопрос об области их сходимости Y. Подобного рода вопросы разобраны при рассмотрении функциональных рядов, поэтому мы им много внимания уделять не будем, иногда, однако, будем пользоваться аналогичной терминологией.

Примеры. 1. При $y > 1$ справедливо равенство

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^y} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^y} = \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{x^{1-y}}{1-y}\right|_1^t = \frac{1}{1-y}.$$

2. При $y > 0$ имеем

$$\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{xy} d(xy) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Определение 2. *Интеграл* $\int_a^\infty f(x,y)dx$ *называется* **равномерно сходящимся по параметру y на множестве** Y, $\{y\} = Y$, *если*

$$\int_a^t f(x,y)dx = F(y,t) \underset{Y}{\rightrightarrows} g(y) \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Другими словами, это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $t = t_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $t > t_0(\varepsilon)$ и всех $y \in Y$ имеем

$$\left| \int_a^t f(x,y)dx - g(y) \right| < \varepsilon,$$

где $g(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$.

Исходя из общей теоремы сформулируем критерий Коши конкретно для равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода.

Теорема 1. *Необходимое и достаточное условие равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода* $\int_a^\infty f(x,y)dx$ *на множестве Y состоит в том, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $T = T(\varepsilon)$ такое, что при всех $t_2 > t_1 > T$ и любом $y \in Y$ выполнялось бы неравенство*

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

Приведем также прямую формулировку критерия отсутствия равномерной сходимости несобственного параметрического интеграла.

Т е о р е м а 1А. *Равномерная сходимость несобственного интеграла*

$$\int_a^{\infty} f(x,y)dx$$

на множестве Y не имеет места, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $T \in \mathbb{R}$ найдутся числа t_1 и $t_2 > T$ и $y \in Y$ такие, что

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| \geq \varepsilon.$$

Определение 3. *Если интеграл $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходится и при всех $x > a$ и $y \in Y$ имеем $|f(x,y)| \leq g(x)$, то функция $g(x)$ называется* **мажорантой** *для $f(x,y)$ на $\Pi = I \times Y$.*

Т е о р е м а 2 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственных интегралов первого рода). *Интеграл $J = \int_a^{\infty} f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, если функция $f(x,y)$ имеет мажоранту $g(x)$ на $\Pi = X \times Y$, где $X = [a, +\infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся критерием Коши. Поскольку интеграл $\int_a^{\infty} g(x)dx$ сходится, при любом $\varepsilon > 0$ найдется число $T = T(\varepsilon)$ такое, что при всех $t_2 > t_1 > T$ выполнено неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

Но тогда при всех $y \in Y$ имеем

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)dx\right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x,y)|dx \leq \int_{t_1}^{t_2} g(x)dx < \varepsilon.$$

Отсюда согласно критерию Коши заключаем, что интеграл J сходится равномерно на Y. Теорема доказана.

Пример. При $s \geq s_0 > 1$ интеграл $\int_1^{\infty} x^{-s}dx$ сходится равномерно на множестве $s \geq s_0$, поскольку он имеет мажоранту $g(x) = x^{-s_0}$.

Т е о р е м а 3 (признаки Абеля и Дирихле для равномерной сходимости параметрических несобственных интегралов первого рода). *Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $\Pi = X \times Y$, где $X = [a,+\infty)$, $Y = [c,d]$ и $f(x,y) = \alpha(x,y)\beta(x,y)$. Пусть $\beta(x,y)$ монотонна по x при любом фиксированном $y \in Y$.*

(А) (признак Абеля). *Пусть, кроме того:*

1) интеграл $\int\limits_a^\infty \alpha(x,y)dx$ сходится равномерно по y на Y;

2) функция $\beta(x,y)$ ограничена на $\Pi = X \times Y$, т.е. $|\beta(x,y)| < c$ при некотором вещественном числе $c > 0$ и всех $(x,y) \in \Pi$.

Тогда интеграл $J = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

(Д) (признак Дирихле). *Пусть вместо условий (А) имеем:*

1) при некотором $c > 0$ и всех $t > a$, $y \in Y$ имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_a^t \alpha(x,y)dx\right| < c;$$

2) функция $\beta(x,y)$ равномерно на Y сходится к нулю при $x \to 0$.

Тогда, как и в случае (А), *интеграл J сходится равномерно на Y.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта теорема как по своей формулировке, так и по доказательству похожа на соответствующие утверждения из теории рядов. По существу, все отличие сводится к замене использования преобразования Абеля на применение второй теоремы о среднем значении интеграла.

Для доказательства снова воспользуемся критерием Коши. Применяя вторую теорему о среднем, имеем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(x,y)\beta(x,y)dx = \beta(t_1,y)\int\limits_{t_1}^{t_3} \alpha(x,y)dx + \beta(t_2,y)\int\limits_{t_3}^{t_2} \alpha(x,y)dx,$$

где t_3 — некоторая точка отрезка $[t_1,t_2]$.

Теперь в случае (А) в силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^\infty \alpha(x,y)dx$ при любом $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших $t_2 > t_1 > t_0(\varepsilon)$ имеем $\left|\int\limits_{t_1}^{t_3} \alpha(x,y)dx\right| < \varepsilon$ и $\left|\int\limits_{t_3}^{t_2} \alpha(x,y)dx\right| < \varepsilon$, откуда

$$\left|\int\limits_{t_1}^{t_2} \alpha(x,y)\beta(x,y)dx\right| \le |\beta(t_1,y)|\left|\int\limits_{t_1}^{t_3} \alpha(x,y)dx\right| + |\beta(t_2,y)|\left|\int\limits_{t_3}^{t_2} \alpha(x,y)dx\right| \le$$

$$\leq c\varepsilon + c\varepsilon = 2c\varepsilon,$$

поскольку $|\beta(x,y)| < c$ при всех x и y.

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ это влечет за собой равномерную сходимость интеграла J и справедливость утверждения (А).

В случае (Д) интегралы от функции $\alpha(x,y)$ ограничены числом c и $\beta(x,y)$ стремится к нулю равномерно по y, поэтому при всяком $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $t_2 > t_1 > t_0(\varepsilon)$ выполнено неравенство $|\beta(x,y)| < \varepsilon$, откуда с учетом предыдущей формулы имеем

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} \alpha(x,y)\beta(x,y)dx\right| \leq c\varepsilon + c\varepsilon = 2c\varepsilon,$$

что влечет за собой справедливость утверждения (Д). Теорема доказана.

Лекция 19

§ 7. НЕПРЕРЫВНОСТЬ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ И ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ПО ПАРАМЕТРУ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Докажем теорему о переходе к пределу функции в точке под знаком несобственного интеграла.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,y)$ задана на множестве $P = X \times Y$, где $X = (a, +\infty)$, $Y = [b,c]$, Пусть, далее, выполнены следующие условия:*

1) при некотором $y_0 \in Y$ и при любом $t \in X$ на промежутке $E = E_t = [a,t]$ имеет место равномерная сходимость

$$f(x,y) \underset{E_t}{\rightrightarrows} g(x) \quad \text{при} \quad y \to y_0;$$

2) несобственный интеграл $h(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y.

Тогда:

а) функция $g(x)$ интегрируема по Риману на любом отрезке E_t;

б) интеграл $J = \int\limits_a^\infty g(x)dx$ сходится;

в) существует предел $l = \lim\limits_{y\to y_0} h(y)$;

г) имеет место равенство

$$l = \lim_{y\to y_0} h(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int_a^\infty g(x)dx = J.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную монотонную числовую последовательность $y_n \in Y$ с условием $y_n \to y_0$. Тогда в силу условия 1) для функциональной последовательности $g_n(x) = f(x,y_n)$ при $n \to \infty$ справедливо соотношение $g_n(x) \underset{E_t}{\rightrightarrows} g(x)$, где $E_t = [a,t]$ и $t \geq a$ — любое фиксированное число. Далее, из теоремы 1 §6 гл. XVI об интеграле от функциональной последовательности вытекает, что функция $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ интегрируема на E_t, причем

$$\int_a^t f(x,y_n)\,dx = \int_a^t g_n(x)\,dx = Q_{t,n} \to Q_t = \int_a^t g(x)\,dx,$$

где величины $Q_{t,n}$ и Q_t определяются последним равенством.

В силу условия 2) при $t \to +\infty$ имеем $Q_{t,n} \underset{\mathbb{N}}{\rightrightarrows} Q_n$, поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 = t(\varepsilon) \ge a$ такое, что при всех $t > t_0$ и при всех натуральных n справедливо неравенство $|Q_{t,n} - Q_n| < \varepsilon$. Следовательно, по теореме о двойном и повторном пределах по базам (§6 гл. XVI) существуют и равны оба повторных предела, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to+\infty} Q_{t,n} = \lim_{t\to+\infty}\lim_{n\to\infty} Q_{t,n}.$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to+\infty} Q_{t,n} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^\infty f(x,y_n)\,dx = \lim_{n\to\infty} h(y_n) = l,$$

а также

$$\lim_{t\to+\infty}\lim_{n\to\infty} Q_{t,n} = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_a^\infty g(x)\,dx = J,$$

откуда $l = J$. В силу произвольности выбора последовательности y_n отсюда вытекает утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее свойство непрерывности несобственных параметрических интегралов.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $P = X \times Y$, где $X = (a,+\infty), Y = [b,c]$, и пусть интеграл*

$$h(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$$

равномерно сходится на Y.

Тогда функция $h(y)$ непрерывна на Y.

Доказательство. Непрерывность $h(y)$ в каждой фиксированной точке $y_0 \in Y$ означает, что $h(y) \to h(y_0)$ при $y \to y_0$. Для доказательства этого соотношения воспользуемся теоремой 1. Очевидно, ее условие 2) выполнено. Далее, из непрерывности $f(x,y)$ на P следует ее равномерная непрерывность на $P_t = [a,t] \times [c,d]$ при любом $t \ge a$. В свою очередь, отсюда имеем, что

$$f(x,y) \underset{[a,t]}{\rightrightarrows} f(x,y_0) \quad \text{при} \quad y \to y_0,$$

т.е. условие 1) теоремы 1 выполнено, а это означает, что при $y \to y_0$

$$h(y) \to \int\limits_a^\infty f(x,y_0)\,dx = h(x_0).$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3 (условие интегрируемости несобственных интегралов по параметру). *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $P = X \times Y$, где $X = (a,+\infty), Y = [b,c]$ и пусть интеграл $g(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ существует и равномерно сходится на Y. Тогда функция $g(y)$ будет интегрируема на Y, а функция $h(x) = \int_b^c f(x,y)dy$ будет интегрируема на $X = [a,+\infty)$, причем*

$$\int\limits_b^c g(y)dy = \int\limits_a^\infty h(x)dx,$$

т.е. равны повторные интегралы

$$\int\limits_b^c dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_b^c f(x,y)dy.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную монотонную последовательность $t_n \in X$ с условием $t_n \to +\infty$. Тогда функциональная последовательность $g_n(y)$, где $g_n(y) = \int\limits_a^{t_n} f(x,y)dx$, равномерно сходится к функции $g(y)$ на множестве Y. Каждая из функций $g_n(x)$ непрерывна на Y, потому при фиксированном n по теореме об интегрировании собственных интегралов по параметру (теорема 3 §4) имеем

$$\int\limits_b^c dy \int\limits_a^{t_n} f(x,y)dx = \int\limits_b^c g_n(y)dy = \int\limits_a^{t_n} dx \int\limits_b^c f(x,y)dy. \qquad (*)$$

По теореме 1 §6 гл. XVI возможен переход к пределу при $n \to \infty$ под знаком интеграла и существует число A такое, что

$$A = \lim_{n\to\infty} \int\limits_b^c g_n(y)dy = \int\limits_b^c \lim_{n\to\infty} g_n(y)dy = \int\limits_b^c g(y)dy = \int\limits_b^c dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx.$$

Переходя в равенстве (*) к пределу при $n \to \infty$, получим, что предел его правой части существует и равен A,

$$A = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{t_n} dx \int\limits_b^c f(x,y)dy.$$

Но поскольку последовательность t_n — произвольная, последний предел равен интегралу

$$\int\limits_a^\infty dx \int\limits_b^c f(x,y)dy.$$

15*

Тем самым теорема 3 доказана полностью.

Теперь докажем теорему о дифференцировании несобственного интеграла по параметру.

Т е о р е м а 4 (правило Лейбница). *Пусть:*

1) функция $f(x,y)$ непрерывна на $P = X \times Y$, где $X = (a,+\infty)$, $Y = [c,d]$;

2) частная производная $f_y'(x,y)$ существует и непрерывна на P;

3) интеграл $g(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится при всех $y \in Y$;

4) интеграл $\int\limits_a^\infty f_y'(x,y)dx$ равномерно сходится на Y.

Тогда функция $g(y)$ дифференцируема на Y и имеет место равенство

$$g'(y) = \int\limits_a^\infty f_y'(x,y)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу непрерывности функции $f(x,y)$ при всех $n \geq a$ существует непрерывная на Y функция $g_n(y)$ вида

$$g_n(y) = \int\limits_a^n f(x,y)dx.$$

Применяя правило Лейбница для собственных интегралов, получим

$$g_n'(y) = \int\limits_a^n f_y'(x,y)dx.$$

Заметим, что для функциональной последовательности $g_n(y)$ при $n \to \infty$ имеют место соотношения

$$g_n(y) \to g(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx \quad \text{и} \quad g_n'(y) \overset{n\to\infty}{\underset{Y}{\rightrightarrows}} \int\limits_a^\infty f_y'(x,y)dx.$$

Следовательно, по правилу дифференцирования функциональной последовательности имеем

$$\left(\lim_{n\to\infty} g_n(y)\right)' = \lim_{n\to\infty} g_n'(y), \quad \text{т.е.} \quad g'(y) = \int\limits_a^\infty f_y'(x,y)dx.$$

Теорема 4 доказана.

Докажем еще две теоремы о несобственных повторных интегралах, которые потребуются нам в дальнейшем.

Т е о р е м а 5. *Пусть $f(x,y)$ задана и непрерывна на $P = X \times Y$, где $X = [a, +\infty)$, $Y = [b, +\infty)$ и $f(x,y) \geq 0$ на P. Пусть при всех $y \in Y$ интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dx$ сходится к функции $g(y)$, непрерывной на Y, и при всех $x \in X$ интеграл $\int\limits_a^\infty f(x,y)dy$ сходится к функции $h(x)$, непрерывной на X.*

Тогда если сходится интеграл $J_1 = \int\limits_b^\infty g(y)dy$, то сходится и интеграл $J_2 = \int\limits_a^\infty h(x)dx$, и наоборот, причем $J_1 = J_2$, т.е.

$$\int\limits_b^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_b^\infty f(x,y)dy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что существует J_1, так как второй случай рассматривается аналогично. Рассмотрим произвольную монотонную числовую последовательность t_m, подчиненную требованиям $t_m \geq a$ и $t_m \to +\infty$, и натуральные числа $n \geq b$. Символом $J_{m,n}$ обозначим повторный интеграл вида

$$J_{m,n} = \int\limits_a^{t_m} dx \int\limits_b^n f(x,y)\, dy.$$

Положим еще

$$g_m(y) = \int\limits_a^{t_m} f(x,y)\, dx \quad \text{и} \quad h_n(x) = \int\limits_b^n f(x,y)\, dy.$$

По теореме об интегрируемости собственного параметрического интеграла имеем

$$J_{m,n} = \int\limits_b^n dy \int\limits_a^{t_m} f(x,y)\, dx = \int\limits_b^n g_m(y)\, dy.$$

Далее, так как $f(x,y) \geq 0$, то $0 \leq g_m(y) \leq g(y)$. Поэтому справедливо неравенство

$$J_{m,n} \leq \int\limits_b^n g(y)\, dy \leq \int\limits_b^\infty g(y)\, dy = J_1.$$

С другой стороны,

$$J_{m,n} = \int\limits_a^{t_m} dx \int\limits_b^n f(x,y)\, dy = \int\limits_a^{t_m} h_n(x)\, dx.$$

При этом $h_n(x) \geq 0$ и при каждом фиксированном x эта последовательность является неубывающей; кроме того, она составлена из непрерывных функций и ее предел, т.е. функция $h(x)$, также непрерывен. Следовательно, по теореме Дини при $n \to \infty$ имеем

$$h_n(x) \underset{[a,t_m]}{\rightrightarrows} h(x).$$

Но тогда при $n \to \infty$ выполнены равенства

$$J(m) = \lim_{n\to\infty} J_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{t_m} h_n(x)\, dx = \int\limits_a^{t_m} \left(\lim_{n\to\infty} h_n(x)\right)\, dx = \int\limits_a^{t_m} h(x)\, dx.$$

Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $J_{m,n} \leq J_1$, получим соотношение

$$J(m) = \int\limits_a^{t_m} h(x)\, dx \leq J_1.$$

Но так как $h(x) \geq 0$, то с ростом m последовательность $J(m)$ монотонно возрастает и ограничена. Следовательно, по теореме Вейерштрасса величина $J(m)$ имеет предел l, причем $l \leq J_1$. Ввиду произвольности выбора последовательности t_m отсюда вытекает, что l одновременно является пределом величины

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_a^t h(x)\, dx = \int\limits_a^\infty h(x)\, dx = J_2.$$

Таким образом, J_2 существует и $J_2 = l \leq J_1$. Но тогда, меняя в проведенных выше рассуждениях величины J_1 и J_2 местами, одновременно получим неравенство $J_1 \leq J_2$. Следовательно, $J_1 = J_2$.

Теорема 5 доказана полностью.

Приведем еще некоторое обобщение предыдущей теоремы.

Т е о р е м а 6. *Пусть функция $f(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 5, кроме условия $f(x,y) \geq 0$; но функция $F(x,y) \geq |f(x,y)|$ удовлетворяет всем ее условиям.*

Тогда утверждение теоремы 5 имеет место не только для функции $F(x,y)$, но и для функции $f(x,y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что функции

$$\varphi_1(x,y) = \frac{F(x,y)+f(x,y)}{2} \quad \text{и} \quad \varphi_2(x,y) = \frac{F(x,y)-f(x,y)}{2}$$

удовлетворяют условиям теоремы 5, но тогда $\varphi_1(x,y)-\varphi_2(x,y) = f(x,y)$ тоже ей удовлетворяет.

Теорема 6 доказана.

Заметим, что, вообще говоря, условия теорем 5 и 6 являются избыточными. Далее будет доказано значительно более общее утверждение, а для наших ближайших целей этих теорем вполне достаточно.

В заключение приведем пример, указанный Коши, в котором при перемене порядка интегрирования получаются различные значения повторных интегралов. Это связано с тем, что подынтегральная функция

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

имеет разрыв в точке $(0,0)$, в частности, при подходе к этой точке по прямым $y = kx$. При $|k| > 1$ имеем $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = +\infty$, а при $|k| < 1$ имеем $\lim\limits_{x\to 0} f(x,kx) = -\infty$.

Но для двух повторных интегралов от этой функции справедливы равенства

$$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = -\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Отметим, что данный пример относится к несобственным интегралам второго рода, которые будут рассмотрены в следующем параграфе.

Лекция 20

§ 8. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

Здесь мы сформулируем основные понятия элементарной теории несобственных параметрических интегралов второго рода и приведем формулировки некоторых утверждений, соответствующих доказанным нами теоремам об интегралах первого рода.

Рассмотрим множество $P = X \times Y$, где $X = (a, b]$, $Y \subset \mathbb{R}$. Пусть функция $f(x, y)$ задана на P и не ограничена как функция от x хотя бы при одном фиксированном $y \in Y$. Далее, пусть при любых $y \in Y$ и $\delta > 0, \delta \in (0, b - a)$ функция $f(x, y)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a + \delta, b]$ как функция от x.

Определение 1. *Введенное выше формальное выражение вида* $\int\limits_a^b f(x, y)dx$ *называется* **несобственным параметрическим интегралом второго рода** *с одной особой точкой* $x = a$.

Определение 2. *Если при любом фиксированном значении* $y \in Y$ *этот интеграл сходится, то множество* Y *называется* **областью сходимости интеграла** *и его значения* $g(y) = \int\limits_a^b f(x, y)dx$ *порождают функцию, определенную на множестве* Y.

Подобные определения имеют место и в случае, когда особая точка находится на правом конце промежутка интегрирования $X = [a, b]$, т.е. в точке b. В случае когда особая точка $x = x_0$ лежит внутри отрезка X, его можно разбить на две части этой точкой x_0 и рассматривать каждую часть отрезка отдельно.

Аналогичные рассуждения позволяют рассматривать несобственные интегралы с переменной особой точкой $x_0 = x_0(y)$, но здесь мы входить в детали не будем.

Пример. Интеграл $J = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{|x-y|}}$ сходится на $Y = [0, 1]$ и его можно вычислить.

Действительно, имеем

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) = \int\limits_0^y \frac{dx}{\sqrt{y - x}} + \int\limits_y^1 \frac{dx}{\sqrt{x - y}} = 2\sqrt{y} + 2\sqrt{1 - y}.$$

Определение 3. *Несобственный интеграл второго рода*

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx$$

называется **равномерно сходящимся по y на множестве** Y, *если для функции*

$$g(\delta, y) = \int_{a+\delta}^b f(x,y)dx \quad \delta \to 0+$$

выполнено условие

$$g(\delta, y) \underset{Y}{\rightrightarrows} g(0,y) = g(y).$$

Исходя из общей формулировки критерия Коши можно сформулировать его для равномерной сходимости несобственного параметрического интеграла второго рода. Но мы ограничимся формулировкой одной сводной теоремы, содержащей утверждения, важные для практических применений.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на $P = X \times Y$, где $X = (a,b], Y = [c,d]$. Пусть a — особая точка несобственного параметрического интеграла*

$$g(y) = \int_a^b f(x,y)dx.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1. *Если интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, то функция $g(y)$ непрерывна при всех $y \in Y$.*

2. *В этом случае имеем*

$$\int_c^d g(y)dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

3. *Если интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$ сходится, частная производная $f_y'(x,y)$ существует и непрерывна на P, а интеграл $\int_a^b f_y'(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, то существует $g'(y)$, причем*

$$g'(y) = \int_a^b f_y'(x,y)dx.$$

Если особая точка x_0 является внутренней точкой отрезка $X = [a, b]$, то, как было отмечено выше, необходимо отрезок X разбить этой точкой на две части и рассматривать каждый из двух получившихся интегралов отдельно. Тот же подход можно применить и в случае, когда бесконечный промежуток интегрирования $X = [a, +\infty)$ содержит конечное число особых точек $x_1, \ldots, x_n$. Тогда этот промежуток можно разбить на $2n$ промежутков точками $t_1 < t_2 < \cdots < t_{2n}$ таким образом, чтобы на каждом отрезке вида $[t_s, t_{s+1}]$, где $s = 1, \ldots, 2n-1$, лежала бы ровно одна особая точка, а на промежутке $[t_{2n}, +\infty)$ особых точек не было. В результате получим $2n-1$ несобственных интегралов второго рода и еще один — первого.

На этом мы закончим изложение теории несобственных параметрических интегралов и займемся ее приложениями.

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Начнем с вычисления интеграла Дирихле $D(\alpha)$, называемого еще разрывным множителем Дирихле. По определению имеем

$$D(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Заметим прежде всего, что точка $x = 0$ не является особой, так как подынтегральная функция ограничена. Очевидно, что $D(0) = 0$. Далее, если $\alpha > 0$, то интеграл сходится по признаку Дирихле, поскольку

$$\left| \int\limits_0^t \sin \alpha x dx \right| = \left| \frac{1 - \cos \alpha t}{\alpha} \right| < \frac{2}{\alpha}.$$

В этом случае возможна линейная замена переменной интегрирования вида $\alpha x = t$, и тогда имеем

$$D(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} d(\alpha x) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = D(1) = D.$$

Если же $\alpha < 0$, то $\alpha = -|\alpha|, \sin \alpha x = -\sin |\alpha| x$, откуда

$$D(\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\int\limits_0^\infty \frac{\sin |\alpha| x}{x} dx = -D.$$

Таким образом, имеем

$$D(\alpha)=\begin{cases} D & \text{при} \quad \alpha>0,\\ 0 & \text{при} \quad \alpha=0,\\ -D & \text{при} \quad \alpha<0. \end{cases}$$

Теперь перейдем к вычислению значения D.

Т е о р е м а 1. *Справедливо равенство* $D=\pi/2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим параметрический интеграл $g(y)$, где $y\in Y=[0,N]$, $N\in\mathbb{R}$ и

$$g(y)=\int\limits_0^\infty \frac{e^{-yx}\sin x}{x}dx.$$

Подынтегральная функция $f(x,y)=e^{-yx}\sin x/x$ будет непрерывна всюду на $P=X\times Y$, где $X=[0,+\infty)$, $Y=[0,N]$, если положить $f(0,y)=1$.

Убедимся, что интеграл $g(y)$ сходится равномерно на Y. Для этого воспользуемся признаком Абеля. Положим $\alpha(x,y)=\sin x/x$, $\beta(x,y)=e^{-xy}$. Тогда функция $\beta(x,y)$ монотонна и $0<\beta(x,y)\leq 1$, а интеграл $\int\limits_0^\infty \alpha(x,y)dx$ сходится равномерно на Y, поскольку $\alpha(x,y)$ не зависит от y.

Заметим, что равномерную сходимость $g(y)$ можно было бы установить и непосредственно из определения с помощью интегрирования по частям.

Возьмем теперь на отрезке Y произвольную точку $y_0\neq 0$ и окружим ее некоторым отрезком $Y_\delta=[y_0-\delta,y_0+\delta]$, целиком принадлежащим множеству Y. На этом отрезке интеграл

$$\int\limits_0^\infty f'_y(x,y)dx=-\int\limits_0^\infty e^{-yx}\sin x dx$$

сходится равномерно. Это следует из признака Вейерштрасса, поскольку $|e^{-xy}\sin x|<e^{-x(y_0-\delta)}$, а интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-x(y_0-\delta)}dx$ сходится. Кроме того, подынтегральная функция $e^{-xy}\sin x$ непрерывна на $P_\delta=X\times Y_\delta$. Поэтому по правилу Лейбница для несобственных интегралов имеем

$$g'(y)=-\int\limits_0^\infty e^{-yx}\sin x dx.$$

Последний интеграл можно вычислить путем интегрирования по частям. При этом получим

$$g'(y) = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Итак, мы показали, что функция $g(y)$ непрерывна на $Y = [0, N]$, а ее производная $g'(y)$ существует при всех $y \neq 0$ и равна $-1/(1+y^2)$. Отсюда по формуле Ньютона – Лейбница при всех $y \in (0, N]$ вытекает равенство

$$g(y) = g(N) - \int\limits_N^y \frac{dt}{1+t^2} = g(N) + \operatorname{arctg} N - \operatorname{arctg} y.$$

Пользуясь непрерывностью функции $g(y)$ в точке $y = 0$, мы получим

$$g(0) = \lim_{y\to 0+} g(y) = \lim_{y\to 0+} (g(N) + \operatorname{arctg} N - \operatorname{arctg} y) =$$

$$= g(N) + \operatorname{arctg} N.$$

Теперь, устремляя N к $+\infty$, приходим к соотношениям $\operatorname{arctg} N \to \pi/2$,

$$|g(N)| \le \int\limits_0^\infty e^{-Nx} \frac{|\sin x|}{x} dx \le \int\limits_0^\infty e^{-Nx} dx = \frac{1}{N} \to 0.$$

Отсюда следует, что

$$D = g(0) = \lim_{N\to\infty} (g(N) + \operatorname{arctg} N) = \pi/2.$$

Теорема 1 доказана.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает справедливость следующего утверждения.

С л е д с т в и е. *При всех $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет место равенство*

$$D(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign} \alpha.$$

§ 10. ИНТЕГРАЛЫ ЭЙЛЕРА ПЕРВОГО И ВТОРОГО РОДА

Гамма-функция Эйлера, которая была определена ранее, и бета-функция, определение которой мы дадим ниже, называются соответственно интегралами Эйлера второго и первого рода. Начнем с дальнейшего изучения свойств гамма-функции.

Теорема 1 (формула Эйлера - Гаусса). *При* $s \neq 0, -1, -2, \ldots$ *имеет место равенство*

$$\Gamma(s) = \lim_{m\to\infty} \mathrm{P}_m(s),$$

где

$$\mathrm{P}_m(s) = \frac{(m-1)!m^s}{s(s+1)\ldots(s+m-1)}.$$

Доказательство. Применяя формулу Эйлера, получим выражение для $\Gamma(s)$:

$$\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}\prod_{n=1}^{m}\left(1+\frac{1}{n}\right)^s\cdot\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{s}(1+1)^s\ldots\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^s\left(1+\frac{s}{1}\right)^{-1}\ldots\left(1+\frac{s}{m-1}\right)^{-1} =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\Pi_m(s).$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. (формула Гаусса). *При* $s > 0$ *в обозначениях теоремы 1 справедливо равенство*

$$\mathrm{P}_{m+1}(s) = \left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt.$$

Доказательство. С помощью замены переменной и интегрирования по частям получаем

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\int_0^m\left(1-\frac{t}{m}\right)^m t^{s-1}dt = (m+1)^s\int_0^1(1-x)^m x^{s-1}dx =$$

$$= (m+1)^s \frac{m}{s} \int_0^1 (1-x)^{m-1} x^s dx = \cdots =$$

$$= (m+1)^s \frac{m!}{s(s+1)\dots(s+m-1)} \int_0^1 x^{s+m-1} dx =$$

$$= (m+1)^s \frac{m!}{s(s+1)\dots(s+m)} = \mathrm{P}_{m+1}(s).$$

Теорема 2 доказана.

Имеет место следующее представление гамма-функции в виде несобственного интеграла.

Теорема 3 (интегральное представление для гамма-функции Эйлера). *При $s > 0$ справедливо равенство*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что при $s \geq 1$ рассматриваемый параметрический интеграл является несобственным интегралом первого рода, а при $0 < s < 1$ он имеет особую точку $x = 0$. Но в обоих случаях он сходится, поскольку в окрестности нуля подынтегральное выражение мажорируется функцией x^{s-1}, а на бесконечности — функцией $e^{-x/2}$.

Рассмотрим разность $R_m(s)$, где

$$R_m(s) = \int_0^m x^{s-1} e^{-x} dx - \mathrm{P}_{m+1}(s) \left(1 + \frac{1}{m}\right)^s =$$

$$= \int_0^m x^{s-1} \left(e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m\right) dx.$$

В силу выпуклости графика функции $g(y) = e^y - 1 - y$ при всех y имеем $1 + y \leq e^y$, поэтому неравенства

$$1 + \frac{x}{n} \leq e^{x/n}, \quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$$

и

$$1 - \frac{x}{n} \leq e^{-x/n}, \quad \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$$

справедливы при всех вещественных x и натуральных n.

Кроме того, заметим, что из неравенства Бернулли при $0 < y \le 1$ следует, что $(1-y)^m > 1 - my$, т.е. $1-(1-y)^m < my$.

Отсюда при $0 \le x \le m$ и $y = \frac{x^2}{m^2}$ получаем оценки

$$0 \le e^{-x} - \left(1-\frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}\left(1 - e^x\left(1-\frac{x}{m}\right)^m\right) \le$$

$$\le e^{-x}\left(1-\left(1+\frac{x}{m}\right)^m \cdot \left(1-\frac{x}{m}\right)^m\right) \le e^{-x}\left(1-\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^m\right) =$$

$$= e^{-x}(1-(1-y)^m) < e^{-x}my = \frac{e^{-x}x^2}{m}.$$

Но тогда величина $R_m(s)$ оценивается так:

$$0 \le R_m(s) < \int\limits_0^m \frac{x^{s+1}e^{-x}}{m}dx < \frac{1}{m}\int\limits_0^\infty x^{s+1}e^{-x}dx.$$

Здесь $s+1>1$, и поэтому последний интеграл сходится, откуда $0 \le R_m(s) < \frac{A_s}{m}$, где A_s — некоторая величина, зависящая только от параметра s. Следовательно, $R_m(s) \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда окончательно имеем

$$\int\limits_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx = \lim_{m\to\infty}\int\limits_0^m x^{s-1}e^{-x}dx =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(R_m(s) + \mathrm{P}_{m+1}(s)\left(1+\frac{1}{m}\right)^s\right) = 0 + \Gamma(s)\cdot 1 = \Gamma(s).$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Идея изложенного доказательства теоремы 3 высказана Шлемильхом (1879).

Замечание 2. С помощью интегрирования по частям из теоремы 3 выводится следующая формула Коши, справедливая при всех значениях s вида $-(m+1) < s < -m$, где $m \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty x^{s-1}(e^{-x} - \varphi_m(x))dx,$$

где $\varphi_m(x) = \sum\limits_{n=0}^{m} \frac{(-x)^n}{n!}$.

Здесь условия, наложенные на s, обеспечивают сходимость несобственного интеграла, имеющего две особые точки: $x=0$ и $x=+\infty$.

Действительно, в окрестности особой точки $x = 0$ подынтегральная функция эквивалентна величине

$$x^{s+m}\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!},$$

а в окрестности точки $x = +\infty$ является величиной порядка $O(x^{s+m-1})$. Отсюда по признаку сравнения следует сходимость интеграла.

Далее нам потребуется представление функции $\sin \pi s$ в виде бесконечного произведения. Приведем его в качестве следующей леммы, которая будет доказана при изучении рядов Фурье.

Лемма 1 (лемма Эйлера). *При всех вещественных нецелых s имеет место формула*

$$\sin \pi s = \pi s \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right).$$

Теорема 4 (формула дополнения Эйлера). *При всех нецелых s справедливо равенство*

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

В частности, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Доказательство. Из формулы Эйлера и леммы 1 имеем

$$\Gamma(1-s)\Gamma(s) = -s\Gamma(-s)\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{n^2}\right)^{-1} = \frac{\pi}{\pi s\prod_{n=1}^{\infty}(1-s^2/n^2)} = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

Второе утверждение теоремы прямо следует из первого.

Теорема 4 доказана.

Теорема 5 (формула удвоения Лежандра). *Справедливо равенство*

$$\Gamma(2s)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right).$$

Доказательство. Составим произведение $F_m(s)$, где

$$F_m(s) = \frac{2^{2s-1}\mathrm{P}_m(s)\mathrm{P}_m(s+1/2)}{\mathrm{P}_{2m}(2s)\mathrm{P}_m(1/2)}.$$

Выпишем явное выражение для $F_m(s)$. Имеем

$$F_m(s) =$$

$$= \frac{2^{2s-1}(m-1)!m^s(m-1)!m^{s+1/2}\cdot 2s\dots(2s+2m-1)\cdot\frac{1}{2}\dots(m-\frac{1}{2})}{(2m-1)!(2m)^{2s-1}(m-1)!m^{1/2}s\dots(s+m-1)(s+\frac{1}{2})\dots(s+m-\frac{1}{2})},$$

что равно 1. Устремляя m к $+\infty$, приходим к равенству

$$\frac{2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(2s)\Gamma(1/2)} = 1.$$

Тем самым теорема 5 доказана.

Рассмотрим теперь интеграл Эйлера первого рода, т.е. бета-функцию Эйлера.

Определение 1. *При* $\alpha > 0$ *и* $\beta > 0$ **бета-функция Эйлера** $B(\alpha,\beta)$ *задается равенством*

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Т е о р е м а 6. *При* $\alpha > 1$ *и* $\beta > 1$ *справедлива формула*

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В интеграле, определяющем функцию $B(\alpha,\beta)$, выполним замену переменной вида $x = \frac{y}{1+y}$. Тогда имеем

$$dx = \frac{dy}{(1+y)^2},\quad x^{\alpha-1} = \frac{y^{\alpha-1}}{(1+y)^{\alpha-1}},\quad (1-x)^{\beta-1} = \frac{1}{(1+y)^{\beta-1}},$$

$$B(\alpha,\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}dy}{(1+y)^{\alpha+\beta}}.$$

Отсюда следует, что

$$H = B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta) = \int\limits_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+\beta)dy}{(1+y)^{\alpha+\beta}}.$$

Далее, если $y > 0$, то

$$\Gamma(\alpha+\beta) = \int\limits_0^\infty x^{\alpha+\beta-1}e^{-x}dx =$$

$$= (1+y)^{\alpha+\beta} \int\limits_0^\infty x^{\alpha+\beta-1} e^{-x(y+1)} dx.$$

Поэтому

$$H = \int\limits_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}(1+y)^{\alpha+\beta}}{(1+y)^{\alpha+\beta}} \left(\int\limits_0^\infty x^{\alpha+\beta-1} e^{-x(y+1)} dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty (xy)^{\alpha-1} x^\beta e^{-x(y+1)} dx \right) dy.$$

В последнем интеграле получим

$$H = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty (xy)^{\alpha-1} e^{-xy} x dy \right) x^{\beta-1} e^{-x} \, dx =$$

$$= \Gamma(\alpha) \int\limits_0^\infty x^{\beta-1} e^{-x} dx = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

Остается только обосновать перестановку порядка интегрирования. Подынтегральная функция $f(x,y) = y^{\alpha-1} x^{\alpha+\beta-1} e^{-x(y+1)}$ всюду положительна и непрерывна. Кроме того, каждая из функций, т.е. интегралов

$$g(y) = \int\limits_0^\infty f(x,y) \, dx = \frac{y^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+y)^{\alpha+\beta}}, \; h(x) = \int\limits_0^\infty f(x,y) \, dy = \Gamma(\alpha) x^{\beta-1} e^{-x},$$

непрерывна и неотрицательна на $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$, а несобственные интегралы $\int\limits_0^\infty g(y) \, dy$ и $\int\limits_0^\infty h(x) \, dx$ сходятся. Следовательно, порядок интегрирования действительно можно изменить.

Теорема 6 доказана.

Замечание. Поскольку гамма-функция $\Gamma(s)$ определена при всех $s \neq 0, -1, -2, \ldots$, то формула теоремы 6 позволяет распространить определение функции $B(\alpha,\beta)$ на все множество вещественных значений (α,β), за исключением точек (α,β), где либо величина α, либо величина β равна $0, -1, -2, \ldots$.

§ 11. ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

Изучение эйлеровских интегралов завершим доказательством важной для приложений формулы Стирлинга, дающей приближенное значение для гамма-функции или для функции $n!$.

Теорема 1 (формула Стирлинга). *При $s \geq 2$ имеет место равенство*

$$\ln \Gamma(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right) \ln \left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 + R,$$

где $c_0 = \ln \sqrt{2\pi}$, а для величины остатка R выполняются неравенства

$$0 > R \geq -1/(8s+4).$$

Доказательство. Воспользуемся равенством

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}_n(s) = \Gamma(s).$$

Далее имеем

$$\ln \mathrm{P}_n(s) = s \ln n - \ln s + \sum_{k=1}^{n-1} (\ln k - \ln (k+s)).$$

Применяя формулу суммирования Эйлера, получим

$$\ln \mathrm{P}_n(s) = A - B,$$

где

$$A = \int\limits_{0,5}^{n-0,5} (\ln x - \ln (x+s))\, dx + s \ln n - \ln s, \quad B = \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \rho(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+s}\right) dx.$$

Сначала рассмотрим величину A. Имеем

$$\int\limits_{0,5}^{n-0,5} \ln x dx - \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \ln (x+s) dx = \int\limits_{0,5}^{n-0,5} \ln x dx - \int\limits_{s+0,5}^{n+s-0,5} \ln x dx =$$

$$= \int\limits_{0,5}^{s+0,5} \ln x dx - \int\limits_{n-0,5}^{n+s-0,5} \ln x dx = A_1 - A_2.$$

Интегрируя, находим

$$A_1 = (x \ln x - x)|_{0,5}^{s+0,5} = \left(s+\frac{1}{2}\right) \ln \left(s+\frac{1}{2}\right) - s + \frac{\ln 2}{2}.$$

Далее будем считать, что $n > 2s$. Тогда, применяя формулу $\ln(1+x/n) = O(x/n)$, получим

$$s \ln n - A_2 = \int\limits_{n-0,5}^{n+s-0,5} (\ln n - \ln x) dx = - \int\limits_{-0,5}^{s-0,5} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-0,5}^{s-0,5} O\left(\frac{x}{n}\right) dx = O\left(\frac{s^2}{n}\right).$$

Таким образом, приходим к соотношению

$$A = \left(s+\frac{1}{2}\right) \ln \left(s+\frac{1}{2}\right) - s - \ln s + c_1 + O\left(\frac{s^2}{n}\right),$$

где c_1 — постоянная.

Рассмотрим теперь величину B. Заметим, что неравенство

$$-\frac{1}{8} \le \int\limits_{0,5}^{t} \rho(x)\, dx \le 0$$

справедливо при всех $t \ge 0,5$. Поэтому по признаку Дирихле интеграл $\int\limits_{0,5}^{\infty} \frac{\rho(x)}{x}\, dx$ сходится. Следовательно,

$$B_1 = \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{\rho(x)}{x}\, dx = c_2 + o(1).$$

Для оценки величины

$$B_2 = \int\limits_{0,5}^{n+0,5} \frac{\rho(x)}{x+s}\, dx$$

применим вторую теорему о среднем. Тогда получим

$$B_2 = \frac{1}{s+0,5}\int\limits_{0,5}^{t} \rho(x)\,dx,$$

откуда имеем $-\frac{1}{8s+4} \le B_2 \le 0$. Но по определению имеем $B = B_1 - B_2$. Следовательно, из равенства $\ln P_n(s) = A - B$ вытекает соотношение

$$\ln \mathrm{P}_n(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 + B_2 + O\left(\frac{s^2}{n}\right).$$

Здесь c_0 — некоторая абсолютная постоянная.

Устремляя n к бесконечности, мы приходим к равенству

$$\ln\Gamma(s) = \left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 - \frac{\theta}{8s+4},$$

где $\theta = \theta(s)$ — некоторая функция с условием $0 \le \theta \le 1$. Осталось вычислить значение константы c_0. Для этого применим формулу Лежандра. Тогда при $s \to \infty$ будем иметь

$$(2s-1)\ln 2 + \ln\Gamma(s) + \ln\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right) = \ln\Gamma(2s) + \ln\Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(s+\frac{1}{2}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) - \ln s + c_0 +$$

$$+(s+1)\ln(s+1) - (s+1) - \ln\left(s+\frac{1}{2}\right) + c_0 + O\left(\frac{1}{s}\right) + (2s-1)\ln 2 =$$

$$= \left(2s+\frac{1}{2}\right)\ln\left(2s+\frac{1}{2}\right) - \left(2s+\frac{1}{2}\right) - \ln(2s) + c_0 + \ln\sqrt{\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

Далее воспользуемся соотношением

$$\ln(s+a) = \ln s + \frac{a}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right).$$

Получим

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)\ln s + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) - \left(s+\frac{1}{2}\right) + c_0 - \ln s +$$

$$+(s+1)\ln s + 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) - (s+1) + c_0 - \ln s + (2s-1)\ln 2 =$$

$$= \left(2s + \frac{1}{2}\right) \ln 2 + \left(2s + \frac{1}{2}\right) \ln s + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{s}\right) -$$

$$- \left(2s + \frac{1}{2}\right) - \ln 2 - \ln s + c_0 + \sqrt{\pi}.$$

Приводя подобные члены, приходим к равенству

$$c_0 = \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right),$$

откуда имеем $c_0 = \ln \sqrt{2\pi}$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что если снова воспользоваться соотношением

$$\ln (s + a) = \ln s + \frac{a}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right),$$

то из теоремы 1 можно получить еще один вариант формулы Стирлинга вида

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

В частности, при $s = n + 1$ отсюда имеем

$$\ln \Gamma(n+1) = \ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + 1 - (n+1) + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= n \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, справедлива асимптотическая формула

$$n! = \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n} e^{O(1/n)} = \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

которая тоже называется формулой Стирлинга.

Более тщательные вычисления позволяют получить оценку вида $0 > R \geq -1/(24s + 12)$ для остатка R в асимптотической формуле теоремы 1. Этот результат был установлен Гауссом. Он же доказал, что величину $e^{O(1/n)}$ в асимптотической формуле для $n!$ можно заменить на e^{θ_n}, где $0 < \theta_n \leq 1/(12n)$.

Разумеется, теория эйлеровских интегралов далеко не исчерпывается доказанными здесь утверждениями, однако рамки нашего курса требуют ограничиться рассмотренными вопросами.

Глава XVIII
РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

Лекция 23

§ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДРОБНОЙ ДОЛИ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ РЯДОМ. ФОРМУЛА СУММИРОВАНИЯ ПУАССОНА. СУММЫ ГАУССА

Эта глава в основном посвящена изучению тригонометрических рядов Фурье. Важность рассматриваемой темы обусловлена той большой ролью, которую играют ее приложения не только в математике, но и в механике, физике и других научных дисциплинах. Во многом это обусловлено тем, что тригонометрические ряды Фурье соединяют в себе особенности как тригонометрических рядов, так и общих рядов Фурье. Заметим, кстати, что при знакомстве с очередным утверждением полезно отмечать для себя, какую из двух указанных сторон теории оно по преимуществу отражает.

Обширность темы не позволяет сколько-нибудь полно охватить в программе курса лекций по математическому анализу даже классические ее аспекты, так что ограничимся наиболее простыми теоремами, отражающими общую ситуацию. В конце главы коснемся также и некоторых вопросов элементарной теории интеграла Фурье.

Сначала дадим основные определения.

Определение 1. *Функция $P_n(x)$ вида*

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется **тригонометрическим многочленом степени** *n или порядка n.*

Поясним, почему при определении одночлена "нулевой степени" $a_0/2$ коэффициент a_0 берется с числовым множителем $1/2$.

Дело в том, что указанная запись позволяет единообразно представить коэффициенты $a_0, a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ в следующем виде:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(x)\cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(x)\sin kx dx,$$

где $k = 0, 1, \dots, n$.

Определение 2. *Функциональный ряд вида*

$$\sum f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется **тригонометрическим рядом,** *точнее,* **формальным тригонометрическим рядом.**

Замечание. В определениях 1 и 2 аргумент x может принимать любые числовые значения. Поэтому вместо независимой переменной x можно рассматривать любую функцию $x = \varphi(t)$. Полученный таким образом формальный функциональный ряд будем также называть **тригонометрическим рядом.**

Определение 3. *Если существует функция $g(x)$ такая, что все коэффициенты a_k и b_k тригонометрического ряда $\sum f_n(x)$ могут быть выражены по формулам Эйлера – Фурье вида*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos kx dx \quad \text{и} \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin kx dx, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

то этот ряд называется **тригонометрическим рядом Фурье** *функции $g(x)$. При этом интегралы во всех формулах могут быть и несобственными.*

При изучении тригонометрических рядов возникают, в основном, те же вопросы, что и в случае любых функциональных рядов. Например, для конкретного ряда можно ставить задачу определения области сходимости и функциональных свойств его суммы. Можно также рассматривать вопросы о представлении данной функции в виде тригонометрического ряда, о единственности такого представления, о специальных признаках сходимости ряда в точке и на некотором множестве, о правилах почленного интегрирования и дифференцирования ряда и т.д.

С другой стороны, будут доказаны неравенство Бесселя, равенство Парсеваля и другие утверждения, отражающие свойства общих рядов Фурье. Здесь следует сказать, что коэффициенты ряда Фурье конкретной функции несут в себе полезную информацию о ней даже и тогда, когда ряд расходится. В этом случае существуют различные способы ее извлечения. В частности, большую роль играют здесь методы суммирования расходящихся рядов, о которых упоминалось ранее.

Но сначала разберем один пример, важный для дальнейших приложений. Рассмотрим тригонометрический ряд $f(x)$ вида

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi kx}{\pi k}.$$

Его n-ю частичную сумму обозначим через $s_n(x)$. Определим функции $\rho(x)$ и $\rho_0(x)$, полагая $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ и

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \rho(x), & \text{если } x \text{ --- нецелое число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ --- целое число.} \end{cases}$$

Функция $\rho_0(x)$ называется **функцией Бернулли.**

Теорема 1. *При натуральном n справедливы формулы*

$$\rho(x) = s_n(x) + \sigma_n(x), \quad \rho_0(x) = s_n(x) + r_n(x),$$

причем

$$|\sigma_n(x)| \le R_n(x), \quad |r_n(x)| \le R_n(x), \quad \text{где } R_n(x) = \frac{4}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \pi x}}.$$

Доказательство теоремы 1 будет проведено несколько позже, поскольку оно опирается на две следующие леммы.

Введем еще одно обозначение. Положим

$$T_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \cos 2\pi kx = 1 + 2\cos 2\pi x + \cdots + 2\cos 2\pi nx.$$

Лемма 1. *Имеют место соотношения:*

а) $s_n'(x) = T_n(x) - 1$; б) $|T_n(x)| \le 2n + 1$; в) $\int\limits_0^1 T_n(x)dx = 1$;

г) $T_n(x) = \frac{\sin \pi x(2n+1)}{\sin \pi x}$.

Доказательство. Утверждения а) — в) очевидны. Рассмотрим утверждение г). Имеем

$$2\cos\alpha x \sin\beta x = \sin(\alpha + \beta)x - \sin(\alpha - \beta)x,$$

откуда следует, что

$$T_n(x) = \frac{1}{2\sin\pi x} \sum_{k=-n}^{n} 2\cos 2\pi kx \sin\pi x =$$

$$= \frac{1}{2\sin\pi x} \sum_{k=-n}^{n} (\sin\pi(2k+1)x - \sin\pi(2k-1)x) =$$

$$= \frac{\sin\pi(2n+1)x - \sin\pi(-2n-1)x}{2\sin\pi x} = \frac{\sin\pi(2n+1)x}{\sin\pi x}.$$

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *При* $0 < \delta \le 1/2$ *справедлива оценка*

$$\left|\int\limits_{\delta}^{1/2} T_n(x)dx\right| = \left|\int\limits_{1/2}^{1-\delta} T_n(x)dx\right| \le \frac{4}{\sqrt{1+(2n+1)^2\sin^2\pi\delta}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $T_n(x)$ — функция периодическая с периодом 1 и четная, поэтому

$$\int\limits_{\delta}^{1/2} T_n(x)dx = \int\limits_{-1/2}^{-\delta} T_n(x)dx = \int\limits_{1/2}^{1-\delta} T_n(x)dx = A.$$

Положим $a = \pi(2n+1)$. Тогда имеем

$$A = \int\limits_{1/2}^{1-\delta} \frac{\sin ax}{\sin\pi x}dx = -\frac{1}{a}\int\limits_{1/2}^{1-\delta} \frac{d\cos ax}{\sin\pi x} =$$

$$= -\frac{1}{a}\left(\frac{\cos ax}{\sin\pi x}\bigg|_{1/2}^{1-\delta} - \int\limits_{1/2}^{1-\delta} \cos ax\, d\left(\frac{1}{\sin\pi x}\right)\right).$$

Заметим, что на участке интегрирования функция $\sin\pi x$ монотонно убывает, а функция $\varphi(x) = 1/\sin\pi x$ монотонно возрастает, поэтому $\varphi'(x) > 0$. Кроме того, $|\cos ax| \le 1$, и при $x = 1/2$ имеем $\cos ax = \cos\frac{\pi}{2}(2n+1) = 0$. Следовательно,

$$\left|\int\limits_{1/2}^{1-\delta} \cos ax\, d\left(\frac{1}{\sin\pi x}\right)\right| = \left|\int\limits_{1/2}^{1-\delta} \cos ax\varphi'(x)dx\right| \le$$

$$\le \left|\int\limits_{1/2}^{1-\delta} \varphi'(x)dx\right| = \frac{1}{\sin\pi\delta} - 1.$$

Отсюда, учитывая, что $\left|\frac{\cos ax}{\sin\pi x}\Big|_{1/2}^{1-\delta}\right| \le \frac{1}{\sin\pi\delta}$, имеем

$$|A| \le \frac{2}{a\sin\pi\delta}.$$

Далее, так как функция $y = \sin x/x$ убывает на промежутке $(0, \frac{\pi}{2})$ и $\pi\delta < \pi/2$, то имеем

$$\frac{\sin\pi\delta}{\pi\delta} \ge \frac{\sin\pi/2}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}, \qquad \frac{\pi\delta}{\sin\pi\delta} \le \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{1}{\sin\pi\delta} \le \frac{1}{2\delta}.$$

Следовательно,

$$|A| \le \frac{2}{a \cdot 2\delta} = \frac{1}{a\delta} = \frac{1}{\pi(2n+1)\delta}.$$

Если теперь $\frac{1}{\pi(2n+1)} \le \delta \le \frac{1}{2}$, то $|A| \le 1$, а если $0 < \delta < \frac{1}{\pi(2n+1)}$, то в силу оценки $|T_n(x)| \le 2n+1$ имеем

$$|A| = \left| \int\limits_{1/2}^{1-\delta} T_n(x)dx \right| = \left| \frac{1}{2} - \int\limits_0^{\delta} T_n(x)dx \right| \le$$

$$\le \frac{1}{2} + \delta(2n+1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} < 1.$$

Таким образом, справедлива оценка

$$|A| < \min\left(1, \frac{2}{a \sin \pi\delta}\right) \le 2 \min\left(1, \frac{1}{a \sin \pi\delta}\right) \le \frac{4}{\sqrt{1 + a^2 \sin^2 \pi\delta}},$$

так как при любых $x > 0$ и $y > 0$ имеет место очевидное неравенство

$$\min\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right) < \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Значения функций $\rho(x)$ и $\rho_0(x)$ отличаются только в точках вида $x = z$, где z — целое число. Проверим сначала справедливость утверждения теоремы для этих точек. Действительно, тогда имеем:

$$\sigma_n(z) = \sigma_n(0) = \rho(0) - s_n(0) = \frac{1}{2} < 4 = R_n(0),$$

$$r_n(z) = r_n(0) = \rho_0(0) - s_n(0) = 0 < 4 = R_n(0).$$

Если же x нецелое, то $\sigma_n(x) = r_n(x)$ и достаточно ограничиться рассмотрением одной только функции $\sigma_n(x)$. Поскольку обе функции $|\sigma_n(x)|$ и $R_n(x)$ четные и периодические с периодом 1, можно считать, что $0 < x < 1/2$. В этом случае имеем

$$\int\limits_0^x T_n(y)dy = \int\limits_0^x \left(1 + 2\sum_{k=1}^n \cos 2\pi k y\right) dy =$$

$$= x + \sum_{k=1}^n \int\limits_0^x \frac{d \sin 2\pi k y}{\pi k} = x + s_n(x).$$

Но так как $0 < x < 1/2$, то $\{x\} = x$ и $\rho(x) = 1/2 - \{x\} = 1/2 - x$, $x = 1/2 - \rho(x)$. Следовательно,

$$\int_0^x T_n(y)dy = \frac{1}{2} - \rho(x) + s_n(x) = \frac{1}{2} - \sigma_n(x),$$

откуда

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2} - \int_0^x T_n(y)dy = \frac{1}{2} - \int_0^{1/2} T_n(y)dy + \int_x^{1/2} T_n(y)dy = \int_x^{1/2} T_n(y)dy.$$

Теперь для оценки $\sigma_n(x)$ применим лемму 2. Получим

$$|\sigma_n(x)| = \left|\int_x^{1/2} T_n(y)dy\right| \le \frac{4}{\sqrt{1 + (2n+1)^2 \sin^2 \pi x}} <$$

$$< \frac{4}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \pi x}} = R_n(x).$$

Теорема 1 доказана.

В качестве простого следствия теоремы 1 докажем еще одну теорему.

Т е о р е м а 2. *При $n \to \infty$ имеем:*

а) $s_n(x) \to \rho_0(x)$;

б) если $\delta > 0$ и $I = [\delta, 1-\delta]$, то $s_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} \rho(x)$ и $s_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} \rho_0(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение а) эквивалентно тому, что последовательность $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Это действительно так, поскольку $r_0(0) = 0$ при всех n, а если x — нецелое число, то $|\sigma_n(x)| \le R_n(x) \to 0$. Что касается утверждения *б)*, то оно следует из признака Вейерштрасса, поскольку величина $|s_n(x)|$ мажорируется на I бесконечно малой числовой последовательностью $R_n(\delta) = \frac{4}{\sqrt{1+n^2 \sin^2 \pi\delta}}$. Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3 (формула суммирования Пуассона). *Пусть $a \le b$ — полуцелые числа, т.е. числа вида $z + 1/2$, где z — целое число. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, непрерывную на $X = [a, b]$, $|f'(x)| \le M$. Тогда при любом натуральном N справедлива формула*

$$S = \sum_{a<n\le b} f(n) = \sum_{n=-N}^{N} \int_a^b f(x) \cos 2\pi nx dx + R_N,$$

где

$$|R_N| \leq \frac{8M(b-a)\ln N}{N}.$$

В частности, при $N \to \infty$ имеем

$$S = \sum_{a<n\leq b} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \int\limits_a^b f(x)\cos 2\pi nx dx.$$

Здесь символ $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}{}'$ *означает, что сумма ряда берется в смысле главного значения по Коши.*

Доказательство. К сумме S мы применим формулу суммирования Эйлера. Получим

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b \rho(x)f'(x)dx.$$

По теореме 1 имеем

$$\rho(x) = s_N(x) + \sigma_N(x).$$

Следовательно,

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b s_N(x)f'(x)dx + R_N,$$

где $R_N = -\int\limits_a^b \sigma_N(x)f'(x)dx$. Интегрируя по частям и учитывая, что $s_N(a) = s_N(b) = 0$, получим

$$\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b s_N(x)f'(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b f(x)dx - f(x)s_N(x)\Big|_a^b + \int\limits_a^b s'_N(x)f(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b f(x)\left(\sum_{k=-N}^{N} \cos 2\pi kx - 1\right)dx =$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} \int_a^b f(x) \cos 2\pi kx dx.$$

Осталось оценить остаток R_N. Применяя теорему 1 и учитывая, что $|f'(x)| \leq M$, получим оценку

$$|R_N| \leq \left| \int_a^b \sigma_N(x) f'(x) dx \right| \leq 4M \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{1 + N^2 \sin^2 \pi x}}.$$

Подынтегральная функция в последнем интеграле периодична с периодом 1 и четна, поэтому имеем

$$|R_N| \leq 8M(b-a) \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 + N^2 \sin^2 \pi x}} \leq 8M(b-a) \left(\int_0^{1/N} dx + \int_{1/N}^{1/2} \frac{dx}{2Nx} \right) =$$

$$= 8M(b-a) \left(\frac{1}{N} + \frac{\ln N/2}{2N} \right) < \frac{8M(b-a) \ln N}{N}.$$

Теорема 3 доказана.

Изящное приложение формулы суммирования Пуассона дал Дирихле. Он нашел точное значение сумм Гаусса вида

$$\sum_{n=1}^{N} \cos \frac{2\pi n^2}{N}, \quad \sum_{n=1}^{N} \sin \frac{2\pi n^2}{N}.$$

Упомянем еще об одном красивом применении формулы Пуассона, данном в 1903 г. Г. Ф. Вороным, к задаче о нахождении асимптотического выражения для количества целых точек под гиперболой (эта задача носит название "проблема делителей Дирихле"). Остановимся на вычислении значений сумм Гаусса. Отметим, что Гаусс в своих "Арифметических исследованиях" предложил несколько разных способов их вычисления, но мы будем основываться на методе Дирихле.

Теорема 4. *При натуральном N справедлива следующая формула:*

$$G(N) = \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n^2/N} = \frac{1 + i^{-N}}{1 + i^{-1}} \sqrt{N}.$$

Доказательство. Сначала напомним формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

где φ — действительное число. Записывая формулу суммирования Пуассона в комплексной форме, мы при $k \to \infty$ получим

$$G(N) = \sum_{m=-2k}^{2k} I(m) + R,$$

где

$$I(m) = \int_{0,5}^{N+0,5} e^{2\pi i\left(\frac{x^2}{N}+mx\right)} dx, R = O\left(\frac{N \ln k}{k}\right).$$

Преобразуем интеграл $I(m)$. Имеем

$$I(m) = \int_{0,5}^{N+0,5} e^{2\pi i\left((x+0,5mN)^2/N - m^2N/4\right)} dx =$$

$$= e^{-2\pi i \frac{m^2N}{4}} \int_{0,5mN+0,5}^{N(0,5m+1)+0,5} e^{2\pi i \frac{y^2}{N}} dy.$$

Суммируя величины $I(m)$ отдельно по четным числам m $(m = 2l)$ и отдельно по нечетным числам m $(m = 2l-1)$, получим

$$G(N) = \sum_{l=-k}^{k} \int_{Nl+0,5}^{N(l+1)+0,5} e^{2\pi i \frac{y^2}{N}} dy + \sum_{l=-k}^{k} e^{-\frac{\pi i N}{2}} \int_{N(l-0,5)+0,5}^{N(l+0,5)+0,5} e^{2\pi i \frac{y^2}{N}} dy + R =$$

$$= \int_{-Nk+0,5}^{N(k+1)+0,5} e^{2\pi i \frac{y^2}{N}} dy + i^{-N} \int_{-N(k-0,5)+0,5}^{N(k+0,5)+0,5} e^{2\pi i \frac{y^2}{N}} dy + R =$$

$$= \sqrt{N}\left(1 + i^{-N}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i z^2} dz + O\left(N^{\frac{1}{4}} k^{-\frac{1}{2}}\right) + R,$$

так как при $|\alpha| \leq \sqrt{N}$ имеет место неравенство

$$\left| \int_{k\sqrt{N}+\alpha}^{+\infty} e^{2\pi i z^2} dz \right| \leq k^{-1/2} N^{-1/4}.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последней формуле для $G(N)$, получим

$$G(N) = \sqrt{N}\left(1 + i^{-N}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i z^2} dz.$$

В частности, при $N = 1$ имеем

$$G(1) = \left(1 + i^{-1}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i z^2} dz.$$

Следовательно,

$$G(N) = \frac{1 + i^{-N}}{1 + i^{-1}}\sqrt{N}.$$

Теорема 4 доказана.

Далее нам потребуется выражение характеристической функции $\varphi(x) = \varphi_I(x)$ промежутка $I = [a, b]$, где $0 \le a \le b < 1$, через функцию $\rho_0(x)$.

Определение 4. *Функция* $\varphi(x) = \varphi_I(x)$, *заданная на отрезке* $[0, 1]$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a < x < b, \\ 1/2, & \text{если} \quad x = a \quad \text{или} \quad x = b, \\ 0, & \text{если} \quad x < a \quad \text{или} \quad x > b, \end{cases}$$

называется **характеристической функцией промежутка** I.

Лемма 3. *При* $x \in [0, 1]$ *справедливо равенство*

$$\varphi_I(x) = (b - a) + \rho_0(x - a) - \rho_0(x - b).$$

Доказательство. Обозначим через $f(x)$ правую часть доказываемого равенства. Очевидно, при всех $x \ne a$ или b имеем

$$f'(x) = \rho_0'(x - a) - \rho_0'(x - b) = -1 + 1 = 0.$$

Следовательно, $f'(x)$ — кусочно-постоянная функция, как и функция $\varphi_I(x)$. При этом точки их разрыва совпадают. Кроме того,

$$f(a) = b - a + \rho_0(0) - \rho_0(a - b) = b - a + \rho_0(b - a) = b - a + \frac{1}{2} - (b - a) = \frac{1}{2}.$$

Аналогично проверяется равенство $f(b) = \frac{1}{2}$. Имеем также

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = b - a + \rho_0\left(\frac{b-a}{2}\right) - \rho_0\left(\frac{a-b}{2}\right) = b - a + 2\rho_0\left(\frac{b-a}{2}\right) =$$

$$= b - a + 1 - 2\frac{b-a}{2} = 1 = \varphi_I\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

В точке $x = a$ обе функции имеют скачок, равный $+1$, а в точке b этот скачок равен -1. Это значит, что обе функции совпадают во всех точках отрезка $[0, 1]$. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 и теоремы 1 непосредственно вытекает справедливость следующей леммы.

Л е м м а 4. *При всех $n \geq 1$ имеет место формула*

$$\varphi_I(x) = (b - a) + s_n(x - a) - s_n(x - b) + E_n(x),$$

где

$$|E_n(x)| \leq \frac{4}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \pi(x - a)}} + \frac{4}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \pi(x - b)}}.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для любой кусочно-постоянной функции, периодической с периодом единица и равной полусумме своих предельных значений слева и справа в точках разрыва.

Лекция 24

§ 2. НЕРАВЕНСТВО БЕССЕЛЯ. ЗАМКНУТОСТЬ И ПОЛНОТА ОРТОНОРМИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Начнем рассмотрение со следующего определения, предложенного Лебегом.

Определение 1. *Точка x_0 называется* **регулярной точкой** *функции $f(x)$, если существуют ее левый и правый пределы при x, стремящемся к x_0, а ее значение $f(x_0)$ в этой точке равно их полусумме. В этом случае говорят, что функция $f(x)$ регулярна в точке $x = x_0$.*

Очевидно, что каждая точка непрерывности данной функции является ее регулярной точкой.

Определение 2. *Функция $f(x)$, регулярная в каждой точке промежутка I, называется* **регулярной на этом промежутке.**

Определение 3. *Периодическая функция, имеющая конечное число точек разрыва на каждом отрезке вещественной прямой и регулярная в этих точках, называется* **строго регулярной функцией.**

Определение 4. *Если периодическую функцию $g(x)$ можно представить в виде*

$$g(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + g(a),$$

где $f(t)$ — строго регулярная функция, то функция $g(x)$ называется **строго кусочно-гладкой функцией.**

Эти определения мы будем использовать при изучении тригонометрических рядов Фурье.

Множество $W = W_l$ всех строго регулярных функций, имеющих один и тот же период $l > 0$, образует линейное пространство. Справедливость этого утверждения легко проверяется.

Для каждой пары функций $f(x)$ и $g(x)$ из этого множества W зададим функционал $T(f, g)$ по формуле

$$T(f,g) = \varkappa \int\limits_0^l f(x)g(x)dx.$$

Здесь $\varkappa > 0$ — произвольное фиксированное число, которое назовем **весовым коэффициентом.**

Перечислим ряд свойств, которыми обладает функционал $T(f,g)$.

1^0. Симметричность, т.е. $T(f,g)=T(g,f)$.

2^0. Билинейность, т.е. при любых α и $\beta\in\mathbb{R}$ и $f,g,h\in W$

$$T(f,\alpha g+\beta h)=\alpha T(f,g)+\beta T(f,h).$$

3^0. Положительная определенность, т.е.:

а) $T(f,f)\geq 0$ при всех $f\in W$;

б) $T(f,f)>0$, если только $f(x)$ отлична от нуля хотя бы в одной точке.

Последнее неравенство следует из того, что если $f(x_0)=y_0\neq 0$, то либо левый предел l_1, либо правый предел l_2 этой функции в точке x_0 отличен от нуля, и тогда при некоторых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ для всех точек левой или правой δ-полуокрестности точки x_0 справедливо неравенство $|f(x)|\geq\varepsilon$. Следовательно,

$$T(f,f)=\varkappa\int\limits_0^l f^2(x)dx>\varkappa\delta\varepsilon^2>0,$$

что и означает справедливость утверждения 3б).

Другими словами, билинейный функционал $T=T_{l,\varkappa}$, заданный на декартовом произведении $H=W\times W$, можно рассматривать как скалярное произведение, определенное на пространстве W. Поэтому вместо символа $T(f,g)$ можно писать просто (f,g).

Определение 5. *Функциональная последовательность $f_n(x)\in W$ называется* **ортогональной системой функций**, *если при всех $m\neq n$ имеем $(f_n,f_m)=0$, т.е. f_m и f_n ортогональны между собой.*

Если при этом для всех $n\in\mathbf{N}$ выполнено условие $\sqrt{(f_n,f_n)}=1$, то эта последовательность называется ортонормированной системой функций

Напомним, что величина $\sqrt{(f,f)}=||f||$ называется нормой функции $f(x)$ относительно введенного нами скалярного произведения. Заметим, что одновременно это число является нормой функции $f(x)$ в пространстве L_2 всех функций, заданных на отрезке $[0,l]$, квадрат которых интегрируем по Лебегу на этом отрезке. Известно, что функциональное пространство L_2 удовлетворяет аксиомам гильбертова пространства. Однако ввиду того, что понятие интегрируемости по Лебегу осталось за пределами нашего курса, этого вопроса далее мы касаться не будем.

Итак, ортонормированная система функций — это такая функциональная последовательность $f_n(x)\in W$, все члены которой взаимно ортогональны и норма каждого члена равна единице.

Определение 6. *Число $c_n = c_n(g) = (f_n, g)$ называется* **коэффициентом Фурье** *функции $g(x) \in W$ по ортонормированной системе функций $F = \{f_n\}$. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ называется* **рядом Фурье функции $g(x)$ по ортонормированной системе функций F.**

Введенное понятие и есть общее определение ряда Фурье по ортонормированной системе функций.

Конечно, коэффициенты Фурье c_n можно вычислить и для функций $g(x)$, не обязательно входящих в W. Например, для интегрируемых на $I = [0, l]$ в собственном или даже в несобственном смысле, если только все интегралы $\int\limits_0^l f_n(x) g(x) dx$ существуют. И в этом случае ряд $\sum c_n f_n(x)$ можно было бы назвать рядом Фурье функции $g(x)$ по системе F. Однако такой подход будет вполне оправданным лишь в том случае, когда функция $g(x)$ принадлежит области определения введенного нами ранее скалярного произведения. В частности, это означает, что для этой функции существует ее скалярный квадрат $(g, g) = \varkappa \int\limits_0^l g^2(x) dx$. Именно это условие мы положим в основу определения общего понятия ряда Фурье по ортонормированной системе функций F.

Определение 7. *Пусть функция $g(x)$ удовлетворяет условию*

$$(g, g) = \varkappa \int\limits_0^l g^2(x) dx < +\infty.$$

Тогда функциональный ряд $\sum c_n f_n(x)$, где $f_n(x) \in F$ и $c_n = (g, f_n)$, называется **"стандартным" рядом Фурье по ортонормированной системе $F = \{f_n\}$.** *В случае, когда скалярный квадрат (g, g) расходится, но все коэффициенты $c_n = (g, f_n)$ существуют, соответствующий ряд $\sum c_n f_n(x)$ будем называть* **"нестандартным" рядом Фурье по системе функций F.**

Важным примером ортонормированной системы на отрезке $[0, 2\pi]$ относительно скалярного произведения с весовым коэффициентом $\varkappa = 1$ является система функций

$$F_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}.$$

Если же положить $\varkappa = 1/\pi$, то ортонормированной системой будет система функций

$$F_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \right\}.$$

Во втором случае ряд Фурье можно записать в следующем виде:

$$\sum f_n(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

По существу, мы получаем определенный ранее тригонометрический ряд Фурье. Легко убедиться, что и рассмотренный выше тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{\pi n}$ является рядом Фурье функции $\rho_0(x)$ по ортонормированной системе функций

$$F_3 = \{1, \sqrt{2}\cos 2\pi x, \sqrt{2}\sin 2\pi x, \dots, \sqrt{2}\cos 2\pi nx, \sqrt{2}\sin 2\pi nx, \dots\}$$

на отрезке $[0,1]$ со значением $\varkappa = 1$.

Аналогично, на отрезке $[0,l]$ при $\varkappa = 1$ ортонормированной является система функций F_4 :

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{2\pi x}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}, \dots, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{2\pi nx}{l}, \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi nx}{l}, \dots\right\}.$$

Ряд Фурье по системе функций F_4 будем называть тригонометрическим рядом Фурье по отрезку $[0,l]$.

Для коэффициентов Фурье c_n функции $g(x)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (неравенство Бесселя). *Для любой ортонормированной системы $F = \{f_n\}$ и любой функции $g(x)$ с условием $(g,g) < +\infty$ при произвольном $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{m} c_k^2 \le (g,g), \quad \text{где} \quad c_k = (g, f_k), \quad k = 1, \dots, m.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g_m = g_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k f_k(x).$$

Положим $h = h_m(x) = g(x) - g_m(x)$. Тогда получим

$$(g_m, f_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k (f_k, f_n) = \begin{cases} c_n & \text{при} \quad n \le m, \\ 0 & \text{при} \quad n > m; \end{cases}$$

$$(h_m, f_n) = c_n - (g_m, f_n) = \begin{cases} c_n & \text{при} \quad n > m, \\ 0 & \text{при} \quad n \le m. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$(g_m, g_m) = \left(\sum_{k=1}^{m} c_k f_k, \sum_{n=1}^{m} c_n f_n\right) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} c_k c_n (f_k, f_n) = \sum_{k=1}^{m} c_k^2.$$

Следовательно,

$$(g_m, h) = (h, g_m) = \sum_{k=1}^{m} c_k (g_m, f_k) = 0.$$

Поэтому

$$(g, g) = (g_m + h, g_m + h) = (g_m, g_m) + 2(g_m, h) + (h, h) =$$

$$= (g_m, g_m) + (h, h) \geq (g_m, g_m) = \sum_{k=1}^{m} c_k^2.$$

Теорема 1 доказана.

Заметим, что попутно мы доказали равенство

$$(g, g) = \sum_{k=1}^{m} c_k^2 + (h, h).$$

Определение 8. *Функцию $g_m(x)$ теоремы 1 будем называть* **m-м многочленом Фурье по ортонормированной системе** F.

Из теоремы 1 непосредственно следует справедливость двух утверждений, которые мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а 2. *В условиях теоремы 1:*

а) справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq ||g||^2 = (g, g);$$

б) $c_n = c_n(g) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Определение 9. *1. Ортонормированная система $F = \{f_n\}$ называется* **замкнутой**, *если*

$$||g||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Это равенство называется **равенством Парсеваля.**

2. Ортонормированная система $F = \{f_n\}$ называется **полной** *в линейном пространстве V, если для любой функции $g \in V$ с условием $(g, f_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется равенство $(g, g) = 0$.*

Утверждение 1. *Всякая замкнутая ортонормированная система функций является полной.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. будем считать, что $(g,g)>0$, но $c_k=c_k(g)=0$ при всех $k\in\mathbb{N}$. Тогда в силу замкнутости ортонормированной системы функций имеем

$$0<(g,g)=\sum c_k^2(g)=0,$$

что невозможно. Утверждение доказано.

Теорема 3 (свойство экстремальности коэффициентов Фурье). *При любых вещественных* $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ *справедливо неравенство*

$$\left\|g-\sum_{k=1}^m c_k f_k\right\|\le\left\|g-\sum_{k=1}^m \alpha_k f_k\right\|,$$

где $c_1,\ldots,c_m$ *— коэффициенты Фурье по системе функций* $F=\{f_k\}$.

Доказательство. Снова воспользуемся равенством $(h_m,f_k)=(g-g_m,f_k)=0$, справедливым при всех $k\le m$. Получим

$$\left\|g-\sum_{k=1}^m \alpha_k f_k\right\|^2=$$

$$=\left\|(g-g_m)+\sum_{k=1}^m(c_k-\alpha_k)f_k\right\|^2=\left\|g-g_m\right\|^2+\left\|\sum_{k=1}^m(c_k-\alpha_k)f_k\right\|^2=$$

$$=\left\|g-\sum_{k=1}^m c_k f_k\right\|^2+\sum_{k=1}^m(c_k-\alpha_k)^2\ge\left\|g-\sum_{k=1}^m c_k f_k\right\|^2.$$

Теорема 3 доказана.

Лекция 25

§ 3. ЗАМКНУТОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Нашей целью является доказательство равенства Парсеваля для ортогональной тригонометрической системы функций

$$F_0 = \{f_k(x)\} = \left\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\right\}.$$

Теорема 1 (теорема Ляпунова). *Тригонометрическая система F_0 замкнута в пространстве $W_{2\pi}$. Другими словами, для любой строго регулярной и 2π-периодической функции $g(x)$ имеет место равенство Парсеваля вида*

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2),$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются через $g(x)$ по формулам Эйлера – Фурье.

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что если первую функцию $f_1(x) = \frac{1}{2}$ в системе F_0 заменить на $h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то система F_0 преобразуется в систему F_2, ортонормированную относительно весового коэффициента $\varkappa = \frac{1}{\pi}$. Точнее, получим систему функций $F_2 = \{h_k(x)\}$, причем если $k = 1$, то $h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, если же $k = 2n$, то $h_k(x) = h_{2n}(x) = \cos nx$; а если $k = 2n+1$, то $h_k(x) = h_{2n+1}(x) = \sin nx$. Коэффициенты Фурье c_k функции $g(x)$ по системе F_2 при $k = 1, 2, \ldots$ связаны с величинами a_k и b_k следующими равенствами:

$$a_0 = c_1\sqrt{2}, \quad a_k = c_{2k}, \quad b_k = c_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

поэтому равенство Парсеваля можно записать в виде

$$(g, g) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} g^2(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

что согласуется с определением замкнутости ортонормированной системы, данным нами ранее.

Доказательство теоремы 1 опирается на две следующие леммы.

Лемма 1. *Для каждой строго регулярной функции $g(x)$, периодической с периодом 2π, и любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $P_m(x)$, удовлетворяющий условию*

$$\|g(x) - P_m(x)\| < \varepsilon.$$

В терминологии гильбертовых пространств это означает, что тригонометрические многочлены $\{P_m(x)\}$ являются всюду плотным множеством в линейном пространстве $W = W_{2\pi}$ по норме гильбертова пространства L_2.

Доказательство леммы 1. Рассмотрим далее функцию $g_1(x) = g(2\pi x)$. Она имеет период $l = 1$ и тоже является строго регулярной. Точки разрыва $x_1, \ldots, x_n$ этой функции разбивают отрезок $I = [0, 1]$ на интервалы $I_1, \ldots, I_n$. На каждом из них функция $g_1(x)$ является непрерывной и имеет левый и правый пределы. Следовательно, на каждом интервале I_k функция $g_1(x)$ равномерно непрерывна. Это значит, что при любом $\varepsilon_1 > 0$ интервал I_k можно разбить на конечное количество непересекающихся промежутков так, чтобы колебание функции $g_1(x)$ на каждом из последних не превышало ε_1. Теперь рассмотрим функцию $g_2(x)$, которая является непрерывной на любом из указанных промежутков и равна на нем значению функции $g_1(x)$ в его центре. Будем также считать, что в смежных точках этих промежутков $g_1(x)$ равна полусумме своих пределов слева и справа. Тогда очевидно, что $g_1(x)$ является кусочно-постоянной и строго регулярной функцией, причем при всех вещественных x справедливо неравенство

$$|g_1(x) - g_2(x)| \le \varepsilon_1.$$

Отсюда имеем

$$\|g_1(x) - g_2(x)\| = \sqrt{\int_0^1 (g_1(x) - g_2(x))^2 dx} \le \sqrt{\int_0^1 \varepsilon_1^2 dx} = \varepsilon_1.$$

Пусть теперь $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < 1$ — все возможные точки разрыва функции $g_2(x)$ на промежутке $[0, 1)$. При $n = 1, \ldots, k$ определим функции $\varphi_n(x)$, периодические с периодом 1 и задаваемые на отрезке $[0, 1]$ условиями

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t_{n-1} < x < t_n, \\ 1/2 & \text{при} \quad x = t_{n-1}, \quad x = t_n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда, очевидно, при некоторых постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ имеет место равенство

$$g_2(x) = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \varphi_n(x).$$

Но ранее было установлено, что

$$\varphi_n(x) = t_n - t_{n-1} + \rho_0(x - t_{n-1}) - \rho_0(x - t_n).$$

Поэтому при некоторых $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ имеем

$$g_2(x) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{k} \beta_n \rho_0(x - t_n).$$

Кроме того, раньше было доказано, что

$$|\rho_0(x - t_n) - s_m(x - t_n)| \leq R_m(x - t_n),$$

где $m \geq 4$ и

$$s_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\sin 2\pi k x}{\pi k}, \quad R_m(x) = \frac{4}{\sqrt{1 + m^2 \sin^2 \pi x}}.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|g_2(x) - Q_m(x)| \leq \sum_{n=1}^{k} |\beta_n| R_m(x - t_n),$$

где $Q_m(x) = \beta_0 + \sum\limits_{n=1}^{k} \beta_n s_m(x - t_n)$.

Применяя неравенство Коши, отсюда получим

$$|g_2(x) - Q_m(x)|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{k} |\beta_n| R_m(x - t_n)\right)^2 \leq \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \sum_{n=1}^{k} R_m^2(x - t_n).$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[0, 1]$, в силу периодичности функции $R_m(x)$ находим

$$\|g_2(x) - Q_m(x)\|^2 = \int_0^1 (g_2(x) - Q_m(x))^2 dx \leq \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \sum_{n=1}^{k} \int_0^1 R_m^2(x - t_n) dx =$$

$$= 8k \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 + m^2 \sin^2 \pi x}} \leq 8k \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \frac{1}{m} \int_0^{1/2} \frac{m dx}{1 + m^2 x^2} \leq$$

$$\leq 8k \sum_{n=1}^{k} \beta_n^2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} \leq \frac{A}{m},$$

где A — некоторая величина, не зависящая от m.

Далее, используя неравенство треугольника, получим

$$\left(\int\limits_0^1 (g_2(x) - Q_m(x))^2 dx\right)^{1/2} = ||g_2(x) - Q_m(x)|| = \delta_m \le$$

$$\le ||g_1(x) - g_2(x)|| + ||g_2(x) - Q_m(x)|| \le \varepsilon_1 + \left(\frac{A}{m}\right)^{1/2}$$

Но тогда, производя замену переменной интегрирования вида $x = t/(2\pi)$ и полагая $P_m(t) = Q_m(t/(2\pi))$, имеем

$$\delta_m^2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(g_1\left(\frac{t}{2\pi}\right) - Q_m\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} (g(t) - P_m(t))^2\, dt\right) = \frac{1}{2}||g(t) - P_m(t)||^2.$$

Следовательно,

$$||g(t) - P_m(t)|| \le \sqrt{2}\left(\varepsilon_1 + \left(\frac{A}{m}\right)^{1/2}\right).$$

Очевидно, что функция $P_m(t)$ является тригонометрическим многочленом порядка m. Кроме того, при $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$ и $m > 8A/\varepsilon^2$ имеем неравенство

$$\sqrt{2}\left(\varepsilon_1 + \left(\frac{A}{m}\right)^{1/2}\right) \le \varepsilon,$$

откуда окончательно получаем $||g(t) - P_m(t)|| \le \varepsilon$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *В условиях теоремы 1 для m-го многочлена Фурье $g_n(x)$ функции $g(x)$ справедливо соотношение*

$$||h_m|| = ||g(x) - g_m(x)|| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Ввиду свойства экстремальности коэффициентов Фурье для любого тригонометрического многочлена $p_n(x)$ порядка n имеет место неравенство

$$||g(x) - g_n(x)|| \le ||g(x) - p_n(x)||.$$

В силу того же свойства при всех натуральных k имеем

$$\|g(x) - g_{k+1}(x)\| \le \|g(x) - g_k(x)\|,$$

поскольку при $n = k+1$ многочлен Фурье $g_k(x)$ можно рассматривать в качестве тригонометрического многочлена $p_n(x)$.

Теперь при произвольном $\varepsilon > 0$ рассмотрим многочлен $P_m(x)$ из леммы 1. Тогда, полагая $n_0(\varepsilon) = m$, мы при всех $n > m = n_0(\varepsilon)$ получим неравенство

$$\|g(x) - g_n(x)\| \le \|g(x) - g_{n-1}(x)\| \le \|g(x) - g_m(x)\| \le \|g(x) - P_m(x)\| < \varepsilon.$$

Это означает, что при $n \to \infty$ имеем $\|h_n\| \to 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Как было показано ранее, достаточно доказать, что

$$(g, g) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

где $c_k = (g, f_k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x) f_k(x)\,dx$, $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а при $k \ge 1$ имеем $f_{2k} = \cos kx$, $\quad f_{2k+1}(x) = \sin kx$.

Кроме того, при доказательстве леммы 1 мы установили, что при любом $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$(g, g) - (g_n, g_n) = (g - g_n, g - g_n) = (h_n, h_n).$$

По лемме 2 имеем $(h_n, h_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу в последнем равенстве, получим

$$(g, g) = \lim_{n\to\infty} (g_n, g_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Тем самым теорема 1 доказана.

В заключение заметим, что для того, чтобы любая полная ортонормированная система функций в линейном пространстве V со скалярным произведением была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы пространство V было полным относительно нормы, определяемой этим скалярным произведением. Другими словами, V должно быть гильбертовым пространством. Доказательство последнего утверждения не слишком сложно, но оно выходит за пределы нашего курса.

§ 4. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Мы уже говорили о том, что не всякий тригонометрический ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

обязан быть рядом Фурье некоторой функции даже в том случае, если он сходится при всех вещественных значениях x. В качестве примера можно указать ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln en}.$$

По признаку Дирихле он сходится во всех точках x вещественной оси, но можно доказать, что он не является рядом Фурье какой-либо функции.

С другой стороны, теорема Рисса – Фишера утверждает, что если сходится числовой ряд $S = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$, то существует функция $g(x)$, коэффициентами Фурье которой являются числа a_n и b_n. Кроме того, тогда по теореме Карлесона сумма ее ряда Фурье существует "почти всюду" и равна $g(x)$. Не касаясь здесь этих весьма сложных вопросов, остановимся на доказательстве следующих утверждений.

Теорема 1. *Если коэффициенты $c_n(f)$ и $c_n(g)$ рядов Фурье строго регулярных функций $f(x) \in W_{2\pi}$ и $g(x) \in W_{2\pi}$ совпадают, то $f(x) = g(x)$ при всех вещественных значениях x.*

Доказательство. Коэффициенты Фурье $c_k(h)$ разности этих функций, $h(x) = f(x) - g(x) \in W_{2\pi}$, удовлетворяют соотношению $c_k(h) = c_k(f) - c_k(g) = 0$. Поэтому в силу равенства Парсеваля справедливо равенство

$$(h, h) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(h) = 0,$$

а отсюда следует, что $h(x) = 0$ или $f(x) = g(x)$ при всех x.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если тригонометрический ряд*

$$\sum c_k f_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится равномерно на отрезке $I = [0, 2\pi]$, то его сумма $g(x)$ является непрерывной функцией на I и данный ряд является ее рядом Фурье и он допускает почленное интегрирование.

Доказательство. Все функции $\sin nx$ и $\cos nx$ непрерывны на I, и в силу равномерной сходимости ряда $\sum c_k f_k(x)$ его сумма $g(x)$ является непрерывной функцией. Отсюда вытекает, что равенство

$$f_k(x)g(x) = f_k(x)\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$$

можно проинтегрировать по отрезку I и при этом в силу равномерной сходимости ряда на I в правой части равенства возможно почленное интегрирование. В результате приходим к равенствам

$$c_k(g) = (f_k, g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f_k, f_n) = c_k,$$

поскольку $(f_k, f_n) = 0$ при $k \neq n$ и $(f_k, f_k) = 1$.

Таким образом, установлено, что числа c_k одновременно являются коэффициентами Фурье функции $g(x)$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Тригонометрический ряд Фурье $\sum c_n f_n(x)$ строго кусочно-гладкой 2π-периодической функции $g(x)$ сходится к ней равномерно на отрезке $I = [0, 2\pi]$.*

Доказательство. Сначала покажем, что тригонометрический ряд

$$\sum c_k f_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

сходится равномерно на I. Для этого достаточно показать, что числовой ряд $\sum(|a_k| + |b_k|)$ сходится и тем самым является мажорантой для $\sum c_k f_k(x)$.

Прежде всего заметим, что функция $h = h(x) = g'(x) \in W_{2\pi}$, поэтому $(h, h) < +\infty$, и для функции $h(x)$ справедливо равенство Парсеваля, т.е.

$$(h, h) = \frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)\cos kx dx,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)\sin kx dx.$$

Далее, поскольку $g'(x)$ — строго регулярная функция, то при всех $k \in \mathbb{N}$ в этих интегралах допустимо интегрирование по частям. С его помощью получим

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)\cos kx dx = -\frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin kx dx = -kb_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g'(x)\sin kx dx = \frac{k}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos kx dx = ka_k,$$

т.е. $a_k = \beta_k/k, \quad b_k = -\alpha_k/k.$

Но тогда имеем

$$|a_k| = \frac{|\beta_k|}{k} \le \beta_k^2 + \frac{1}{k^2}, \quad |b_k| = \frac{|\alpha_k|}{k} \le \alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|) \le \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \le$$

$$\le (g,g) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} + 1 = (g,g) + 3 < +\infty.$$

Итак, мы доказали, что ряд $\sum c_k f_k(x)$ сходится равномерно на I к некоторой сумме $\varphi(x)$. Но по теореме 1 функция $\varphi(x)$ должна быть непрерывной и совпадать с $g(x)$. Тем самым теорема 3 доказана полностью.

Т е о р е м а 4. *Если 2π-периодическая функция $g(x)$ дифференцируема n раз, где $n \ge 1$, и ее n-я производная является строго кусочно-гладкой функцией, то:*

1) ряд $\sum k^n(|a_k| + |b_k|)$ сходится;

2) ряд Фурье функции $g(x)$ можно почленно дифференцировать n раз. Здесь числа a_k и b_k являются коэффициентами Эйлера – Фурье для функции $g(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании предыдущей теоремы заключаем, что функция $\varphi_n(x) = g^{(n)}(x)$ равна сумме своего ряда Фурье, который равномерно сходится на отрезке $I = [0, 2\pi]$. Кроме того, если α_k и β_k — ее коэффициенты Эйлера – Фурье, то ряд $\sum(|\alpha_k| + |\beta_k|)$ сходится. Отсюда путем последовательного интегрирования по частям, как и при доказательстве теоремы 3, приходим к равенствам

$$|\alpha_k| = k^n |a_k|, \quad |\beta_k| = k^n |b_k|, \quad \text{если} \quad n \quad \text{четно},$$

$$|\alpha_k| = k^n |b_k|, \quad |\beta_k| = k^n |a_k|, \quad \text{если} \quad n \quad \text{нечетно}.$$

Тем самым утверждение 1 доказано. Справедливость же утверждения 2 следует теперь из общей теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда, так как тогда каждый из числовых рядов $\sum k^m(|a_k| + |b_k|)$ сходится при любом $m = 1, \ldots, n-1$ и является мажорантой для последовательных производных суммы тригонометрического ряда Фурье, т.е. функций $\varphi_m(x) = f^{(m)}(x)$ на отрезке $I = [0, 2\pi]$. Теорема 4 доказана.

Заметим, что вместе с теоремами 3 и 4 попутно доказана следующая теорема.

Теорема 5. *1. Если сходится числовой ряд $\sum |a_n| + |b_n|$, то тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

сходится равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$ к некоторой непрерывной функции $g(x)$, являясь ее рядом Фурье.

2. Если при этом сходится ряд $\sum n^k(|a_n| + |b_n|)$, где $k \geq 1$, то ряд Фурье функции $g(x)$ можно почленно дифференцировать k раз.

§ 5. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ЧАСТИЧНОЙ СУММЫ РЯДА ФУРЬЕ. ПРИНЦИП ЛОКАЛИЗАЦИИ РИМАНА

Одной из важных задач теории тригонометрических рядов Фурье является нахождение условий, обеспечивающих сходимость данного ряда в фиксированной точке к значению породившей его функции. Возникающая здесь ситуация достаточно сложна. Оказывается, что ряд Фурье функции, непрерывной в данной точке, может в ней расходиться. В то же время пример функции $\rho_0(x)$ показывает, что разрывность функции, вообще говоря, не препятствует сходимости ее ряда Фурье к ней самой во всех точках вещественной оси. Далее мы рассмотрим простейшие признаки поточечной сходимости тригонометрических рядов Фурье. Но для этого потребуется вывести интегральное представление для их частичных сумм.

Введем следующее обозначение. Будем писать

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

если все числа a_k и b_k выражаются через $g(x)$ по формулам Эйлера – Фурье. Другими словами, тригонометрический ряд в правой части последнего соотношения является рядом Фурье функции $g(x)$. Если он сходится в точке x_0 к значению $g(x_0)$, то можно записать равенство

$$g(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0.$$

Преобразуем ряд Фурье функции $g(x)$ с помощью формулы Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

где i — мнимая единица, $i^2 = -1$. Для простоты можно эту формулу рассматривать как определение функции e^x при мнимых значениях аргумента. Легко доказать, что тогда основное функциональное свойство экспоненты в этом случае сохраняется на всей комплексной плоскости, т.е. если $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, и мы считаем, что $e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$, то

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2},$$

где z_1 и z_2 — комплексные числа. Далее, ввиду того что

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2},$$

имеет место равенство

$$\Sigma_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikx},$$

где $d_0 = \frac{1}{2}a_0$ и $d_k = \frac{1}{2}(a_{|k|} - \frac{ik}{|k|}b_{|k|}) = \frac{1}{2}(a_{|k|} - ib_{|k|}\operatorname{sign} k)$ при $k \neq 0$.

Заметим, что для величин d_k при целом k выполнены соотношения

$$d_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)(\cos kx - i\sin kx)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos kx dx - \frac{1}{i\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin kx dx\right) = \frac{1}{2}(a_{|k|} - ib_{|k|}\operatorname{sign} k).$$

Введем теперь для комплекснозначных 2π-периодических функций $f(x)$ и $g(x)$ скалярное произведение (f,g) по формуле

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Как обычно, черта над знаком функции означает операцию комплексного сопряжения. Тогда имеем

$$(f,g) = \overline{(g,f)}, \quad e^{ix} = \overline{e^{-ix}},$$

откуда следует, что

$$d_k = \left(g(x), e^{ikx}\right) \quad \text{и} \quad \left(e^{ikx}, e^{ikx}\right) = 1.$$

Таким образом, совокупность функций $\{e^{ikx}\}$, где k принимает все целые значения, образует ортонормированную систему функций относительно введенного выше скалярного произведения. Заметим еще, что весовой коэффициент $\varkappa$ равен здесь $\frac{1}{2\pi}$.

Эту комплексную форму записи ряда Фурье мы используем при выводе удобной для применения формулы для частичной суммы Σ_n ряда Фурье функции $g(x)$. Имеем

$$\Sigma_n = \sum_{k=-n}^{n} d_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-ikt}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}dt = \int_0^{2\pi} g(t)D_n(x-t)dt,$$

где функция $D_n(y)$ определяется равенством

$$D_n(y) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{iky}.$$

Определение 1. *Функция* $D_n(y)$ *называется* **ядром Дирихле** *порядка* n.

Установим связь между введенной ранее функцией $T_n(y)$ и ядром Дирихле $D_n(y)$. Имеем

$$T_n(y) = \frac{\sin\pi(2n+1)y}{\sin\pi y} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos 2\pi ky = \sum_{k=-n}^{n}\cos 2\pi ky =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n}(\cos 2\pi ky + i\sin 2\pi ky) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi k y} = 2\pi D_n(2\pi y).$$

Полагая $y = \frac{x}{2\pi}$, отсюда получим равенство

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}T_n\left(\frac{x}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin x/2}.$$

Очевидно, что функция $D_n(x)$ обладает следующими свойствами:

1^0. $\int\limits_0^{2\pi} D_n(x)dx = 1$;

2^0. $D_n(x) = D_n(-x)$;

3^0. $D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(n+1/2)x}{\sin x/2} = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\sin nx + \cos nx\right)$.

Поскольку функции $g(x)$ и $D_n(x)$ являются 2π-периодическими, с помощью замены переменной вида $t = x + y$ частичная сумма Σ_n преобразуется к следующему выражению:

$$\Sigma_n = \Sigma_n(g(x)) = \int\limits_0^{2\pi} g(t)D_n(x-t)dt = \int\limits_0^{2\pi} g(t)D_n(t-x)dt =$$

$$= \int\limits_x^{x+2\pi} g(x+y)D_n(y)dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x+y)D_n(y)dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x+y)\frac{\sin(n+1/2)y}{\sin y/2}dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x+y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny dy + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x+y)\cos ny dy.$$

Определение 2. *Эту цепочку равенств назовем* **интегральным представлением частичной суммы** Σ_n *ряда Фурье.*

Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 1 (лемма Римана). *Пусть $g(x) \in W_{2\pi}$ и при некотором $\delta > 0$ имеем равенство $g(x) = 0$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Тогда ряд Фурье функции $g(x)$ в точке $x = x_0$ сходится к нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ определены равенствами $f_1(y) = \frac{1}{2}g(x_0 + y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}$ и $f_2(y) = \frac{1}{2}g(x_0 + y)$. Тогда $f_1(y)$ и $f_2(y) \in W_{2\pi}$, поскольку функция $\operatorname{ctg}\frac{y}{2}$ непрерывна вне любой δ-окрестности каждой точки вида $x = 2\pi k$, где k — произвольное целое число, а внутри этой окрестности функция $f_1(y)$ равна нулю. Поэтому при $x = x_0$ имеем

$$\Sigma_n = \Sigma_n(g(x_0)) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x_0 + y)D_n(y)dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}g(x_0 + y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin nydy + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}g(x_0 + y)\cos nydy =$$

$$= b_n(f_1) + a_n(f_2),$$

где $b_n(f_1)$ и $a_n(f_2)$ являются коэффициентами Эйлера – Фурье функций $f_1(y)$ и $f_2(y)$ соответственно. Поскольку для этих функций справедливо равенство Парсеваля, $b_n(f_1) \to 0$ и $a_n(f_2) \to 0$ при $n \to \infty$, откуда и следует, что $\Sigma_n \to 0$. Лемма доказана.

Из леммы Римана вытекает справедливость следующего утверждения.

Т е о р е м а 1 (принцип локализации Римана). *Поведение ряда Фурье в точке $x = x_0$ полностью определяется значениями функции $g(x) \in W_{2\pi}$ в произвольно выбранной δ-окрестности этой точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам, по существу, надо доказать, что если функцию $g(x)$ изменить произвольным образом вне любой фиксированной δ-окрестности точки x_0, то сходимость ряда Фурье не нарушится и его сумма в этой точке не изменится. Другими словами, если частичная сумма $\Sigma_n(g(x_0))$ ряда Фурье функции $g(x) \in W_{2\pi}$ в точке $x = x_0$ сходится к числу α и функция $h(x) \in W_{2\pi}$ совпадает с $g(x)$ внутри некоторой δ-окрестности точки x_0, то и $\Sigma_n(h(x_0)) \to \alpha$ при $n \to \infty$.

Для доказательства рассмотрим разность

$$r(x) = g(x) - h(x) \in W_{2\pi}.$$

Функция $r(x)$ в точке $x = x_0$ удовлетворяет условию леммы Римана, поскольку $r(x) = 0$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Следовательно, при $n \to \infty$ имеем

$$\Sigma_n(r(x_0)) = \Sigma_n(g(x_0)) - \Sigma_n(h(x_0)) \to 0.$$

Но так как $\Sigma_n(g(x_0)) \to \alpha$ при $n \to \infty$, то тогда и $\Sigma_n(h(x_0)) \to \alpha$ при $n \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Заметим, что требование принадлежности функции $g(x)$ классу $W_{2\pi}$ можно значительно ослабить. Действительно, анализ доказательства леммы Римана и теоремы 1 показывает, что для их справедливости, по существу, достаточно, чтобы коэффициенты Эйлера – Фурье разности $r(x) = g(x) - h(x)$, а также функции $\varphi(x) = r(x)\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ стремились к нулю с возрастанием их номера к бесконечности. Для этого, вообще говоря, достаточно интегрируемости по Риману модулей этих функций на отрезке $[0, 2\pi]$ как несобственных интегралов второго рода. Доказательство последнего утверждения не слишком сложно, но поскольку в принципе оно мало отличается от уже разобранных случаев, то проводить его мы не будем.

Метод, использованный в лемме 1, позволяет доказать еще одну лемму, которая потребуется при выводе признаков поточечной сходимости рядов Фурье.

Л е м м а 2. *Пусть $f(x) \in W_{2\pi}$. Положим*

$$\alpha_n = \int_a^b f(y)\cos ny\, dy, \ \beta_n = \int_a^b f(y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny\, dy, \ \gamma_n = \int_a^b f(y) D_n y\, dy.$$

Тогда если $0 \le a \le b \le 2\pi$, то $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, если же выполнено более строгое условие $0 < a \le b < 2\pi$, то $\beta_n \to 0$ и $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Величину α_n можно рассматривать как коэффициент Фурье функции $g(x) \in W_{2\pi}$, которая совпадает с $f(x)$ на интервале (a, b) и обращается в нуль для точек x отрезка $[0, 2\pi]$, не принадлежащих отрезку $[a, b]$, т.е. для точек множества $E = [0, 2\pi]\backslash[a, b]$. Отсюда по свойству коэффициентов Фурье имеем $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Подобным образом величину β_n можно рассматривать в качестве коэффициентов Фурье b_n другой функции $h(x) \in W_{2\pi}$, которая на интервале (a, b) совпадает с функцией $f(y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}$, а для точек множества E обращается в нуль. Поэтому $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$. А так как $\gamma_n = \frac{1}{2\pi}(\alpha_n + \beta_n)$, то и $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма 2 доказана.

§ 6. ПРИЗНАКИ ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Снова будем рассматривать функцию $g(x)$ из класса $W_{2\pi}$. Используя интегральное представление для частичной суммы ряда Фурье, найдем выражение для разности r_n между значением функции $g(x)$ в точке $x=x_0$ и значением ее частичной суммы Σ_n в этой точке. Имеем

$$r_n = \Sigma_n - g(x_0) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (g(x_0+y) - g(x_0))D_n(y)dy = \int\limits_{-\pi}^{0} \cdots + \int\limits_{0}^{\pi} \cdots =$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi} \frac{g(x_0+y)+g(x_0-y)-2g(x_0)}{2} D_n(y)dy = 2\int\limits_0^{\pi} \varphi(y)D_n(y)\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \varphi(y)\frac{\sin\,(n+1/2)\,y}{\sin y/2}dy = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \varphi(y)\left(\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny + \cos ny\right)dy,$$

где

$$\varphi(y) = \varphi_{x_0}(y) = \frac{g(x_0+y)+g(x_0-y)-2g(x_0)}{2}.$$

Здесь величина $\varphi(y)$ как функция от y принадлежит пространству $W_{2\pi}$, $\varphi(0)=0$ и функция $\varphi(y)$ непрерывна в точке $y=0$.

Теорема 1 (признак Дини). *Пусть при некотором $\delta > 0$ существует следующий несобственный интеграл второго рода:*

$$B_\delta = \int\limits_0^{\delta} \frac{|\varphi(y)|}{y}dy.$$

Тогда ряд Фурье Σ функции $g(x)$ в точке $x=x_0$ сходится к значению $g(x_0)$.

Доказательство. В силу произвольности δ можно считать, что $\delta < \pi$.

Поскольку интеграл

$$B_\delta = \int\limits_0^{\delta} \frac{|\varphi(y)|}{y}dy$$

сходится, при любом $\varepsilon > 0$ найдется число $h = h(\varepsilon) > 0$ с условием

$$B_h = \int\limits_0^{h} \frac{|\varphi(y)|}{y}dy < \varepsilon.$$

Далее из интегрального представления для разности $r_n = \Sigma_n - g(x_0)$ имеем равенство $r_n = r_{n1} + r_{n2} + r_{n3}$, где

$$r_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \varphi(y)\left(\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny + \cos ny\right)dy,\quad r_{n1} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{h} \varphi(y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny dy,$$

$$r_{n2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_h^\pi \varphi(y)\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\sin ny dy,\ r_{n3} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi(y)\cos ny dy.$$

По лемме 2 §5 имеем $r_{n2} \to 0$ и $r_{n3} \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. при всех достаточно больших n получим $r_{n2} < \varepsilon$ и $r_{n3} < \varepsilon$. Относительно величины r_{n1} заметим, что если $0 < y < h < \pi$, то

$$|\varphi(y)|\frac{\cos y/2}{\sin y/2} \le \frac{|\varphi(y)|}{\sin y/2} \le \frac{\pi|\varphi(y)|}{y},$$

поскольку на указанном выше промежутке справедливо неравенство

$$\sin\frac{y}{2} > \frac{y}{\pi}.$$

Отсюда следует, что

$$|r_{n1}| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^h f_1(y)\sin ny dy\right| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^h |f_1(y)|dy \le \int\limits_0^h \frac{|\varphi(y)|}{y}dy < \varepsilon.$$

Поэтому при всех $n > n_0(\varepsilon)$ имеем оценку $|r_n| \le 3\varepsilon$. В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ это означает, что $r_n \to 0$, т.е. в точке $x = x_0$ ряд Фурье Σ сходится к значению $g(x_0)$.

Теорема 1 доказана.

Определение 1. *Будем говорить, что* **функция** $g(x)$ **удовлетворяет условию Липшица с параметром** α, *где* $0 < \alpha \le 1$, *если в некоторой δ-окрестности точки x_0 выполняется неравенство*

$$|g(x) - g(x_0)| < L|x - x_0|^\alpha,$$

где $L > 0$ — некоторая постоянная.

В случае когда это условие выполнено во всех точках отрезка $[x_0, x_1]$, говорят, что функция $g(x)$ принадлежит "классу Липшица α". Число L называется *константой Липшица.* При $\alpha = 1$ просто говорят, что $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 2. *Если в точке x_0 для функции $g(x)$ выполнено условие Липшица с параметром α, то ее ряд Фурье в данной точке сходится к значению $g(x_0)$.*

Доказательство. Покажем, что в данном случае к функции $g(x)$ можно применить признак Дини. Действительно, при $|y| < \delta$ имеем

$$|\varphi(y)| \le \frac{|g(x_0+y) - g(x_0)| + |g(x_0-y) - g(x_0)|}{2} \le L|y|^\alpha,$$

откуда следует, что

$$B_\delta = \int\limits_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y} dy \le L \int\limits_0^\delta y^{\alpha-1} dy = \frac{L y^\alpha}{\alpha} < +\infty.$$

Это значит, что условия признака Дини выполнены и ряд Фурье функции $g(x)$ сходится к значению $g(x_0)$. Теорема 2 доказана.

Докажем еще два признака сходимости рядов Фурье.

Теорема 3 (Признак Дирихле). *Если 2π-периодическая и строго регулярная функция $g(x)$ является кусочно-монотонной на отрезке $[0, 2\pi]$, то ее ряд Фурье сходится всюду к значению $g(x)$.*

Замечание. Кусочная монотонность функции $g(x)$ означает, что весь отрезок $[0, 2\pi]$ можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых $g(x)$ монотонна. В частности, кусочно-монотонная ограниченная функция будет функцией ограниченной вариации.

Доказательство теоремы 3 является простым следствием еще одного признака, заключенного в следующей теореме.

Теорема 4 (Признак Жордана). *Пусть функция $g(x) \in W_{2\pi}$ и $0 < \delta < \pi$. Пусть, далее, в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $g(x)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда ряд Фурье этой функции сходится в точке x_0 к значению $g(x_0)$.*

Доказательство. Поскольку $\varphi(y)$ — функция ограниченной вариации, она может быть представлена в виде $\varphi(y) = \varphi_1(y) - \varphi_2(y)$, где $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ — неубывающие неотрицательные функции. Можно считать, что $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ и функции $\varphi_1(y)$ и $\varphi_2(y)$ непрерывны в точке $y = 0$, так как этими свойствами обладает функция $\varphi(y)$. Действительно, монотонные функции имеют в каждой точке односторонние пределы. Тогда правосторонние пределы в точке $y = 0$ для обеих функций совпадают. Вычитая из каждой функций это общее предельное значение, получим две новые функции, которые будут удовлетворять всем указанным выше условиям, если только их значения в нуле взять равными нулю.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует значение $h = h(\varepsilon) > 0$ такое, что $0 < \varphi_1(h) < \varepsilon$ и $0 < \varphi_2(h) < \varepsilon$. Можно считать, что $h < \delta$.

Для остатка ряда Фурье функции $g(x)$ в точке x_0 справедливо представление

$$r_n = 2 \int\limits_0^\pi \varphi(y) D_n y dy = r_{n,1} + r_{n,2},$$

где

$$r_{n,1} = 2 \int\limits_0^h \varphi(y) D_n y dy, \quad r_{n,2} = 2 \int\limits_h^\pi \varphi(y) D_n y dy.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\varphi(y) = \varphi_1(y)$, т.е. $\varphi(y)$ — неубывающая неотрицательная функция. По лемме 2 §5 величина $r_{n,2} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому достаточно показать, что $r_{n,1} < c\varepsilon$, где $c > 0$ — некоторая постоянная. Заметим, что $\varphi(h) < \varepsilon$. Применяя к интегралу $r_{n,1}$ вторую теорему о среднем, получим

$$r_{n,1} = 2\varphi(h) \int\limits_{\xi}^{h} D_n(y)\, dy = 4\pi\varphi(h) \int\limits_{\xi/2\pi}^{h/2\pi} T_n(x)\, dx,$$

где функция $T_n(x)$ определена в §1.

Далее, $0 < \frac{\delta}{2\pi} \leq \frac{h}{2\pi} \leq \frac{1}{2}$, поскольку $h \leq \pi$. Поэтому, применяя к последнему интегралу оценку леммы 2 §1, будем иметь

$$r_{n,1} \leq 2\varphi(h) \cdot 4 < 8\varepsilon.$$

Тем самым теорема 4 доказана.

Замечание. Использование леммы 2 §1 в доказательстве теоремы 4 связано с тем, что величина $\xi = \xi_n$ в зависимости от n может изменяться, и поэтому прямое применение леммы 2 §5 невозможно.

Лекция 27

§ 7. ПОВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Приведем несколько утверждений относительно поведения коэффициентов Фурье для некоторых классов функций.

1. Пусть $g(x) \in W$ — четная функция. Тогда из формул Эйлера – Фурье имеем, что все коэффициенты Фурье $b_n = 0$, т.е. ряд Фурье функции $g(x)$ представляет собой тригонометрический ряд по косинусам.

Пусть теперь $g(x) \in W$ — нечетная функция. Тогда $a_n = 0$ для всех натуральных чисел n, т.е. $g(x)$ разлагается в ряд Фурье по синусам.

Пример. На интервале $(0, \pi)$ имеет место равенство

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

Данное равенство является простым следствием разложения функции Бернулли $\rho_0(x)$ в ряд Фурье.

Если на интервале $(0, \pi)$ задана функция $g(x) \in W$, причем $g(0) = \lim\limits_{x\to 0+} g(x)$, $g(\pi) = \lim\limits_{x\to\pi-} g(x)$, то мы можем распространить ее на всю вещественную ось, как 2π-периодическую и четную или нечетную функцию. В случае четной функции ей соответствует ряд Фурье по косинусам, а в случае нечетной — ряд Фурье по синусам.

2. Пусть $g(x) \in W$. Тогда ее коэффициенты Фурье стремятся к нулю при возрастании их номеров к бесконечности. Действительно, из неравенства Бесселя имеем, что ряд $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ сходится. Поэтому из необходимого признака сходимости ряда получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Это свойство коэффициентов Фурье мы уже неоднократно использовали.

Замечание. Если a_n и b_n таковы, что ряд

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

сходится, то ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

есть ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ из класса L_2 – функций, интегрируемых в квадрате (теорема Ф. Рисса – Фишера). В этом случае говорят, что ряд Фурье **сходится в среднем квадратичном.** Более точно это означает, что при $n \to \infty$ имеет место соотношение

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - s_n(x))^2 dx \to 0.$$

Покажем, как теорема Ф. Рисса – Фишера сведется к свойству полноты класса функций L_2. Пусть

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

обозначает n-ю частичную сумму тригонометрического ряда. Тогда в силу сходимости ряда $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ имеем

$$\int_0^{2\pi} (s_n(x) - s_m(x))^2 dx = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)^2 dx =$$

$$= \pi \sum_{k=m+1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \to 0$$

при $n > m, \quad m \to \infty$.

Следовательно, в силу полноты класса функций L_2 последовательность частичных сумм $\{s_n(x)\}$ ряда Фурье сходится в среднем квадратичном к некоторой функции из этого класса.

* **3.** Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$|f(x+h) - f(x)| \le L|h|^\alpha,$$

где $L > 0$ и $\alpha > 0$ — некоторые постоянные. Тогда справедливы неравенства

$$|a_n| \le \frac{L\pi^\alpha}{n^\alpha}, \quad |b_n| \le \frac{L\pi^\alpha}{n^\alpha}.$$

Из определения коэффициентов Фурье и периодичности $f(x)$ и $\cos nx$ имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/n}^{2\pi - \pi/n} f\left(\frac{\pi}{n} + y\right) \cos ny dy =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\pi}{n}+y\right)\cos ny dy.$$

Отсюда получим

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(f(x) - f\left(\frac{\pi}{n}+x\right)\right)\cos nx dx.$$

Следовательно,

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x) - f\left(\frac{\pi}{n}+x\right)\right| dx \le \frac{L\pi^\alpha}{n^\alpha}.$$

Аналогично доказывается оценка и для b_n.

4. Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации на периоде. Тогда имеем

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из определения функции ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$ получим, что $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, причем $f_1(x)$ и $f_2(x)$ положительны и не убывают. Применим вторую теорему о среднем для оценки следующего интеграла. При некотором $\xi, 0 < \xi < \pi$, будем иметь

$$\int_0^{2\pi} f_1(x)\cos nx dx = f_1(2\pi)\int_\xi^{2\pi}\cos nx dx = -f_1(2\pi)\frac{\sin n\xi}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно,

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

5. Ряд Фурье для $2l$-периодической функции $g(x) \in W$ при $l \ne \pi$.

Рассмотрим функцию $h(y) = g(ly/\pi)$, которая имеет период 2π. Поскольку $h(y) \in W$,

$$h(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos ky + b_k \sin ky).$$

Если теперь выразим y через x : $y = x\pi/l$, то получим

$$g(x) = h(y) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{kx\pi}{l} + b_k \sin\frac{kx\pi}{l}\right),$$

при этом

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(y)\cos ky\,dy = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(x)\cos\frac{kx\pi}{l}dx.$$

Аналогично имеем

$$b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} g(x)\sin\frac{kx\pi}{l}dx.$$

Другими словами, вся построенная нами теория рядов Фурье для функций, имеющих период 2π, с помощью линейной замены переменной переносится на случай $2l$-периодических функций.

§ 8. РАЗЛОЖЕНИЕ КОТАНГЕНСА НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИНУСА В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Развитый нами аппарат теории разложения функции в тригонометрический ряд Фурье позволяет, наконец, достаточно просто вывести формулу, представляющую синус в виде бесконечного произведения. Для этого сначала докажем не менее известную формулу разложения котангенса на простейшие дроби.

На отрезке $[-\pi,\pi]$ рассмотрим функцию $g(x) = \cos\alpha x$, где $\alpha \le 1/2$ — некоторое фиксированное число. Продолжим ее на всю числовую ось как периодическую с периодом 2π. Тогда функция $g(x)$ будет четной и непрерывной на всей вещественной оси $\mathbb{R}$. Поскольку $g(x)$ является непрерывной и кусочно-гладкой функцией на I, ее ряд Фурье равномерно сходится на I к $g(x)$. Поэтому для всех $x \in I$ имеем разложение

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{kx\pi}{l} + b_k\sin\frac{kx\pi}{l}\right),$$

где a_k и b_k — коэффициенты Эйлера – Фурье.

Далее, в силу четности функции $g(x)$ все b_k равны нулю, а для коэффициентов a_k при $\alpha \neq 0$ имеют место равенства

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\,dx = \frac{\sin\alpha\pi}{\alpha\pi},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\alpha x\cos kx\,dx = (-1)^k\frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2}\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}.$$

Таким образом,

$$g(x)=\cos\alpha x=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2}\cos kx\right).$$

Отсюда при $x=\pi$ получим

$$\pi\frac{\cos\alpha\pi}{\sin\alpha\pi}=\pi\operatorname{ctg}\alpha\pi=\frac{1}{\alpha}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{\alpha-k}.$$

Последняя формула и дает классическое разложение котангенса на простейшие дроби. Отсюда легко получить представление синуса в виде бесконечного произведения. Для этого заметим, что ряд справа сходится равномерно относительно параметра α при $0<|\alpha|\leq\frac{1}{2}$, поскольку имеет мажоранту вида $\sum 2/k^2$. Более того, поэтому он является производной своей первообразной.

С другой стороны, имеем

$$\left(\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}\right)'_\alpha=\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha-\frac{1}{\alpha},$$

$$\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)'=\frac{2\alpha}{\alpha^2-k^2}=\frac{1}{\alpha-k}+\frac{1}{\alpha+k}.$$

Следовательно, в силу непрерывности функции $\ln x$ при некотором $c\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\ln\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}=c+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)=$$

$$=c+\lim_{n\to\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)=c+\ln\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right).$$

Это значит, что при всех α с условием $0<|\alpha|\leq\frac{1}{2}$ имеет место формула

$$\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}=c_1\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right),$$

где $c_1=e^c$.

Заметим, что бесконечное произведение в правой части данного равенства сходится равномерно по α при $|\alpha|\leq\frac{1}{2}$. Поэтому, переходя к пределу при $\alpha\to 0$, находим c_1:

$$\pi=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\pi\alpha}{\alpha}=c_1\lim_{\alpha\to 0}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)=c_1.$$

Окончательно имеем

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2}\right).$$

Таким образом, формула представления синуса в виде бесконечного произведения доказана.

§ 9. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА И РЯДЫ БЕССЕЛЯ

Пусть планета M движется по эллипсу, в фокусе которого находится неподвижная планета F. Полуоси эллипса соответственно равны a и b, $a > b$. Пусть T — время полного оборота планеты M вокруг планеты F, а t — текущее время, отсчитываемое от положения планеты в точке A, находящейся на большой полуоси. Обозначим через S_{AFM} площадь сектора эллипса AFM. По закону Кеплера имеем

$$\frac{S_{AFM}}{\pi ab} = \frac{t}{T}, \quad \text{т.е.} \quad S_{AFM} = \frac{\pi abt}{T}.$$

Рассмотрим окружность с центром в точке O, находящейся в центре эллипса, и радиусом, равным $OA = a$, и обозначим через M_1 точку на окружности, являющуюся образом точки M при проекции на большую ось эллипса параллельно малой его оси. Положим также

$$\varepsilon = \frac{OF}{OA}, \quad u = \angle AOM_1.$$

Из геометрических соображений найдем площадь сектора эллипса AFM. Поскольку эллипс получается аффинным преобразованием из окружности сжатием по оси Oy в $\frac{b}{a}$ раз, то имеем

$$S_{AFM} = \frac{b}{a} S_{AFM_1}.$$

Далее находим

$$S_{AFM_1} = S_{AOM_1} - S_{FOM_1} = \frac{1}{2}a^2 u - \frac{1}{2}a^2\varepsilon \sin u.$$

Следовательно,

$$S_{AFM} = \frac{ab}{2}(u - \varepsilon \sin u).$$

Мы приходим к уравнению Кеплера

$$u - \varepsilon \sin u = 2\pi\frac{t}{T} = \zeta = \angle AOM.$$

Величина ζ называется **средней аномалией планеты**, u — **эксцентрической аномалией.** Если величина ζ увеличивается на 2π, то и величина u увеличивается на 2π. Поэтому $\cos nu, \sin nu$ являются 2π-периодическими функциями от ζ, т.е.

$$\cos(nu(\zeta+2\pi)) = \cos(nu(\zeta)).$$

Ранее было доказано, что $u(\zeta)$ — гладкая функция. Следовательно, ряды Фурье функций $\cos nu(\zeta)$ и $\sin nu(\zeta)$ по признаку Липшица сходятся. В силу нечетности функции $u(\zeta)$ будем иметь

$$\cos nu = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\zeta + a_2\cos 2\zeta + \dots,$$

$$\sin nu = b_1\sin\zeta + b_2\sin 2\zeta + \dots,$$

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos nu\cos\nu\zeta d\zeta, \quad b_\nu = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin nu\sin\nu\zeta d\zeta.$$

Теперь вычислим коэффициенты Фурье этих функций. Имеем

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos nu d\zeta = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos nu(1-\varepsilon\cos u)du.$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\zeta = u - \varepsilon\sin u, \quad d\zeta = (1-\varepsilon\cos u)du.$$

Таким образом,

$$a_0 = \begin{cases} -\varepsilon, & \text{если} \quad n=1, \\ 0, & \text{если} \quad n>1. \end{cases}$$

При $\nu \geq 1$ получим

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos nu\cos\nu\zeta d\zeta =$$

$$= \frac{2}{\pi\nu}\cos nu\sin\nu\zeta\Big|_{\zeta=0}^{\pi} - \frac{2n}{\pi\nu}\int\limits_0^\pi \sin nu\sin\nu\zeta du =$$

$$= \frac{2n}{\pi\nu}\int\limits_0^\pi (\cos(nu-\nu\zeta) - \cos(nu+\nu\zeta))du =$$

$$= \frac{2n}{\pi\nu}\int\limits_0^\pi \cos\left((n-\nu)u + \nu\varepsilon\sin u\right)du - \frac{2n}{\pi\nu}\int\limits_0^\pi \cos\left((n+\nu)u - \nu\varepsilon\sin u\right)du =$$

$$= \frac{2n}{\nu}\left(J_{\nu-n}(\nu\varepsilon) - J_{\nu+n}(\nu\varepsilon)\right),$$

где

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos\left(x\sin\varphi - k\varphi\right)d\varphi.$$

Аналогично находятся коэффициенты b_ν. Имеем

$$b_\nu = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin nu \sin\nu\zeta d\zeta = \frac{2n}{\pi\nu}\int\limits_0^\pi \cos nu\cos\nu\zeta du =$$

$$= \frac{2n}{\nu}\left(J_{\nu-n}(\nu\varepsilon) + J_{\nu+n}(\nu\varepsilon)\right).$$

Следовательно,

$$\cos u = -\frac{\varepsilon}{2} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(J_{\nu-1}(\nu\varepsilon) - J_{\nu+1}(\nu\varepsilon)\right)\frac{\cos\nu\zeta}{\nu},$$

$$\sin u = 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(J_{\nu-1}(\nu\varepsilon) + J_{\nu+1}(\nu\varepsilon)\right)\frac{\sin\nu\zeta}{\nu}.$$

Значение угла $u, 0 \le u < 2\pi$, однозначно определяется по его синусу и косинусу. Поэтому указанные разложения этих функций решают задачу об определении движения двух планет. Они были найдены В. Бесселем. Эти ряды сходятся при всех значениях ζ и любом значении эксцентриситета эллипса ε. До Бесселя задача двух тел решалась Лапласом с помощью разложения в степенные ряды по малому параметру ε, сходимость которых была доказана при $\varepsilon < 0,66274\ldots$.

Заметим, что функции $J_k(x)$ называются **функциями Бесселя.**

§ 10. ЯДРО ФЕЙЕРА И АППРОКСИМАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ВЕЙЕРШТРАССА

Наряду с тригонометрическими многочленами Фурье, которыми, согласно определению, являются частичные суммы ряда Фурье, большую роль в теории тригонометрических рядов играют многочлены Фейера. В качестве примера использования свойств этих многочленов докажем теорему Вейерштрасса о равномерном приближении функции, непрерывной на отрезке, последовательностью тригонометрических и алгебраических многочленов.

Определение 1. Тригонометрическим многочленом Фейера *порядка n для функции $g(x)$ называется функция $P_n(x)$ вида*

$$P_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} g_m(x),$$

где $g_m(x)$ — многочлен Фурье порядка n для функции $g(x)$, т.е. частичная сумма ряда Фурье вида

$$g_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

причем числа a_k и b_k при всех $k = 0, 1, \ldots, m$ являются коэффициентами Эйлера - Фурье функции $g(x)$.

Из определения, очевидно, имеем

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Используя интегральное представление для $g_m(x)$, приходим к равенству

$$P_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\int_{-\pi}^{\pi} g(x+y)D_m(y)dy = \int_{-\pi}^{\pi} g(x+y)F_n(y)dy,$$

где

$$F_n(y) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin{(m+1/2)y}}{\sin y/2}.$$

Определение 2. *Функция $F_n(y)$, определенная последним равенством, называется* **ядром Фейера** *порядка n.*

Установим некоторые свойства функции $F_n(x)$.

Справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 1. *При $n \geq 1$ справедливо равенство*

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\right)^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что $F_n(x) \geq 0$ при всех x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Суммируя по m, с помощью известных тригонометрических формул получим

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\sin(m+1/2)x}{\sin x/2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi n(\sin x/2)^2}\sum_{m=0}^{n-1}\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi n(\sin x/2)^2}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{\cos mx - \cos(m+1)x}{2} =$$

$$= \frac{1-\cos nx}{2\pi n\cdot 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin nx/2}{\sin x/2}\right)^2.$$

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *При $n \geq 1$ имеем*

$$J_n = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x)dx = 2\int_0^{\pi} F_n(x)dx = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как при всех m справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_m(x)dx = 1,$$

то $J_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{m=0}^{n-1} 1 = 1$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любой функции $g(x) \in W_{2\pi}$ справедлива формула*

$$P_n(x) - g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (g(x+y) - g(x))F_n(y)dy.$$

Это утверждение прямо следует из леммы 2 и из формулы интегрального представления для $P_n(x)$.

Теорема 1 (теорема Фейера). *Если функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $I = [-\pi, \pi]$ и $g(-\pi) = g(\pi)$, то последовательность ее многочленов Фейера $P_n(x)$ сходится к $g(x)$ равномерно на I.*

Доказательство. Функцию $g(x)$, как 2π-периодическую, продолжим на всю вещественную ось. Она будет непрерывна на $\mathbb{R}$, следовательно, и равномерно непрерывна на I. Это значит, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех y с условием $|y| < \delta$ и всех $x \in I$ выполнено неравенство

$$|g(x+y) - g(x)| < \varepsilon/2.$$

Кроме того, ввиду ограниченности $g(x)$ на отрезке I при некотором $C > 0$ и всех x и $y \in I$ имеем $|g(x+y) - g(x)| < C$.

Но тогда справедливы оценки

$$|g(x) - P_n(x)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)|g(x+y) - g(x)|dy \leq$$

$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} F_n(y)\frac{\varepsilon}{2}dy + 2\int_{\delta}^{\pi} F_n(y)Cdy \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)dy + \frac{C}{\pi n}\int_{\delta}^{\pi} \frac{(\sin ny/2)^2}{(\sin y/2)^2}dy \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C}{n}\frac{1}{(\sin\delta/2)^2} < \varepsilon,$$

если только $n > n_0(\varepsilon) = \frac{C\varepsilon}{2(\sin\delta/2)^2}$.

Но это и означает, что $P_n(x) \underset{I}{\rightrightarrows} g(x)$. В силу 2π-периодичности $P_n(x)$ и $g(x)$ отсюда при $n \to \infty$ также имеем

$$P_n(x) \underset{R}{\rightrightarrows} g(x).$$

Теорема 1 доказана.

Из этой теоремы немедленно вытекает справедливость следующей аппроксимационной теоремы Вейерштрасса для алгебраических многочленов.

Т е о р е м а 2. *Пусть функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $I_0 = [0, \pi]$. Тогда существует последовательность алгебраических многочленов $Q_n(x)$, равномерно сходящаяся к $g(x)$ на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доопределим четным образом функцию $g(x)$ на отрезке $[-\pi, 0]$ и затем периодически продолжим ее на всю числовую ось $\mathbb{R}$ с периодом 2π. Тогда функция $g(x)$ будет удовлетворять условиям теоремы 1. Поэтому при $\varepsilon \doteq \frac{1}{n}$ найдется номер m, для которого многочлен Фейера $P_m(x)$ приближает $g(x)$ с точностью до $\varepsilon/2$. Но сам многочлен $P_m(x)$ можно разложить в ряд Тейлора, который сходится равномерно на $I_0 = [0, \pi]$ к $g(x)$. Теперь в качестве $Q_n(x)$ возьмем многочлен Тейлора, приближающий $P_m(x)$ с точностью до $\varepsilon/2$. Тогда всюду на I_0 многочлен $Q_n(x)$ будет приближать $g(x)$ с точностью до ε.

Обратим внимание на то обстоятельство, что степень многочлена $Q_n(x)$ вовсе не обязательно будет равна номеру n, но этого нам и не требуется.

Итак, при всех $x \in I_0$ имеет место неравенство

$$|g(x) - Q_n(x)| \le \varepsilon = \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует, что $Q_n(x) \underset{I_0}{\rightrightarrows} g(x)$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 доказана.

§ 11. ИНТЕГРАЛ ДИРИХЛЕ И РАЗЛОЖЕНИЕ НА ПРОСТЕЙШИЕ ДРОБИ

Используя свойства ядра Фейера, вычислим значение интеграла Дирихле. Очевидно, имеем

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = -\int_0^\infty \sin^2 x\, d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -\left.\frac{\sin^2 x}{x}\right|_0^{+\infty} + \int_0^\infty \frac{2\sin x\cos x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Далее, делая замену переменной интегрирования $x = Ny, N > 0$, получим

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx = \frac{1}{N}\int_0^\infty \left(\frac{\sin Nx}{x}\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{N}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin Nx}{x}\right)^2 dx + \frac{\theta}{N}\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{N}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x}\right)^2 dx + \frac{1}{N}\int_0^{\pi/2}\sin^2 Nx\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx + \frac{\theta}{N}\int_{\pi/2}^{\infty}\frac{dx}{x^2},$$

где $|\theta| \le 1$.

Поскольку справедливы следующие формулы для ядра Фейера:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\sin Nx}{\sin x}\right)^2 = 2\pi F_N(2x), \qquad \int_0^{\pi} F_N(x)dx = \frac{1}{2},$$

из предыдущего равенства имеем

$$I = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_1}{N}\int_0^{\pi/2}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}dx + \frac{2\theta}{\pi N}, \qquad |\theta_1| \le 1.$$

Функция $\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$ интегрируема по Риману на $[0, \frac{\pi}{2}]$, следовательно,

$$I = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Устремляя N к плюс бесконечности, получим, что $I = \pi/2$.

Докажем еще две формулы, дающие представления для функций $\pi/\sin\pi x$ и $\pi\operatorname{ctg}\pi x$ в виде простейших дробей. Для второй из этих функций такое разложение было получено ранее с помощью разложения функции $\sin\alpha x$ в ряд Фурье. Здесь мы используем интегральное представление некоторой тригонометрической суммы и свойством коэффициентов Фурье строго регулярной функции стремиться к нулю с возрастанием их номера к бесконечности.

Имеют место следующие две формулы:

1) $\pi/\sin\pi x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=-k}^{k}(-1)^n/(x-n)$,

2) $\pi\operatorname{ctg}\pi x = \lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=-k}^{k}1/(x-n)$.

Докажем формулу 1. Для этого рассмотрим функцию

$$g_k(x) = \sum_{n=-k}^{k}\frac{(-1)^n\sin\pi x}{x-n}.$$

Имеем

$$g_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} \frac{\sin \pi(x-n)}{x-n} = \sum_{n=-k}^{k} \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} e^{\pi i t(x-n)} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} e^{\pi i t x} \left(\sum_{n=-k}^{k} e^{-\pi i t n} \right) dt = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} e^{\pi i t x} \frac{\sin \pi t\,(k+1/2)}{\sin \pi t/2} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \cos \pi t x \frac{\sin \pi t\,(k+1/2)}{\sin \pi t/2} dt.$$

Так как имеет место соотношение

$$\int_{-1}^{1} e^{\pi i t n} dt = \begin{cases} 2, & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

то

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sin \pi t\,(k+1/2)}{\sin \pi t/2} dt = \int_{-1}^{1} \left(\sum_{n=-k}^{k} e^{-\pi i t n} \right) dt = 2.$$

Отсюда получим

$$\pi - g_k(x) = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} (1 - \cos \pi t x) \frac{\sin \pi t\,(k+1/2)}{\sin \pi t/2} dt =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \sin^2 \frac{\pi t x}{2} \frac{\sin \pi t\,(k+1/2)}{\sin (\pi t/2)} dt =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sin^2 \frac{\pi t x}{2} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2} \sin (\pi k t) + \cos (\pi k t) \right) dt =$$

$$= 2\pi b_k (\sin^2 \frac{\pi t x}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2}) + 2\pi a_k (\sin^2 \frac{\pi t x}{2}).$$

Следовательно, при $k \to \infty$ имеем

$$\pi - g_k(x) \to 0,$$

т.е. при $x \notin \mathbb{Z}$ получим

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=-k}^{k} \frac{(-1)^n}{x-n},$$

или, в другой форме записи,

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2x}{n^2 - x^2}.$$

Формула 1 доказана.

Заметим, в частности, что при $x = \frac{1}{2}$ получаем следующее выражение для числа π:

$$\pi = 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 - 1}.$$

Докажем теперь формулу 2. Для этого рассмотрим функцию

$$f_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} \frac{\sin 2\pi x}{x - n}.$$

Найдем интегральное представление суммы $f_k(x)$. Имеем

$$f_k(x) = \sum_{n=-k}^{k} \frac{\sin 2\pi x}{x - n} = \sum_{n=-k}^{k} \pi \int_{-1}^{1} e^{2\pi i t(x-n)} dt =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} e^{2\pi i t x} \left(\sum_{n=-k}^{k} e^{-2\pi i t n} \right) dt = \pi \int_{-1}^{1} e^{2\pi i t x} \frac{e^{-2\pi i t k} - e^{2\pi i t (k+1)}}{1 - e^{2\pi i t}} dt =$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} e^{2\pi i t x} \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt = 2\pi \int_{0}^{1} \cos 2\pi t x \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1/2} \cos 2\pi t x \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt + 2\pi \int_{1/2}^{1} \cos 2\pi t x \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt =$$

$$= 2\pi \int_{0}^{1/2} \cos 2\pi t x \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt +$$

$$+ 2\pi \int_{-1/2}^{0} \cos 2\pi x(u+1) \frac{\sin \pi u(2k+1)}{\sin \pi u} du.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin \pi t(2k+1)}{\sin \pi t} dt = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{n=-k}^{k} e^{2\pi i t n} \right) dt = 1.$$

Аналогично выводу формулы 1 получим, что функция

$$f_k(x) - \pi(1 + cos 2\pi x)$$

выражается в виде линейной комбинации коэффициентов Фурье

$$b_k(\sin^2 \pi t x \operatorname{ctg} \pi t),$$

$$b_k(\sin \pi x u \sin \pi x(u+2) \operatorname{ctg} \pi u), b_k(\sin \pi x u \sin \pi x(u-2) \operatorname{ctg} \pi u)$$

и коэффициентов a_k от тех же функций, но не содержащих множителей $\operatorname{ctg} \pi t$ и $\operatorname{ctg} \pi u$. Эти коэффициенты стремятся к нулю с возрастанием их номеров к бесконечности.

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f_k(x)}{\sin 2\pi x} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=-k}^{k} \frac{1}{x-n} = \frac{\pi(1+\cos 2\pi x)}{\sin 2\pi x} = \pi \operatorname{ctg} \pi x.$$

Формула 2 доказана.

Лекция 29

§ 12. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Пусть $f(x)$ является периодической функцией с периодом $2\pi l$ и разлагается в сходящийся ряд Фурье. Тогда имеем

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{ikx}{l}},$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi l} \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-\frac{ikt}{l}} dt.$$

Обозначим через y_k величину k/l, и пусть

$$g_l(y_k) = \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-iy_k t} dt.$$

Тогда функция $f(x)$ представляется в следующем виде:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_l(y_k) e^{iy_k t} \frac{1}{l}.$$

Последняя сумма представляет собой формальную бесконечную интегральную сумму Римана с шагом $\Delta_k = 1/l$ для интеграла

$$F_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_l(y) e^{ixy} dy,$$

где

$$g_l(y) = \int_{-\pi l}^{\pi l} f(t) e^{-iyt} dt.$$

Если в интеграле $F_l(x)$ формально перейти к пределу при $l \to \infty$, то получится повторный несобственный интеграл вида

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt \right) dy$$

Определение 1. *Функция* $F(x)$ *называется* **интегралом Фурье** *или* **интегральной формулой Фурье.**

Если строго регулярная функция $|f(x)|$ интегрируема по Риману (в несобственном смысле) на всей числовой оси, то интеграл $g_l(y)$ сходится равномерно на $(-\infty, +\infty)$ по признаку Вейерштрасса и можно доказать возможность предельного перехода при $l \to +\infty$. Исходя из этого дадим следующее определение.

Определение 2. *Функция*

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt$$

называется **преобразованием Фурье** *функции* $f(x)$, *причем интеграл* $g(y)$ *понимается в смысле главного значения по Коши. Функцию же* $F(x)$ *называют* **обратным преобразованием Фурье** *функции* $g(x)$.

Заметим, что, как правило, имеет место равенство $F(x) = f(x)$.

Кроме того, следует сказать, что часто вместо "весовых" коэффициентов 1 и $1/(2\pi)$ в функциях прямого и обратного преобразований Фурье берут коэффициент $1/\sqrt{2\pi}$. Ясно, что от этого вид интеграла Фурье не меняется.

Для примера найдем преобразование Фурье функции $(l > 0)$

$$f(x) = \begin{cases} 1/(2l), & \text{если} \quad -l < x < l, \\ 1/(4l), & \text{если} \quad x = -l, x = l, \\ 0 & \quad — \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Имеем

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}\,dt = \int_{-l}^{l} e^{-iyt}\,dt = \frac{\sin ly}{ly}.$$

Для обратного преобразования Фурье отсюда получим

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ly}{ly}e^{iyx}\,dy = f(x).$$

В частности, при $x = 0$ имеем

$$f(0) = \frac{1}{2l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ly}{ly}\,dy.$$

Таблица 1

	$f(x)$, область ее определения	$g(x)$
1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < +\infty$, нормальное распределение	$e^{-y^2/2}$
2	$\begin{cases} 1/a, & \text{если} \quad x \in [0,a], \\ 0, & \text{если} \quad 0 \notin [0,a], \end{cases}$ равномерное распределение	$\frac{e^{iay}-1}{iay}$
3	$\begin{cases} 1/(2a), & \text{если} \quad x \in [-a,a], \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [-a,a], \end{cases}$ равномерное распределение	$\frac{\sin ay}{ay}$
4	$\begin{cases} \frac{1}{a}\left(1-\frac{\lvert x\rvert}{a}\right), & \text{если} \quad x \in [-a,a], \\ 0, & \text{если} \quad x \notin [-a,a], \end{cases}$ треугольное распределение	$2\frac{1-\cos ay}{a^2y^2}$
5	$\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos ax}{ax^2}$, $-\infty < x < +\infty$	$\begin{cases} 1-\frac{\lvert y\rvert}{a}, & \text{если} \quad y \in [-a,a], \\ 0, & \text{если} \quad y \notin [-a,a] \end{cases}$
6	$\frac{1}{\Gamma(t)}x^{t-1}e^{-x}$, $x > 0, t > 0$, гамма-плотность	$\frac{1}{(1-iy)^t}$
7	$\frac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}$, $-\infty < x < +\infty$, двустороннее показательное распределение	$\frac{1}{1+y^2}$
8	$\frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2}$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, распределение Коши	$e^{-t\lvert y\rvert}$
9	$e^{-x}\cdot\frac{t}{x}J_t(x)$, $x > 0$, $t > 0$, бесселева плотность	$\left(1-iy-\sqrt{(1-iy)^2-1}\right)^t$
10	$\frac{1}{\pi \operatorname{ch} x}$, $-\infty < x < +\infty$, гиперболический косинус	$\frac{1}{\operatorname{ch}(\pi y/2)}$

Приведем таблицу часто встречающихся прямых и обратных преобразований Фурье [31].

В правом столбце таблицы указаны плотности $f(x)$ распределения вероятностей, т.е. функции $f(x)$ с условиями $f(x) \geq 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Преобразование Фурье от функции распределения вероятностей называется характеристической функцией. Класс характеристических функций среди всех преобразований Фурье выделяется тем, что различным распределениям вероятностей соответствуют различные характеристические функции (теорема единственности), а также тем, что последовательность распределений вероятностей $\{F_n\}$ сходится к распределению вероятностей F тогда и только тогда, когда последовательность соответствующих характеристических функций сходится к непрерывной предельной функции (теорема непрерывности). Эти важные теоремы теории вероятностей мы здесь доказывать не будем, так как они выходят за рамки нашего курса.

Перейдем теперь к формулировке и выводу достаточных условий представимости функции в виде интеграла Фурье. Эти условия аналогичны соответствующим условиям Дини и Дирихле – Жордана для рядов Фурье. При их доказательстве мы будем опираться на свойство непрерывности преобразования Фурье $g(y)$ и его стремление к нулю при $y \to \infty$.

Обозначим через $L' = L'(-\infty, +\infty)$ класс функций, абсолютно интегрируемых по Риману на $(-\infty, +\infty)$ и являющихся строго регулярными на любом конечном отрезке.

Л е м м а 1. *Пусть функция $f \in L'$. Тогда ее преобразование Фурье $g(y)$ является непрерывной функцией на всей числовой оси $\mathbb{R}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интеграл $g(y)$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ по признаку Вейерштрасса, так как функция $|f(x)|$ является мажорантой для его подынтегральной функции $e^{iyx}f(x)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$. Тогда функция $\varphi(x,y) = e^{iyx}f(x)$ является непрерывной для всех точек $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. По теореме о непрерывности равномерно сходящегося несобственного интеграла функция $g(y)$ в этом случае будет непрерывной.

В общем случае для строго регулярной функции $f(x)$ можно указать непрерывную функцию $h(x)$, отличающуюся от $f(x)$ только в некоторых малых δ_n-окрестностях точек $x = x_n$ разрыва функции $f(x)$, причем $h(x)$ представляет собой линейную функцию с условием

$$\int\limits_{|x-x_n|<\delta_n} |f(x) - h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^n}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Положим

$$g_1(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{iyx}dx.$$

По доказанному выше $g_1(y)$ является непрерывной для всех $y \in \mathbb{R}$. Поэтому существует такое число $\delta > 0$, что для любого h с условием $|h| < \delta$ справедливо неравенство

$$|\Delta g_1| = |g_1(y+h) - g_1(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оценим сверху модуль величины $\Delta g = g(y+h) - g(y)$. Имеем

$$|\Delta g| \le |\Delta g_1| + 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x) - h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{3} + 2\cdot\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Следовательно, $g(y)$ непрерывна для всех $y \in \mathbb{R}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2 (лемма Римана). *Пусть $f(x) \in L'[a,b]$. Тогда при $y \to \infty$ имеем*

$$g(y) = \int\limits_a^b f(x)e^{iyx}dx \to 0.$$

Доказательство. Сделаем замену переменной интегрирования $x = t + \frac{\pi}{y}$. Получим

$$g(y) = -\int\limits_{a-\pi/y}^{b-\pi/y} f\left(t + \frac{\pi}{y}\right)e^{iyt}dt.$$

Следовательно,

$$g(y) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_a^b f(x)e^{iyx}dx - \int\limits_{a-\pi/y}^{b-\pi/y} f\left(x + \frac{\pi}{y}\right)e^{iyx}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_a^{b-\pi/y}\left(f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{y}\right)\right)e^{iyx}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{b-\pi/y}^{b} f(x)e^{iyx}dx - \frac{1}{2}\int\limits_{a-\pi/y}^{a} f(x)e^{iyx}dx = A_1 + A_2 + A_3.$$

Поскольку $f(x)$ — строго регулярная функция, отрезок $[a,b]$ можно разбить на промежутки непрерывности функции $f(x)$. И если на каждом промежутке непрерывности утверждение леммы будет доказано, то в силу того, что их число конечно, это утверждение останется справедливым и для всего отрезка $[a,b]$. Поэтому можно считать, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

В силу непрерывности $f(x)$ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $C > 0$ такое, что для всех y с условием $|y| > C$ выполняется неравенство

$$\left|f(x) - f\left(x + \frac{\pi}{y}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Так как непрерывная функция на отрезке ограничена на нем, то существует такое число $M > 0$, что $|f(x)| < M$ для всех $x \in [a, b]$. Следовательно, $|A_2| + |A_3| < \pi M/|y|$.

Отсюда получим, что при $|y| > \max(C, 2\pi M/\varepsilon)$ имеет место неравенство $|g(y)| < \varepsilon$. А это и означает стремление к нулю функции $g(y)$ при $y \to 0$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть функция $f(x) \in L'(-\infty, +\infty)$. Тогда ее преобразование Фурье $g(y)$ стремится к нулю при $y \to \infty$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной интегрируемости функции $f(x)$ имеем, что существует число $A > 0$ такое, что

$$\int\limits_{-\infty}^{-A} |f(x)|dx + \int\limits_{\infty}^{A} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу леммы Римана существует $Y > 0$, такое, что при $|y| > Y$

$$\left|\int\limits_{-A}^{A} f(x)e^{iyx}dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $|g(y)| < \varepsilon$ при $|y| > Y$, т.е. $g(y) \to 0$ при $y \to \infty$.

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть $|f(x)|$ является интегрируемой на $(-\infty, +\infty)$ и на любом конечном отрезке функция $f(x)$ строго регулярна. Пусть также при некотором $\delta > 0$ существует несобственный интеграл второго рода*

$$B_\delta = \int\limits_0^\delta \frac{|\varphi(y)|}{y}dy, \quad \varphi(y) = \frac{f(x_0 + y) + f(x_0 - y)}{2} - f(x_0).$$

Тогда интеграл Фурье функции $f(x)$ сходится в точке x_0 к значению $f(x_0)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_A(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A} g(y)e^{-iyx}dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-A}^{A} e^{-iyx}dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iyt}f(t)dt.$$

В последнем интеграле поменяем порядок интегрирования. Это возможно сделать, так как подынтегральная функция является непрерывной и несобственный интеграл равномерно сходится на всем множестве значений параметров. Получим

$$f_A(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \int\limits_{-A}^{A} e^{-iy(t-x)}dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{iA(t-x)} - e^{-iA(t-x)}}{i(t-x)}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u+x)\frac{\sin Au}{u}du = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}(f(u+x)+f(x-u))\frac{\sin Au}{u}du.$$

Докажем, что $\lim\limits_{A\to\infty} f_A(x_0) = f(x_0)$.

Для этого сначала вспомним, что

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin Au}{u}du = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$f_A(x_0) - f(x_0) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\varphi(u)\frac{\sin Au}{u}du.$$

В силу сходимости интеграла B_δ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $h > 0$ такое, что

$$\int\limits_0^{h}\frac{|\varphi(y)|}{y}dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из леммы Римана следует, что существует $Y > 0$ такое, что для всех $A > Y$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_h^{\infty}\frac{\varphi(u)}{u}\sin Au du\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда имеем, что $\lim\limits_{A\to\infty} f_A(x_0) = f(x_0)$.

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть $f(x) \in L'(-\infty, \infty)$ и пусть также в некоторой δ-окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию, $\delta > 0$. Тогда ее интеграл Фурье сходится в этой точке к значению $f(x_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из доказательства предыдущей теоремы получим, что

$$f_A(x_0) - f(x_0) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \varphi(u) \frac{\sin Au}{u} du.$$

Поскольку последний интеграл сходится, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $B > 0$ такое, что

$$\left| \frac{2}{\pi} \int\limits_B^\infty \varphi(u) \frac{\sin Au}{u} du \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу условия теоремы функция $\varphi(x)$ будет иметь ограниченную вариацию на интервале $(-\delta, \delta)$ и, кроме того, $\varphi(y) \to 0$ при $y \to 0$. Следовательно, ее можно представить в виде разности положительных неубывающих ограниченных функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, причем каждая из них стремится к нулю при $y \to 0$.

Нам достаточно доказать, что интеграл

$$R = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^B \varphi_1(u) \frac{\sin Au}{u} du$$

стремится к нулю при $A \to \infty$.

Сначала из условия $\lim\limits_{u \to 0} \varphi_1(u) = 0$ имеем, что существует число $h > 0$ такое, что при всех $|u| \leq h$ справедливо неравенство $\varphi_1(u) < \epsilon/8$. Представим R в виде $R = R_1 + R_2$, где R_1 и R_2 — интегралы от той же подынтегральной функции, что и интеграл R, но переменные интегрирования у них изменяются в других пределах: у R_1 они изменяются от 0 до h, а у R_2 — от h до B.

По второй теореме о среднем при некотором k, $0 < k < h$, имеем

$$|R_1| = \left| \frac{2}{\pi} \varphi_1(h) \int\limits_k^h \frac{\sin Au}{u} du \right| = \left| \frac{2}{\pi} \varphi_1(h) \int\limits_{Ak}^{Ah} \frac{\sin u}{u} du \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \varphi_1(h) \int\limits_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \varphi_1(h) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Далее, при фиксированных k и B в силу интегрируемости функции $\frac{\varphi_1(u)}{u}$ из леммы Римана следует, что $R_2 \to 0$ при $A \to \infty$. Поэтому существует число A_0 такое, что при $A > A_0$

$$|R_2| = \left|\frac{2}{\pi}\int\limits_h^B \varphi_1(u)\frac{\sin Au}{u}du\right| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Таким образом, получим

$$|f_A(x_0) - f(x_0)| = \left|\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \varphi(u)\frac{\sin Au}{u}du\right| < \varepsilon,$$

следовательно, $\lim\limits_{A\to\infty} f_A(x_0) = f(x_0)$.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Пусть $f(x) \in L'$. Тогда из теоремы 1, в частности, следует, что если, кроме того, функция $f(x)$ является кусочно-гладкой в некоторой δ-окрестности точки x_0, то выполняется условие Дини, поэтому интеграл B_δ существует, а следовательно, интеграл Фурье функции $f(x)$ в точке x_0 сходится к $f(x_0)$. Из теоремы 2 следует сходимость интеграла Фурье в точке x_0 к $f(x_0)$, если абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 является не только абсолютно интегрируемой, но и кусочно-монотонной.

Л е м м а 4. *Пусть* $(1+|x|^k)f(x) \in L'(-\infty,+\infty)$. *Тогда преобразование Фурье k раз дифференцируемо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку имеют место неравенства

$$|f(x)(ix)^n e^{ixy}| \le (1+|x|^n)|f(x)|, \quad n = 1,\dots,k,$$

в силу признака Вейерштрасса интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(ix)^n e^{ixy}dx$$

равномерно сходятся на всей числовой оси соответственно к функциям $g^{(n)}(y), n = 1,\dots,k$.

Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. *Пусть функции* $f(x), \ldots, f^{(k)} \in L'(-\infty, +\infty)$ *и пусть при* $x \to \infty$ *справедливы соотношения* $f(x) \to 0, \ldots, f^{(k-1)}(x) \to 0$. *Тогда имеем* $|g(y)| = o\left(|y|^{-k}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя по частям, при любом $A > 0$ будем иметь

$$\int_{-A}^{A} f^{(k)}(x)e^{ixy}dx = \left(f^{(k-1)}(x)e^{ixy}\right)\Big|_{-A}^{A} +$$

$$+ \left(f^{(k-2)}(x)(-iy)e^{ixy}\right)\Big|_{-A}^{A} + \cdots + (-iy)^k \int_{-A}^{A} f(x)e^{ixy}dx.$$

Устремим $A \to \infty$. Получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)e^{ixy}dx = (-iy)^k \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}dx = (-iy)^k g(y).$$

По лемме Римана имеем

$$\lim_{y\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x)e^{ixy}dx = 0,$$

поэтому $|g(y)| = o\left(|y|^{-k}\right)$.

Лемма 5 доказана.

Т е о р е м а 3 (равенство Планшереля). *Пусть*

$$f(x), f'(x), f''(x), \varphi(x) \in L'(-\infty, +\infty)$$

и при $x \to \infty$ *имеем* $f(x) \to 0, f'(x) \to 0$. *Пусть* $g(y)$ *и* $\psi(y)$ — *преобразования Фурье соответственно* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\overline{\psi(y)}dy,$$

где черта над функцией $\psi(y)$ *обозначает операцию комплексного сопряжения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A > 0$ — любое число. Преобразуем интеграл

$$\int_{-A}^{A} f(x)\varphi(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \varphi(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-ixy}dy\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{ixy}dx\right)g(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(x,y)dy.$$

Перемена порядка интегрирования в последнем несобственном интеграле обосновывается тем, что при некотором $c > 0$ имеют место неравенства

$$|g(y)| \le c(1+|y|^2)^{-1}, \quad |F(x,y)| \le \frac{c}{1+|y|^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x)|dx$$

и, следовательно, несобственный интеграл сходится равномерно на отрезке $[-A, A]$. Более того, в силу признака Вейерштрасса имеет место и равномерная сходимость по параметру A при его изменении на всей числовой оси. Поэтому возможно перейти к пределу под знаком несобственного интеграла, и мы получим равенство, утверждаемое в теореме.

Теорема 3 доказана.

Наконец, в качестве приложения теории интегралов Фурье докажем важную формулу Котельникова.

Назовем функцию $f(x)$ **сигналом**, а ее преобразование Фурье $g(y)$ **спектром сигнала.** Возникает задача восстановления сигнала по его спектру, т.е. функции по ее преобразованию Фурье. Часто известен спектр на конечном промежутке, т.е. финитный спектр, и мы желаем восстановить сигнал, отвечающий этому спектру, по некоторому дискретному множеству значений сигнала. На этот вопрос и дает ответ *формула Котельникова.*

Пусть существуют следующие интегралы:

$$g(y) = \hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{ixy}dx,$$

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-a}^{a}g(y)e^{-ixy}dy.$$

Разложим функцию $g(y)$, определенную на $[-a, a]$ и периодически продолженную на всю числовую ось с периодом $2a$, в ряд Фурье. Имеем

$$g(y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{iyn\frac{\pi}{a}},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{a}g(y)e^{-iyn\frac{\pi}{a}}dy = \frac{\sqrt{2\pi}}{2a}f_a\left(n\frac{\pi}{a}\right).$$

Следовательно, получим

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} f_a\left(n\frac{\pi}{a}\right) e^{iyn\frac{\pi}{a}} \right) e^{-ixy} dy =$$

$$= \frac{1}{2a} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_a\left(\frac{n\pi}{a}\right) \int\limits_{-a}^{a} e^{-iy(x-n\frac{\pi}{a})} dy =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_a\left(\frac{n\pi}{a}\right) \frac{\sin(ax-n\pi)}{ax-n\pi}.$$

Если ряд Фурье функции $g(y)$ при $|y| \le a$ сходится равномерно, то его можно почленно проинтегрировать. Поэтому мы получим

$$f_a(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_a\left(\frac{n\pi}{a}\right) \frac{\sin(ax-n\pi)}{ax-n\pi}.$$

Эта формула называется *формулой Котельникова.*

§ 13. МЕТОД ЛАПЛАСА И МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

Лаплас разработал метод для изучения асимптотического поведения при $n \to \infty$ интегралов вида

$$J(n) = \int_a^b f(x)\varphi^n(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ положительна при всех $x \in [a,b]$.

Суть его метода состоит в следующем. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — гладкие функции и $\varphi(x)$ имеет только один строгий максимум в точке $x = c$. Тогда при $n \to \infty$ этот интеграл с большой точностью можно заменить на интеграл от этой же подынтегральной функции в некоторой достаточно малой окрестности точки $x = c$. Но в ней можно воспользоваться разложениями Тейлора функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ и затем последний интеграл достаточно точно вычислить.

Здесь мы дадим изложение метода Лапласа в несколько нетрадиционной форме.

Теорема 1. *Пусть A, λ_2, λ_3 — некоторые положительные постоянные, $F(x)$ — вещественная функция, непрерывная со своими производными до третьего порядка на отрезке $[a,b]$, и при всех $x \in [a,b]$ справедливы неравенства*

$$0 < \lambda_2 \le -F''(x) \le A\lambda_2, \quad |F'''(x)| \le A\lambda_3.$$

Пусть также существует точка c, $a \le c \le b$, такая, что $F'(c) = 0$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b e^{F(x)}dx = \sqrt{2\pi}\frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{1/2}} + R,$$

$$R \le Be^{F(c)}\lambda_2^{-4/5}\lambda_3^{1/5} +$$

$$+B\left(\min\left(\frac{e^{F(a)}}{|F'(a)|}, e^{F(c)}\lambda_2^{-1/2}\right) + \min\left(\frac{e^{F(b)}}{|F'(b)|}, e^{F(c)}\lambda_2^{-1/2}\right)\right),$$

где B — некоторая абсолютная постоянная.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что функция $F'(x)$ является монотонной и, следовательно, обращается в нуль не более чем в одной точке. Это и есть точка $x = c$. Положим $\delta = (\lambda_2\lambda_3)^{-1/5}$. Пусть сначала для точки c выполняется условие $a + \delta \le c \le b - \delta$. Тогда имеем

$$\int_a^b e^{F(x)}dx = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{b} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются одинаково. По второй теореме о среднем имеем

$$|I_1| = \left|\int_a^{c-\delta} \frac{F'(x)e^{F(x)}}{F'(x)}dx\right| \le \frac{1}{|F'(c-\delta)|}\left|\int_a^{c-\delta} de^{F(x)}\right| \le e^{F(c-\delta)}\frac{1}{|F'(c-\delta)|},$$

$$|I_1| = \left|\int_{c+\delta}^{b} \frac{F'(x)e^{F(x)}}{F'(x)}dx\right| \le e^{F(c+\delta)}\frac{1}{|F'(c+\delta)|}.$$

Кроме того, справедливы неравенства

$$|F'(c+\delta)| = \left|\int_c^{c+\delta} F''(x)dx\right| = \int_c^{c+\delta} |F''(x)|dx \ge \delta\lambda_2,$$

$$|F'(c-\delta)| \ge \delta\lambda_2.$$

Следовательно,

$$|I_1| \le e^{F(c)}\frac{1}{\delta\lambda_2}, \quad |I_3| \le e^{F(c)}\frac{1}{\delta\lambda_2}.$$

Воспользуемся разложением Тейлора функции $F(x)$ на $(c-\delta, c+\delta)$. При некотором $\xi \in (c-\delta, c+\delta)$ получим

$$I_2 = \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{F(x)}dx = \int_{-\delta}^{\delta} e^{F(c+y)}dy = \int_{-\delta}^{\delta} e^{F(c)+\frac{F''(c)}{2}y^2+\frac{F'''(\xi)}{6}y^3}dy =$$

$$= e^{F(c)}\int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{F''(c)}{2}y^2}dy + e^{F(c)}\int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{F''(c)}{2}y^2}\left(e^{\frac{F'''(\xi)}{6}y^3} - 1\right)dy =$$

$$= \frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{1/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy - 2\frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{1/2}}\int_{\delta|F''(c)|^{1/2}}^{+\infty} e^{-y^2/2}dy +$$

$$+B_1 e^{F(c)} \int\limits_0^{\delta} e^{\frac{F''(c)}{2} y^2} \lambda_3 y^3 dy =$$

$$= \sqrt{2\pi} \frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{1/2}} + B_2 e^{F(c)} \left(\frac{1}{\lambda_2 \delta} + \lambda_3 \delta^4 \right) =$$

$$= \sqrt{2\pi} \frac{e^{F(c)}}{|F''(c)|^{1/2}} + B e^{F(c)} \lambda_2^{-4/5} \lambda_3^{1/5},$$

где B, B_1, B_2 — некоторые абсолютные постоянные.

Если $a \le c \le a + \delta$, то интеграл I_1 оценивается так:

$$|I_1| \le \left| \int\limits_{c-\delta}^{a} e^{F(x)} dx \right| = \left| \int\limits_{c-\delta}^{a} \frac{F'(x) e^{F(x)}}{F'(x)} dx \right| \le \frac{1}{|F'(a)|} e^{F(a)}.$$

Аналогично, если $b - \delta \le c \le b$, то

$$|I_3| \le \frac{1}{|F'(b)|} e^{F(b)}.$$

Отметим, что всегда имеет место оценка

$$\left| \int\limits_a^b e^{F(x)} dx \right| = \left| \int\limits_a^b e^{\frac{F''(\xi)(x-c)^2}{2}} dx \right| \le$$

$$\le e^{F(c)} \int\limits_a^b e^{-\frac{\lambda_2 (x-c)^2}{2}} dx \le e^{F(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_2}}.$$

Поэтому

$$|I_1| \le \min\left(e^{F(a)} |F'(a)|^{-1}, \sqrt{2\pi} e^{F(c)} \lambda_2^{-1/2}\right),$$

$$|I_3| \le \min\left(e^{F(b)} |F'(b)|^{-1}, \sqrt{2\pi} e^{F(c)} \lambda_2^{-1/2}\right).$$

Теорема 1 доказана полностью.

Пример. Найти асимптотическую формулу при $\lambda \to +\infty$ для

$$\Gamma(\lambda + 1) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\lambda} e^{-t} dt.$$

Приводя подынтегральное выражение к виду, данному в условии теоремы 1, получим

$$F(t) = \lambda \ln t - t, \quad F'(t) = \frac{\lambda}{t} - 1, \quad F''(t) = -\frac{\lambda}{t^2}, \quad F'''(t) = \frac{2\lambda}{t^3}.$$

В точке $t = \lambda$ функция $F(t)$ имеет максимум. Представим интеграл для $\Gamma(\lambda+1)$ в виде суммы трех интегралов:

$$\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^{\lambda/2} + \int\limits_{\lambda/2}^{2\lambda} + \int\limits_{2\lambda}^{\infty} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Интегралы на промежутках $(0, \lambda/2), (2\lambda, +\infty)$ оценим исходя из второй теоремы о среднем. Получим

$$I_1 = \int\limits_0^{\lambda/2} t^\lambda e^{-t} dt \le \frac{e^{F(\lambda/2)}}{F'(\lambda/2)} \le \left(\frac{\lambda}{2}\right)^\lambda e^{-\lambda/2} = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right)^\lambda,$$

$$I_3 \le \frac{e^{F(2\lambda)}}{|F'(2\lambda)|} \le 2(2\lambda)^\lambda e^{-2\lambda} = \left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \left(\frac{2}{e}\right)^\lambda.$$

На промежутке $[\lambda/2, 2\lambda]$ применим теорему 1. Будем иметь

$$16\lambda_2 = \frac{4}{\lambda} \ge -F''(t) \ge \frac{1}{4\lambda} = \lambda_2, \quad F'''(t) = \frac{2\lambda}{t^3} \le \frac{16}{\lambda^2} = 16\lambda_3,$$

$$\int\limits_{\lambda/2}^{2\lambda} t^\lambda e^{-t} dt = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda + B\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \lambda^{4/5}\lambda^{-2/5}.$$

Таким образом, при $\lambda \to +\infty$ получим

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda + B\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \lambda^{2/5},$$

т.е. при $\lambda \to +\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$\Gamma(\lambda+1) = \sqrt{2\pi\lambda}\left(\frac{\lambda}{e}\right)^\lambda \left(1 + B\lambda^{-1/10}\right).$$

Мы видим, что доказательство теоремы 1 основано на принципе локализации, т.е. на получении асимптотики интеграла в окрестности особой точки. Аналогичное применение принципа локализации к интегралам от тригонометрических функций называется **методом стационарной фазы.**

Приведем формулировку этого метода в виде теоремы. Следует отметить, что доказательство ее в основных чертах повторяет доказательство теоремы 1.

Т е о р е м а 2. *Пусть A, λ_2, λ_3 — некоторые положительные постоянные, $F(x)$ — вещественная функция, непрерывная со своими производными до третьего порядка на отрезке $[a,b]$, и при всех $x \in [a,b]$ справедливы неравенства*

$$0 < \lambda_2 \le F''(x) \le A\lambda_2, \quad |F'''(x)| \le A\lambda_3.$$

Пусть также существует точка c, $a \le c \le b$, такая, что $F'(c) = 0$. Тогда справедлива формула

$$\int_a^b e^{iF(x)}dx = \sqrt{2\pi}\frac{e^{i\pi/4+iF(c)}}{|F''(c)|^{1/2}} + R,$$

$$R \le B\left(\lambda_2^{-4/5}\lambda_3^{1/5} + \min\left(\frac{1}{|F'(a)|}, \lambda_2^{-1/2}\right) + \min\left(\frac{1}{|F'(b)|}, \lambda_2^{-1/2}\right)\right),$$

где B — некоторая абсолютная постоянная.

Заметим, что если при всех $x \in [a,b]$ справедливы неравенства $0 < \lambda_2 \le -F''(x) \le A\lambda_2$, то из теоремы 2 следует формула для функции $G(x) = -F(x)$, т.е. мы получаем соответствующую формулу для интеграла вида $\int_a^b e^{-iF(x)}dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $F'(x)$ обращается в нуль только в точке $x = c$, поскольку $F'(x)$ является монотонной функцией ввиду положительности $F''(x)$ на отрезке $[a,b]$. Положим $\delta = (\lambda_2\lambda_3)^{-1/5}$. Пусть сначала для точки c выполняется условие $a + \delta \le c \le b - \delta$. Тогда имеем

$$\int_a^b e^{iF(x)}dx = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{b} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Оценим сверху интегралы $|I_1|$ и $|I_2|$. По второй теореме о среднем имеем

$$|I_1| \le \left|\int_a^{c-\delta} \frac{F'(x)\cos F(x)}{F'(x)}dx\right| + \left|\int_a^{c-\delta} \frac{F'(x)\sin F(x)}{F'(x)}dx\right| \le$$

$$\le \frac{1}{|F'(c-\delta)|}\left|\int_{\xi_1}^{c-\delta} F'(x)\cos F(x)dx\right| + \frac{1}{|F'(c-\delta)|}\left|\int_{\xi_2}^{c-\delta} F'(x)\sin F(x)dx\right| \le$$

$$\leq \frac{4}{|F'(c-\delta)|} = \frac{4}{|\int\limits_{c-\delta}^{c} F''(x)dx|} \leq \frac{4}{\delta\lambda_2}.$$

Точно та же самая оценка имеет место и для величины $|I_3|$.

По формуле Тейлора при некотором $\xi \in (c-\delta, c+\delta)$ получим

$$I_2 = \int\limits_{c-\delta}^{c+\delta} e^{iF(x)}dx = \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{iF(c+y)}dy = \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{i(F(c)+\frac{F''(c)}{2}y^2+\frac{F'''(\xi)}{6}y^3)}dy \Rightarrow$$

$$= e^{F(c)}\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{iF''(c)}{2}y^2}dy + e^{F(c)}\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{iF''(c)}{2}y^2}\left(e^{\frac{iF'''(\xi)}{6}y^3}-1\right)dy =$$

$$= \frac{e^{iF(c)}}{(F''(c))^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iy^2/2}dy - 2\theta\frac{1}{(F''(c))^{1/2}}\int\limits_{\delta(F''(c))^{1/2}}^{+\infty} e^{iy^2/2}dy +$$

$$+B_1\int\limits_{0}^{\delta}\lambda_3 y^3 dy = \sqrt{2\pi}\frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+F(c))}}{(F''(c))^{1/2}} + B_2\left(\frac{1}{\lambda_2\delta}+\lambda_3\delta^4\right) =$$

$$= \sqrt{2\pi}\frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+F(c))}}{(F''(c))^{1/2}} + B\lambda_2^{-4/5}\lambda_3^{1/5},$$

где B, B_1, B_2, θ, $0<\theta<1$, — некоторые абсолютные постоянные.

Если $a \leq c \leq a+\delta$, то интеграл I_1 оценивается по второй теореме о среднем. Имеем

$$\left|\int\limits_{c-\delta}^{a}\frac{F'(x)\cos F(x)}{F'(x)}dx\right| \leq \frac{2}{|F'(a)|}e^{F(a)}.$$

Аналогично, если $b-\delta \leq c \leq b$, то

$$|I_3| \leq \frac{4}{|F'(b)|}.$$

Но так как всегда имеет место оценка

$$\left|\int\limits_{a}^{b} e^{iF(x)}dx\right| \leq 2\sqrt{\frac{2}{\lambda_2}},$$

то

$$|I_1| \leq \min\left(4|F'(a)|^{-1}, 8\lambda_2^{-1/2}\right),$$

$$|I_3| \le \min\left(4|F'(a)|^{-1}, 8\lambda_2^{-1/2}\right).$$

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось показать, что

$$\left|\int_a^b e^{iF(x)}dx\right| \le 2\sqrt{\frac{2}{\lambda_2}}.$$

Положим $\delta = 2\lambda_2^{-1/2}$. Будем считать, что $b - a \ge 4\delta$, так как в противном случае тривиальная оценка интеграла, имеющая вид $b-a$, является достаточной. Представим интеграл в виде

$$\int_a^b e^{iF(x)}dx = \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{b} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Если $a \le c < c+\delta$ или $b - \delta < c \le b$, то мы будем рассматривать только сумму двух интегралов:

$$\int_a^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{b} \quad \text{или} \quad \int_a^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{b}$$

Так как для $x \in (a, c-\delta)$ или $x \in (c+\delta, b)$ имеем

$$|F'(x)| = \left|\int_c^x F''(t)dt\right| \ge \lambda_2|x-c| \ge \lambda_2\delta,$$

то

$$|I_1| \le \frac{4}{\lambda_2\delta}, \quad |I_3| \le \frac{4}{\lambda_2\delta}.$$

Кроме того, тривиально получим $|I_2| \le 2\delta$. Следовательно,

$$\left|\int_a^b e^{iF(x)}dx\right| \le \frac{8}{\lambda_2\delta} + 2\delta \le 8\lambda_2^{-1/2}.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Пример. Найдем асимптотику функции Бесселя

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - k\varphi)d\varphi \quad \text{при } x \to +\infty.$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{iF(\varphi)}\,d\varphi, \quad F(\varphi) = k\varphi - x\sin\varphi.$$

Имеем

$$F'(\varphi) = k - x\cos\varphi, \quad F''(\varphi) = x\sin\varphi, \quad F'''(x) = x\cos\varphi.$$

Определим точку φ_0 из условия $F'(\varphi_0) = 0$, т.е. $\cos\varphi_0 = k/x$. Тогда

$$F''(\varphi_0) = \sqrt{x^2 - k^2}.$$

Поскольку $x \to +\infty$, при достаточно больших значениях x имеем $\pi/4 < \varphi_0 < 3\pi/4$. Поэтому

$$\int_0^\pi e^{iF(\varphi)} d\varphi = \int_0^{\pi/4} + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} + \int_{3\pi/4}^{\pi}.$$

Оценивая первый и третий интегралы из второй теоремы о среднем, получим

$$\left|\int_0^{\pi/4} e^{iF(\varphi)} d\varphi\right| \le \frac{4}{|F'(\pi/4)|} = \frac{4}{|x\sqrt{2}/2 - k|} \le \frac{B}{x}, \quad \left|\int_{3\pi/4}^{\pi} e^{iF(\varphi)} d\varphi\right| \le \frac{B}{x},$$

где B — некоторая положительная постоянная. Для точек φ промежутка $[\pi/4, 3\pi/4]$ имеем

$$x \ge |F''(\varphi)| = |x\sin\varphi| \ge x\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad |F'''(\varphi)| \le x.$$

Следовательно, из теоремы 2 найдем

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} e^{iF(\varphi)}\,d\varphi = \sqrt{2\pi}\frac{e^{i(\pi/4 + F(\varphi_0))}}{(F''(\varphi_0))^{1/2}} + Bx^{-3/5},$$

т.е.

$$J_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos\left(\pi/4 + k\arccos(k/x) - \sqrt{x^2 - k^2}\right)}{(x^2 - k^2)^{1/4}} + Bx^{-3/5}$$

или

$$J_k(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(\pi/4 + \pi k/2 - x)}{\sqrt{x}}.$$

В заключение заметим, что соединение методов Лапласа и стационарной фазы в теории функций комплексного переменного приводит к **методу перевала.** Важный вклад в разработку его внесли О. Коши (Cauchy O. *Mémoire sur divers points d'analyse* //Qeuvres completes. Paris. 1889 - 1911. T. II.), Риман Б. (*О разложении отношения двух гипергеометричеких рядов в бесконечную непрерывную дробь* //Сочинения. М., 1948. С. 187 - 194), П. А. Некрасов (*Ряд Лагранжа и приближенные выражения функций весьма больших чисел* //Мат. сб. 1886. Т. 12. С.645 - 724) и П. Дебай (Debye P.*Naherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grosse Werte des Arguments und unbeschränkt veräderliche Werte des Index* //Math. Ann. 1909. Bd. 67, S. 535 - 558). Современное изложение метода перевала можно найти в монографиях (Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М., 1966; Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. М., 1957; Брейн Н. Г. де. Асимптотические методы анализа. М., 1961; Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. М., 1970). История вопроса обсуждается в статье С. С. Петровой и А. Д. Соловьева (*Об истории создания метода перевала.* Историко-математические исследования. 1994. Вып. 35).

ЧАСТЬ IV

КРАТНЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Заключительные главы курса математического анализа касаются разделов математики, общих как для математического анализа, так и для специальных дисциплин, таких, как теория функций действительного и комплексного переменного, дифференциальная геометрия, функциональный анализ. Это обстоятельство объективно способствует увеличению объема материала, включаемого в вузовские учебники по математическому анализу.

С другой стороны, мы стремились построить данный учебник строго на основе курса лекций, сохраняя разделение материала на фактически прочитанные лекции. Опыт показывает, что это удобно и полезно как для студентов, так и для преподавателей, поскольку каждая лекция является своеобразной мерой усвоения новых знаний. Поэтому единственным резервом для включения в курс новых элементов мы видим совершенствование его изложения.

Эта часть курса, в основном, посвящена теории кратного интеграла Римана, а также криволинейным и поверхностным интегралам в пространстве произвольного числа измерений. Важно отметить, что, на наш взгляд, современная теория интегрирования на поверхностях опирается на понятие интеграла Римана, что предполагает систематическое его изучение в курсе анализа. Здесь мы доказываем классические теоремы Грина, Стокса и Гаусса – Остроградского с их стандартной интерпретацией в виде формул векторного анализа. Чтобы показать возможности предложенного подхода к построению теории поверхностных интегралов, мы даем доказательство формулы Стокса для кусочно-гладкой ориентированной поверхности произвольной размерности в многомерном пространстве. Попутно строится элементарная теория дифференциальных форм и теория объема многомерной поверхности.

Следует отметить, что ряд важных теорем рассмотрен в курсе в "модельной" ситуации, т.е. в частном случае, принципиально сохраняющем все наиболее трудные аспекты общего случая, но позволяющем несколько упростить изложение. К их числу относятся, в частности, формула замены переменных в кратном интеграле и некоторые формулы и теоремы о криволинейных и поверхностных интегралах.

Глава XIX
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 1

§ 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА КАК ПРЕДЕЛ ПО БАЗЕ

Двойной интеграл — это интеграл от функции двух переменных, взятый по обеим переменным *одновременно*. Данная фраза не является определением, она только указывает на то, как мы намерены вводить обобщение понятия определенного интеграла на случай функции двух переменных.

Для того чтобы получить такое обобщение, вспомним, как выглядит определение интеграла в одномерном случае, то есть в случае функции $y = f(x)$ от одной переменной x, определенной на отрезке $I = [a, b]$ и интегрируемой на нем по Риману. Одно из эквивалентных определений данного понятия можно сформулировать так.

Определение 1. *Интегралом* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *от ограниченной функции* $f(x)$ *называется число, равное* **алгебраической сумме** *площадей криволинейных трапеций, образованных кривой* $y = f(x)$ *при* $x \in [a, b]$. *При этом в данную сумму входят площади криволинейных трапеций, расположенных над осью абсцисс со знаком "+", а под ней — со знаком "−".*

Если мы обобщим понятие криволинейной трапеции на случай, скажем, функции двух переменных $z = g(x, y)$, заданной на прямоугольнике $P = I_1 \times I_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, то и получим одно из возможных определений двойного интеграла от функции $g(x, y)$ по прямоугольнику P. Этот интеграл обозначается символом

$$\iint\limits_P g(x, y)dxdy = \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} g(x, y)dxdy.$$

Допустим сначала, что $g(x, y) \geq 0$ для всех $(x, y) \in P$. Вместо криволинейной трапеции рассмотрим пространственную фигуру H, заключенную между поверхностью $z = g(x, y)$ и плоскостью $z = 0$ при $(x, y) \in P$. Другими словами, фигура H состоит изо всех тех точек (x, y, z), для которых $x \in I_1$, $y \in I_2$, а третья координата z удовлетворяет условию $0 \leq z \leq g(x, y)$.

Определение 2. *Фигуру H будем называть* **цилиндрической криволинейной фигурой**, *порожденной поверхностью* $z = g(x, y)$.

Если окажется, что эта фигура измерима каким-либо способом (по Жордану, по Лебегу или еще как-нибудь), то ее меру $\mu(H)$ можно взять в качестве искомого определения значения двойного интеграла

$$I = \iint\limits_P g(x, y)dxdy = \mu(H).$$

Заметим, что если μ есть мера Жордана, то данное выше определение двойного интеграла будет эквивалентным определению двойного интеграла Римана, которое будет сейчас дано. Можно было бы таким же образом разобрать общий случай, когда функция $g(x, y)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, но мы это сделаем в дальнейшем при доказательстве критерия измеримости по Жордану цилиндрической криволинейной фигуры.

Перейдем теперь к построению теории двойного интеграла Римана по прямоугольнику P. Сначала определим понятие цилиндрической фигуры в общем случае.

Определение 3. *Фигура $H \subset \mathbb{R}^3$ называется* **цилиндрической криволинейной фигурой**, *порожденной поверхностью $z = g(x, y)$, заданной на P, если H состоит изо всех таких точек (x, y, z), для которых $(x, y) \in P$, а координата z заключена между числами 0 и $g(x, y)$, то есть при $g(x, y) \geq 0$ имеем $0 \leq z \leq g(x, y)$, а при $g(x, y) < 0$ имеем $g(x, y) \leq z \leq 0$.*

Разобьем прямоугольник P на меньшие прямоугольники с помощью прямых, параллельных осям Ox и Oy и проходящих через точки $a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b_1$ разбиения T_x на оси Ox и $a_2 = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b_2$ разбиения T_y на оси Oy.

Прямоугольник $P_{k,l} \subset P$, точки (x, y) которого удовлетворяют условиям

$$x \in \Delta_k^{(x)} = [x_{k-1}, x_k], \quad y \in \Delta_l^{(y)} = [y_{l-1}, y_l],$$

где $\Delta_k^{(x)}$ есть k-й отрезок разбиения T_x и $\Delta_l^{(y)}$ — l-й отрезок разбиения T_y, будем называть элементом разбиения T прямоугольника P с индексом (k, l), а множество всех прямоугольников $P_{k,l}$, $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, \ldots, n$ — разбиением T прямоугольника P.

В каждом прямоугольнике $P_{k,l}$ возьмем точку $A_{k,l}$ с координатами $(\xi_{k,l}, \theta_{k,l})$. Множество прямоугольников $P_{k,l}$ и точек $A_{k,l}$ будем называть размеченным разбиением прямоугольника P и будем обозначать его через V.

Очевидно, что каждому размеченному разбиению V однозначно соответствует неразмеченное разбиение T прямоугольника P, получаемое из V отбрасыванием точек "разметки" $(\xi_{k,l}, \theta_{k,l})$. Другими словами, T является функцией от V, $T = T(V)$.

Отметим, что площадь элемента разбиения T, т.е. площадь прямоугольника $P_{k,l}$, равна $\Delta x_k \Delta y_l = (x_k - x_{k-1})(y_l - y_{l-1})$.

Определение 4. *Сумма*

$$\sigma(V) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} g(\xi_{k,l}, \theta_{k,l}) \Delta x_k \Delta y_l$$

называется **интегральной суммой Римана** *функции $g(x,y)$, соответствующей (отвечающей) размеченному разбиению V стандартного прямоугольника P.*

Длину $\sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_l^2}$ диагонали прямоугольника $P_{k,l}$ будем называть его **диаметром**.

Определение 5. Диаметром разбиения *(размеченного V и неразмеченного T) прямоугольника P будем называть максимальное значение диаметров элементов разбиения $\{P_{k,l}\}$. Обозначать его будем символом Δ_V и, соответственно, Δ_T.*

Определение 6. *Число I называется (двойным)* **интегралом Римана** *от ограниченной функции $g(x,y)$ по прямоугольнику P, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V прямоугольника P с условием $\Delta_T < \delta$ справедливо неравенство*

$$|\sigma(V) - I| < \varepsilon.$$

Здесь $\sigma(V)$ — интегральная сумма для функции $g(x,y)$, которая соответствует размеченному разбиению V. Поэтому последнее неравенство можно записать еще и так:

$$|\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} g(\xi_{k,l}, \theta_{k,l}) \Delta x_k \Delta y_l - I| < \epsilon.$$

В этом случае будем говорить, что $g(x,y)$ является **интегрируемой по Риману** на прямоугольнике P.

Далее рассмотрим следующие вопросы:

1) убедимся, что интеграл I есть предел по некоторой базе;

2) определим верхние и нижние суммы Дарбу и докажем критерий Римана интегрируемости функции от двух переменных;

3) установим свойства двойного интеграла, аналогичные свойствам однократного интеграла.

Начнем с определения базы множеств B и B'. Множество всех неразмеченных разбиений прямоугольника обозначим через A_P, а размеченных — через A'_P. В качестве окончаний b'_δ базы B' возьмем множество $\{V|\Delta_V < \delta\}$, т.е. множество разбиений, состоящее из тех $V \in A'_P$, для которых диаметр Δ_V меньше, чем $\delta > 0$.

Так как $\sigma(V)$ определена всюду на A'_P, то, очевидно, тогда определение двойного интеграла, данное выше, эквивалентно определению предела $\lim\limits_{B'} \sigma(V)$ по базе B'. Проверка справедливости этого утверждения состоит в том, что надо формально выписать определение предела по базе и сравнить его с данным выше определением. Далее базу B' будем обозначать символом $\Delta_V \to 0$.

Совершенно аналогично определяем базу $\Delta_T \to 0$ для всех неразмеченных разбиений A_P.

Итак, двойной интеграл есть предел по некоторой базе. А потому уже можно говорить о *единственности* двойного интеграла, применять теорему о переходе к пределу в неравенствах и так далее, получая отсюда различные утверждения о двойном интеграле типа его линейности, монотонности и другие. Позднее мы некоторые такие естественные свойства приведем.

Отметим, что неразмеченное разбиение T прямоугольника P можно определить и как пару (T_x, T_y), состоящую из неразмеченного разбиения $T_x : a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b_1$ отрезка $[a_1, b_1]$ на оси Ox и неразмеченного разбиения $T_y : a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b_2$ отрезка $[a_2, b_2]$ на оси Oy. Это разбиение T получается проведением $m+1$ вертикальных прямых $x = x_k$, $k = 0, \dots, m$ и $n+1$ горизонтальных прямых $y = y_l$, $l = 0, \dots, n$. Снова заметим, что если у размеченного разбиения V отбросить разметку точками $(\xi_{k,l}, \theta_{k,l}) \in P_{k,l}$, то, очевидно, возникает неразмеченное разбиение, которое будем обозначать символом $T = T(V)$.

Определение 7. *Множество всех размеченных разбиений $\{V\}$, которым отвечает одно и то же неразмеченное разбиение T_0, будем называть* **множеством разметок** T_0 *и обозначать символом $A'_P(T_0)$. Если $V \in A'_P(T_0)$, то будем говорить, что V является* **разметкой** T_0 *или, что то же самое, $T(V) = T_0$.*

§ 2. СУММЫ ДАРБУ И ИХ СВОЙСТВА

Переходим теперь к построению *теории Дарбу* для двойного интеграла Римана по прямоугольнику.

Обозначим для некоторого неразмеченного разбиения T прямоугольника P через $M_{k,l}$ и $m_{k,l}$ величины

$$M_{k,l} = \sup_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x,y), m_{k,l} = \inf_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x,y).$$

Тогда **верхней суммой Дарбу** функции $g(x,y)$, соответствующей (отвечающей) разбиению T, называется сумма $S(T)$, где

$$S(T) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} M_{k,l} \Delta x_k \Delta y_l,$$

а сумма

$$s(T) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} m_{k,l} \Delta x_k \Delta y_l$$

называется **нижней суммой Дарбу.**

Омега-суммой $\Omega(T)$, отвечающей разбиению T, назовем величину

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \omega_{k,l} \Delta x_k \Delta y_l,$$

где $\omega_{k,l} = M_{k,l} - m_{k,l}$.

Определение 1. *Число* $I^* = \inf\limits_{T \in A_P} S(T)$ *называется* **верхним интегралом Дарбу** *от функции* $g(x,y)$ *по прямоугольнику* P, *а число* $I_* = \sup\limits_{T \in A_P} s(T)$ — **нижним интегралом Дарбу** *от функции* $g(x,y)$.

Нам потребуются следующие свойства сумм Дарбу.

Лемма 1. *Для любого размеченного разбиения* $V \in A'_P$ *имеем*

$$s(T(V)) \leq \sigma(V) \leq S(T(V)).$$

Лемма 2. *Зафиксируем некоторое разбиение* $T_0 \in A_P$. *Будем иметь следующие соотношения*

$$s(T_0) = \inf_{V \in A'_P(T_0)} \sigma(V), S(T_0) = \sup_{V \in A'_P(T_0)} \sigma(V).$$

Лемма 3. *Для любых неразмеченных разбиений* T_1 *и* T_2 *имеем*

$$s(T_1) \leq S(T_2).$$

Лемма 4. *Для ограниченной на прямоугольнике* P *функции верхний* I^* *и нижний* I_* *интегралы Дарбу существуют, причем для любого разбиения* $T \in A_P$ *справедливы неравенства*

$$s(T) \leq I_* \leq I^* \leq S(T).$$

Л е м м а 5. *Размеченное разбиение V принадлежит окончанию $b'_\delta \in B'$ тогда и только тогда, когда $T(V) \in b_\delta$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о лемм аналогично доказательству соответствующих утверждений в одномерном случае и не представляет большого труда. Стоит лишь сказать о лемме 3, поскольку там участвуют два разных разбиения. Здесь, как и в одномерном случае, введем понятие **измельчения разбиения.**

Определение 2. *Неразмеченное разбиение T_2 называется* **измельчением разбиения** T_1, *если разбиение T_2 получается из T_1 добавлением конечного числа новых точек разбиения на оси Ox и по оси Oy. Говорят еще, что T_2* **следует за** T_1 *и пишут $T_2 \supset T_1$ или $T_1 \subset T_2$.*

В частности, любое неразмеченное разбиение T есть измельчение самого себя. Далее, очевидно, что при измельчении разбиения T нижняя сумма Дарбу $s(T)$ не может уменьшиться, а верхняя сумма Дарбу $S(T)$ не может увеличиться. Поэтому для доказательства утверждения леммы 3 надо на каждой оси Ox и Oy взять разбиение T_3, объединяющее разбиения T_1 и T_2. Тогда получим

$$s(T_1) \le s(T_3) \le S(T_3) \le S(T_2).$$

Отсюда имеем $s(T_1) \le S(T_2)$, что и доказывает утверждение леммы 3.

Отметим также, что утверждение леммы 4 по существу вытекает из леммы 3. Действительно, если образуем числовое множество M_1, состоящее изо всех значений величин $s(T)$, и множество M_2 значений величин $S(T)$, то утверждение леммы 3 означает, что любой элемент $a \in M_2$ есть верхняя грань множества M_1, а потому наименьшая верхняя грань множества M_1, т.е. I_* не превосходит этого элемента $a \in M_1$. Отсюда для любого числа $a \in M_1$ имеем $I_* \le a$. Это значит, что I_* является нижней гранью множества M_2. Но величина I^*, по своему определению, есть точная нижняя грань множества M_2, и потому для любого разбиения $T \in A_P$ имеем

$$s(T) \le I_* \le I^* \le S(T).$$

Лемма 4 доказана.

Л е м м а 6. *Для любого разбиения T имеем $\Omega(T) \ge I^* - I_*$.*

Действительно, из леммы 4 получим

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) \ge I^* - s(T) \ge I^* - I_*.$$

Лекция 2

§ 3. КРИТЕРИЙ РИМАНА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Т е о р е м а 1 (критерий Римана интегрируемости функции на прямоугольнике). *Для того чтобы ограниченная функция* $g(x,y)$ *была интегрируема на* $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из эквивалентных условий:*

1) $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$,

2) $I^* = I_*$,

3) $\inf\limits_{T} \Omega(T) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала эквивалентность условия интегрируемости функции условию 1.

Необходимость. Пусть $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. Это значит, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V с условием $\Delta_V < \delta_1$ имеем $|\sigma(V) - I| < \varepsilon_1$, т.е.

$$I - \varepsilon_1 < \sigma(V) < I + \varepsilon_1. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольное неразмеченное разбиение T с условием $\Delta_T < \delta_1$. Для него получим

$$s(T) = \inf_{V \in A_P(T)} \sigma(V), \quad S(T) = \sup_{V \in A_P(T)} \sigma(V).$$

Тогда из (1) вытекает, что

$$I - \varepsilon_1 \leq s(T) \leq I + \varepsilon_1, \quad I - \varepsilon_1 \leq S(T) \leq I + \varepsilon_1.$$

Следовательно, значения $s(T)$ и $S(T)$ лежат на одном отрезке $[I - \varepsilon_1, I + \varepsilon_1]$ длины $2\varepsilon_1$, т.е. имеет место неравенство

$$\Omega(T) = S(T) - s(T) \leq 2\varepsilon_1.$$

Если мы возьмем $\varepsilon_1 = \varepsilon/3$, $\delta(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon_1)$, то получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при любом разбиении T с условием $\Delta_T < \delta$ имеем $\Omega(T) < \varepsilon$, т.е. справедливо соотношение $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Надо доказать, что из условия $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$ следует существование предела $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V)$.

Сначала убедимся, что $I_* = I^*$. Из леммы 6 для любого разбиения $T \in A_P$ имеем

$$0 \leq I_* - I^* \leq \Omega(T),$$

и, следовательно, $h = I_* - I^* \to 0$ при $\Delta_T \to 0$.

В силу того, что h — постоянное число, то $h = 0$ и $I_* = I^* = I$. Осталось доказать, что $\sigma(V) \to I$ при $\Delta_V \to 0$. Возьмем произвольное положительное число ε_1. Из условия существования предела $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \Omega(T)$ найдется число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что для всех разбиений T, $\Delta_T < \delta_1$, выполняется неравенство $\Omega(T) < \varepsilon_1$. Но тогда для любой разметки V этого разбиения будем иметь

$$s(T(V)) \leq \sigma(V) \leq S(T(V)), \quad s(T(V)) \leq I_* = I = I^* \leq S(T(V)),$$

$$S(T(V)) - s(T(V)) = \Omega(T) < \varepsilon,$$

т.е. обе точки $\sigma(V)$ и I лежат на отрезке $[s(T(V)), S(T(V))]$, длина которого не превосходит ε_1. Это значит, что расстояние между этими точками тоже не превосходит ε_1, поэтому для любого размеченного разбиения V с условием $\Delta_V < \delta_1$ имеем $|\sigma(V) - I| < \varepsilon_1$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = I$. Достаточность доказана.

Итак, условие 1 теоремы 1 эквивалентно условию интегрируемости функции по Риману.

Докажем теперь эквивалентность условий 1, 2 и 3. Для этого убедимся в справедливости цепочки утверждений:

$$1) \underset{\text{а)}}{\Longrightarrow} 2) \underset{\text{б)}}{\Longrightarrow} 3) \underset{\text{в)}}{\Longrightarrow} 1).$$

а) Нам надо доказать, что если $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$, то $I_* = I^*$. Но этот факт уже установлен при доказательстве достаточности условия 1.

б) Сначала докажем, что

$$\inf_T \Omega(T) = h = I^* - I_*.$$

Число $h = I^* - I_*$ — нижняя грань $\Omega(T)$, поскольку из леммы 6 имеем

$$\Omega(T) \geq I^* - I_* = h.$$

Докажем, что h — точная нижняя грань множества $\{\Omega(T)\}$. Для этого возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда в силу определения сумм Дарбу будем иметь, что существуют разбиения T_1 и T_2 такие, что

$$S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(T_2) > I^* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем разбиение $T_3 = T_1 \cup T_2$. Получим

$$S(T_3) \le S(T_1) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}, \quad s(T_3) \ge s(T_2) > I^* - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\Omega(T) < I^* - I_* + \varepsilon = h + \varepsilon,$$

т.е. $h = \inf\limits_{T} \Omega(T)$.

Таким образом, из доказанного и условия 2 имеем

$$\inf_{T} \Omega(T) = I^* - I_* = 0.$$

Тем самым утверждение б) доказано.

в) Нам надо доказать, что если $\inf\limits_{T} \Omega(T) = 0$, то $\lim\limits_{\Delta_T} \Omega(T) = 0$.

Имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T_1 такое, что $\Omega(T_1) < \varepsilon/2$. Разбиению T_1 соответствует пара разбиений $(T_1(x), T_1(y))$ по осям Ox и Oy. Количество точек разбиений $T_1(x), T_1(y)$ обозначим через q.

Далее, поскольку $g(x,y)$ ограничена на P, существует $M > 0$ такое, что $|g(x,y)| < M$ для всех $(x,y) \in P$. Обозначим через d длину наибольшей стороны прямоугольника P. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{4qdM}$.

Возьмем теперь любое разбиение $T = (T(x), T(y))$ с условием $\Delta_T < \delta$. Тогда для разбиения $T_2 = T \cup T_1$ имеем

$$\Omega(T_2) \le \Omega(T_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$

поскольку T_2 есть измельчение разбиения T_1, т.е. $T_2 \supset T_1$.

Перейдем к оценке сверху величины $\Omega(T)$. Имеем

$$\Omega(T) = \Omega(T_2) + \alpha(T, T_1).$$

Здесь $\alpha(T, T_1) = \alpha(T, T_2) \ge 0$, поскольку $T_2 \supset T_1$. Кроме того,

$$\alpha(T, T_1) = \sum_{(k,l)}\sum (\omega_{k,l} \Delta x_k \Delta y_l - \omega'_{k,l} \Delta x'_k \Delta y'_l - \dots - \omega^{(r)}_{k,l} \Delta x^{(r)}_k \Delta y^{(r)}_l) \le$$

$$\le \sum_{(k,l)}\sum \omega_{kl} \Delta x_k \Delta y_l,$$

причем символ $\sum\limits_{(k,l)}\sum$ обозначает, что суммирование ведется по тем парам (k,l), для которых прямоугольник $P_{k,l}$ разбиения T разлагается на меньшие прямоугольники с индексами $', \dots, ^{(r)}$ посредством разбиения T_1 (или T_2). Другими словами, пара (k, l) такова, что внутри отрезков $\Delta_k^{(x)}$ или $\Delta_l^{(y)}$ лежит по крайней мере одна точка разбиения $T_1(x)$ или разбиения $T_1(y)$.

Достаточно оценить сверху величину $\alpha(T, T_1)$. Будем считать, что символ $\sum\limits_{(k)}\sum\limits_{l}$ означает, что суммирование ведется по тем парам (k, l), для которых внутри отрезка $\Delta_k^{(x)}$ находится по крайней мере одна точка разбиения $T_1(x)$, а переменная l принимает все возможные значения, определяемые разбиением T. Аналогично определяется символ $\sum\limits_{(l)}\sum\limits_{k}$. При проведении оценки воспользуемся следующими неравенствами

$$\omega_{k,l} \leq 2M, \quad \Delta x_k < \delta, \quad \Delta y_l < \delta, \quad \sum_k \Delta x_k < d, \quad \sum_l \Delta y_l < d.$$

Тогда будем иметь

$$\alpha(T, T_1) \leq \sum_{(k,l)}\sum \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l \leq$$

$$\leq \sum_{(k)}\sum_{l} \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{k}\sum_{(l)} \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l \leq$$

$$2M\delta\left(\sum_{(k)}\left(\sum_l \Delta y_l\right) + \sum_{(l)}\left(\sum_k \Delta x_k\right)\right) \leq$$

$$\leq 2M\delta d\left(\sum_{(k)} 1 + \sum_{(l)} 1\right) \leq 2M\delta d q \leq \frac{\epsilon}{2},$$

Следовательно,

$$\Omega(T) = \Omega(T_2) + \alpha(T, T_1) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Утверждение в) доказано, и тем самым теорема 1 доказана полностью.

§ 4. СПЕЦИАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИИ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Рассмотрим последовательность разбиений T_n прямоугольника P, отвечающую разбиениям каждого из отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, на n равных частей, т.е. разбиение T_n будет состоять из n^2 равных между собой прямоугольников. Соответствующие разбиению T_n верхнюю и нижнюю суммы Дарбу обозначим через S_n и s_n, а омега-сумму — через Ω_n.

Т е о р е м а 1. *Для интегрируемости ограниченной функции на прямоугольнике необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость утверждения следует из теоремы 1 предыдущего параграфа, поскольку из условия $\lim\limits_{\Delta_T\to 0} \Omega(T) = 0$ получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = 0$.

Достаточность. Для любого разбиения T имеем

$$s(T) \le I_* \le I^* \le S(T).$$

Следовательно,

$$s_n \le I_* \le I^* \le S_n.$$

Отсюда получим, что

$$\Omega_n = S_n - s_n \ge I^* - I_* \ge 0.$$

Но так как предел $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = 0$, то $I^* = I_* = I$. В силу условия 2 теоремы 1 предыдущего параграфа отсюда следует интегрируемость рассматриваемой функции по Риману. Теорема 1 доказана.

Следующая теорема служит дополнением и уточнением теоремы 1 предыдущего параграфа.

Т е о р е м а 2. *Для интегрируемости ограниченной функции на прямоугольнике необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих эквивалентных условий:*

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \Omega_n = 0$;

5) $\inf\limits_{n} \Omega_n = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теорем 1 этого и предыдущего параграфа имеем цепочку заключений:

$$5) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 1) \Longrightarrow 4) \Longrightarrow 5).$$

Теорема 2 доказана.

Утверждения этого параграфа представляют интерес для вычислительных целей. Из них следует, что достаточно рассмотреть лишь одну последовательность разбиений T_n.

В силу теоремы 2 для любой последовательности $\{V_n\}$ разметок, соответствующих последовательности неразмеченных разбиений T_n, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(V_n) = I$, причем ошибка при замене I на $\sigma(V_n)$ не превосходит Ω_n, т.е.

$$|\sigma(V_n) - I| \le \Omega_n.$$

На самом деле справедливо более общее утверждение: для любого размеченного разбиения V и для $T = T(V)$ имеем

$$|\sigma(V) - I| \le \Omega(T(V)).$$

Действительно, справедливы неравенства

$$s(T(V)) \le \sigma(V) \le S(T(V)), \quad s(T(V)) \le I \le S(T(V)).$$

Это означает, что отрезку $[s(T(V)), S(T(V))]$, длина которого равна $S(T(V)) - s(T(V)) = \Omega(T(V))$, принадлежат оба числа $\sigma(V)$ и I, откуда имеем

$$|\sigma(V) - I| \le \Omega(T(V)),$$

что и утверждалось выше.

Лекция 3

§ 5. ИЗМЕРИМОСТЬ ПО ЖОРДАНУ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФИГУРЫ

Напомним определения, связанные с понятием измеримости по Жордану трехмерной фигуры.

Определение 1. *Фигура P называется* **простейшей,** *если она является объединением конечного числа параллелепипедов, стороны которых параллельны осям координат. Такие параллелепипеды назовем стандартными.*

Обозначим через $\Pi = \Pi_3$ множество всех простейших фигур в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Очевидно, что мера (или объем) Жордана простой фигуры — это сумма объемов открытых непересекающихся стандартных параллелепипедов, на которые эту фигуру можно разбить.

Определение 2. Верхней мерой Жордана $\mu^*(F)$ *ограниченной фигуры F называется величина*

$$\inf_{P\in\Pi, F\subset P} \mu(P),$$

т.е. точная нижняя грань объемов всех простых фигур, содержащих F.

Аналогично, **нижней мерой Жордана** $\mu_*(F)$ *фигуры F называется величина*

$$\mu_*(F) = \sup_{P\in\Pi, P\subset F} \mu(P).$$

Если $\mu_*(F) = \mu^*(F)$, то фигура F называется **измеримой по Жордану** *и ее мера (объем) Жордана равна $\mu(F) = \mu_*(F) = \mu^*(F)$.*

Заметим, что объем любой ограниченной части плоскости всегда равен нулю.

Напомним критерий измеримости фигуры F по Жордану. Обозначим через ∂F границу фигуры F, то есть множество точек в $\mathbf{R}^3$, не являющихся ни внутренними, ни внешними для фигуры F.

Т е о р е м а 1. *Для измеримости фигуры F по Жордану необходимо и достаточно, чтобы мера ее границы $\mu(\partial F)$ была равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этого критерия мы проводить не будем, поскольку оно ничем не отличается от его доказательства в двумерном случае. Отметим только следующие четыре свойства величины $\mu(F)$.

1^0. Если F и G измеримы, то фигуры $F \cup G$ и $F \cap G$ измеримы.

2^0. Если F и G не пересекаются, то $\mu(F \cup G) = \mu(F) + \mu(G)$ (свойство аддитивности).

3^0. Если $F \subset G$, то $\mu(F) \leq \mu(G)$ (свойство монотонности).

4^0. Сдвиги и повороты фигуры F не изменяют значения меры этой фигуры (свойство инвариантности).

Теорема 2. *Для интегрируемости ограниченной функции $g(x, y)$ на прямоугольнике P необходимо и достаточно, чтобы цилиндрическая криволинейная фигура F, отвечающая поверхности $z = g(x, y)$, была измерима по Жордану.*

Доказательство. (Необходимость). Пусть функция $g(x, y)$ интегрируема на P. Нам надо доказать, что фигура F измерима. Граница ∂F этой фигуры состоит из шести поверхностей:

$$\partial F = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_6,$$

где $H_1, \dots, H_5$ — часть границы фигуры F, состоящая из частей плоскостей, параллельных координатным плоскостям, и H_6 — поверхность

$$z = g(x, y), \quad (x, y) \in P.$$

Заметим, что $\mu(\partial H_1) = \dots = \mu(\partial H_5) = 0$, так как всякий прямоугольник или его часть имеют нулевой объем.

Из критерия интегрируемости по Риману функции $g(x, y)$ имеем, что $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T такое, что справедливо неравенство $\Omega(T) < \varepsilon$. Для этого разбиения T рассмотрим простую фигуру D, которая есть объединение замкнутых параллелепипедов (брусов) $D_{k,l}$, соответствующих разбиению T прямоугольника P. Каждый брус $D_{k,l}$ состоит из точек (x, y, z) таких, что для всех $(x, y) \in P_{k,l}$ имеем $m_{k,l} \leq z \leq M_{k,l}$ (напомним, что $m_{k,l} = \inf\limits_{(x,y) \in P_{k,l}} g(x, y), M_{k,l} = \sup\limits_{(x,y) \in P_{k,l}} g(x, y)$).

Тогда, очевидно, фигура D содержит все точки поверхности H_6. Далее, имеем $\mu(D) = \Omega(T) < \varepsilon$. Поскольку $H_6 \subset D$, получим, что $\mu^*(H_6) < \epsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это значит, что $\mu(H_6) = 0$.

Отсюда следует, что $\mu(\partial F) = 0$, и тогда согласно критерию измеримости фигура F измерима по Жордану. Необходимость доказана.

Достаточность. Мы имеем, что F измерима. Из критерия измеримости получим, что $\mu(\partial F) = 0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ существует фигура $D \in \Pi$ такая, что $H_6 \subset D$ и $\mu(D) < \varepsilon$. Фигура D есть объединение нескольких замкнутых брусов D_r, $\quad r = 1, \dots, t$.

Можно считать, что проекция фигуры D на плоскость $z = 0$ совпадает с P. Если это не так, то можно вместо D взять ее пересечение с бесконечным цилиндром, состоящим из точек (x, y, z) с условием $(x, y) \in P$.

Проекции всех брусов D_r, $r = 1, \dots, t$, на плоскость $z = 0$ дают разбиение прямоугольника P на прямоугольники Q_r.

Продолжая стороны каждого прямоугольника Q_r до пересечения со сторонами прямоугольника P, получим некоторое разбиение T прямоугольника P на прямоугольники $P_{k,l}$.

Заметим, что для любой точки $(x, y) \in P_{k,l}$ имеем $(x, y, m_{k,l}) \in D$ и $(x, y, M_{k,l}) \in D$, где $m_{k,l} = \inf\limits_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x, y), M_{k,l} = \sup\limits_{(x,y)\in P_{k,l}} g(x, y)$ Это утверждение имеет место, поскольку $H_6 \subset D$.

Обозначим через $D_{k,l}$ брус с условием

$$(x, y) \in P_{k,l}, \quad m_{k,l} \leq z \leq M_{k,l}.$$

Пусть D_0 — объединение всех таких брусов $D_{k,l}$. Тогда получим, что $D_0 \subset D$ и $\mu(D_0) \leq \mu(D) < \varepsilon$. Отсюда имеем, что $\mu(D_0) = \Omega(T) < \varepsilon$. Следовательно, $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$, т.е. $g(x, y)$ интегрируема на P. Теорема 1 доказана.

§ 6. ПОНЯТИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА РИМАНА ПО ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ, ИЗМЕРИМОЙ ПО ЖОРДАНУ

Для дальнейшего нам потребуется ввести понятие предела еще по одной базе множеств.

Рассмотрим функцию $g(x, y)$, определенную на ограниченной области D, измеримой по Жордану.

Определение 1. Разбиением *τ области D будем называть конечный набор измеримых по Жордану множеств $D_1, \dots, D_t$ с условиями:*
1) $D_1 \cup \dots \cup D_t = D$;
2) при всех $m, n \leq t$, $m \neq n$, имеем $\mu(D_m \cap D_n) = 0$.

Совокупность всех разбиений τ обозначим через A_D.

Определение 2. Диаметром $d = d(D)$ **множества** D *называется величина* $\sup\limits_{a,b\in D} \rho(a, b)$.

Диаметром Δ_τ **разбиения** *τ области D будем называть величину* $\Delta_\tau = \max\limits_{n\leq t} d(D_n)$.

Точки $a_1, \dots, a_t$, $a_s \in D_s, 1 \leq s \leq t$, будем называть **разметкой** *данного разбиения τ и обозначать символом $\beta = \beta_D$, а разбиение β будем называть* **размеченным разбиением.**

Множество всех размеченных разбиений множества D обозначим через A'_D.

Определение 3. Интегральной суммой *размеченного разбиения β будем называть величину*

$$\sigma(\beta) = \sum_{n=1}^{t} g(a_n)\mu(D_n), \quad a_n = (x_n, y_n).$$

Определение 4. *Число I называется* **обобщенным двойным интегралом Римана** *функции $g(x, y)$ по ограниченной области D, измеримой по Жордану, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого разбиения $\beta = \beta_D$ с условием $\Delta_\beta < \delta$ имеем*

$$|\sigma(\beta) - I| < \varepsilon.$$

Обобщенный двойной интеграл можно рассматривать как предел по базе. Ее мы будем Обозначим эту базу символом $\Delta_\beta \to 0$; она будет состоять из окончаний $b'_\delta \subset A'_D$, определяемых условием

$$b'_\delta = \{\beta = \beta_D | \Delta_\beta < \delta\}.$$

Очевидно, что функция $\sigma(\beta) = \sum\limits_{n=1}^{t} g(a_n)\mu(D_n)$ определена на множестве A'_D, а ее предел по базе $\Delta_\beta \to 0$ и есть обобщенный двойной интеграл по области D.

Пусть $m_n = \inf\limits_{a \in D_n} g(a), M_n = \sup\limits_{a \in D_n} g(a), \omega_n = M_n - m_n$. Тогда определим верхнюю и нижнюю суммы Дарбу соответственно следующими выражениями:

$$S(\tau) = \sum_{n=1}^{t} M_n\mu(D_n), s(\tau) = \sum_{n=1}^{t} m_n\mu(D_n),$$

и омега-сумму — выражением $\Omega(\tau) = \sum\limits_{n=1}^{t} \omega_n\mu(D_n)$.

Дадим еще одно определение кратного интеграла от ограниченной функции $g(x, y)$ по ограниченной, измеримой по Жордану, области D.

Пусть для некоторого прямоугольника P имеем $D \subset P$. Доопределим функцию $g(x, y)$ на весь прямоугольник P, полагая

$$g_0(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{если} \quad (x, y) \in D, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in P \setminus D. \end{cases}$$

Определение 5. *Если $g_0(x,y)$ интегрируема по Риману на прямоугольнике P, то двойной интеграл J от $g_0(x,y)$ по P называется* **двойным интегралом Римана по множеству** *D от функции $g(x,y)$, то есть по определению имеем*

$$\iint\limits_D g(x,y)dxdy = J = \iint\limits_P g_0(x,y)dxdy.$$

На первый взгляд может показаться, что понятие обобщенного интеграла I расширяет класс интегрируемых функций по сравнению с понятием интеграла J, но на самом деле это не так.

Теорема 1. *Для существования обобщенного двойного интеграла I необходимо и достаточно, чтобы существовал интеграл J, причем тогда $I = J$.*

Доказательство. Сначала заметим, что теорию Дарбу и критерии интегрируемости можно перенести на случай обобщенного двойного интеграла.

1. Пусть существует интеграл J по прямоугольнику P. Тогда в силу критерия интегрируемости ($\inf\limits_T \Omega(T) = 0$) имеем, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется разбиение T такое, что $\Omega(T) < \varepsilon$, причем T состоит из прямоугольников $P_{k,l}$. Возьмем в качестве $D_{k,l} = D \cap P_{k,l}$. Тогда получим разбиение τ множества D. Колебание функции $g(x,y)$ на множестве $D_{k,l}$ не превосходит ее колебания на $P_{k,l}$, поэтому имеем $\Omega(\tau) \le \Omega(T) < \varepsilon$, т.е. согласно критерию интегрируемости существует обобщенный интеграл I.

Аналогично можно получить неравенство $S(\tau) \le S(T)$, поэтому $I^* \le S(T), I^* \le J^*, I = I^* \le J^* = J, I \le J$. Из подобного неравенства для нижних сумм Дарбу имеем $s(\tau) \ge s(T)$, $I = I_* \ge J_* = J$. Из этих неравенств следует, что $I = J$. Необходимость доказана.

2. Пусть существует обобщенный интеграл I по ограниченному измеримому множеству D. Надо доказать, что существует интеграл J от функции $g_0(x,y)$ по прямоугольнику P, содержащему D. Из критерия интегрируемости имеем, что существует разбиение $\tau = \{D_1, \ldots, D_t\}$ такое, что $\Omega(\tau) < \varepsilon$. Для каждого $r = 1, \ldots, t$ множество D_r измеримо, поэтому $\mu(\partial D_r) = 0$. Следовательно, найдется простейшая фигура F, состоящая из прямоугольников $P_{k,l}$, и, такая, что суммарная площадь всех $P_{k,l}$, содержащих хотя бы одну точку границы $\partial D_r, r = 1, \ldots, t$, не превосходит ε, т.е. $\mu(F) < \varepsilon$.

Продолжим прямолинейные отрезки границы F до пересечения со сторонами прямоугольника P. Получим разбиение T этого прямоугольника. Вклад ω_1 в омега-сумму $\Omega(T)$ тех прямоугольников, которые принадлежат $P \setminus F$, не превосходит $\Omega(\tau) < \varepsilon$. Вклад же ω_2 в $\Omega(T)$, тех прямоугольников, которые принадлежат F, не превосходит

$$\omega_2 \leq 2M\mu(F) < 2M\varepsilon.$$

Следовательно, имеем $\Omega(T) = \omega_1 + \omega_2 < (2M + 1)\varepsilon$. Отсюда в силу критерия интегрируемости функции по прямоугольнику следует, что существует интеграл J.

Рассуждая аналогично для верхних сумм Дарбу получим неравенство

$$S(T) - 2M\varepsilon \leq S(\tau).$$

Следовательно, $J \leq I + 2M\varepsilon$. В силу произвольности выбора положительного числа ϵ отсюда будем иметь $J \leq I$. Из оценок для нижних сумм Дарбу получим противоположное неравенство $J \geq I$. Таким образом, $I = J$. Теорема 1 доказана полностью.

Из эквивалентности определений интеграла Римана видно, что можно было бы ограничиться при построении теории квадратами $K \supset D$ и разбиениями их на n^2 равных квадратов, и при этом класс интегрируемых функций был тем же самым, что и при определении обобщенного интеграла. Но при таком построении теории есть одно неудобство, связанное с тем, что в пересечении двух квадратов не обязательно получится квадрат, поэтому мы и ограничились рассмотрением прямоугольников.

Лекция 4

§ 7. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Приведем свойства двойного интеграла, а в случае существенного отличия их от свойств однократного интеграла дадим их доказательства.

Пусть $D, D_1, D_2, \ldots$ — измеримые по Жордану множества, и функции $g(x,y), g_1(x,y), g_2(x,y)$ — интегрируемы по Риману на рассматриваемых множествах.

Тогда имеют место следующие свойства.

1^0. Справедливы равенства:

а) $\iint\limits_D (g_1(x,y) + g_2(x,y))dxdy = \iint\limits_D g_1(x,y)dxdy + \iint\limits_D g_2(x,y)dxdy$,

б) $\iint\limits_D cg(x,y)dxdy = c\iint\limits_D g(x,y)dxdy \quad \forall c \in \mathbb{R}$ (свойство линейности).

2^0. Пусть функции g_1 и g_2 интегрируемы на D, тогда $g_1 g_2$ интегрируема на D.

3^0. Пусть на D справедливо неравенство $g_1(x,y) \le g_2(x,y)$. Тогда

а) $\iint\limits_D g_1(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g_2(x,y)dxdy$ (свойство монотонности),

б) Пусть также $|g(x,y)|$ интегрируема на D. Тогда

$$|\iint\limits_D g(x,y)dxdy| \le \iint\limits_D |g(x,y)|dxdy,$$

в) Пусть $f(x,y) \ge 0, \quad m = \inf\limits_D g(x,y), \quad M = \sup\limits_D g(x,y)$. Тогда существует число $c, \quad m \le c \le M$ такое, что

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy = c\iint\limits_D f(x,y)dxdy \quad \text{(теорема о среднем).}$$

4^0. $\iint\limits_D 1 \cdot dxdy = \mu(D)$.

Это утверждение следует из эквивалентности определения меры Жордана и определения обобщенного двойного интеграла.

5^0. Если $\mu(D) = 0$, то $\iint\limits_D g(x,y)dxdy = 0$ для любой ограниченной на D функции $g(x,y)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $g(x,y)$ ограничена на множестве D, то найдется число $M > 0$ такое, что для всех точек

$(x, y) \in D$ выполняется неравенство $|g(x, y)| \leq M$. Из свойств $3^0, 1^0$ и 4^0 имеем

$$\left|\iint\limits_D g(x, y)dxdy\right| \leq \iint\limits_D |g(x, y)|dxdy \leq M \iint\limits_D dxdy = M\mu(D) = 0.$$

6^0. Пусть области D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек. Тогда имеем

$$\iint\limits_{D_1} g(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} g(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1 \cup D_2} g(x, y)dxdy$$

(свойство аддитивности интеграла как функционала от области интегрирования).

Доказательство. Пусть стандартный прямоугольник P содержит D_1 и D_2. Тогда по определению имеем

$$\iint\limits_{D_1} g(x, y)d\mu = \iint\limits_P g_1(x, y)dxdy, \quad \iint\limits_{D_2} g(x, y)d\mu = \iint\limits_P g_2(x, y)dxdy,$$

где

$$g_1(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{если} \quad (x, y) \in D_1, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in P \setminus D_1; \end{cases}$$

$$g_2(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & \text{если} \quad (x, y) \in D_2, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \in P \setminus D_2. \end{cases}$$

Отсюда и из свойства линейности интеграла получим

$$\iint\limits_{D_1} g(x, y)d\mu + \iint\limits_{D_2} g(x, y)d\mu =$$

$$= \iint\limits_P g_1(x, y)dxdy + \iint\limits_P g_2(x, y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_P (g_1(x, y) + g_2(x, y))dxdy = \iint\limits_{D_1 \cup D_2} g d\mu.$$

Свойство 6^0 доказано.

7^0. Если значения функций $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$ отличаются только на множестве D_1, причем $\mu(D_1) = 0$, $D_1 \subset D$, то

$$\iint\limits_D g_1(x, y)dxdy = \iint\limits_D g_2(x, y)dxdy.$$

Действительно, имеем

$$\iint\limits_{D} g_1(x,y)d\mu = \iint\limits_{D_1\cup(D\setminus D_1)} g_1(x,y)d\mu =$$

$$= \iint\limits_{D_1} g_1(x,y)d\mu + \iint\limits_{D\setminus D_1} g_1(x,y)d\mu = 0 + \iint\limits_{D\setminus D_1} g_2(x,y)d\mu =$$

$$= \iint\limits_{D_1} g_2(x,y)d\mu + \iint\limits_{D\setminus D_1} g_2(x,y)d\mu = \iint\limits_{D} g_2(x,y)d\mu.$$

Свойство 7^0 доказано.

§ 8. ПЕРЕХОД ОТ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

Сформулируем теорему о равенстве двойного и повторного интегралов.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция $g(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике $P = I_1 \times I_2$, $\quad I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2]$. Пусть также для любого фиксированного значения $x \in I_1$ функция $f(y) = f_x(y) = g(x,y)$ от одной переменной y является интегрируемой по y на отрезке I_2 и $h(x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} f(y)dy$. Тогда имеет место формула*

$$A = \iint\limits_{P} g(x,y)dxdy = \int\limits_{a_1}^{b_1} h(x)dx =$$

$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} \left(\int\limits_{a_2}^{b_2} f_x(y)dy \right) dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} g(x,y)dy,$$

т.е. двойной интеграл равен повторному интегралу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого разбиения $T = T_P$ прямоугольника P имеем неравенства $m_{k,l} \le g(x,y) \le M_{k,l}$, где $(x,y) \in P_{k,l}$ и величины $m_{k,l}$ и $M_{k,l}$, $\quad k = 1,\ldots,m$, $\quad l = 1,\ldots,n$ имеют обычный смысл.

При фиксированном $x = \xi_k$ это неравенство можно проинтегрировать по y в пределах от y_{l-1} до y_l. Получим

$$m_{k,l}\Delta y_l \le \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} g(\xi_k, y)dy \le M_{k,l}\Delta y_l.$$

Просуммируем это неравенство по l. Будем иметь

$$\sum_{l=1}^{n} m_{k,l}\Delta y_l \le \int_{a_2}^{b_2} g(\xi_k, y)dy = h(\xi_k) \le \sum_{l=1}^{n} M_{k,l}\Delta y_l.$$

Умножим последнее неравенство на Δx_k и просуммируем его по k. Получим

$$s(T) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} m_{k,l}\Delta x_k\Delta y_l \le \sum_{k=1}^{m} h(\xi_k)\Delta x_k = \sigma(V(x)) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} M_{k,l}\Delta x_k\Delta y_l = S(T),$$

где $V(x)$ — разметка разбиения T отрезка I_1.

Кроме того, имеем

$$s(T) \le A \le S(T).$$

Так как $g(x,y)$ интегрируема на P, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого разбиения T с условием $\Delta_T < \delta$ имеем $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Разбиение $T = (T(x), T(y))$ образовано парой разбиений — одно $T(x)$ по оси Ox, другое $T(y)$ по оси Oy. В качестве разбиения $T(x)$ можно взять любое разбиение с условием $\Delta_{T(x)} < \delta$. Возьмем любую разметку разбиения $T(x)$. Получим размеченное разбиение $V = V(x)$ отрезка I_1.

Далее, в силу того, что оба числа A и $\sigma(V)$ лежат на одном отрезке длины ε, имеем $|\sigma(V) - A| < \varepsilon$. Заметим, что это неравенство справедливо для любого размеченного разбиения с условием $\Delta_V < \delta$. Следовательно, имеет место равенство

$$A = \lim_{\Delta_V \to 0} \sigma(V) = \int_{a_1}^{b_1} h(x)dx.$$

Теорема 1 доказана.

Заметим, что случай интегрирования по любому измеримому множеству D мало чем отличается от рассмотренного. Пусть прямоугольник P содержит D. Тогда по определению имеем

$$A = \iint_D g(x,y)dxdy = \iint_P g_0(x,y)dxdy,$$

где g_0 совпадает с функцией g на множестве D и $g_0 = 0$ вне D.

Обозначим через $E(x)$ множество точек y, для которых $(x, y) \in D$. Пусть $E(x)$ состоит из конечного числа отрезков

$$[\varphi_1(x), \psi_1(x)], \ldots, [\varphi_t(x), \psi_t(x)].$$

Тогда если $h(x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} g_0 dy$, то, как мы видели,

$$A = \int\limits_{a_1}^{b_1} h(x) dx,$$

где

$$h(x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} g_0(x, y) dy = \sum_{r=1}^{t} \int\limits_{\varphi_r(x)}^{\psi_r(x)} g(x, y) dy.$$

Следовательно, имеет место формула

$$A = \sum_{r=1}^{t} \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{\varphi_r(x)}^{\psi_r(x)} g(x, y) dy.$$

Эта формула обобщает утверждение теоремы 1.

§ 9. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ НА ИЗМЕРИМОМ МНОЖЕСТВЕ

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функция $g(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике P. Тогда $g(x, y)$ интегрируема на нем.*

Доказательство. Прямоугольник P — компакт. Поэтому функция $g(x, y)$ равномерно непрерывна на нем. Другими словами, для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon_1) > 0$ такое, что для любого разбиения T с условием $\Delta_T < \delta_1$ имеем $\omega_{k,l} = M_{k,l} - m_{k,l} < \varepsilon_1$.

Следовательно,

$$\Omega(T) \le \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \omega_{k,l} \mu(P_{k,l}) \le \varepsilon_1 \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \mu(P_{k,l}) = \varepsilon_1 \mu(P).$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и положим $\varepsilon_1 = \varepsilon / \mu(P)$. Тогда для любого разбиения T с условием $\Delta_T < \delta_1(\varepsilon / \mu(P))$ получим, что $\Omega(T) < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{\Delta_T \to 0} \Omega(T) = 0$, т.е. функция $g(x, y)$ интегрируема на P.

Т е о р е м а 2. *Пусть $g(x, y)$ ограничена и непрерывна на измеримом множестве D. Тогда $g(x, y)$ интегрируема на D.*

Докажем более общую теорему, из которой следует теорема 2.

Т е о р е м а 3. *Пусть $g(x, y)$ ограничена на замкнутом измеримом множестве D и непрерывна во всех точках множества D, за исключением множества D_1, причем $\mu(D_1) = 0$. Тогда функция $g(x, y)$ интегрируема на D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon_1 > 0$. Так как множество D измеримо, то существует замкнутая простая фигура $F \subset D$ такая, что $\mu(D \setminus F) < \varepsilon_1$. Кроме того, существует открытая простая фигура F_1 такая, что $D_1 \subset F_1$ и $\mu(F_1) < \varepsilon_1$. Тогда простая фигура $F_2 = F \setminus F_1$ замкнута и $\mu(D \setminus F_2) < 2\varepsilon_1$.

Функция $g(x, y)$ непрерывна в каждой точке фигуры F_2, поэтому из теоремы 1 следует ее интегрируемость на F_2. Следовательно, существует разбиение $T = T_{F_2}$ такое, что $\Omega(T) < \varepsilon_1$.

Дополним это разбиение T до разбиения τ множества D, добавив к нему фигуру $D_0 = D \setminus F_2$. Тогда в сумму $\Omega(\tau)$ добавится слагаемое, равное $(M_0 - m_0)\mu(D_0)$, где $m_0 = \inf\limits_{D_0} g(x, y)$, $\quad M_0 = \sup\limits_{D_0} g(x, y)$.

Следовательно, имеем

$$\Omega(\tau) < \varepsilon_1 + (M_0 - m_0)2\varepsilon_1 = \varepsilon_1(2M_0 - 2m_0 + 1) = \varepsilon,$$

т.е. $\inf\limits_{\tau} \Omega(\tau) = 0$.

Это и означает, что функция $g(x, y)$ интегрируема на D.

Теорема 3 доказана.

Лекция 5

§ 10. МНОГОКРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Ранее мы определили двукратный интеграл как предел по базе $\Delta_V \to 0$ (или $\Delta_\beta \to 0$ на множестве D), где V и β размеченные разбиения соответственно прямоугольника P и множества D.

Это определение можно дословно перенести на случай функций от большего числа переменных. Другими словами, если, например, в определении интеграла I функцию $g(x,y)$ заменить на функцию $g(\bar{x}) = g(x_1,\ldots,x_n)$ при $n \geq 2$, а области $D, D_1, \ldots, D_t$ считать n-мерными, то поскольку измеримость по Жордану была определена при любом $n \geq 1$, мы тем самым получим определение n - кратного интеграла по области $D \subset \mathbb{R}^n$, измеримой по Жордану. Для этого интеграла введем следующее обозначение:

$$I = \int\limits_D \cdots \int g(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n = \int\limits_D \cdots \int g(\bar{x})d\mu.$$

Точные определения для общего случая переписывать не будем. Нас будут в основном интересовать случаи $n = 2, 3$. В этих случаях интеграл I обычно записывают так:

$$I = \iint\limits_D g(x,y)dS, \quad I = \iiint\limits_D g(x,y,z)dV,$$

Отметим, что все факты, доказанные ранее для случая $n = 2$, без принципиальных изменений в доказательстве переносятся на общий случай $n \geq 2$. Укажем только, что сюда относятся и критерий интегрируемости функции в разных формах, и свойства 1^0 – –7^0 двойного интеграла.

Приведем формулировку теоремы о сведении n-кратного интеграла к $(n-1)$-кратному интегралу. Ограничимся случаем $n = 3$.

Теорема 1. а) *Пусть существует тройной интеграл A от функции $g(x,y,z)$ по параллелепипеду $P = I_1 \times I_2 \times I_3$. Пусть также существует двойной интеграл $h(x)$ по прямоугольнику $Q = I_2 \times I_3$, т.е. интеграл $h(x) = \iint\limits_Q g(x,y,z)dydz$. Тогда функция $h(x)$ является интегрируемой на отрезке I_1 и справедливо равенство*

$$A = \int\limits_{I_1} h(x)dx.$$

б) Пусть $D \subset P = I_1 \times I_2 \times I_3$ и пусть при фиксированном $x \in I_1$ символ $D(x)$ обозначает собой измеримую по Жордану область точек $(y, z) \in I_2 \times I_3$ с условием $(x, y, z) \in D$ (то есть $D(x)$ является пересечением множества D с плоскостью, состоящей из точек, у которых первая координата фиксирована и равна x). Пусть также при всяком таком x существует интеграл

$$h(x) = \iint\limits_{D(x)} g(x, y, z)\,dydz.$$

Тогда имеем

$$A = \int\limits_{I_1} h(x)\,dx.$$

При фиксированном x, применяя аналогичную теорему к двойному интегралу $h(x)$, получим

$$h(x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{D(x,y)} g(x, y, z)\,dz,$$

где множество $D(x, y)$ является пересечением множества D с плоскостью $x = \mathrm{const}, y = \mathrm{const}$.

Пример 1. Найти значение величины интеграла

$$I = \int \cdots \int\limits_D f(x_1) \ldots f(x_n)\,dx_1 \ldots dx_n,$$

где область D определяется условиями

$$D = \{(x_1, \ldots, x_n) | 0 < x_1 < \cdots < x_n < 1\}.$$

Обозначим через D_σ область

$$D_\sigma = \{(x_1, \ldots, x_n) | 0 < x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n)} < 1\},$$

отвечающую перестановке σ чисел $1, \ldots, n$.

Для различных перестановок σ и τ области D_σ и D_τ не пересекаются. Далее, интеграл $I(\sigma)$, отвечающий области интегрирования D_σ, от той же самой функции $f(x_1) \ldots f(x_n)$ будет равен I. Количество перестановок n чисел равно $n!$. Следовательно,

$$n! I = \sum_\sigma I_\sigma = \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(x_1) \ldots f(x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \left(\int\limits_0^1 f(x)\,dx \right)^n.$$

Таким образом мы свели вычисление n-кратного интеграла к однократному и получили формулу

$$I = \frac{1}{n!}\left(\int\limits_0^1 f(x)dx\right)^n .$$

Пример 2. Докажем следующую формулу Дирихле – Лиувилля. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и пусть S есть симплекс в n-мерном пространстве, определяемый условиями $x_1 + \dots + x_n \leq 1$, $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Тогда имеем

$$J = J_n(p_1, \dots, p_n) = \int\limits_S \dots \int f(x_1 + \dots + x_n) x_1^{p_1 - 1} \dots x_n^{p_n - 1} dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\dots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \dots + p_n)} \int\limits_0^1 f(u) u^{p_1 + \dots + p_n - 1} du.$$

Действительно, положим $\lambda = x_1 + \dots + x_{n-2}$. Расставим пределы интегрирования в интеграле J. Тогда два последних интеграла по переменным x_{n-1} и x_n будут иметь вид

$$H = \int\limits_0^{1-\lambda} dx_{n-1} \int\limits_0^{1-\lambda-x_{n-1}} f(\lambda + x_{n-1} + x_n) x_n^{p_{n-1}-1} x_n^{p_n - 1} dx_n.$$

Сделаем во внутреннем интеграле замену переменной вида

$$x_n = x_{n-1}\frac{1-v}{v}.$$

Тогда

$$v = \frac{x_{n-1}}{x_{n-1} + x_n}, \quad dx_n = -\frac{x_{n-1} dv}{v^2}$$

и интеграл H принимает вид

$$H = \int\limits_0^{1-\lambda} dx_{n-1} \int\limits_{\frac{x_{n-1}}{1-\lambda}}^{1} f(\lambda + \frac{x_{n-1}}{v}) x_{n-1}^{p_{n-1}+p_n-1} (1-v)^{p_n - 1} v^{-p_n - 1} dv.$$

Поменяв порядок интегрирования в H, получим

$$H = \int\limits_0^1 dv \int\limits_0^{v(1-\lambda)} f(\lambda + \frac{x_{n-1}}{v}) x_{n-1}^{p_{n-1}+p_n-1} (1-v)^{p_n - 1} v^{-p_n - 1} dx_{n-1}.$$

Сделаем еще одну замену переменной вида $x_{n-1} = vt$. Имеем

$$H = \int\limits_0^1 (1-v)^{p_n - 1} v^{p_{n-1}-1} dv \int\limits_0^{1-\lambda} f(\lambda+t) t^{p_{n-1}+p_n-1} dt =$$

$$= B(p_{n-1}, p_n) \int\limits_0^{1-\lambda} f(\lambda+t) t^{p_{n-1}+p_n-1} dt.$$

Отсюда получим следующую рекуррентную формулу:

$$J = J_n(p_1, \ldots, p_n) = B(p_{n-1}, p_n) J_{n-1}(p_1, \ldots, p_{n-2}, p_{n-1} + p_n),$$

из которой имеем

$$J = B(p_{n-1}, p_n) B(p_{n-2}, p_{n-1} + p_n) B(p_1, p_2 + \cdots + p_n) J_1(p_1 + \cdots + p_n) =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1) \ldots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + \cdots + p_n)} \int\limits_0^1 f(u) u^{p_1 + \cdots + p_n - 1} du.$$

Таким образом, формула Дирихле – Лиувилля доказана.

В частности, следствием этой формулы является выражение для объема n-мерного шара, заданного соотношением $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2$. Ввиду симметрии шара относительно гиперплоскостей $x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, можно ограничиться вычислением объема области K, части шара, определяемой так:

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0,$$

при этом объем ее будет в 2^n раз меньше объема шара V. Имеем

$$V = 2^n \int \cdots \int\limits_K dx_1 \ldots dx_n.$$

После замены переменных $au_1 = x_1^2, \ldots, au_n = x_n^2$ область K перейдет в симплекс S, определенный выше, и поскольку $dx_k = \frac{a du_k}{2\sqrt{u_k}}$, $k = 1, \ldots, n$, получим

$$V = a^n \int \cdots \int\limits_S \frac{du_1 \ldots du_n}{\sqrt{u_1 \ldots u_n}}.$$

Последний интеграл есть интеграл Дирихле – Лиувилля при

$$f(u_1, \ldots, u_n) = 1, p_1 = \cdots = p_n = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, объем n-мерного шара радиуса a равен $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}a^n$.

§ 11. СВОЙСТВА ГЛАДКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ НА ВЫПУКЛОМ МНОЖЕСТВЕ

Известно, какую большую роль в построении теории однократных интегралов играет метод замены переменной. В случае же кратных интегралов роль этого метода не меньше (а быть может, и больше).

Для его обоснования нам понадобятся некоторые свойства гладких отображений.

Пусть функция $g(\bar{y}), \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, определена на компактной измеримой области $D \subset \mathbb{R}^n$ и интегрируема на D. Пусть I обозначает интеграл

$$I = \int \cdots \int\limits_{D} g(\bar{y}) dy_1 \ldots dy_n.$$

Рассмотрим отображение $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ измеримого компакта $D_0 \subset \mathbf{R}^n$ на множество D, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между внутренними точками множеств D и D_0.

Напомним, что отображение $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ задается системой n функций, $y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \; \ldots \; y_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$, определенных на D_0.

Будем считать, что каждая из этих функций имеет все непрерывные частные производные на D_0.

Замечания. 1. Функции $\varphi_k(\bar{x})$ называются **криволинейными координатами**, определенными на D_0.

2. Условие взаимной однозначности отображения $\bar{\varphi} : D_0 \to D$ для внутренних точек области D_0 обеспечивается требованием отличия от нуля якобиана этого отображения в каждой точке области D_0 (теорема об обратном отображении).

Перейдем теперь к формулировке и доказательству утверждений о гладких отображениях на областях.

Теорема 1. *Пусть D_0 выпуклое и замкнутое множество и $\varphi(\bar{x})$ гладкая функция на множестве D_0. Пусть также точки $\bar{x}$ и $\bar{x}+\Delta\bar{x}$ принадлежат D_0. Тогда существует точка $\bar{\xi} = \bar{x}+\theta\Delta\bar{x}, 0 < \theta < 1$, такая, что $\Delta\varphi = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi(\bar{\xi}))$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(t)$ одной переменной $t, 0 \leq t \leq 1$,

$$h(t) = \varphi(\bar{x} + t\Delta x).$$

Ясно, что $h(t)$ гладкая функция на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, к ней можно применить формулу Лагранжа конечных приращений.

Тогда существует число $\theta, 0 < \theta < 1$ такое, что

$$\Delta\varphi = \Delta h = h(1) - h(0) = h'(\theta)(1-0) = h'(\theta).$$

Функция $h(t)$ является сложной функцией от t и по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$h'(\theta) = \frac{\partial\varphi(\bar{\xi})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial\varphi(\bar{\xi})}{\partial x_n}\Delta x_n = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi(\bar{\xi})),$$

где $\xi = \bar{x} + \theta\Delta\bar{x}$.

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть $\bar{\varphi}(\bar{x})$ гладкое отображение выпуклого компакта D_0 на область D. Тогда существует число $c > 0$ такое, что для любых точек $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in D_0$ справедливо неравенство $||\bar{\varphi}(\bar{a}_1) - \bar{\varphi}(\bar{a}_2)|| \leq c||\bar{a}_1 - \bar{a}_2||$, где $||x||$ длина вектора в евклидовой метрике.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 при $k = 1, \dots, n$ имеем

$$\varphi_k(\bar{a}_1) - \varphi_k(\bar{a}_2) = \Delta\varphi_k = (\bar{a}_2 - \bar{a}_1, \operatorname{grad}\varphi_k(\xi_k)),$$

где $\bar{\xi}_k = \bar{a}_1 + \theta_k(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)$ и θ_k — некоторое число из интервала $(0, 1)$.

Далее воспользуемся неравенством Коши $|(\bar{a}, \bar{b})| \leq ||\bar{a}||\cdot||\bar{b}||$. Получим

$$|\Delta\varphi_k| \leq ||\bar{a}_2 - \bar{a}_1|| \cdot ||\operatorname{grad}\varphi_k(\xi_k)||.$$

Поскольку D_0 компакт и функция $||\operatorname{grad}\varphi_k(\bar{x})||$ непрерывна на D_0, она ограничена на этом компакте некоторой постоянной $c_k > 0$. Используя это и числовое неравенство

$$\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \leq |a_1| + \dots + |a_n|,$$

будем иметь

$$||\Delta\bar{\varphi}|| \leq |\Delta\varphi_1| + \dots + |\Delta\varphi_n| \leq (c_1 + \dots + c_n)||\Delta\bar{x}|| = c||\Delta\bar{x}||,$$

где $\Delta\bar{x} = \bar{a}_2 - \bar{a}_1$. Теорема 2 доказана.

Обозначим через $A_\varphi(\bar{x})$ матрицу Якоби отображения $\bar{\varphi} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ в точке $\bar{x}$.

Определение 1. *Линейное отображение $\Delta\bar{y} = A_\varphi(\bar{x}) \cdot \Delta\bar{x}$ приращения $\Delta\bar{x}$ вектора $\bar{x}$ называется* **дифференциалом** *отображения $\bar{\varphi}$ и обозначается символом $d\bar{\varphi}(\bar{x})$.*

Очевидно, что $d\bar{\varphi}(\bar{x})$ — вектор с координатами

$$d\varphi_k(\bar{x}) = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi_k(\bar{x})).$$

Т е о р е м а 3. *Пусть $\bar{\varphi}$ — гладкое отображение выпуклого компакта D_0 и*

$$r(\bar{x}, \Delta\bar{x}) = \Delta\bar{\varphi} - d\bar{\varphi}.$$

Тогда имеет место следующий равномерный предел

$$\frac{||\bar{r}(\bar{x}, \Delta\bar{x})||}{||\Delta\bar{x}||} \underset{D_0}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при} \quad ||\Delta x|| \to 0.$$

Другими словами, существует числовая функция $\alpha(\Delta\bar{x}) \to 0$ при $\Delta\bar{x} \to 0$ такая, что для всех $\bar{x} \in D_0$ справедливо неравенство

$$||\bar{r}(\bar{x}, \Delta\bar{x})|| \le \alpha(\Delta\bar{x})||\Delta\bar{x}||.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим k-е координаты векторов $\Delta\bar{\varphi}$ и $d\bar{\varphi}$. По определению имеем

$$d\varphi_k = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi_k(\bar{x})),$$

а из теоремы 1 при некотором $\bar{\xi}$ получим

$$\Delta\varphi_k = \varphi_k(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \varphi_k(\bar{x}) = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi_k(\bar{\xi})).$$

Следовательно,

$$\Delta\varphi_k - d\varphi_k = (\Delta\bar{x}, \operatorname{grad}\varphi_k(\bar{\xi}) - \operatorname{grad}\varphi_k(\bar{x})).$$

Далее, так как частные производные отображения $\bar{\varphi}$ непрерывны на компакте D_0, то в силу их равномерной непрерывности на D_0 будем иметь

$$\left|\frac{\partial\varphi_k(\bar{\xi})}{\partial x_s} - \frac{\partial\varphi_k(\bar{x})}{\partial x_s}\right| \le \alpha_k(\Delta\bar{x}),$$

где $\alpha_k(\Delta\bar{x})$ зависит только от $\Delta\bar{x}$ и $\alpha_k(\Delta\bar{x}) \to 0$ при $\Delta\bar{x} \to 0$.

Отсюда, используя неравенство Коши, получим

$$|\Delta\varphi_k - d\varphi_k| \le ||\Delta\bar{x}|| \cdot \sqrt{n}\alpha_k(\Delta\bar{x}).$$

Следовательно,

$$||\bar{r}(\bar{x}, \Delta\bar{x})|| \le \sum_{k=1}^{n} |\Delta\varphi_k - d\varphi_k| \le ||\Delta\bar{x}|| \cdot \sqrt{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\Delta\bar{x}) = \alpha(\Delta\bar{x})||\Delta\bar{x}||,$$

причем $\alpha(\Delta\bar{x}) \to 0$ при $\Delta\bar{x} \to 0$.

Теорема 3 доказана.

§ 12. ОБЪЕМ ОБЛАСТИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ. ТЕОРЕМА О ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННЫХ В КРАТНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Докажем теорему об объеме области в криволинейных координатах.

Теорема 1. *Пусть Q выпуклый измеримый по Жордану компакт и R образ его при гладком взаимно однозначном отображении $\bar{\varphi}$. Тогда:*

1) множество R измеримо по Жордану;

2) $\mu(R) \leq \int\limits_{Q}\cdots\int |J|d\mu$, где J — определитель матрицы Якоби (якобиан) отображения $\bar{\varphi}$.

Напомним, что определение матрицы Якоби и дифференциала отображения дано в конце предыдущего параграфа.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая плоских областей $Q \subset \mathbf{R}^2$. Заметим сразу, что так как модуль якобиана отображения $\bar{\varphi}$ является непрерывной функцией на Q, то эта функция интегрируема на Q.

Пусть P — некоторый стандартный квадрат, содержащий компакт Q. Пусть, далее, квадраты $P_{k,l}$ со стороной h составляют разбиение квадрата P. Тогда множества $Q_{k,l} = Q \cap P_{k,l}$ образуют разбиение τ компакта Q на выпуклые измеримые множества. Зафиксируем произвольное $\varepsilon_1 > 0$ и возьмем величину h столь малой, чтобы общая площадь всех квадратов $P_{k,l}$, содержащих хотя бы одну точку границы ∂Q компакта Q, была бы меньше ε_1. Назовем такие пары (k,l) **особыми**, а остальные — **обычными**.

Диаметр $d_{k,l}$ каждого множества $Q_{k,l}$, отвечающего особым (k,l) при отображении $\bar{\varphi}$, по теореме 2 возрастает не более, чем в c раз, т.е. его образ $R_{k,l}$ можно накрыть кругом радиуса, не превосходящего ch или квадратом со стороной, не превосходящей $2ch$. Его площадь не превосходит $4c^2h^2$. Обозначим через μ_1 сумму по особым парам (k,l) площадей $R_{k,l} = \bar{\varphi}(Q_{k,l})$. Имеем

$$\mu_1 = \sum_{(k,l)}{}' \mu(R_{k,l}) \leq \sum_{(k,l)}{}' 4c^2\mu(P_{k,l}) \leq 4c^2\varepsilon_1.$$

Поскольку ∂R принадлежит объединению этих $R_{k,l}$, $\mu(\partial R) \leq 4c^2\varepsilon_1$. Ввиду произвольности выбора числа $\varepsilon_1 > 0$ отсюда имеем, что $\mu(\partial R) = 0$, т.е. множество R измеримо по Жордану.

Обозначим через $\mu(R)$ меру Жордана области R. Тогда имеем $\mu(R) = \mu_1 + \mu_2$, где величина μ_1 определена выше и $\mu_2 = \sum\limits_{(k,l)}{}'' \mu(R_{k,l})$.

Символ $\sum''_{(k,l)}$ означает, что суммирование ведется по обычным парам (k,l).

Рассмотрим теперь какой-либо квадрат $P_{k,l}$, целиком лежащий внутри Q. Тогда имеем $Q_{k,l} = P_{k,l}$. Обозначим его вершины через $\bar{x}_0, \bar{x}_0 + \bar{a}_1, \bar{x}_0 + \bar{a}_2, \bar{x}_0 + \bar{a}_1 + \bar{a}_2$, причем $||\bar{a}_1|| = ||\bar{a}_2|| = h$. Очевидно, что для любого $\bar{x} \in P_{k,l}$ имеем $||\bar{x} - \bar{x}_0|| = ||\Delta\bar{x}|| < 2h$. Пусть A — матрица Якоби отображения φ. Тогда при линейном отображении с этой матрицей A квадрат $P_{k,l}$ перейдет в параллелограмм K с вершинами $\bar{y}_0 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0), \bar{y}_1 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0) + A\bar{a}_1 = \bar{y}_0 + \bar{b}_1, \bar{y}_2 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0) + A\bar{a}_2 = \bar{y}_0 + \bar{b}_2, \bar{y}_3 = \bar{\varphi}(\bar{x}_0) + A(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = \bar{y}_0 + (\bar{b}_1 + \bar{b}_2)$.

Пусть $\alpha(\Delta\bar{x})$ — функция, определенная в утверждении теоремы 3 §11. Заключим стороны параллелограмма в "рамку" K_1, образованную точками, отстоящими во внешнюю сторону от параллелограмма на расстояние, не превосходящее $\rho = \alpha(2h)\cdot 2h$. Тогда $K \subset K_1$.

Докажем, что $R_{k,l} \subset K_1$, то есть, что для любой точки $\bar{x} \in P_{k,l}$ ее образ $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x}) \in K_1$.

Действительно, так как $\bar{x} \in P_{k,l}$, то $\bar{y}_0 + d\bar{\varphi}(\bar{x}) \in K$. Поэтому имеем

$$||\bar{\varphi}(\bar{x}) - \bar{\varphi}(\bar{x}_0) - d\varphi(\bar{x})|| = ||\bar{r}(\bar{x}_0, \Delta\bar{x})|| \le 2h\alpha(2h) = \rho,$$

то есть $\bar{\varphi}(\bar{x}) \in K_1$.

Теперь заметим, что множество $R_{k,l}$ измеримо по Жордану по тем же причинам, что и R. Периметр параллелограмма K не превосходит $c\cdot 4h$. Поэтому, исходя из построения фигуры K_1 будем иметь $\mu(K_1) \le \mu(K) + \rho\cdot c\cdot 4h + 4\pi\rho^2$.

Поскольку $R_{k,l} \subset K_1$, то величина $\mu(R_{k,l})$ удовлетворяет неравенству

$$\mu(R_{k,l}) \le \mu(K_1).$$

Используя эти неравенство, приходим к оценке

$$\mu(R_{k,l}) \le \mu(K_1) \le \mu(K) + \rho\cdot c\cdot 8h + 4\pi\rho^2 = \mu(K) + \Delta(h).$$

Из линейной алгебры известно, что для линейного отображения с матрицей A, определитель которой равен J, и при котором квадрат $P_{k,l}$ переходит в параллелограмм K, справедливо равенство

$$\mu(K) = |J|\mu(P_{k,l}).$$

Используя это равенство, получим

$$\mu(R_{k,l}) \le |J_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(Q_{k,l}) + \Delta(h).$$

Далее, для каждой особой пары (k,l) выберем произвольным образом точку $\bar{x}_{k,l} \in Q_{k,l}$ и образуем сумму

$$\sigma_1 = \sum{}' |J_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(Q_{k,l}),$$

где $\sum'$ означает, что суммирование ведется по особым парам (k, l).

Так как функция $|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|$ непрерывна на компакте Q, то по теореме Вейерштрасса она ограничена некоторой постоянной $c_2 > 0$. Поэтому

$$|\sigma_1| \le c_2 \sum{}' \mu(Q_{k,l}) = c_2\mu_1 < c_2\varepsilon_1.$$

Пусть $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, где $\sigma_2 = \sum{}'' |J_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(Q_{k,l})$, причем в последней сумме суммирование распространено на обычные пары (k, l). Оценим разность между интегральной суммой σ и величиной $\mu(R)$. Имеем

$$|\mu(R) - \sigma| = |\sum{}'' (\mu(R_{k,l}) - |J_{\bar{\varphi}}(\bar{x}_{k,l})|\mu(Q_{k,l})) + \sum{}' \mu(R_{k,l}) - \sigma_1| \le$$

$$\le |\sum{}''| + |\sum{}'| + |\sigma_1|.$$

Воспользуемся ранее доказанными неравенствами. Получим

$$|\sum{}''| \le \frac{\Delta(h)}{h^2}\mu(Q), \quad \sum{}'' h^2 = \sum{}'' \mu(Q_{k,l}) \le \mu(Q),$$

$$\left|\sum{}'\right| \le 4c^2\varepsilon_1, \quad |\sigma_1| < c_2\varepsilon_1.$$

Сумма σ представляет собой интегральную сумму для функции $|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|$ по множеству Q. При $h \to 0$ эта сумма сходится к интегралу

$$J = \int\!\!\int_Q |J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})| d\mu.$$

Поскольку $\frac{\Delta(h)}{h^2}$ стремится к нулю при $h \to 0$, то из полученных выше оценок при $h \to 0$ находим

$$\mu(R) \le J + |\mu(R) - J| \le J + \varepsilon_1(4c^2 + c_2).$$

В силу произвольности выбора числа ε_1 отсюда получим, что $\mu(R) \le J$.

Теорема 1 доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть Q — измеримый по Жордану компакт в пространстве $\mathbb{R}^n$ и R образ его при гладком взаимно однозначном отображении $\bar{\varphi}$. Тогда*

1) множество R измеримо по Жордану,

2) $\mu(R) \le \int \cdots \int_Q |J| d\mu$, где $J = J_{\bar{\varphi}}$ — якобиан отображения $\bar{\varphi}$.

Доказательство. Покажем, что в условии теоремы 1 можно отказаться от требования выпуклости множества Q. Для этого, как и в теореме 1, рассмотрим разбиение Q на обычные и особые множества $Q_{k,l}$, полагая при этом, что мера $\mu(D)$ объединения D всех стандартных квадратов, содержащих особые множества $Q_{k,l}$, не превышает ε_1, где $\varepsilon_1 > 0$ — любое наперед заданное число. При доказательстве теоремы 1 показано, что мера $\mu(W)$ образа W множества D при отображении $\bar{\varphi}$ не превосходит $4c^2\varepsilon_1$. Далее, каждое обычное множество $Q_{k,l} = P_{k,l}$ является стандартным квадратом, и тем самым удовлетворяет условиям теоремы 1, поэтому для каждого из них справедливо неравенство

$$\mu(R_{k,l}) \leq \int \cdots \int\limits_{P_{k,l}} |J| \, d\mu.$$

Здесь, как и раньше, $R_{k,l} = \bar{\varphi}(Q_{k,l}) = \bar{\varphi}(P_{k,l})$.

Суммируя по всем парам (k,l), мы приходим к неравенству

$$\mu(R) = \sum_{(k,l)} \mu(R_{k,l}) \leq 4c^2\varepsilon_1 + \int \cdots \int\limits_{Q} |J| \, d\mu.$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon_1 > 0$ оно влечет за собой справедливость неравенства

$$\mu(R) \leq \int \cdots \int\limits_{Q} |J| \, d\mu.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть условия теоремы 2 выполнены и, кроме того, при всех $\bar{x} \in Q$ имеет место неравенство $|J_{\bar{\varphi}}| \geq \delta$, где $\delta > 0$ — некоторое фиксированное число. Тогда справедлива формула*

$$\mu(R) = \int \cdots \int\limits_{Q} |J| d\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\bar{\psi}$, определенное на множестве R и обратное к отображению $\bar{\varphi}$. Тогда $\bar{\psi}$ является гладким отображением, его якобиан $J_{\bar{\psi}}$ непрерывен и

$$|J_{\bar{\psi}}| = |J_{\bar{\varphi}}^{-1}| \leq \delta^{-1}.$$

По теореме 2 имеет место оценка

$$\mu(R) \leq \int \cdots \int\limits_{Q} |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu = \sup_{T} s(T),$$

где $s(T)$ — нижняя сумма Дарбу по неразмеченному разбиению T множества Q.

Имеем $s(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k \mu_k$, где Q_k — элемент разбиения T множества Q на области $Q_1, \ldots, Q_n$, измеримые по Жордану, $m_k = \inf\limits_{Q_k} |J_{\bar{\varphi}}|$, $\mu_k = \mu(Q_k)$ и $Q_k = \bar{\psi}(R_k)$. По теореме 2 при всех k от 1 до n справедлива оценка

$$\mu(Q_k) \leq \int \cdots \int\limits_{R_k} |J_{\bar{\psi}}| \, d\mu.$$

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем, получим

$$\int \cdots \int\limits_{R_k} |J_{\bar{\psi}}| \, d\mu \leq M_k \mu(R_k),$$

где $M_k = \sup\limits_{R_k} |J_{\bar{\psi}}|$. Теперь заметим, что $J_{\bar{\psi}} = J_{\bar{\varphi}}^{-1}$, поэтому $m_k = M_k^{-1}$. Но тогда приходим к неравенству

$$s(T) \leq \sum_{k=1}^{n} m_k M_k \mu(R_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu(R_k) = \mu(R).$$

Тем самым получены неравенства

$$\mu(R) \leq \int \cdots \int\limits_{Q} |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu \leq \mu(R),$$

которые равносильны равенству

$$\mu(R) = \int \cdots \int\limits_{Q} |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu.$$

Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4. *Утверждение теоремы 3 остается в силе и без ограничения на значение якобиана* $J_{\bar{\varphi}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество K точек $\bar{x} \in Q$, в которых якобиан $J(\bar{x}) = J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})$ обращается в нуль. Покажем, что множество точек K — замкнуто. Действительно, если $\bar{x}_0$ — предельная точка для K, то найдется последовательность $\bar{x}_n \in K$ такая, что $\bar{x}_n \to \bar{x}_0$ при $n \to \infty$. Тогда $J(\bar{x}_n) = 0$ и в силу непрерывности функции $J(\bar{x})$ справедливы равенства

$$J(\bar{x}_0) = J(\lim_{n\to\infty} \bar{x}_n) = \lim_{n\to\infty} J(\bar{x}_n) = 0.$$

Следовательно, $\bar{x}_0 \in K$.

Зафиксируем произвольное число $\delta > 0$. Каждую точку $\bar{x} \in K$ окружим окрестностью, в которой функция $J(\bar{x})$ удовлетворяет неравенству $|J(\bar{x})| < \delta$. Поскольку K — компакт, то из всей совокупности окрестностей можно выделить конечное подпокрытие. Обозначим выделенные окрестности через K_0 и разобьем множество Q на два множества Q_0 и Q_1, полагая $Q_0 = K_0 \cap Q$ и $Q_1 = Q \setminus Q_0$.

Тогда $Q = Q_0 \cup Q_1$ и $Q_0 \cap Q_1 = \varnothing$. Оба множества Q_0 и Q_1, очевидно, измеримы по Жордану. Кроме того, Q_0 — открыто, а Q — замкнуто, поэтому Q_1 — тоже замкнуто. Тогда по теореме Вейерштрасса функция $|J(\bar{x})|$ достигает на Q_1 своего минимального значения m в некоторой точке $\bar{x}_0 \in Q_1$. Число m больше нуля, так как $\bar{x}_0$ не входит в $K \subset Q_0$, поскольку Q_0 и Q_1 не пересекаются.

Следовательно, к образу R_1 множества Q_1 при отображении $\bar{\varphi}$ можно применить теорему 3, а к образам R и R_0 множеств Q и Q_0 — теорему 2. Тогда, используя еще и теорему о среднем, получим

$$\mu(R) = \mu(R_0) + \mu(R_1), \quad \mu(R_1) = \int\limits_{Q} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu,$$

$$0 \le \mu(R_0) \le \int\limits_{Q_0} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu \le \delta\mu(Q_0) \le \delta\mu(Q).$$

Следовательно,

$$0 \le \int\limits_{Q} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu - \mu(R) =$$

$$= \left(\int\limits_{Q_1} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu - \mu(R_1) \right) + \int\limits_{Q_0} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu - \mu(R_0) \le$$

$$\le \int\limits_{Q_0} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu \le \delta\mu(Q).$$

В силу произвольности выбора $\delta > 0$ это означает, что

$$\int\limits_{Q} \cdots \int |J_{\bar{\varphi}}| \, d\mu = \mu(R).$$

Теорема 4 доказана.

Т е о р е м а 5 (формула замены переменных в кратном интеграле). *Пусть D_0 — измеримый по Жордану компакт и $\bar{\varphi}$ — гладкое взаимно однозначное отображение компакта D_0 на D. Пусть также функция $g(\bar{y})$ интегрируема на D, а функция $f(\bar{x}) = g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|$ интегрируема на D_0. Тогда имеем*

$$\int\limits_D \cdots \int g(\bar{y})dy_1 \ldots dy_n = \int\limits_{D_0} \cdots \int f(\bar{x})dx_1 \ldots dx_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное разбиение T области D на измеримые области $R_1, \ldots, R_t$, и пусть $\bar{\varphi}(Q_s) = R_s, s = 1, \ldots, t$. Обозначим через $m_s = \inf\limits_{R_s} g(\bar{y})$, $M_s = \sup\limits_{R_s} g(\bar{y})$. По теореме о среднем имеем

$$m_s \int\limits_{Q_s} \cdots \int |J|d\mu \le \int\limits_{Q_s} \cdots \int g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|d\bar{x} \le M_s \int\limits_{Q_s} \cdots \int |J|d\mu.$$

Из теоремы 4 следует, что $\mu(R_s) = \int\limits_{Q_s} \cdots \int |J|d\mu$. Поэтому, просуммировав предыдущие неравенства по s от 1 до t, получим

$$\sum_{s=1}^{t} m_s\mu(R_s) \le \int\limits_{D_0} \cdots \int g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|d\bar{x} \le \sum_{s=1}^{t} M_s\mu(R_s),$$

т.е. справедливы следующие неравенства для верхних и нижних сумм Дарбу от функции $g(\bar{y})$ по области D, отвечающих разбиению T :

$$s(T) \le \int\limits_{D_0} \cdots \int g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|d\bar{x} \le S(T).$$

В силу интегрируемости функции $g(\bar{y})$ получим $s(T) \to A$, $S(T) \to A$ при $\Delta_T \to 0$, где $A = \int\limits_D \cdots \int g(\bar{y})d\bar{y}$. Следовательно, имеем

$$\int\limits_D \cdots \int g(\bar{y})d\bar{y} = \int\limits_{D_0} \cdots \int g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|d\bar{x}.$$

Теорема 5 доказана.

Замечание. В теоремах 4 и 5 в качестве отображения $\bar{\varphi}$ можно взять любое ортогональное отображение. Якобиан этого отображения равен 1. Следовательно, мера Жордана и интеграл Римана инвариантны относительно движений пространства и их определение не зависит от выбора прямоугольной системы координат. Отметим, что инвариантность меры Жордана ранее была получена нами из геометрических соображений.

Примеры. 1. Переход к **полярным координатам** от прямоугольных координат производится по формулам

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Якобиан отображения $(x, y) \to (r, \varphi)$ равен r. Формула замены переменных имеет вид

$$\iint\limits_{D} g(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_0} g(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

2. Переход к **сферическим координатам** от декартовых прямоугольных координат выполняется по формулам

$$x = r\cos\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\cos\theta, z = r\sin\theta,$$

где r — длина радиус-вектора текущей точки M от начала координат, θ — величина угла между радиус-вектором $\overline{OM}$ и его проекцией на плоскость xOy, φ — величина угла между осью Ox и $\overline{OM}$, и, кроме того, $r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, |\theta| \leq \frac{\pi}{2}$.

Якобиан этого отображения равен $r^2\cos\theta$. Таким образом, получаем для дифференциального выражения элемента объема dV следующую формулу:

$$dV = dxdydz = r^2\cos\theta drd\varphi d\theta.$$

Лекция 7

§ 13. КРИТЕРИЙ ЛЕБЕГА

Начнем с определения множества нулевой меры Лебега. Открытый параллелепипед назовем **стандартным,** если его ребра параллельны осям прямоугольной системы координат. Объединение не более чем счетного числа стандартных параллелепипедов назовем **простейшей фигурой.**

Определение 1. *Множество A точек в пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет лебегову меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное или счетное множество открытых стандартных параллелепипедов Π_k, $k = 1, \dots,$ с объемом $\mu(\Pi_k) = \delta_k$, покрывающих $A, A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Pi_k$, и таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k < \epsilon$.*

Л е м м а 1. *Конечное или счетное объединение множеств лебеговой меры нуль является множеством лебеговой меры нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам дано, что $\mu(A_k) = 0, k = 1, \dots$. Докажем, что $\mu(A) = \mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k) = 0$. Действительно, по определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует простейшая фигура Π_k такая, что $A_k \subset \Pi_k$ и $\mu(\Pi_k) < \varepsilon/2^k$.

Кроме того, имеем $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Pi_k$ и $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Pi_k) \le \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(\Pi_k) < \epsilon$. Следовательно, множество A имеет лебегову меру нуль.

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Пусть $B \subset A, \mu(A) = 0$. Тогда $\mu(B) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку любая простейшая фигура, покрывающая множество A, покрывает и множество B, утверждение леммы сразу следует из определения множества лебеговой меры нуль.

Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *Компакт $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 1$, лебеговой меры нуль измерим по Жордану и его мера Жордана равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как лебегова мера компакта A равна нулю, то для любого $\varepsilon > 0$ существует простейшая фигура, состоящая не более чем счетного множества открытых стандартных параллелепипедов, покрывающая A, и имеющая объем, меньший ε.

Из этого покрытия можно выделить в силу компактности конечное подпокрытие с объемом меньшим ε. Следовательно, множество A измеримо по Жордану и его мера Жордана равна нулю.

Лемма 3 доказана.

Далее, пусть функция $g(x,y)$ ограничена на прямоугольнике P. Обозначим через $\Pi = \Pi(\delta) = \Pi(\bar{x}_0, \delta)$ куб, состоящий из точек $(x_1, \ldots, x_n)$ с условием $x_{0,s} - \delta < x_s < x_{0,s} + \delta, s = 1, \ldots, n$, где $\bar{x}_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$.

Определение 2. Колебанием функции $g(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_0$ *назовем величину*

$$\omega(\bar{x}_0) = \omega_g(\bar{x}_0) = \inf_{\Pi} \sup_{\bar{x},\bar{y}\in\Pi} (g(\bar{x}) - g(\bar{y})).$$

Другими словами, имеем

$$\omega(\bar{x}_0) = \inf_{\Pi}(M_\delta(\bar{x}_0) - m_\delta(\bar{x}_0)),$$

где

$$M_\delta(\bar{x}_0) = \sup_{\bar{x}\in\Pi} g(\bar{x}), m_\delta(\bar{x}_0) = \inf_{\bar{x}\in\Pi} g(\bar{x}).$$

Имеет место следующий критерий непрерывности функции в точке в терминах колебания функции в точке.

Л е м м а 4. *Функция $g(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$ тогда и только тогда, когда $\omega_g(\bar{x}_0) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть функция $g(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$. Предположим, что $\omega_g(\bar{x}_0) = \alpha > 0$. Рассмотрим куб $\Pi_{1/n}$. Тогда из определения величины $\omega_g(\bar{x}_0)$ имеем $M_{1/n}(\bar{x}_0) - m_{1/n}(\bar{x}_0) \geq \alpha$. Отсюда получим, что существуют точки $\bar{x}_n$ и $\bar{y}_n$ такие, что $g(\bar{x}_n) - g(\bar{y}_n) > \frac{\alpha}{2} > 0$.

Кроме того, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{y}_n = \bar{x}_0$. Но тогда, переходя в предыдущем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и используя непрерывность функции $g(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_0$, получим $0 \geq \alpha/2 > 0$. Это противоречивое неравенство показывает, что сделанное предположение неверно. Следовательно, $\omega_g(\bar{x}_0) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Поскольку $\omega_g(\bar{x}_0) = 0$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $\bar{x}, \bar{y} \in \Pi(\delta)$ имеем $|g(\bar{x}) - g(\bar{y})| < \varepsilon$. Положим $\bar{y} = \bar{x}_0$. Тогда последнее условие будет условием непрерывности функции $g(\bar{x})$ в точке $\bar{x}_0$. Лемма 4 доказана.

Обозначим через $D(\alpha)$ множество точек $\bar{x} \in P$, удовлетворяющих условию $\omega_g(\bar{x}) \geq \alpha > 0$.

Л е м м а 5. *Множество $D(\alpha)$ замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{x}_0$ — предельная точка множества $D(\alpha)$. Докажем, что она принадлежит $D(\alpha)$. Поскольку $\bar{x}_0$ предельная точка $D(\alpha)$, существует последовательность $\bar{x}_n \in D(\alpha)$, сходящаяся к $\bar{x}_0$.

Для любого $\delta > 0$ найдется $\bar{x}_n \in \Pi_\delta(\bar{x}_0)$. В силу того, что $\Pi_\delta(\bar{x}_0)$ открытое множество, существует $\delta_1 > 0$ такое, что $\Pi_{\delta_1}(\bar{x}_n) \subset \Pi_\delta(\bar{x}_0)$. Отсюда имеем

$$M_\delta(\bar{x}_0) - m_\delta(\bar{x}_0) \geq M_{\delta_1}(\bar{x}_n) - m_{\delta_1}(\bar{x}_n) \geq \omega_g(\bar{x}_n) \geq \alpha.$$

Следовательно, $\omega_g(\bar{x}_0) = \inf\limits_{\Pi}(M_\delta(\bar{x}_0) - m_\delta(\bar{x}_0)) \geq \alpha$, то есть точка $\bar{x}_0 \in D(\alpha)$.

Лемма 5 доказана.

Т е о р е м а 1. *Ограниченная на прямоугольнике функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$ множество $D(\alpha)$ имеет лебегову меру нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Предположим, что существует $\alpha > 0$ такое, что множество $D(\alpha)$ не является множеством лебеговой меры нуль, т.е. найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любой простейшей фигуры,содержащей $D(\alpha)$, ее объем не меньше ε_0.

Рассмотрим любое разбиение T прямоугольника P на прямоугольники $P_{k,l}$. Пусть Π_0 — множество всех тех прямоугольников $P_{k,l}$, внутри которых находится хотя бы одна точка множества $D(\alpha)$. Площадь простейшей фигуры Π_0 не меньше ε_0. Если бы это было не так, т.е. площадь $\mu(\Pi_0) = \varepsilon_1 < \varepsilon_0$. Покроем границу $\partial\Pi_0$ стандартными прямоугольниками общей площадью, не превосходящей $\frac{1}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)$. Тем самым множество $D(\alpha)$ покрыто открытой простейшей фигурой площади, не превосходящей $\varepsilon_1 + \frac{1}{2}(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) < \varepsilon_0$. Это противоречит нашему предположению. Следовательно, $\mu(\Pi_0) \geq \varepsilon_0$.

Заметим, для любого стандартного прямоугольника из Π_0 колебание функции на этом прямоугольнике не меньше, чем α. Поэтому для любого разбиения T имеем $\Omega(T) \geq \alpha\epsilon_0 > 0$. Отсюда получим, что $\inf\limits_T \Omega(T) \geq \alpha\varepsilon_0 > 0$. Но это означает, что рассматриваемая функция не интегрируема на прямоугольнике, что противоречит условию теоремы. Следовательно, наше предположение не имеет места, и, значит, для любого $\alpha > 0$ лебегова мера $\mu(D(\alpha)) = 0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Положим $\alpha = \varepsilon/(4\mu(P))$, $\delta = \varepsilon/(4M)$, $M = \max\limits_{\bar{x}\in P}|g(\bar{x})|$. Так как множество $D(\alpha)$ имеет лебегову меру нуль, то его можно покрыть простейшей фигурой с общей площадью, меньшей, чем δ. Множество $D(\alpha)$ — замкнуто и ограничено, следовательно, оно — компакт. Выделим из системы стандартных прямоугольников, из которых состоит эта простейшая фигура, конечное подпокрытие I. Рассмотрим множество $K = P \setminus I$. Оно является компактом. Для любой точки $\bar{x} \in K$ имеем, что $\omega_g(\bar{x}) < \alpha$. Из определения $\omega_g(\bar{x})$ получим, что существует квадрат $\Pi_\gamma(\bar{x}), \gamma > 0$ такой, что колебание функции $g(\bar{x})$ на нем меньше, чем 2α. Квадраты $\Pi_{\gamma/2}(\bar{x})$ образуют покрытие множества K. Выделим из него конечное подпокрытие V. Продолжим стороны прямоугольников, составляющих I и V до пересечения со сторонами P. Получим разбиение T прямоугольника P.

Сумму $\Omega(T)$ представим в виде

$$\Omega(T) = \sum_{(k,l)}\sum{}' \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l + \sum_{(k,l)}\sum{}'' \omega_{k,l}\Delta x_k \Delta y_l = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

где в сумму $\sum\limits_{(k,l)}\sum{}'$ входят те слагаемые, для которых элемент разбиения $P_{k,l} \subset I$, а в сумму $\sum\limits_{(k,l)}\sum{}''$ — те слагаемые, для которых $P_{k,l} \subset V$. Имеем

$$\Sigma_1 \leq 2M \sum_{(k,l)}\sum{}' \Delta x_k \Delta y_l < 2M\delta,$$

$$\Sigma_2 \leq 2\alpha \sum_{(k,l)}\sum{}'' \leq 2\alpha\mu(P).$$

Следовательно,

$$\Omega(T) = \Sigma_1 + \Sigma_2 < 2M\delta + 2\alpha\mu(P) = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, имеем $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$, т.е. функция $g(\bar{x})$ интегрируема на прямоугольнике P.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (критерий Лебега). *Ограниченная функция $g(\bar{x})$ интегрируема по Риману на прямоугольнике P тогда и только тогда, когда множество D точек разрыва ее имеет лебегову меру нуль.*

Доказательство. Необходимость. По теореме 1 для любого натурального числа n множества $D(1/n)$ имеют лебегову меру нуль. Отсюда получим, что лебегова мера $D = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D(1/n)$ равна нулю.

Достаточность. Для любого $\alpha > 0$ имеем $D(\alpha) \subset D$. Поэтому, если мера $\mu(D) = 0$, то $\mu(D(\alpha)) = 0$. Из теоремы 1 следует интегрируемость функции $g(\bar{x})$ на прямоугольнике P.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть функция $g(\bar{x})$ интегрируема на прямоугольнике, $m = \inf\limits_P g(\bar{x}), M = \sup\limits_P g(\bar{x})$ и пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[m, M]$. Тогда $f(g(\bar{x}))$ интегрируема на прямоугольнике P.*

Доказательство. Точка непрерывности функции $g(\bar{x})$ будет точкой непрерывности функции $f(g(\bar{x}))$. Следовательно, точками разрыва $f \circ g$ могут быть только точки разрыва функции g. И поэтому множество точек разрыва $f \circ g$ имеет лебегову меру нуль, как подмножество множества меры нуль (по критерию Лебега мера множества точек разрыва $g(\bar{x})$ равна нулю).

Теорема 3 доказана.

Лекция 8

§ 14. НЕСОБСТВЕННЫЕ КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Для обычных однократных интегралов мы определили два вида несобственных интегралов. Аналогично в случае кратных интегралов назовем:

1) **несобственным кратным интегралом первого рода** — интеграл по неограниченной области D от ограниченной функции $g(\bar{x})$;

2) **несобственным кратным интегралом второго рода** — интеграл по ограниченной измеримой по Жордану области D от функции $g(\bar{x})$, имеющей конечное число особых точек $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ таких, что в любой окрестности каждой из этих точек функция $g(\bar{x})$ не ограничена (точки $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ не обязаны принадлежать области D).

Пример. Функция $g(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ в области $D = \{(x, y)|x > 0, y > 0\}$ имеет особую точку $x = 0, y = 0$.

Для несобственных интегралов используется то же самое обозначение, что и для собственных интегралов:

$$I = \iint\limits_D g(x, y)dxdy.$$

Будем для простоты рассматривать только двойные интегралы и сначала случай несобственных интегралов второго рода с одной особой точкой $\bar{a}$. Проще всего этот интеграл как предел при $r \to 0$ интегралов $I_r = \iint\limits_{D_r} g(x, y)dxdy$, где $D_r = D \setminus O(\bar{a}, r)$, $O(\bar{a}, r)$ — шар радиуса r с центром в точке $\bar{a}$, т.е. по определению имеем

$$I = \iint\limits_D g(x, y)dxdy = \lim_{r \to 0} I_r.$$

Это значение I будем называть **главным значением в смысле Коши** несобственного интеграла от функции $g(x, y)$ по области D.

Аналогично для несобственного интеграла первого рода **главным значением в смысле Коши** назовем величину $I = \lim\limits_{R \to \infty} I_R$, где

$$I_R = \iint\limits_{D_R} g(x, y)dxdy, \ D_R = D \cap O(\bar{0}, R).$$

Перейдем к общему определению несобственного интеграла.

Определение 1. 1) *Число I называется* **несобственным двойным интегралом первого рода** *от функции $g(x,y)$ по неограниченной области D, если для любой последовательности областей D_n, являющихся ограниченными, открытыми, связными, измеримыми по Жордану, и удовлетворяющих следующим условиям:*

а) для любого натурального числа n имеем $D_n \subset D_{n+1} \subset D$ (условие монотонности);

б) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = D$ (условие исчерпывания),/newline имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$, где $I_n = \iint\limits_{D_n} g(x,y)d\mu$.

2) Число I называется **несобственным двойным интегралом второго рода** *от неограниченной функции $g(x,y)$ по ограниченной измеримой по Жордану области D со множеством особых точек $L \subset \bar{D}$ ($\bar{D}$ – замыкание D), если для любой последовательности областей D_n, являющихся открытыми, связными, измеримыми по Жордану, и удовлетворяющих следующим условиям:*

а) для любого натурального числа n имеем $D_n \subset D_{n+1} \subset D$ (условие монотонности);

б) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = D$ (условие исчерпывания);

в) $\bar{L} \cap \bar{D}_n = \varnothing$, имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$, где

$$I_n = \iint\limits_{D_n} g(x,y)d\mu.$$

Последовательность $\{D_n\}$ в определении несобственных интегралов первого и второго рода будем называть **допустимыми** (или D - **допустимыми**).

Замечания. 1. Ясно, что для существования несобственного интеграла второго рода необходимо, чтобы $\mu(L) = 0$.

2. В обоих случаях несобственного интеграла первого и второго рода мы сохраняем стандартное обозначение $I = \iint\limits_{D} g(x,y)d\mu$.

3. Точно такое же определение несобственного кратного интеграла имеет место и в случае кратности, большей двух.

Т е о р е м а 1. *Пусть $g(x,y) \geq 0$. Тогда для сходимости несобственного интеграла $I = \iint\limits_{D} g(x,y)d\mu$ необходимо и достаточно, чтобы числовое множество $\{I_n = \iint\limits_{D_n} g(x,y)d\mu\}$ было ограничено хотя бы для одной последовательности D-допустимых множеств D_n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Если интеграл I существует, то последовательность интегралов I_n сходится к I.

Следовательно, последовательность $\{I_n\}$ ограничена. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\{I_n\}$ ограничена. Тогда по теореме Вейерштрасса существует предел $I_0 = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$, где $I_0 = \sup I_n$.

Пусть $\{D_n'\}$ — другая D-допустимая последовательность и $I_n' = \iint\limits_{D_n'} g(x,y)dxdy$ — соответствующая ей последовательность интегралов. Зафиксируем теперь некоторое множество D_m' и рассмотрим последовательность $D_n'' = D_m' \cap D_n$.

Очевидно, последовательность $\{D_n''\}$ является D_m' - допустимой. В частности, для любого n имеем $D_n'' \subset D_{n+1}''$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n'' = D_m'$, и все множества D_n'' являются открытыми, связными и измеримыми по Жордану.

Для дальнейшего будет необходима следующая лемма 1, имеющая и самостоятельный интерес.

Лемма 1 (лемма об исчерпывании). *Справедливы соотношения:*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(D_n'') = \mu(D_m'), \quad \lim_{n\to\infty} \mu(D_m' \setminus D_n'') = 0.$$

Доказательство. Последовательность $\mu_n = \mu(D_n'')$ неубывающая и ограничена сверху числом $\mu(D_m')$. Следовательно, существует число $\mu_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$, причем $\mu_0 \le \mu(D_m')$.

Надо доказать, что $\mu_0 = \mu(D_m')$. Рассмотрим замыкание $\bar{D}_m'$ множества D_m', то есть множество $\bar{D}_m' = D_m' \cup \partial D_m'$. Так как множество D_m' измеримо, то $\mu(\partial D_m') = 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое простейшее множество $W = W_\varepsilon \in \Pi$ такое, что $\mu(W) < \varepsilon, \partial D \subset W$.

Множество $\bar{D}_m'$ — компакт, а множества $\{D_n''\}, n = 1, 2, \dots,$ и W образуют его покрытие открытыми множествами. Из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие множества $\bar{D}_m'$: $D_{n_1}'' \subset \dots \subset D_{n_k}''$ и W. Отсюда имеем $D_{n_k}'' \cup W \supset \bar{D}_m'$. Следовательно,

$$\mu(D_{n_k}'') + \mu(W) \ge \mu(D_m'), \quad \mu_{n_k} + \epsilon \ge \mu(D_m'),$$

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\mu_0 + \varepsilon \ge \mu_{n_k} + \varepsilon \ge \mu(D_m').$$

Поэтому имеем $\mu_0 \ge \mu(D_m')$. Но мы уже показали, что $\mu_0 \le \mu(D_m')$. Таким образом, получаем, что $\mu_0 = \mu(D_m')$.

Далее, в силу того что $(D_m^{'} \setminus D_n^{''}) \cup D_n^{''} = D_m^{'}$ и $(D_m^{'} \setminus D_n^{''}) \cap D_n^{''} = \varnothing$, из свойства аддитивности меры имеем

$$\mu(D_m^{'} \setminus D_n^{''}) + \mu(D_n^{''}) = \mu(D_m^{'}).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(D_m^{'} \setminus D_n^{''}) = 0$. Лемма 1 доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть выполнены условия леммы 1. Пусть также* $g(x,y)$ *интегрируема на* $D_m^{'}$. *Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n^{''}} g(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_m^{'}} g(x,y)dxdy = I_m^{'}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойства аддитивности интеграла имеем

$$I_m^{'} - \iint\limits_{D_n^{''}} g(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_m^{'}\setminus D_n^{''}} g(x,y)dxdy.$$

Поскольку функция $g(x,y)$ ограничена на $D_m^{'}$, т.е. существует число $c > 0$ такое, что для любой точки $(x,y) \in D_m^{'}$ имеем $|g(x,y)| \le c$, при $n \to \infty$ получим

$$|I_m^{'} - \iint\limits_{D_n^{''}} g(x,y)dxdy| \le c\mu(D_m^{'} \setminus D_n^{''}) \to 0.$$

Следствие доказано.

Завершим теперь доказательство теоремы 1. Так как $D_n^{''} \subset D_n$, то справедливо неравенство

$$\iint\limits_{D_n^{''}} g(x,y)d\mu \le I_n \le I_0.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$. Используя следствие, получим

$$I_m^{'} = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n^{''}} g(x,y)d\mu \le I_0.$$

Отсюда имеем, что существует $I^{'} = \lim\limits_{m\to\infty} I_m^{'}$, причем $I^{'} \le I_0$. Но если теперь в наших рассуждениях последовательности D_n и $D_n^{'}$ поменять местами, то получим противоположное неравенство $I_0 \le I^{'}$. Следовательно, $I^{'} = I_0$.

Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть функции $g(x, y)$ и $g_0(x, y)$ интегрируемы на любом измеримом по Жордану компакте, содержащемся в множестве D, и пусть на этом множестве D справедливы неравенства $0 \le g_0(x, y) \le g(x, y)$. Тогда имеем:*

1) если несобственный интеграл $\iint\limits_D g(x, y) d\mu = I$ сходится, то сходится интеграл $\iint\limits_D g_0(x, y) d\mu = I_0$;

2) если же несобственный интеграл $\iint\limits_D g_0(x, y) d\mu$ расходится, то будет расходиться и интеграл $\iint\limits_D g(x, y) d\mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Так как интеграл I сходится, то существует D-допустимая последовательность $\{D_n\}$, такая, что при $n \to \infty$ имеем

$$I_n = \iint\limits_{D_n} g(x, y) d\mu \to I.$$

Но тогда справедливы неравенства

$$I_n' = \iint\limits_{D_n} g_0(x, y) d\mu \le I_n \le I$$

и, кроме того, последовательность I_n' является неубывающей. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} I_n' = I_0 \le I$. По теореме 1 имеем, что существует несобственный интеграл $I_0 = \iint\limits_D g_0(x, y) d\mu$

2) В силу расходимости интеграла $\iint\limits_D g_0(x, y) d\mu$ для любой D - допустимой последовательности D_n при $n \to \infty$ имеем

$$I_n' = \iint\limits_{D_n} g_0(x, y) d\mu \to +\infty.$$

Следовательно, при $n \to \infty$ получим $I_n \to +\infty$, поскольку $I_n \ge I_n'$.

Теорема 2 доказана.

С л е д с т в и е теоремы 2. *Пусть несобственный интеграл*

$$\iint\limits_D |g(x, y)| d\mu$$

сходится. Тогда сходится интеграл

$$\iint\limits_D g(x, y) d\mu.$$

Доказательство. Рассмотрим функции

$$g_+ = \frac{|g|+g}{2}, \quad g_- = \frac{|g|-g}{2}.$$

Поскольку $0 \le g_- \le |g|$ и $0 \le g_+ \le |g|$, по теореме 2 сходятся интегралы $\iint\limits_D g_- d\mu$, $\iint\limits_D g_+ d\mu$ Но тогда сходится интеграл от функции $g = g_+ - g_-$. Следствие теоремы 2 доказано.

Определение 2. *Если сходится интеграл* $\iint\limits_D |g(x,y)|d\mu$, *то говорят, что интеграл* $\iint\limits_D g(x,y)d\mu$ **сходится абсолютно.**

Последнее следствие можно сформулировать так: если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Заметим, что утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, имеют место и для несобственных интегралов второго рода. Оказывается, что в случае несобственных кратных интегралов обычная сходимость влечет за собой и абсолютную сходимость. В случае однократных интегралов это не так.

Приведем только формулировки двух теорем, полезных для приложений.

Теорема 3. *Если интеграл* $\iint\limits_D g(x,y)d\mu$ *сходится и существует повторный интеграл от функции* $g(x,y)$ *по области* D, *то двойной интеграл равен повторному.*

Теорема 4. *Если интеграл* $\iint\limits_D g(\bar{y})d\mu$ *сходится и* $\bar{y} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ — *гладкое отображение области* D_0 *в* D, *взаимно однозначное для внутренних точек* D_0, *то справедлива следующая формула замены переменных:*

$$\iint\limits_D g(\bar{y})d\mu = \iint\limits_{D_0} g(\bar{\varphi}(\bar{x}))|J_{\bar{\varphi}}(\bar{x})|d\bar{x}.$$

Примеры. 1. Интеграл

$$\int\limits_{||\bar{x}||>1}\!\!\cdots\!\int \frac{d\bar{x}}{||\bar{x}||^\alpha}$$

где $||\bar{x}|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, сходится при $\alpha > n$ и расходится при $\alpha \le n$.

Рассмотрим множество S_A точек $\bar{x}$, удовлетворяющих неравенствам $A < ||\bar{x}|| \le 2A$. Положим $A = A_k = 2^k, k = 0, 1, 2, \ldots$. Получим

$$\int\limits_{||\bar{x}||>1}\!\!\cdots\!\int \frac{d\bar{x}}{||\bar{x}||^\alpha} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k\alpha}}\mu(S_{2^k}) \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2n} \cdot 2^{-k\alpha+kn}.$$

Последний ряд сходится при $-\alpha+n<0$, т.е. при $\alpha>n$. Пусть K_A — множество точек $\bar{x}$ вида $||\bar{x}||\le A$. Тогда имеем

$$\mu(S_A)=\mu(K_{2A})-\mu(K_A)=A^n(\mu(K_2)-\mu(K_1)).$$

Отсюда

$$\int\limits_{||\bar{x}||>1}\cdots\int\frac{d\bar{x}}{||\bar{x}||^\alpha}\ge\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(k+1)\alpha}}2^{kn}(\mu(K_2)-\mu(K_1)).$$

Последний ряд представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $2^{n-\alpha}$. Следовательно, по признаку сравнения интеграл расходится при $\alpha\le n$.

2. Интеграл

$$\int\limits_{||\bar{x}||>1}\cdots\int\frac{d\bar{x}}{|x|^{\alpha_1}+\cdots+|x|^{\alpha_n}},$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\le 0$, сходится при $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}<1$ и расходится при $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\ge 1$.

Пусть S_A — множество точек, для которых справедливо неравенство

$$A<|x_1|^{\alpha_1}+\cdots+|x_n|^{\alpha_n}\le 2A.$$

Тогда для любой точки $\bar{x}\in S_A$ имеем $|x_s|\le(2A)^{1/\alpha_s}, s=1,\ldots,n$. Следовательно,

$$\mu(S_A)\le\frac{1}{2^k}2^n\cdot 2^{\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}}\cdot 2^{k(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n})}.$$

Отсюда получим, что интеграл сходится при $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}-1<0$.

Пусть K_A множество точек $\bar{x}$ с условием $|x_1|^{\alpha_1}+\cdots+|x_n|^{\alpha_n}\le A$ и $S_A=K_{2A}\setminus K_A$. Очевидно, имеем

$$\mu(S_A)=\mu(K_{2A})-\mu(K_A)=A^{\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}}(\mu(K_2)-\mu(k_1)).$$

Следовательно, интеграл

$$\int\limits_{||\bar{x}||>1}\cdots\int\frac{d\bar{x}}{|x|^{\alpha_1}+\cdots+|x|^{\alpha_n}}\ge\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\mu(S_{2^k})\ge$$

$$\ge\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cdot 2^{k(\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n})}(\mu(K_2)-\mu(K_1))$$

расходится при $\frac{1}{\alpha_1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}-1\ge 0$.

На этом мы завершаем рассмотрение теории несобственных кратных интегралов.

Лекция 9

§ 15. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ

Наша задача состоит в том, чтобы распространить понятие измеримости на множества, расположенные на двумерных поверхностях в пространствах размерности три и выше. Для этого нам необходимо ответить на следующие вопросы. Что такое поверхность? И какие поверхности мы будем рассматривать?

Раньше (во втором семестре) мы называли **поверхностью** Q множество точек (x, y, z), удовлетворяющих уравнению $z = g(x, y)$ для некоторой функции $g(x, y)$ от двух переменных x и y, причем точка (x, y) принадлежит некоторому множеству на плоскости xOy. Обычно от функции $g(x, y)$ требуют непрерывности всюду, за исключением, быть может, множества L нулевой меры Жордана. Проекцией поверхности Q на плоскость xOy является область D. Предположим, что область D — измеримый по Жордану компакт. Пусть измеримые множества $D_1, \ldots, D_t$ образуют его разбиение τ. Возьмем точки $M_1, \ldots, M_t$ на границе соответственно каждой из областей $D_1, \ldots, D_t$. Этим точкам при проекции на плоскость соответствуют точки $N_1, \ldots, N_t$ на поверхности Q. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ — углы между нормалью к поверхности Q в точке $N_s, s = 1, \ldots, t$, и осью Oz. Рассмотрим части касательных плоскостей $Q_s, s = 1, \ldots, t$, проходящих через точки N_s и имеющих своей проекцией на плоскость xOy область D_s. Получим "чешуйчатую" поверхность. Из линейной алгебры известно, что ее площадь $\mu(Q_s)$ равна

$$\mu(Q_s) = \frac{\mu(D_s)}{|\cos\gamma_s|}, s = 1, \ldots, t.$$

Назовем **площадью поверхности** Q величину

$$\mu(Q) = \lim_{\Delta_\tau \to 0} \sum_{s=1}^{t} \frac{\mu(D_s)}{|\cos\gamma_s|} = \iint\limits_D \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}.$$

Поскольку уравнение поверхности имеет вид $z = g(x, y)$, то нормаль ее в точке N поверхности Q можно представить в виде

$$\bar{n} = \bar{n}(N) = \frac{(-g'_x, -g'_y, 1)}{\sqrt{1 + (g'_x)^2 + (g'_y)^2}}.$$

Следовательно, имеем

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}}.$$

Отсюда получим

$$\mu(Q) = \int\int_D \sqrt{1+(g'_x)^2+(g'_y)^2}dxdy.$$

Итак, из не вполне строгих геометрических соображений мы получили формулу площади поверхности в трехмерном пространстве.

Далее мы дадим некоторое уточнение и обобщение этого понятия.

Определение 1. Поверхностью Q **в** n **- мерном пространстве** $\mathbb{R}^n$ *называется множество точек* $\{\bar{r}\}, \bar{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, *таких, что* $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$, *где* $\bar{x} = (x_1, x_2) \in D$, *причем область* D *является ограниченной и измеримой по Жордану, отображение* $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ *есть взаимно однозначное отображение внутренних точек множества* D *на точки множества* Q *и* $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ *непрерывно всюду, за исключением множества* L, *имеющего нулевую меру Жордана.*

Напомним, что отображение $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x}) = (r_1, \ldots, r_n)$ непрерывно в точке $\bar{x}$, если непрерывны функции $r_k = r_k(\bar{x}), k = 1, \ldots, n$.

Назовем отображение $\bar{r}(\bar{x}) = (r_1(\bar{x}), \ldots, r_n(\bar{x}))$ **гладким**, если для любой точки $\bar{x} \in D$ функции $r_k(\bar{x}), k = 1, \ldots, n$, имеют непрерывные частные производные (на границе ∂D рассматриваются односторонние производные).

Замечание. Поверхность Q можно задать различными способами. Указанное выше задание поверхности Q называется **параметрическим** (или **параметризацией** множества Q). Выбор параметризации также может быть разным. При любых фиксированных значениях c_1 и c_2 кривые на Q вида $\bar{r} = \bar{r}(x_1, c_2)$ и $\bar{r} = \bar{r}(c_1, x_2)$ называются **криволинейными координатами на поверхности** Q. Каждой точке $\bar{r} \in Q$ соответствует пара (c_1, c_2) криволинейных координат.

Определение 2. *Поверхность* Q *называется* **гладкой**, *если задающее ее отображение* $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ *является гладким. Гладкая поверхность называется* **невырожденной**, *если ранг матрицы Якоби отображения* $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ *максимален, а именно: он равен двум.*

Мы стремимся определить меру, то есть понятие площади множеств на *невырожденных поверхностях*. Для этого сначала уясним какими свойствами должна обладать площадь или мера множества. Кроме обычных свойств меры (монотонность, аддитивность, инвариантность относительно ортогональных преобразований пространства, независимость от параметризации) необходимо, чтобы в случае

$r_3 \equiv 0, \ldots, r_n \equiv 0$, то есть "плоского" отображения $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$, мы имели формулу

$$\mu(Q) = \iint\limits_D |J_{\bar{r}}(\bar{x})| dx_1 dx_2,$$

где $J_{\bar{r}}(\bar{x})$ якобиан отображения $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$,

$$J_{\bar{r}}(\bar{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} & \frac{\partial r_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x_2} & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

Для простоты рассуждений предположим, что плоское множество D есть замкнутый квадрат. Тогда в этом случае мера $\mu(Q)$ образа D есть предел при $\Delta_T \to 0$ интегральных сумм $\sigma(T)$ для разбиения T квадрата D на равные квадраты $D_{k,l}, k, l = 1, \ldots, n$, со стороной h $(\mu(D_{k,l}) = h^2)$,

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |J_{\bar{r}}(\bar{x}_{k,l})| \mu(D_{k,l}),$$

где $\bar{x}_{k,l}$ левая нижняя вершина квадрата $D_{k,l}$.

При выводе формулы площади фигуры Q мы видели, что число $|J_{\bar{r}}(\bar{x}_{k,l})| \mu(D_{k,l})$ равно площади параллелограмма, в который переходит квадрат $D_{k,l}$ при замене отображения $\Delta \bar{r} = \bar{r}(\bar{x}) - \bar{r}(\bar{x}_{k,l})$ на линейное отображение $\bar{\rho}$ вида

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(\bar{x}) = A(\bar{x}_{k,l})(\bar{x} - \bar{x}_{k,l}) = d\bar{r}(\bar{x}_{k,l}),$$

где $A(\bar{x}_{k,l})$ — матрица Якоби отображения $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ в точке $\bar{x} = \bar{x}_{k,l}$.

Итак, при вычислении $\mu(Q)$ мы берем разбиение D на квадраты $D_{k,l}$, а затем для каждого квадрата $D_{k,l}$ заменяем отображение $\Delta \bar{r}$ на линейное отображение $d\bar{r}(\bar{x}_{k,l})$. При такой замене мы можем сказать чему равна площадь образа. Сумма же полученных площадей по всем парам $(k,l), k, l = 1, \ldots, n$, дает нам интегральную сумму $\sigma(T)$.

Естественно ту же самую схему положить в основу определения площади поверхности Q и в общем случае, т.е. надо взять разбиение T квадрата D на равные квадраты $D_{k,l}$, $k, l = 1, \ldots, n$. Далее, заменить отображение $\Delta \bar{r}$ на линейное отображение $\bar{\rho}$,

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_{k,l}(\bar{x}) = d\bar{r}(\bar{x}_{k,l}),$$

и просуммировать меры $R_{k,l} = \bar{\rho}(D_{k,l})$. Тогда мы получим

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \mu(R_{k,l}).$$

Определение 3. *Если существует предел $\sigma(T)$ при $\Delta_T \to 0$, то этот предел мы и будем называть* **площадью поверхности** Q.

Осталось провести явное вычисление величины $\sigma(T)$ и найти ее предел $\mu(Q)$. Для этого заметим, что векторы $\bar{e}_1 = (h, 0)$ и $\bar{e}_2 = (0, h)$ при отображении $\bar{\rho} = d\bar{r}(\bar{x}_{k,l})$ переходят в векторы

$$\bar{a}_1 = \bar{\rho}(\bar{e}_1) = h(\frac{\partial r_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial r_n}{\partial x_1})$$

$$\bar{a}_2 = \bar{\rho}(\bar{e}_2) = h(\frac{\partial r_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r_n}{\partial x_2}).$$

Теперь надо найти площадь параллелограмма, образованного векторами $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Для этого мы воспользуемся формулой из линейной алгебры, которая утверждает следующее

$$\mu^2 = \begin{vmatrix} (\bar{a}_1, \bar{a}_1), & (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \\ (\bar{a}_2, \bar{a}_1), & (\bar{a}_2, \bar{a}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2.$$

Приведем простой вывод ее. Очевидно, формула площади параллелограмма, составленного из векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$, имеет вид

$$\mu = ||\bar{a}_1|| \cdot ||\bar{a}_2 - \frac{\bar{a}_1(\bar{a}_1, \bar{a}_2)}{||\bar{a}_1||^2}||.$$

Преобразуем эту формулу. Получим

$$||\bar{a}_1||^2\mu^2 = (\bar{a}_2||\bar{a}_1||^2 - \bar{a}_1(\bar{a}_1, \bar{a}_2), \bar{a}_2||\bar{a}_1||^2 - \bar{a}_1(\bar{a}_1, \bar{a}_2)) =$$

$$= ||\bar{a}_1||^4||\bar{a}_2||^2 - 2||\bar{a}_1||^2(\bar{a}_1, \bar{a}_2)^2 + ||\bar{a}_1||^2(\bar{a}_1, \bar{a}_2)^2.$$

Следовательно,

$$\mu^2 = ||\bar{a}_1||^2||\bar{a}_2||^2 - (\bar{a}_1, \bar{a}_2)^2 = EG - F^2 = \Gamma(\bar{x}).$$

Таким образом, будем иметь

$$\sigma(T) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sqrt{\Gamma(\bar{x}_{k,l})}\mu(D_{k,l}).$$

Функция $\sqrt{\Gamma(\bar{x})}$ непрерывна на D, поэтому существует предел

$$\lim_{\Delta_T \to 0} \sigma(T) = \int\int\limits_D \sqrt{\Gamma(\bar{x})}dx_1dx_2 = \mu(Q).$$

Другими словами, мы имеем

$$\mu(Q) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dx_1 dx_2.$$

Заметим, что последний интеграл может оказаться как собственным, так и несобственным.

Отметим, что величина площади параллелограмма, образованного сторонами $\bar{a}_1 = h\bar{r}'_{x_1}, \bar{a}_2 = h\bar{r}'_{x_2}$, как известно, равна

$$\mu(R_{k,l}) = h^2 ||[r'_{x_1}, r'_{x_2}]||.$$

Отсюда мы получим еще одну формулу для площади поверхности

$$\mu(Q) = \int\int\limits_D ||[r'_{x_1}, r'_{x_2}]|| dx_1 dx_2.$$

Примеры. 1. Площадь поверхности верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$ равна 2π.

Имеем

$$\mu(Q) = \int\int\limits_{x^2+y^2 \le 1} \frac{dxdy}{\cos(\bar{n}, \bar{e}_3)},$$

где $\bar{n} = (x, y, z), z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \cos(\bar{n}, \bar{e}_3) = z$.

Следовательно, получим

$$\mu(Q) = \int\int\limits_{x^2+y^2 \le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Перейдем к полярным координатам. Будем иметь

$$\mu(Q) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{rdr}{\sqrt{1 - r^2}} = \pi \int\limits_0^1 \frac{dr^2}{\sqrt{1 - r^2}} = \pi \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\pi.$$

2. Площадь двумерного тора $Q \in \mathbb{R}^3$, задаваемого уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}(\varphi, \theta) = ((b + a\cos\theta)\cos\varphi, (b + a\cos\theta)\sin\varphi, a\sin\theta), b > a,$$

на области D изменения параметров,

$$D = \{(\varphi, \theta) | 0 \le \varphi < 2\pi, 0 \le \theta < 2\pi\}.$$

Имеем

$$\bar{r}'_\varphi = (-(b + a\cos\theta)\sin\varphi, (b + a\cos\theta)\cos\varphi, 0),$$

$$\bar{r}'_\theta = (-a\sin\theta\cos\varphi, -a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta),$$

$$E = (\bar{r}'_\varphi, \bar{r}'_\varphi) = (b + a\cos\theta)^2, F = (\bar{r}'_\varphi, \bar{r}'_\theta) = 0, G = (\bar{r}'_\theta, \bar{r}'_\theta) = a^2,$$

$$\sqrt{EG - F^2} = a|b + a\cos\theta| = a(b + a\cos\theta).$$

Отсюда получим

$$\mu(Q) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} a(b + a\cos\theta)d\theta = 4\pi^2 ab.$$

§ 16. ПЛОЩАДЬ M -МЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ N ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть m, n — натуральные числа, $1 \leq m < n$.

Назовем m - **мерной поверхностью** Q в $\mathbf{R}^n$ множество точек $\{\bar{r}\}, \bar{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, таких, что $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$, где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in D$, причем множество D ограниченно и измеримо по Жордану, а отображение $\bar{r}$ взаимно-однозначно отображает D на Q и оно непрерывно всюду на D, за исключением множества L, имеющего нулевую меру Жордана.

Будем говорить, что гладкая поверхность Q **невырождена,** если ранг матрицы Якоби отображения $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$ максимален, то есть равен m.

Пусть для простоты множество D есть куб и пусть T — разбиение его на равные кубы $D_{\bar{k}}$ со стороной h. Пусть, также, $\bar{x}_{\bar{k}}$ — левая нижняя вершина куба $D_{\bar{k}}$.

Положим $\bar{\rho} = \bar{\rho}_{\bar{k}}(\bar{x}) = d\bar{r}(\bar{x}_{\bar{k}}), R_{\bar{k}} = \bar{\rho}(D_{\bar{k}})$ и определим интегральную сумму

$$\sigma(T) = \sum_{\bar{k}} \mu(R_{\bar{k}}).$$

Определение 1. Площадью поверхности Q *назовем величину*

$$\mu(Q) = \lim_{\Delta_T \to 0} \sigma(T).$$

Для вычисления $\sigma(T)$ нам необходимо найти объем параллелепипеда $R_{\bar{k}}$, образованного векторами $\bar{a}_1 = h\bar{r}'_{x_1}, \ldots, \bar{a}_m = h\bar{r}'_{x_m}$.

Из линейной алгебры известно, что

$$\mu(R_{\bar{k}}) = \sqrt{\Gamma(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)} = V_m,$$

где $\Gamma_m = \Gamma(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ — определитель матрицы Грама,

$$\Gamma(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) = \begin{vmatrix} (\bar{a}_1, \bar{a}_1) & \ldots & (\bar{a}_1, \bar{a}_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\bar{a}_m, \bar{a}_1) & \ldots & (\bar{a}_m, \bar{a}_m) \end{vmatrix}.$$

Дадим прямой вывод формулы для V_m. При $m = 1, 2$, очевидно, имеем

$$\sqrt{\Gamma_1} = ||\bar{a}_1|| = V_1, \quad \sqrt{\Gamma_2} = V_1 \cdot h_2 = V_2.$$

Следовательно, $h_2^2 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$. Докажем, что $h_m^2 = \frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}}$, где h_m — расстояние вектора $\bar{a}_m$ до $m-1$ — мерного пространства с базисом $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}$.

Представим $\bar{a}_m$ в виде $\bar{a}_m = \bar{b}_m + \bar{h}_m$, где $\bar{b}_m \in \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1}\} = L$, $h_m \perp L$. По условию существуют некоторые вещественные числа $c_1, \ldots, c_{m-1}$, такие, что

$$\bar{b}_m = c_1\bar{a}_1 + \cdots + c_{m-1}\bar{a}_{m-1}.$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств $\frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{m-1} & & (\bar{a}_1, \bar{a}_m) \\ & & \ldots \\ (\bar{a}_m, \bar{a}_1) & \ldots & (\bar{a}_m, \bar{a}_m) \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}} = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{m-1} & & (\bar{a}_1, \bar{b}_m) \\ & & \ldots \\ (\bar{b}_m, \bar{a}_1) & \ldots & ||b_m||^2 + ||h_m||^2 \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} (\bar{a}_1, \bar{a}_1) & \ldots & (\bar{a}_1, \bar{a}_{m-1}) & (\bar{a}_1, \bar{b}_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\bar{a}_{m-1}, \bar{a}_1) & \ldots & (\bar{a}_{m-1}, \bar{a}_{m-1}) & (\bar{a}_{m-1}, \bar{b}_m) \\ (\bar{b}_m, \bar{a}_1) & \ldots & (\bar{b}_m, \bar{a}_1) & ||b_m||^2 \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}} +$$

$$+ \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_{m-1} & & 0 \\ & & \ldots \\ (\bar{b}_m, \bar{a}_1) & \ldots & ||h_m||^2 \end{vmatrix}}{\Gamma_{m-1}} = ||h_m||^2,$$

так как определитель в числителе первого слагаемого равен 0 (последняя строка в нем есть линейная комбинация предыдущих).

Таким образом, объем $V_m = \mu(R_{\bar{k}})$ параллелепипеда $R_{\bar{k}}$ равен

$$V_m = V_{m-1}h_m = \sqrt{\Gamma_{m-1}} \cdot \sqrt{\frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}}} = \sqrt{\Gamma_m}.$$

Заметим, что $\Gamma_m > 0$. Это следует из равенств

$$\frac{\Gamma_m}{\Gamma_{m-1}} = h_m^2 > 0, \Gamma_1 = ||\bar{a}_1||^2 > 0.$$

Следовательно, имеем

$$\sigma(T) = \sum_{\bar{k}} \sqrt{\Gamma(\bar{r}'_{x_1}(\bar{x}_{\bar{k}}), \ldots, \bar{r}'_{x_1}(\bar{x}_{\bar{k}}))}\mu(D_{\bar{k}}).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta_T \to 0$. Получим

$$\mu(Q) = \int \cdots \int_D \sqrt{\Gamma(\bar{r}'_{x_1}(\bar{x}), \ldots, \bar{r}'_{x_1}(\bar{x}))} dx_1 \ldots dx_m.$$

Это и есть **формула для вычисления площади m - мерной поверхности в n - мерном пространстве.**

При $m = 1$ она дает формулу длины дуги гладкой кривой $\mu(Q) = \int_D ||\bar{r}'(t)||dt$, а при $m = n$ мы приходим к формуле замены переменных в n - кратном интеграле

$$\mu(Q) = \int \cdots \int_D \sqrt{\Gamma} dx_1 \ldots dx_m = \int \cdots \int_D |J_{\bar{r}}(\bar{x})| dx_1 \ldots dx_m,$$

где $J_{\bar{r}}(\bar{x})$ — якобиан отображения $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x})$.

Замечания. 1. Пусть $A = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m)$ — матрица из m векторов - столбцов в n — мерном пространстве и A^t — транспонированная к ней матрица. Тогда из формулы Бине-Коши имеем

$$\Gamma_m = V_m^2 = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n} \begin{vmatrix} a_{i_1,1} & a_{i_1,2} & \ldots & a_{i_1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_m,1} & a_{i_m,2} & \ldots & a_{i_m,m} \end{vmatrix}^2.$$

Это равенство означает следующее. Квадрат объема параллелепипеда равен сумме квадратов объемов его проекций на все координатные m - мерные подпространства (обобщение теоремы Пифагора).

2. Справедливо неравенство Адамара

$$\Gamma(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m) \le \Gamma(\bar{a}_1) \ldots \Gamma(\bar{a}_m),$$

причем равенство достигается только, если векторы $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_j, i \ne j$, ортогональны для всех $1 \le i, j \le m$.

3. В силу своего определения величина площади m-мерной поверхности не зависит от выбора параметризации.

Глава XX
ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Лекция 10

§ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Криволинейные интегралы — это интегралы по кривой L в n-мерном пространстве. Мы рассмотрим два вида таких интегралов: интегралы первого и второго рода.

Сделаем некоторые допущения. Пространство, в котором задана кривая L, будем для простоты считать двумерным. Саму кривую L будем считать кусочно-гладкой, т.е. ее можно разбить на конечное число гладких кусков (участков). Будем рассматривать только один такой кусок.

Как известно, кривая L является образом некоторого отрезка $[a, b]$ при отображении $\bar{r} = \bar{r}(t), t \in [a, b]$, где $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$, причем $x(t)$ и $y(t)$ — гладкие функции на отрезке $[a, b]$. Кроме того, внутренние точки отрезка переходят во "внутренние" точки кривой, а концы отрезка — точки a и b — переходят в граничные точки кривой A и B, т.е. $\bar{r}(a) = A, \bar{r}(b) = B$. Будем предполагать, что кривая L невырождена, т.е. не содержит особых точек. Другими словами, для любого $t \in [a, b]$ вектор $\bar{r}'(t)$ отличен от нуля.

Пусть T — размеченное разбиение отрезка $[a, b] : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$, $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — точки разметки, $x_k = x(\xi_k), y_k = y(\xi_k)$, $k = 1, \ldots, m$; Δl_k — длина части кривой L, которая является образом отрезка $\Delta_k = [t_{k-1}, t_k]$. Для рассматриваемой кривой L длина кривой выражается по формуле

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt.$$

Пусть функция $g(x, y)$ определена на кривой L.

Определение 1. *Если существует предел при $\Delta_T \to 0$ интегральных сумм*

$$\sigma_1(T) = \sum_{k=1}^{m} g(x_k, y_k)\Delta l_k,$$

то он называется **интегралом первого рода** *от функции $g(x, y)$ по кривой L.*

Этот интеграл обозначается так:

$$I_1 = \int\limits_L g(x, y)dl.$$

Рассмотрим интегральную сумму $\sigma_2(T)$, где

$$\sigma_2(T) = \sum_{k=1}^{m} g(x_k, y_k)\Delta x_k, \Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}).$$

Определение 2. *Если существует предел I_2 интегральных сумм $\sigma_2(T)$ при $\Delta_T \to 0$, то он называется* **интегралом второго рода** *от функции $g(x, y)$ в направлении от A до B.*

Обозначается этот интеграл символом

$$I_2 = \int\limits_{AB} g(x, y)dx.$$

Аналогично определяется еще один интеграл второго рода

$$I_3 = \int\limits_{AB} g(x, y)dy.$$

Для интегралов I_2 и I_3 обычно употребляют обозначения

$$I_2 = \int\limits_{AB} P(x, y)dx, \quad I_3 = \int\limits_{AB} Q(x, y)dy.$$

Выражение

$$I = \int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

называется **общим криволинейным интегралом второго рода** по кривой $L = AB$ от линейной дифференциальной формы $Pdx + Qdy$ (здесь кривая обозначается своими начальной и конечной точками).

§ 2. СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Пусть $x = x(t)$ — постоянная величина. Тогда имеем

$$I_2 = \int\limits_{AB} P(x, y)dx = 0.$$

Действительно, так как для любого разбиения T величина $\Delta x_k = 0$, то $\sigma_2(T) = 0$. Отсюда следует, что $I_2 = 0$.

2. Т е о р е м а 1 (выражение значения криволинейного интеграла через интеграл Римана). *Пусть функция* $g(x,y)$ *непрерывна на* L. *Тогда криволинейные интегралы* I_1, I_2, I_3 *существуют и они равны*

$$I_1 = \int\limits_a^b g(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt,$$

$$I_2 = \int\limits_a^b g(x(t),y(t))x'(t)dt, \quad I_3 = \int\limits_a^b g(x(t),y(t))y'(t)dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала интеграл I_1. Интегральная сумма $\Sigma_1(T)$ для интеграла

$$\int\limits_a^b g(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

отличается от интегральной суммы $\sigma_1(T)$ криволинейного интеграла тем, что вместо Δl_k там должна стоять величина

$$\sqrt{(x'(\xi_k))^2+(y'(\xi_k))^2}\Delta t_k$$

при некотором $\xi_k \in \Delta_k$, т.е. дифференциал длины дуги кривой, взятый в точке ξ_k и отвечающий приращению Δt_k переменной t. Далее можно было бы сослаться на определение интеграла Стильтьеса,

$$I_1 = \int\limits_a^b g(x(t),y(t))dl(t),$$

где $l(t) = \int\limits_a^t \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$, и тем самым завершить доказательство равенства интегралов. Но мы дадим прямое доказательство этого факта.

В силу непрерывности производной $l'(t)$ на отрезке $[a,b]$ имеем равномерную непрерывность ее на нем. Тогда для любых точек $t, \xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ имеем $|l'(t) - l'(\xi_k)| \leq \omega(\Delta t_k)$, причем $\lim\limits_{z\to 0}\omega(z) = 0$.

Отсюда получим

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} l'(t)dt = l'(\xi_k)\Delta t_k + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(l'(t) - l'(\xi_k))dt =$$

$$= l'(\xi_k)\Delta t_k + O(\omega(\Delta t_k)\Delta t_k).$$

Поскольку $g(x,y)$ непрерывна на компакте L, она ограничена на нем, т.е. найдется $M > 0$ такое, что для любых $(x,y) \in L$ имеем $|g(x,y)| \le M$.

Преобразуем интегральную сумму $\sigma_1(T)$. Получим

$$\sigma_1(T) = \sum_k g(x_k, y_k)\Delta l_k =$$

$$= \sum_k g(x_k, y_k) l'(\xi_k)\Delta t_k + O\left(\sum_k M\Delta t_k \omega(\Delta t_k)\right) =$$

$$= \Sigma_1(T) + O(R),$$

где

$$R \le M \max_k \omega(\Delta t_k) \cdot \sum_k \Delta t_k \le M(b-a) \max_k \omega(\Delta t_k).$$

Так как $R \to 0$ при $\Delta_T \to 0$, то это значит, что $\sigma_1(T)$ и $\Sigma_1(T)$ одновременно сходятся и имеют один и тот же предел.

Теорема 1 доказана.

Эта теорема дает универсальный метод вычисления значений криволинейных интегралов. Следующие следствия из теоремы 1 получаются простым переходом от криволинейных интегралов к интегралам Римана, поэтому мы не будем приводить их доказательств.

1^0. Справедливо следующее равенство:

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_{L} (P\cos\alpha_1 + Q\cos\alpha_2)dl,$$

где

$$\cos\alpha_1 = (\bar\tau, \bar e_1) = \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \cos\alpha_2 = (\bar\tau, \bar e_2) = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},$$

$\bar\tau = (x', y')$ — касательный вектор к кривой L в точке (x,y), а $\bar e_1$ и $\bar e_2$ — единичные орты, направленные по осям координат Ox и Oy.

2^0. Если для любых точек $(x,y) \in L$ справедливо неравенство $g_1(x,y) \le g_2(x,y)$, то имеем $\int\limits_L g_1 dl \le \int\limits_L g_2 dl$.

3^0. Выполняется неравенство $|\int\limits_L g dl| \le \int\limits_L |g| dl$.

4^0. Если g непрерывна на кривой L, то существует точка $\xi \in L$ такая, что $\int\limits_L g dl = g(\xi)\mu(L)$, где $\mu(L)$ — длина кривой L.

3. Значение криволинейных интегралов первого и второго рода не зависят от выбора параметризации, так как от нее не зависят интегральные суммы в их определении.

В частности, интеграл I_1 не зависит от того, какую точку A или B считать началом, а какую — концом кривой L (параметризации в этом случае можно определить, например, соотношением $t = a+b-u$).

В то же время имеет место равенство $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$, т.е. величина интеграла зависит от выбора направления обхода кривой L.

Рассмотрим две параметризации кривой $L : \bar{r} = \bar{r}(t), t \in [a,b]$ и $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(u), u \in [a_1,b_1]$. Пусть $t = t(u)$ — гладкое отображение отрезка $[a_1,b_1]$ на отрезок $[a,b]$. Тогда имеем $\bar{r}_1 = \bar{r}_1(u) = \bar{r}(t(u)), x_1 = x(t(u))$.

Отметим, что производная $t'(u)$ имеет один и тот же знак на всем отрезке $[a_1,b_1]$. В противном случае по теореме Вейерштрасса существовала бы точка $u_0 \in [a_1,b_1]$, такая что $t'(u_0) = 0$. Но тогда $\bar{r}_1'(u_0) = \bar{r}_t'(t(u_0)) \cdot t'(u_0) = 0$, и кривая L имеет особую точку, т.е. она является вырожденной, что на самом деле не так.

Поскольку при отображении $t = t(u)$ концевые точки отрезка $[a_1,b_1]$ переходят в концевые точки отрезка $[a,b]$, при $t'(u) > 0$ имеем $t(a_1) = a, t(b_1) = b$. Действительно, из теоремы Лагранжа при некотором $\xi \in [a_1,b_1]$ имеем $t(b_1) - t(a_1) = t'(\xi)(b_1 - a_1)$. Следовательно, $t(b_1) > t(a_1)$, а это и означает, что $t(a_1) = a, t(b_1) = b$.

Далее воспользуемся теоремой 1 и теоремой о замене переменной в интеграле Римана. Получим цепочку равенств

$$\int\limits_L g(\bar{r})dx = \int\limits_a^b g(\bar{r}(t))x'(t)dt =$$

$$= \int\limits_{a_1}^{b_1} g(\bar{r}(t(u)))x'(t(u))t'(u)du = \int\limits_{a_1}^{b_1} g(\bar{r}_1(u))x_1'(u)du = \int\limits_L g(\bar{r}_1)dx_1.$$

В случае $t'(u) < 0$ имеем $t(a_1) = b, t(b_1) = a$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим, что при переходе в этом случае от одной параметризации к другой параметризации справедливо равенство

$$\int\limits_L g(\bar{r})dx = -\int\limits_L g(\bar{r}_1)dx_1.$$

Аналогичные свойства для криволинейных интегралов имеют место в пространствах размерности большей двух. Например, в трехмерном случае имеем

$$\int\limits_L g(x,y,z)dl = \int\limits_a^b g(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt,$$

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b (Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t))dt =$$

$$= \int\limits_L (P\cos\alpha_1 + Q\cos\alpha_2 + R\cos\alpha_3)dl,$$

где $\tau = \bar{r}'/|\bar{r}'|, \cos\alpha_k = (\bar{\tau}, \bar{e}_k), k = 1, 2, 3.$

На этом мы завершаем изучение общих свойств криволинейных интегралов.

§ 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА ПО ЗАМКНУТОМУ КОНТУРУ. ФОРМУЛА ГРИНА

В силу аддитивности интеграла второго рода для любых кривых $L_1 = AB$ и $L_2 = BC$ в случае, когда кривая $L = L_1 \cup L_2$ не имеет кратных точек, получаем

$$\int\limits_{AB} g dx + \int\limits_{BC} g dx = \int\limits_{AC} g dx.$$

По этой же формуле определяется и понятие интеграла по кривой L в том случае, когда точки A и C совпадают. В этом случае объединение кривых $L = L_1 \cup L_2$ называется замкнутой кривой. Дадим точное **определение.**

Кривая L называется **замкнутой кусочно-гладкой кривой** (без кратных точек), если:

1) $L = L_1 \cup L_2$;

2) L_1 и L_2 — кусочно-гладкие кривые, концы которых совпадают;

3) других общих точек кривые L_1 и L_2 не имеют.

Если на кривой L_1 задано направление обхода, т.е. задана начальная точка A и концевая точка B, и если на кривой L_2 за начальную точку принять B, а за концевую точку A, то на кривой L будет задано направление обхода в том смысле, что для любых трех различных точек $A_1, A_2, A_3 \in L$ всегда будет иметь место один из двух порядков следования точек: $A_1A_2A_3A_1$ или $A_1A_3A_2A_1$.

Поскольку на любой замкнутой кривой L имеется в точности два направления обхода, одно из них, естественно, считать положительным, а другое — отрицательным.

Заметим, что при этом для интеграла I от дифференциальной формы $Pdx + Qdy$ по замкнутой кривой L, взятому в положительном направлении, используется обозначение

$$I = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy.$$

Дадим определение того, как выбирать положительное направление обхода замкнутой кривой. Сначала рассмотрим важный пример окружности $L : x^2 + y^2 = 1$. За положительное направление обхода окружности берется "направление обхода против часовой стрелки". Оно определяется так. Разобьем окружность на верхнюю полуокружность $L_1 : x^2+y^2 = 1, y \geq 0$, и нижнюю полуокружность L_2. На верхней полуокружности за начало отсчета возьмем точку A с координатами $(1, 0)$, а концевой точкой будем считать точку B, а для нижней полуокружности L_2 за начальную точку возьмем B, а за концевую точку A.

Ясно, что на окружности L можно однозначно задать направление обхода, указав в любой произвольно взятой на ней точке A касательный вектор $\bar{\tau}$.

Будем рассматривать окружность L на плоскости xOy в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть в каждой точке ее заданы $\bar{n}$ — вектор внешней нормали к окружности, лежащий в плоскости xOy, $\bar{\tau}$ — касательный вектор к ней. Если орт $\bar{e}_3$, направленный по оси Oz, совпадает с векторным произведением $[\bar{n}, \bar{\tau}]$, то будем говорить, что вектор $\bar{\tau}$ задает положительное направление обхода окружности L.

Это свойство окружности мы положим в основу определения положительного направления обхода общей кривой L.

Определение 1. *Пусть замкнутая кусочно-гладкая кривая L без кратных точек является границей выпуклого множества D на плоскости xOy. Пусть $\bar{e}_3$ — орт, направленный по оси Oz. В каждой точке кривой L зададим касательный вектор $\bar{\tau}$ и вектор внешней нормали $\bar{n}$. Будем говорить, что на кривой L задано* **положительное направление обхода,** *если вектор $\bar{e}_3$ совпадает с векторным произведением $[\bar{n}, \bar{\tau}]$.*

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы доказать формулу Грина, которая устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутой кривой $L = \partial D$, являющейся границей области D, и двойным интегралом по этой области. Для простоты будем рассматривать случай выпуклой области D.

Теорема 1 (формула Грина). *Пусть D — выпуклый, измеримый по Жордану, компакт, граница $L = \partial D$ которого является замкнутой невырожденной кусочно-гладкой кривой. Пусть также функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны на D и имеют там же непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда справедлива формула*

$$\oint\limits_L P dx + Q dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где кривая L обходится в положительном направлении.

Доказательство. Мы докажем только равенство

$$\oint\limits_L P dx = -\int\limits_D\int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

Равенство же
$$\oint\limits_L Qdy = \iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$$
доказывается аналогично.

Пусть отрезок $[a, b]$ является проекцией области D на ось Ox. Через точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$ проведем вертикальные прямые $x = a$ и $x = b$. В силу выпуклости множества D граница его $L = \partial D$ разбивается на четыре участка: отрезки L_1 и L_3, лежащие на прямых $x = a$ и $x = b$ (каждый из них может состоять только из одной точки), и кривые L_2 и L_4, лежащие в полосе между этими кривыми.

На кривых L_1 и L_3 величина x постоянна, поэтому
$$\int\limits_{L_1} Pdx = \int\limits_{L_3} Pdx = 0.$$

Всякая прямая $x = x_0$ при $x_0 \in (a, b)$ пересекает (в силу выпуклости D) каждую из кривых L_2 и L_4 строго в одной точке, которые обозначим соответственно $\varphi_1(x_0)$ и $\varphi_2(x_0)$, т.е. кривая L_2 является графиком функции $y = \varphi_1(x)$, а кривая L_4 — графиком функции $y = \varphi_2(x)$.

Заметим, что из кусочной гладкости кривой L следует кусочная гладкость функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Из теоремы о выражении криволинейного интеграла через интеграл Римана имеем
$$\int\limits_{L_2} P(x, y)dx = \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))dx, \int\limits_{L_4} P(x, y)dx = -\int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))dx.$$

Отсюда получим
$$\int\limits_{L_2 \cup L_4} P(x, y)dx = \int\limits_a^b (P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)))dx = H.$$

Поскольку функция $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывна на D, по теореме Ньютона – Лейбница имеем
$$P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)) = -\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy.$$

Следовательно,
$$H = -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

В силу того что

$$\int\limits_{L_1} P dx = \int\limits_{L_3} P dx = 0,$$

справедлива формула $H = \oint\limits_L P dx$.

Тем самым, теорема 1 доказана.

Заметим, что в силу аддитивности интеграла формула Грина верна для областей, являющихся конечным объединением выпуклых областей.

Примеры. 1. Площадь области D выражается согласно формуле Грина через криволинейный интеграл в следующем виде:

$$\mu(D) = \oint\limits_L x dy = -\oint\limits_L y dx = \frac{1}{2}\oint\limits_L x dy - y dx.$$

2. Пусть $\varphi : D_0 \to D$ — гладкое взаимно однозначное отображение двух плоских областей. Пусть также якобиан этого отображения $I = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ не меняет знак в области D_0 и $\varphi(\partial D_0) = \partial D$. Кроме того, пусть $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$ непрерывна на D_0. Тогда, исходя из формулы примера 1, проведем вычисление меры области D. Имеем

$$\mu(D) = \oint\limits_{\partial D} x dy.$$

Далее, пусть задана параметризация вида $u = u(t), v = v(t), a \leq t \leq b$, кривой ∂D_0. Тогда соответствующая параметризация кривой ∂D задается уравнениями $x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t))$.

Из выражения криволинейного интеграла через интеграл Римана получим

$$\mu(D) = \oint\limits_{\partial D} x dy = \int\limits_a^b x(t)\frac{dy(t)}{dt}dt = \int\limits_a^b x(t)\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)dt.$$

Но последний интеграл можно представить как интеграл по кривой ∂D_0. Имеем

$$\mu(D) = \varepsilon \oint\limits_{\partial D_0} x\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right),$$

где $\varepsilon = +1$, если кривые ∂D_0 и ∂D имеют одинаковое направление обхода, и -1 в противном случае.

Преобразуя последний интеграл, используя формулу Грина, получим

$$\mu(D) = \varepsilon \oint\limits_{\partial D_0} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) =$$

$$= \varepsilon \iint\limits_{D_0} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(x \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} \right) \right) dudv =$$

$$= \varepsilon \iint\limits_{D_0} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) dudv = \varepsilon \iint\limits_{D_0} Idudv.$$

Поскольку якобиан I не меняет знака и величина $\mu(D)$ неотрицательна, то $\varepsilon I = |I|$. Поэтому имеем

$$\mu(D) = \iint\limits_{D_0} |I| dudv.$$

Таким образом, мы получили формулу для вычисления в криволинейных координатах площади плоской области.

§ 4. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Рассмотрим гладкую поверхность D в $\mathbb{R}^3$. Будем считать, что она невырождена во всех своих точках, т.е. при ее параметрическом задании $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, где $\bar{r} = (x, y, z), (u, v) \in D_0$, ранг ее матрицы Якоби максимален и равен двум.

Допустим сначала, что область D_0 является квадратом. Возьмем его размеченное разбиение V на равные квадраты $P_{k,l}$ с разметкой $(u_{k,l}, v_{k,l})$, $k, l = 1, \ldots, n$. Здесь точка $(u_{k,l}, v_{k,l})$ — вершина левого нижнего угла квадрата $P_{k,l}$ со стороной δ. Рассмотрим область $D_{k,l}$ — элемент поверхности D, соответствующий квадрату $P_{k,l}$, т.е. $D_{k,l} = \bar{r}(P_{k,l})$. Рассмотрим также множество точек $R_{k,l}$ — часть касательной плоскости к поверхности D в точке $\bar{r}_{k,l} = \bar{r}(u_{k,l}, v_{k,l})$, отвечающую квадрату $P_{k,l}$.

На поверхности D в точке $\bar{r} = \bar{r}(u, v), (u, v) \in D_0$, определены два касательных вектора к ней $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, являющихся первым и вторым столбцами матрицы Якоби $J_{\bar{r}}(u, v)$, т.е.

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_u'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}, \bar{r}_2 = \bar{r}_v'(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

В силу условия невырожденности матрицы Якоби имеем, что для любой точки $(u, v) \in D$ векторное произведение $[\bar{r}_1, \bar{r}_2]$ отлично от нуля. Заметим, что **особыми точками поверхности** называются такие ее точки, в которых ранг ее матрицы Якоби меньше двух.

Рассмотрим вектор

$$\bar{n} = \frac{[\bar{r}_1, \bar{r}_2]}{\|[\bar{r}_1, \bar{r}_2]\|}.$$

Определение 1. *Вектор $\bar{n} = \bar{n}(\bar{r})$ будем называть* **нормалью к поверхности** D, *отвечающей параметризации $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$.*

Такое название вызвано тем, что вектор $\bar{n}$ перпендикулярен касательным векторам $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$. В частности, при $(u, v) = (u_{k,l}, v_{k,l})$ имеем, что вектор $\bar{n}$ перпендикулярен к касательной плоскости $R_{k,l}$.

Заметим, что если δ — длина стороны квадрата $P_{k,l}$, то $R_{k,l}$ представляет собой параллелограмм и его площадь $\mu(R_{k,l})$ равна $\|[\bar{r}_1, \bar{r}_2]\|\delta^2$, где касательные к поверхности D векторы $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ взяты в точке $\bar{r}(u_{k,l}, v_{k,l})$.

Заметим также, что если задана другая параметризация $\bar{\rho}$ поверхности D, то всегда выполнено одно из равенств, $\bar{n}(\bar{r}) = \bar{n}(\bar{\rho})$ или

$\bar{n}(\bar{r}) = -\bar{n}(\bar{\rho})$. Следовательно, функция $f(u,v)$, равная скалярному произведению векторов $\bar{n}(\bar{r})$ и $\bar{n}(\bar{\rho})$ принимает всего два значения $+1$ и -1. Но эта функция является непрерывной на D_0. Отсюда имеем, что она либо тождественно равна $+1$, либо тождественно равна -1. Это означает, что при замене параметризации определенная нами нормаль к поверхности D либо не меняется во всех точках D, либо меняет свое направление сразу во всех точках D. Поэтому говорят, что нормаль к поверхности, отвечающая некоторой параметризации этой гладкой поверхности без особых точек, **выделяет на ней ее сторону.** Поверхность с выделенной стороной называется **двусторонней поверхностью.**

Определение 2. *Выделение одной из сторон поверхности D с помощью параметризации называется* **ориентацией поверхности** D.

Далее, пусть на поверхности D задана функция $h(\bar{r})$ от трех переменных $\bar{r} = (x,y,z)$. Рассмотрим следующие четыре интегральные суммы, отвечающие размеченному разбиению V :

$$\sigma_0(V) = \sum_{k,l} h(\bar{r}_{k,l})\mu(R_{k,l});$$

$$\sigma_s(V) = \sum_{k,l} h(\bar{r}_{k,l})\mu(R_{k,l})(\bar{n},\bar{e}_s),\, s = 1,2,3.$$

Отсюда имеем, в частности, следующие выражения:

$$\sigma_1(V) = \sum_{k,l} h(\bar{r}_{k,l})\mu(R_{k,l})\cos X = \sum_{k,l} h(\bar{r}_{k,l})A(u_{k,l},v_{k,l})\delta^2,$$

где

$$\cos X = (\bar{n},\bar{e}_1),\, A(u,v) = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}.$$

Аналогично можно записать $\sigma_2(V), \sigma_3(V)$, с заменой $\cos X$ на $\cos Y = (\bar{n},\bar{e}_2), \cos Z = (\bar{n},\bar{e}_3)$ и с заменой $A = A(u,v)$ на

$$B = B(u,v) = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},\, C = C(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}.$$

Заметим, что вектор нормали $\bar{n}$ можно представить в следующем виде:

$$\bar{n} = \left(\frac{A}{\sqrt{\Gamma}}, \frac{B}{\sqrt{\Gamma}}, \frac{C}{\sqrt{\Gamma}}\right),\, \Gamma = A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2.$$

Определение 3. *Если существует предел I_0 при $\Delta_V \to 0$ интегральной суммы $\sigma_0(V)$, то он называется* **поверхностным интегралом первого рода** *от функции $h(\bar r)$ по поверхности D. Этот интеграл обозначается так:*

$$I_0 = \iint\limits_D h(\bar r)dS.$$

Определение 4. *Если существуют пределы I_1, I_2, I_3, при $\Delta_V \to 0$ интегральных сумм $\sigma_1(V), \sigma_2(V), \sigma_3(V)$, то они называются* **поверхностными интегралами второго рода** *от функции $h(x,y,z)$ по стороне поверхности D, отвечающей параметризации $\bar r = \bar r(u,v)$.*

Для интеграла второго рода вводятся следующие обозначения:

$$I_1 = \iint\limits_D h(\bar r)dy \wedge dz, I_2 = \iint\limits_D h(\bar r)dz \wedge dx, I_3 = \iint\limits_D h(\bar r)dx \wedge dy.$$

Здесь знак $\wedge$ ставится для того чтобы отличить поверхностный интеграл второго рода от обычного двойного интеграла по плоскому множеству D. Часто этот знак опускается (в тех случаях, когда это не ведет к двусмысленности).

Отметим еще, что вместо дифференциальных форм, участвующих в интегралах I_1, I_2, I_3, можно ввести форму

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

и рассмотреть интеграл второго рода от этой дифференциальной формы $I = \iint\limits_D \omega$.

Приведем два свойства введенных интегралов первого и второго рода. Они вытекают непосредственно из их определений.

1^0. Справедливо равенство

$$I = \iint\limits_D Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy =$$

$$= \iint\limits_D (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)dS,$$

где $\cos X = (\bar n, \bar e_1), \cos Y = (\bar n, \bar e_2), \cos Z = (\bar n, \bar e_3)$.

2^0. **Т е о р е м а 1** (о сведении поверхностного интеграла к двойному интегралу). *Пусть функция $h(\bar r)$ непрерывна на гладкой,* *невырожденной (без особых точек), измеримой по Жордану, компактной поверхности D. Тогда имеют место равенства*

$$I_0 = \iint\limits_D h(\bar r)dS = \iint\limits_{D_0} h(\bar r(u,v))\sqrt{\Gamma}dudv, \quad \Gamma = EG - F^2;$$

$$I = \iint\limits_D Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy =$$

$$= \iint\limits_D (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)dS = \iint\limits_D (PA + QB + RC)dudv.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В отличие от криволинейных интегралов здесь по существу нечего доказывать, так как функции под знаками интегралов являются интегрируемыми, ввиду их непрерывности на компакте D. И поэтому при $\Delta_V \to 0$ соответствующие интегральные суммы $\sigma_0(V), \ldots, \sigma_3(V)$ обязаны сходиться к значениям этих интегралов. Теорема 1 доказана.

Замечание. Можно было бы дать определения поверхностных интегралов и в n-мерном пространстве, но они несколько сложнее, и, в основном, из-за понятия ориентации. К ним мы вернемся позже.

Примеры. 1. Рассмотрим поверхность D — "внешность" верхней полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ее можно представить как образ круга $D_0 = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$ при отображении

$$x \equiv x, y \equiv y, z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

Покажем, что $\bar n = \bar n(\bar r) = \bar r$. Действительно, для параметризации $\bar r = \bar r(x,y)$ имеем

$$\bar r_x' = \left(1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right), \bar r_y' = \left(0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\right),$$

$$[\bar r_x', \bar r_y'] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \bar e_1 \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \bar e_2 \frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \bar e_3.$$

Следовательно,

$$\bar n(\bar r) = \frac{[\bar r_x', \bar r_y']}{||[\bar r_x', \bar r_y']||} = (x, y, z) = \bar r.$$

Вычислим теперь интеграл $I = \int\limits_D\int z dx \wedge dy$. Применяя теорему 1, получим

$$I = \iint\limits_{D_0} z \cos Z dS = \iint\limits_{D_0} z \cos Z \frac{dxdy}{|\cos Z|} =$$

$$= \iint\limits_{D_0} z(x,y) dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = -2\pi \frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

2. Пусть поверхность D задается уравнением $z = \varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ - гладкая функция, $(x,y) \in D_0$, и интегрирование ведется по верхней стороне поверхности D, т.е. в этом случае $\cos Z > 0$. Обозначим эту сторону через D^+. Тогда

$$\iint\limits_{D^+} h(x,y,z) dx \wedge dy = \iint\limits_{D_0} h(x,y,\varphi(x,y)) dxdy.$$

§ 5. СОГЛАСОВАНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ И ЕЕ ГРАНИЦЫ

По существу мы дали определение поверхностных интегралов только в случае, когда область D_0 является квадратом. Для интегралов первого рода это определение тривиально распространяется на случай поверхностей, составленных из отдельных частей, каждая из которых есть гладкий образ некоторого квадрата, и соприкасающихся между собой по общим участкам границ. Тогда поверхностный интеграл первого рода понимается как сумма интегралов по составляющим ее частям. Стандартными рассуждениями мы переходим от специального случая к определению поверхностного интеграла для произвольного измеримого по Жордану компакта D_0. Более того, таким образом мы можем рассмотреть интеграл первого рода по поверхностям, которые являются границей пространственных тел, например, по поверхности куба или шара в трехмерном пространстве. Во всех этих случаях будем считать, что понятие интеграла по таким поверхностям уже определено и верна теорема о его сведении к двойному интегралу.

Определение 1. *Поверхность D называется* **кусочно-гладкой,** *если она связна и является объединением конечного числа гладких поверхностей, каждая из которых есть образ выпуклого плоского множества, имеющего кусочно-гладкую границу. При этом общие точки у любых двух поверхностей (если они есть) обязательно принадлежат образам границ, указанных выше плоских множеств.*

Определение 2. Интеграл первого рода по кусочно-гладкой поверхности *равен сумме интегралов по ее гладким частям.*

Более сложная ситуация имеет место в случае интегралов второго рода по кусочно-гладкой поверхности, так как здесь необходимо **согласовывать ориентацию** ее частей. Рассмотрим этот случай.

Нам будет нужен ряд новых определений.

Определение 3. Границей $L = \partial D$ **гладкой поверхности** D *называется образ границы* $\Lambda = \partial D_0$ *множества* D_0*, которое отображается в* D *при ее параметризации* $\bar{r}$*. При этом считаем, что* Λ *есть кусочно-гладкая замкнутая кривая без кратных точек, а множество* D_0 *— выпукло.*

Замечание. Очевидно, что поверхность D может быть плоской, и при этом не обязательно быть выпуклым множеством. Так что выпуклость не является существенным ограничением. Поэтому можно считать множество D_0 образом выпуклого множества.

Определение 4. *Будем говорить, что* **параметризация** $\bar{r}$ **поверхности** D **отвечает ориентации** ее **границы** $L = \partial D$ *(или "согласована" с ориентацией ее границы), если при этой параметризации* $\bar{r}$ *ориентация кривой* L *порождается положительной ориентацией ее прообраза* Λ *(границы множества* D_0 *— прообраза поверхности* D*).*

Замечание. Если $\tau = \bar{r}_t'/|\bar{r}_t'|$ — касательный вектор к кривой L в точке A, отвечающий ее параметризации, и $\bar{n} = \bar{n}(\bar{r})$ — вектор нормали к поверхности D в точке A, то согласованность ориентации кривой L и ориентации, отвечающей параметризации $\bar{r}$, означает, что "обход" кривой L относительно вектора $\bar{n}$ совершается "против часовой стрелки". Другими словами, вектор $\bar{b} = [\bar{\tau}, \bar{n}])$ является нормалью кривой L, лежащей в касательной плоскости к поверхности D и "внешней" по отношению к проекции D на эту касательную плоскость. Это полностью отвечает определению согласованности ориентации в плоском случае.

Определение 5. *Будем говорить, что кусочно-гладкая поверхность* D *является* **двусторонней поверхностью с выделенной стороной,** *если параметризации ее разных кусков выбраны так, что общие участки границ этих кусков при указанных параметризациях ориентированы в противоположных направлениях.*

Пример. Пусть поверхность D является плоской и лежит на плоскости xOy. Рассмотрим верхнюю сторону D и пусть $D = D_1 \cup D_2$. Тогда ориентация поверхностей D, D_1, D_2 будут согласованы с ориентацией их границ L, L_1, L_2, если все эти кривые "обходятся против часовой стрелки". При этом ясно, что общий кусок границ L_1 и L_2 ориентирован в противоположных направлениях для каждой из них.

Поясним определение "согласования" ориентации поверхности D и ее границы $L = \partial D$.

Пусть задана параметризация $\bar{r}$ поверхности D, являющейся образом плоского множества D_0. Пусть также параметризация $u = u(t), v = v(t)$ задает границу $\Lambda = \partial D_0$ и порождает положительную ориентацию. Тогда параметризация границы $L : \bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{r}(u(t), v(t))$ задает с помощью вектора $\bar{\tau}$ направление обхода контура (кривой) L, которое мы называем согласованным со стороной поверхности D. Пусть задана любая другая параметризация $\bar{\rho}(t_1)$ кривой L. Тогда вектор $\bar{\tau}_1 = \frac{\bar{\rho}'_{t_1}}{|\bar{\rho}'_{t_1}|}$ задает обход контура L. Если векторы $\bar{\tau}$ и $\bar{\tau}_1$ совпадают, то мы говорим, что ориентация поверхности D и ориентация кривой L, заданная параметризацией $\bar{\rho}(t_1)$, будут *согласованы* или отвечают параметризации $\bar{r}$.

Теперь дадим определение поверхностного интеграла второго рода.

Определение 6. Поверхностным интегралом второго рода от функции $h(\bar{r})$ по выделенной стороне двусторонней кусочно-гладкой поверхности D *называется сумма соответствующих поверхностным интегралов по всем, составляющим поверхность D, гладким кускам.*

Ясно, что последнее определение распространяет понятие поверхностного интеграла второго рода на случай поверхностей, являющихся образами при гладком отображении квадрируемых (то есть измеримых по Жордану) плоских фигур. Вместе с тем в этом случае оказывается верной теорема о выражении поверхностного интеграла второго рода через двойной интеграл Римана.

Замечания. 1. (Важное для теоремы Стокса). Указанная выше теорема позволяет рассматривать интегралы типа

$$\iint\limits_D P dx \wedge dx, \iint\limits_D Q dy \wedge dy, \iint\limits_D R dz \wedge dz.$$

Сводя по ней эти интегралы к обычным двойным интегралам, получим, что для любых функций P, Q, R справедливо равенство

$$\int\limits_D\int P dx \wedge dx = \int\limits_D\int Q dy \wedge dy = \int\limits_D\int R dz \wedge dz = 0.$$

Это замечание позволяет, например, записать формулу Грина в компактной и удобной форме:

$$\oint\limits_\Lambda P dx + Q dy = \int\limits_D\int (dP) \wedge dx + (dQ) \wedge dy.$$

Здесь D — выпуклая область, Λ — ее кусочно-гладкая граница, ориентированная в положительном направлении, а dP и dQ — дифференциалы функций P и Q. При этом интеграл $\int\int_D$ понимается не как двойной, а как поверхностный интеграл второго рода по верхней стороне плоской поверхности D. Действительно, тогда имеем

$$\int\int_D (dP)\wedge dx = \int\int_D (P'_x dx + P'_y dy)\wedge dx =$$

$$= \int\int_D P'_x dx\wedge dx + \int\int_D P'_y dy\wedge dx = -\int\int_D P'_y dx\wedge dy.$$

Аналогично, получим

$$\int\int_D (dQ)\wedge dy = \int\int_D Q'_x dx\wedge dy.$$

Выбирая тривиальную параметризацию $x \equiv x, y \equiv y$, последние интегралы можно рассматривать как обычные двойные интегралы. Поэтому мы получим формулу Грина в доказанном ранее виде.

2. Следует отметить, что поверхности, задаваемые с помощью достаточно простых формул, не всегда являются кусочно-гладкими. Например, сюда относится поверхность конуса с вершиной. Тем не менее построенная выше система определений позволяет рассматривать интегралы и для поверхностей такого рода. Для этого можно использовать конструкцию, родственную теории несобственных интегралов. В указанном выше случае искомое значение поверхностного интеграла определяется как предел интегралов по поверхностям конуса без некоторых окрестностей его вершины, при условии, что радиусы данных окрестностей стремятся к нулю.

Лекция 13

§ 6. ФОРМУЛА СТОКСА

В указанной выше форме формула Грина справедлива не только в плоском случае, но и в трехмерном пространстве, где она называется формулой Стокса.

Т е о р е м а 1 (формула Стокса). *Пусть D — гладкая невырожденная (без особых точек) поверхность в $\mathbb{R}^3$, которая является образом плоского выпуклого множества D_0 при отображении $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, причем его координаты являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями. Пусть кривая L — кусочно-гладкая граница поверхности D, являющаяся образом кусочно-гладкой границы Λ множества D_0. Ориентация границы L отвечает параметризации $\bar{r}$. Пусть также P, Q, R — гладкие функции на D.*

Тогда справедлива формула

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_D (dP) \wedge dx + (dQ) \wedge dy + (dR) \wedge dz =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу линейности поверхностного интеграла достаточно рассмотреть случай интеграла $K = \oint_L Pdx$, т.е. достаточно доказать формулу

$$K = \oint\limits_L Pdx = \iint\limits_D (dP) \wedge dx = \iint\limits_D P_z' dz \wedge dx - P_y' dx \wedge dy = S.$$

Пусть $\bar{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ — параметризация поверхности D, причем $(u, v) \in D_0$. Кроме того, на границе Λ области D_0 задана кусочно-гладкая параметризация

$$(u, v) = (u(t), v(t)), t \in I = [0, 1], (u(0), v(0)) = (u(1), v(1)),$$

которая определяет на кривой L параметризацию $\bar{r}(u(t), v(t))$.

В силу теоремы о выражении криволинейного интеграла через определенный интеграл имеем

$$K = \oint\limits_L Pdx = \int\limits_0^1 P(\bar{r}(u(t), v(t)))dx(u(t), v(t)).$$

По той же теореме последний интеграл равен

$$K = \oint\limits_{\Lambda} P(\bar{r}(u,v))dx(u,v) = \oint\limits_{\Lambda} P(\bar{r}(u,v))(x'_u du + x'_v dv).$$

К интегралу K применим формулу Грина. Получим

$$K = \oint\limits_{\Lambda} P(\bar{r}(u,v))dx(u,v) = \iint\limits_{D_0} (dP(\bar{r}(u,v))) \wedge dx(u,v).$$

Воспользуемся инвариантностью формы первого дифференциала и непрерывностью вторых частных производных функций $x(u,v), y(u,v)$, $z(u,v)$. Имеем

$$dP(\bar{r}(u,v)) = P'_x dx(u,v) + P'_y dy(u,v) + P'_z dz(u,v).$$

Следовательно,

$$K = \iint\limits_{D_0} P'_z dz(u,v) \wedge dx(u,v) - P'_y dx(u,v) \wedge dy(u,v) = S_1.$$

Здесь S_1 рассматривается как поверхностный интеграл второго рода по верхней стороне плоской области D_0. Но при параметризации $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ оба интеграла S и S_1 дают одно и то же выражение. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно раскрыть скобки в выражениях $dz(u,v)\wedge dx(u,v)$ и $dx(u,v)\wedge dy(u,v)$, считая, что $dx(u,v) = x'_u du + x'_v dv$ и т.д.

Окончательно имеем, что S и S_1 сводятся к одному и тому же двойному интегралу

$$S = S_1 = \iint\limits_{D_0} (P'_z B - P'_y C)dudv,$$

где

$$B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}.$$

Тем самым, доказано равенство $K = S$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Применяя формулу Стокса к плоской поверхности D, распространим формулу Грина на случай областей, которые являются образами выпуклых множеств, а затем, уже используя это утверждение при доказательстве формулы Стокса, мы можем в теореме 1 считать, что область D_0 есть образ выпуклого измеримого множества.

§ 7. ФОРМУЛА ГАУССА – ОСТРОГРАДСКОГО

Эта формула является аналогом формулы Грина в трехмерном пространстве.

Теорема 1 (формула Гаусса – Остроградского). *Пусть:*

1) множество $V \in \mathbb{R}^3$ — выпуклый, измеримый по Жордану, компакт;

2) граница S множества V есть невырожденная (без особых точек) кусочно-гладкая поверхность;

3) заданы гладкие функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ на множестве V.

Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_{S^+} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint\limits_{V} (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz.$$

Здесь интеграл в левой части равенства является интегралом второго рода, который берется по внешней стороне поверхности S^+, а в правой части равенства — обычный тройной интеграл по множеству V.

Доказательство. Как и при доказательстве формулы Грина, рассмотрим только случай $P \equiv 0, Q \equiv 0$. Спроектируем поверхность S на плоскость xOy и обозначим эту проекцию через D. В силу выпуклости V всякая прямая, параллельная оси Oz и пересекающая D, пересекает V по отрезку. Пусть $(x, y) \in D$, тогда нижний конец этого отрезка имеет координаты $(x, y, \varphi_1(x, y))$, а верхний конец отрезка — координаты $(x, y, \varphi_2(x, y))$. Пусть, далее, $\Lambda = \partial D$ обозначает границу множества D.

Тогда поверхность D разбивается на три кусочно-гладких части:

$S_1 = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z = \varphi_1(x, y)\}$,

$S_2 = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, z = \varphi_2(x, y)\}$,

$S_3 = \{(x, y, z) | (x, y) \in \Lambda,\ (x, y, z) \notin S_1 \cup S_2\}$.

Здесь для поверхности S_1 интегрирование ведется по ее нижней стороне, а для S_2 — по верхней стороне, и, наконец, для S_3, представляющей боковую часть поверхности S, — по стороне, нормаль к которой перпендикулярна оси Oz и является внешней нормалью по отношению к D.

По теореме о сведении поверхностного интеграла к двойному интегралу Римана имеем

$$\iint\limits_{S_3} R dx \wedge dy = \iint\limits_{S_3} R \cos(\bar{n}, \bar{e}_3) dS = 0,$$

поскольку $\cos(\bar{n}, \bar{e}_3) = 0$. Далее,

$$\iint\limits_{S_1} R dx \wedge dy = \iint\limits_{S_1} R \cos(\bar{n}, \bar{e}_3) dS = -\iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_1(x, y)) dx dy,$$

$$\iint\limits_{S_2} R dx \wedge dy = \iint\limits_{S_2} R \cos(\bar{n}, \bar{e}_3) dS = \iint\limits_{D} R(x, y, \varphi_2(x, y)) dx dy.$$

По формуле Ньютона – Лейбница при фиксированных (x, y) получим

$$R(x, y, \varphi_2(x, y)) - R(x, y, \varphi_1(x, y)) = \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{S} R dx dy = \iint\limits_{S_2} R dx dy - \iint\limits_{S_1} R dx dy =$$

$$= \iint\limits_{D} dx dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dz = \iiint\limits_{V} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz.$$

Теорема 1 доказана.

Замечания. 1. Тем же способом, что и в случае формулы Грина, эту формулу можно распространить на случай областей V, которые являются образом выпуклой области при некотором гладком отображении.

2. Ясно, что если $V = V_1 \cup V_2$, где V_1 и V_2 удовлетворяют условиям теоремы 1 и соприкасаются по кусочно-гладкой границе, то и для V теорема 1 тоже верна.

3. Формуле Гаусса – Остроградского можно придать вид, аналогичный формулам Грина и Стокса, т.е.

$$\iint\limits_{S} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy =$$

$$= \iiint\limits_{V} (dP) \wedge dy \wedge dz + (dQ) \wedge dz \wedge dx + (dR) \wedge dx \wedge dy.$$

Но это требует введения некоторых новых понятий. В дальнейшем мы предполагаем доказать общую формулу указанного выше вида для пространства n измерений и поверхности размерности $k < n$. Она называется **общей формулой Стокса.** Доказательство ее проводится по существу так же, как и формулы Гаусса – Остроградского. Правда, при этом в связи с согласованием ориентации поверхности и ее границы возникают некоторые новые сложности.

4. Что такое "внешняя нормаль" к кусочно-гладкой поверхности S, которая является границей выпуклого пространственного тела V?

Если в точке $\bar{r} \in S$ существует вектор $\bar{n}$, то из геометрических соображений ясно, что $\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль для верхней части S_2 поверхности S, если выполняется условие $n_3 \geq 0$, а для нижней части S_1 поверхности S имеем условие $n_3 \leq 0$.

Для нормали, отвечающей параметризации $z = \varphi(x, y)$, имеем

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2}} > 0.$$

Следовательно, параметризации $z = \varphi(x, y)$ всегда отвечает "верхняя" сторона поверхности и потому при переходе к двойному интегралу в случае поверхности S_2 мы берем знак $+$ перед интегралом, а в случае поверхности S_1 — знак $-$.

Примеры. 1. Из теоремы 1 имеем следующее выражение для объема тела V через поверхностный интеграл по поверхности $S = \partial V$:

$$V = \iint\limits_{S+} x dy \wedge dz = \iint\limits_{S+} y dz \wedge dx = \iint\limits_{S+} z dx \wedge dy.$$

Здесь поверхностные интегралы берутся по внешней стороне поверхности.

Отметим, что для определения внешней стороны поверхности S следует через точку на поверхности провести нормальную прямую к ней и в качестве направления внешней нормали к поверхности S выпуклого тела V взять то направление луча этой прямой с вершиной в данной точке, на котором не содержится других точек тела V.

2. Интеграл Гаусса. Пусть S — кусочно-гладкая, невырожденная, измеримая по Жордану, компактная поверхность. Пусть P — некоторая фиксированная точка, M — переменная точка на поверхности $S, \bar{r} = \bar{r}(P, M)$ — радиус-вектор с начальной точкой P и концевой точкой $M, \bar{n}$ — внешняя нормаль к поверхности в точке M. Тогда имеем

$$G = \iint\limits_{S+} \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} dS = \begin{cases} 4\pi, & \text{если} \quad P \in V \setminus S, \\ 2\pi, & \text{если} \quad P \in S, \\ 0, & \text{если} \quad P \notin V. \end{cases}$$

Рассмотрим сначала случай, когда точка $P \notin V \setminus S$. Пусть точка M имеет координаты (x, y, z), а точка P — координаты (a, b, c). Тогда

$\bar{r} = (x-a, y-b, z-c)$, вектор нормали к поверхности в точке M равен $\bar{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Следовательно,

$$\cos(\bar{r}, \bar{n}) = \frac{(\bar{r}, \bar{n})}{||\bar{r}||} = \frac{(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma}{r}.$$

Используя формулу Гаусса – Остроградского, получим

$$G = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial(\frac{x-a}{r^3})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{y-b}{r^3})}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{z-c}{r^3})}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial(\frac{x-a}{r^3})}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-a)r_x'}{r^4}, \frac{\partial(\frac{y-b}{r^3})}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-b)r_y'}{r^4},$$

$$\frac{\partial(\frac{z-c}{r^3})}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-c)r_z'}{r^4}, r_x' = \frac{x-a}{r}, r_y' = \frac{y-b}{r}, r_z' = \frac{z-c}{r}.$$

Следовательно, получим

$$G = \iiint\limits_V \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)}{r^5} \right) dxdydz = 0.$$

Если точка $P \in V \setminus S$, то окружим ее шаром V_ε, целиком лежащем внутри $V \setminus S$. Поверхность этого шара обозначим через S_ε. В силу предыдущего имеем

$$0 = \iint\limits_{S \setminus S_\varepsilon} \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} dS = \iiint\limits_{V \setminus V_\varepsilon} 0 dV.$$

Но поскольку имеет место равенство, которое символически можно записать так:

$$\iint\limits_{S \setminus S_\varepsilon} = \iint\limits_S - \iint\limits_{S_\varepsilon},$$

то, в силу равенства

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \frac{\cos(\bar{r}, \bar{n})}{r^2} dS = 4\pi,$$

имеем, что значение G интеграла в случае $P \in V \setminus S$ равно 4π.

Случай, когда $P \in S$ рассматривается аналогично.

3. Формула Грина. Замечательным следствием формулы Гаусса – Остроградского является еще одна формула Грина, имеющая важные приложения в математической физике.

Пусть u и v — гладкие функции, имеющие непрерывные вторые частные производные $u''_{xx}, u''_{yy}, u''_{zz}$. Пусть также V — выпуклый, измеримый по Жордану, компакт с границей ∂V, являющейся кусочно-гладкой ориентированной поверхностью. Пусть, кроме того, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ обозначает оператор Лапласа, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производную по направлению внешней нормали к поверхности ∂V. Тогда справедлива следующая формула Грина

$$\iint\limits_{\partial V} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \iiint\limits_{V} (v\Delta u - u\Delta v)\, dV.$$

Действительно, по формуле Гаусса – Остроградского получим

$$A = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial z} \right) dV =$$

$$= \iint\limits_{\partial V} \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\cos(\bar{n}, \bar{e}_1) + u\frac{\partial v}{\partial y}\cos(\bar{n}, \bar{e}_2) + u\frac{\partial v}{\partial z}\cos(\bar{n}, \bar{e}_3) \right) dS =$$

$$= \iint\limits_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n}\, dS.$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial \left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} + u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Используя полученную для величины A формулу, найдем

$$\iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) dV =$$

$$\iint\limits_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n}\, dS - \iiint\limits_{V} u\Delta v\, dV.$$

Поменяем в последней формуле функции u и v местами. Левая часть равенства при такой замене не изменится, следовательно, не изменится и значение выражения, стоящего в правой части. А это дает следующее равенство:

$$\iint\limits_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n}\,dS - \iiint\limits_{V} u\Delta v\,dV = \iint\limits_{\partial V} v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \iiint\limits_{V} v\Delta u\,dV,$$

т.е.

$$\iint\limits_{\partial V}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\,dS = \iiint\limits_{V}(u\Delta v - v\Delta u)\,dV.$$

Последняя формула называется **формулой Грина** и является весьма полезной при исследовании **гармонических функций,** т.е. функций, удовлётворяющих уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

Лекция 14

§ 8. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ТОЛЬКО ОТ ПРЕДЕЛОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Будем считать, что P, Q, R — гладкие функции. Сформулируем и докажем теорему о независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования, имеющего фиксированные начальную и концевую точки.

Т е о р е м а 1. *Пусть L — кусочно-гладкая невырожденная кривая. Тогда для того чтобы интеграл*

$$I = \int\limits_L P dx + Q dy + R dz$$

не зависел от пути интегрирования (а зависел только от начальной и концевой точек кривой L), необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $h(x, y, z)$ такая, что

$$dh = P dx + Q dy + R dz.$$

Мы считаем, что P, Q, R, L определены внутри некоторого шара $\Omega \in \mathbb{R}^3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть интеграл I не зависит от пути интегрирования. Обозначим через $\bar{r}_0$ центр шара Ω и через $\bar{r}, \bar{r}_1$ — произвольные точки шара Ω. Поскольку интеграл I зависит только от начальной и концевой точек кривой L, интеграл $\int_{\bar{r}_0 \bar{r}} \omega, \omega = P dx + Q dy + R dz$, есть функция от $\bar{r}$. Обозначим ее через $h(\bar{r})$. Пусть точки $\bar{r}_1$ и $\bar{r}$ лежат на прямой, параллельной оси Ox. Тогда

$$h(\bar{r}) - h(\bar{r}_1) = \int\limits_L P dx = \int\limits_{x_1}^{x} P(t, y_1, z_1) dt.$$

Дифференцируя это равенство по первой переменной x, получим

$$\frac{\partial h(\bar{r})}{\partial x} = P(\bar{r}_1).$$

Аналогично, имеем

$$\frac{\partial h}{\partial y} = Q, \frac{\partial h}{\partial z} = R.$$

Следовательно, дифференциальная форма ω есть полный дифференциал. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ — любые точки, принадлежащие Ω, и L — кусочно-гладкая невырожденная кривая, имеющая своими концами точки $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$. Пусть $\bar{r} = \bar{r}(t), t \in [0,1]$, — параметризация этой кривой. Тогда, переходя от криволинейного интеграла к определенному интегралу от одной переменной, получим

$$\int\limits_L dh = \int\limits_0^1 h_t'(\bar{r}(t))dt = h(\bar{r}_2) - h(\bar{r}_1).$$

Это означает, что интеграл от полного дифференциала зависит от начальной и концевой точек пути интегрирования, но не зависит от самого этого пути. Теорема 1 доказана.

Выясним теперь условия, при которых дифференциальная форма ω есть полный дифференциал от некоторой функции $h(\bar{r})$. Для простоты рассмотрим только двумерный случай.

Теорема 2. *Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^2$. Для того чтобы дифференциальная форма $\omega = Pdx + Qdy$ на Ω была полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы для всех точек Ω выполнялось равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Доказательство. Необходимость. Если дифференциальная форма ω является полным дифференциалом, то есть $\omega = dh$, то равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ означает равенство смешанных производных. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим функцию

$$h(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,v)dv,$$

где (x_0, y_0) — некоторая фиксированная точка области Ω. Тогда имеем

$$\frac{\partial h}{\partial x} = P(x,y).$$

Далее, по правилу Лейбница получим

$$\frac{\partial h}{\partial y} = Q(x_0,y) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial P(t,y)}{\partial y}dt = Q(x_0,y) + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(t,y)}{\partial t}dt =$$

$$= Q(x_0, y) + Q(x, y) - Q(x_0, y) = Q(x, y).$$

Таким образом, дифференциал функции $h(x,y)$ совпадает с дифференциальной формой ω. Теорема 2 доказана.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть Ω — выпуклая область. Дифференциальная форма $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ тогда и только тогда является полным дифференциалом, когда для всех точек области Ω выполняются равенства*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

И вообще, в выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ условие, что дифференциальная форма ω является полным дифференциалом некоторой функции h, т.е. $\omega = dh$, эквивалентно условию $d\omega = 0$.

Пример. Пусть $f(z)$ — функция комплексного переменного $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, принимающая комплексные значения

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv,$$

где u, v — вещественнозначные функции и $f(z)$ — однозначная в некоторой области Ω комплексной плоскости **C**. Пусть L — простая спрямляемая ориентированная кривая, $L \in \Omega$.

Определим криволинейный интеграл I от функции $f(z)$ по кривой L следующей формулой:

$$I = \int\limits_L f(z)\, dz = \int\limits_L (u + iv)(dx + idy) = \int\limits_L (udx - vdy) + i\int\limits_L (vdx + udy).$$

Пусть функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ являются гладкими в области Ω. Далее потребуем, чтобы интеграл I не зависел от кривой интегрирования L, а зависел только от начальной ее точки z_0 и концевой точки z.

В силу теорем 1 и 2 в этом случае имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти условия называются **условиями Коши – Римана.** Отметим, что при наличии гладкости функций u и v в области Ω они являются необходимыми и достаточными условиями дифференцируемости функции комплексного переменного.

Итак, пусть функции u и v являются гладкими. Рассмотрим интеграл

$$F(z) = \int\limits_L f(z)\, dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\, dz = U(x,y) + iV(x,y),$$

где

$$U = U(x,y) = \int\limits_{z_0}^{z} udx - vdy, V = V(x,y) = \int\limits_{z_0}^{z} vdx + udy.$$

Отсюда получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = u, -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = v.$$

Следовательно, функция $F(z)$ является дифференцируемой и

$$F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = f(z).$$

Таким образом, функция $F(z)$ является первообразной функции $f(z)$, и для интеграла от функции $f(z)$ имеет место теорема Ньютона – Лейбница.

Простым следствием теорем 1 и 2 является следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Пусть функция $f(z)$ — однозначна и непрерывна в области Ω, принадлежащей комплексной плоскости* **C**. *Тогда для любого простого спрямляемого ориентированного замкнутого контура $L \in \Omega$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{L} f(z)\, dz = 0.$$

Полученная теорема называется **основной теоремы Коши** в теории функций одного комплексного переменного.

§ 9. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

Рассмотрим выпуклую область V в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть на этой области задана скалярная функция $h(\bar{u}), \bar{u} \in V$ и отображение $\bar{\varphi}(\bar{u})$ области V в трехмерное пространство.

Традиционно в приложениях анализа к математической физике и механике ряд вопросов, связанных с изучением функций $h(\bar{u})$ и $\bar{\varphi}(\bar{u})$, выделяется в отдельный раздел, который называется *векторным анализом* или *теорией (векторного) поля.* По существу, этот раздел ничего нового, кроме обозначений, не содержит. Но язык этих обозначений надо знать.

Определение 1. *Функция $h(\bar{u})$ называется* **скалярным полем,** *а отображение $\bar{\varphi}(\bar{u})$ называется* **векторным полем на области** V. *Если функции $h(\bar{u})$ и $\bar{\varphi}(\bar{u})$ — гладкие, то соответствующие поля тоже называются* **гладкими.**

Далее будем считать, что $h(\bar{u})$ и $\bar{\varphi}(\bar{u})$ — гладкие функции на V.

Определение 2. *Векторное поле $A(\bar{u}) = (\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}) = \operatorname{grad} h(\bar{u})$ называется* **градиентом** *скалярного поля $h(\bar{u})$.*

Определение 3. Производной по направлению l *скалярного поля $h(\bar{u})$ в точке $\bar{u}_0$ называется величина*

$$\lim_{t\to 0} \frac{h(\bar{u}_0 + t\bar{e}) - h(\bar{u}_0)}{t} = \frac{\partial h}{\partial l},$$

где $\bar{e}$ — вектор, определяющий направление l.

Известно, что

$$\frac{\partial h}{\partial l} = (\operatorname{grad} h(\bar{u}), \bar{e}).$$

Примеры. 1. Множество всех точек $\bar{u}$, удовлетворяющих условию $h(\bar{u})$, равно некоторой постоянной величине a, называется **множеством уровня** функции $h(\bar{u})$. Пусть множество уровня $h(\bar{u}) = h(\bar{u}_0) = a$ представляет собой гладкую поверхность $\Pi = \Pi_a$ в окрестности точки $\bar{u} = \bar{u}_0$. Тогда в любом направлении l для кривой $L \in \Pi$, имеющей это направление, т.е. касательный вектор к кривой L в точке $\bar{u}_0$ совпадает с вектором направления l, справедливо равенство $\frac{\partial h}{\partial l} = 0$, поскольку для точек кривой L имеем $\Delta h(\bar{u}_0) = h(\bar{u}_1) - h(\bar{u}_0) = 0$. Отсюда получим

$$\frac{\partial h}{\partial l} = (\operatorname{grad} h(\bar{u}), \bar{e}) = 0.$$

Следовательно, если вектор $\operatorname{grad} h(\bar{u}_0) \neq \bar{0}$, то вектор градиента функции $h(\bar{u})$ в точке $\bar{u}_0$ ортогонален вектору $\bar{e}$, касательному к поверхности уровня Π.

2. Рассмотрим функцию $h(\bar{u}) = f(r)$, где $r = ||\bar{u} - \bar{u}_0||$. Поверхностью уровня $\Pi = \Pi_a$ этой функции является сфера с центром в точке $\bar{u}_0$ и радиусом, равным a. Тогда вектор градиента функции $f(r)$ направлен по нормали к сфере, т.е. по ее радиусу $r = \bar{u} - \bar{u}_0$. Следовательно, $\operatorname{grad} f(r) = f'(r)\frac{\bar{r}}{r}$. В частности, имеем $\operatorname{grad}(-\frac{1}{r}) = \frac{\bar{r}}{r^3}$.

3. Пусть в точке $\bar{u}_0$ помещена пробная единичная точечная масса, а в точках $\bar{u}_1$ — масса $m_1, \ldots, \bar{u}_k$ — масса m_k. Пусть $\bar{r}_1 = \bar{u}_1 - \bar{u}_0, \ldots, \bar{r}_k = \bar{u}_k - \bar{u}_0$. Тогда сила притяжения, действующая на пробную массу, равна

$$\bar{F}(\bar{u}_0) = m_1 \frac{\bar{r}_1}{r_1^3} + \cdots + m_k \frac{\bar{r}_k}{r_k^3}.$$

Из предыдущего примера получим

$$\bar{F}(\bar{u}_0) = \operatorname{grad}\left(-\sum_{s=1}^{k} \frac{m_s}{r_s}\right).$$

4. Пусть на измеримом по Жордану компакте $V \in \mathbb{R}^3$ задана кусочно-непрерывная функция распределения $\rho(M), M \in V$, массы тела V. Положим $\rho(M) = 0$, если $M \notin V$.Пусть P — некоторая фиксированная точка, M — любая переменная точка и пусть $\bar{r} = \bar{r}(M) = \bar{r}(P, M)$. Тогда сила, действующая на пробную точечную единичную массу, помещенную в точке P, по аналогии с дискретным случаем равна

$$\bar{F}(P) = \iiint\limits_{V} \frac{\rho(M)\bar{r}(M)}{r^3(M)} dV(M),$$

где $dV(M) = dx(M)dy(M)dz(M)$.

Силовую функцию $\bar{F}(P)$ можно представить в следующем виде:

$$\bar{F}(P) = \operatorname{grad}\varphi(P),$$

где

$$\varphi(P) = -\iiint\limits_{V} \frac{\rho(M)}{r(M)} dV(M).$$

Действительно, имеем

$$\operatorname{grad}\varphi(P) = \iiint\limits_{V} \rho(M) \operatorname{grad}\left(-\frac{1}{r(P, M)}\right) dV(M) =$$

$$= \iiint\limits_{V} \rho(M) \frac{\bar{r}(P, M)}{r^3(P, M)} dV(M) = \bar{F}(P).$$

Определение 4. *Пусть* $\bar{\varphi}(\bar{r}) = (P, Q, R)$ *— гладкое векторное поле. Тогда величина*

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div}\bar{\varphi}$$

называется **дивергенцией векторного поля**, *а вектор*

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \operatorname{rot}\varphi$$

называется **ротором векторного поля** $\bar{\varphi}$.

Если введем в рассмотрение оператор "набла" ∇, полагая

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

то предыдущие определения можно формально записать в виде

$$\operatorname{div}\bar{\varphi} = (\nabla, \bar{\varphi}), \operatorname{rot}\bar{\varphi} = [\nabla, \bar{\varphi}], \operatorname{grad} h = \nabla h,$$

где символические выражения $(\cdot,\cdot), [\cdot,\cdot]$ обозначают соответственно скалярное и векторное произведения.

Можно также определить $\operatorname{div}\bar{\varphi}$ и $\operatorname{rot}\bar{\varphi}$ из тождества для дифференциальных форм:

$$d\omega_2 = (dP)\wedge dy\wedge dz + (dQ)\wedge dz\wedge dx + (dR)\wedge dx\wedge dy = (\operatorname{div}\bar{\varphi})dx\, dy\, dz,$$

$$d\omega_1 = (dP)\wedge dx + (dQ)\wedge dy + (dR)\wedge dz = v_1\, dy\wedge dz + v_2\, dz\wedge dx + v_3\, dx\wedge dy,$$

где

$$\operatorname{rot}\bar{\varphi} = (v_1, v_2, v_3), \quad dh(\bar{u}) = (\operatorname{grad} h(\bar{u}), d\bar{u}).$$

Отсюда, используя соотношения $dx\wedge dx = 0, dx\wedge dy = -dy\wedge dx$ и т.д., получим соответственно выражения для $\operatorname{div}\bar{\varphi}$ и $\operatorname{rot}\bar{\varphi}$.

Отметим два полезных тождества

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} h(\bar{u}) \equiv 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{\varphi}(\bar{u}) \equiv 0.$$

Их доказательство получается прямыми вычислениями. Оно является следствием того, что для дифференциальной формы ω справедливо равенство $d^2\omega = 0$.

Действительно, первое тождество следует из формулы

$$d(dh(\bar{u})) = d^2h(\bar{u}) = 0,$$

а второе тождество — из формулы

$$d^2\omega_1 = d(dP\wedge dx + dQ\wedge dy + dR\wedge dz) = 0.$$

Определение 5. *Криволинейный интеграл I_0 второго рода*

$$I_0 = \oint_L P dx + Q dy + R dz$$

по кусочно-гладкой ориентированной замкнутой кривой L называется **циркуляцией вектора** $\bar{\varphi} = (P, Q, R)$ *по замкнутому контуру L.*

Если $\bar{\tau}$ — единичный касательный вектор в положительном направлении обхода контура L, то интеграл I_0 можно записать в виде

$$I_0 = \oint_L (\bar{\varphi}, \bar{\tau}) dl,$$

где dl — элемент длины дуги кривой L.

Определение 6. *Поверхностный интеграл второго рода по выделенной стороне двусторонней кусочно-гладкой измеримой поверхности* S *вида*

$$I = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

называется **потоком вектора** $\bar{\varphi} = (P, Q, R)$ *через поверхность* S.

Если через $\bar{n}$ обозначим нормаль к поверхности, соответствующую выбранной стороне поверхности, то поток I через поверхность S можно записать в виде

$$I = \iint_S (\bar{\varphi}, \bar{n}) dS.$$

Переформулируем в векторном виде теоремы Стокса и Гаусса – Остроградского.

Пусть сторона поверхности S, отвечающая вектору нормали $\bar{n}$, согласована с направлением обхода контура, отвечающим вектору τ, единичному касательному вектору к кривой L. Это можно сделать, например, так. По непрерывности определим вектор нормали на кривой L, а затем вектор τ направим в ту сторону, чтобы относительно $\bar{n}$ обход контура совершался "против часовой стрелки".

Т е о р е м а 1 (формула Стокса). *Циркуляция вектора* $\bar{\varphi}$ *по кусочно-гладкой границе* L *кусочно-гладкой поверхности* S *равна потоку* $\operatorname{rot} \bar{\varphi}$ *через эту поверхность, т.е.*

$$\oint_L (\bar{\varphi}, \bar{\tau}) dl = \iint_S (\operatorname{rot} \bar{\varphi}, \bar{n}) dS.$$

Т е о р е м а 2 (формула Гаусса – Остроградского). *Поток вектора* $\bar{\varphi}$ *через кусочно-гладкую границу* S *выпуклой трехмерной области* V *равен тройному интегралу от дивергенции вектора* $\bar{\varphi}$ *по множеству* V, *т.е.*

$$\iint_S (\bar{\varphi}, \bar{n}) dS = \iiint_V \operatorname{div} \bar{\varphi} dV,$$

где $\bar{n}$ *— внешняя нормаль к поверхности* S.

Отметим еще три интересных следствия формулы Гаусса – Остроградского. Справедливы следующие равенства:

1) $\iint_S (\bar{n}, \bar{\varphi}) dS = \iiint_V (\nabla, \bar{\varphi}) dV$,

2) $\iint_S [\bar{n}, \bar{\varphi}] dS = \iiint_V [\nabla, \bar{\varphi}] dV$,

3) $\iint\limits_S \bar{n}hdS = \iiint\limits_V \nabla hdV.$

Действительно, рассмотрим, например, формулу 2). В ней первая координата векторного равенства имеет вид

$$\iint\limits_S (R\cos\beta - Q\cos\gamma)dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dV.$$

Для векторного поля $\bar{\varphi}_1 = (0, R, -Q)$ предыдущее равенство представляет собой обычную формулу Гаусса – Остроградского. Аналогично устанавливается равенство вторых, третьих координат равенства 2).

Равенство 3) следует из формулы Гаусса – Остроградского для векторных полей $(h,0,0),(0,h,0),(0,0,h)$.

Обозначим через d диаметр области V, а через $\mu(V)$ ее объем. Тогда, используя теорему о среднем для каждой компоненты векторных полей $\operatorname{rot}\varphi = [\nabla, \varphi]$ и $\operatorname{grad} h = \nabla h$ в равенствах 1),2),3), а затем, переходя к пределу при $d \to 0$, получим

4) $\operatorname{div}\varphi = \lim\limits_{d\to 0} \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_S (\bar{n}, \bar{\varphi})\, dS,$

5) $\operatorname{rot}\varphi = \lim\limits_{d\to 0} \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_S [\bar{n}, \bar{\varphi}]\, dS,$

6) $\operatorname{grad} h = \lim\limits_{d\to 0} \frac{1}{\mu(V)} \iint\limits_S \bar{n}h\, dS.$

Интеграл в равенстве 4) представляет собой поток векторного поля φ через замкнутую поверхность S, являющуюся границей тела V. По аналогии с этим интегралы в равенствах 5) и 6) назовем *векторными потоками* соответственно векторного поля φ и скалярного поля h через поверхность S.

Отметим также, что эти формулы дают инвариантное относительно выбора прямоугольной системы координат определение градиента, дивергенции и ротора.

Лекция 15

§ 10. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ И СОЛЕНОИДАЛЬНОЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Определение 1. *Векторное поле $\bar{F}(M)$, $M \in V$, называется* **потенциальным** *в области V, если найдется скалярная функция $h(M)$ такая, что $\bar{F}(M) = \operatorname{grad} h(M)$, сама функция $h(M)$ тогда называется* **потенциалом векторного поля** $\bar{F}(M)$.

Если величину $\bar{F}(M)$ рассматривать в качестве силы, действующей в точке M на пробную точечную единичную массу, то потенциал $h(M)$ будет иметь смысл работы по перемещению этой точечной массы из бесконечности в точку M.

Действительно, пусть задана кривая L с начальной точкой A и переменной точкой M. Обозначим через $l(M)$ длину дуги AM этой кривой, а через $\bar{\tau}(M)$ — единичный касательный вектор к ней в точке M. Тогда работа $W(P)$ силы $\bar{F}(M)$ по перемещению пробной массы по пути AP равна

$$W(P) = \int\limits_{AP} (\bar{F}(M), \bar{\tau}(M)) dl(M) = \int\limits_{AP} (\operatorname{grad} h(M), \bar{\tau}(M)) dl(M) =$$

$$= \int\limits_{AP} \frac{\partial h(M)}{\partial l} dl(M) = h(P) - h(A).$$

Определение 2. Циркуляцией векторного поля $\bar{F}(M)$ **по замкнутому контуру** L *назовем величину*

$$\oint\limits_{L} (\bar{F}(M), \bar{\tau}(M)) dl(M).$$

Из предыдущего выражения для работы $W(P)$ силы $\bar{F}(M)$ по контуру L имеем, что циркуляция потенциального поля по любому замкнутому спрямляемому контуру равна нулю.

Отметим, что в теоремах 1, 2 и 3 §8 мы получили необходимое и достаточное условие потенциальности поля. Сформулируем эти условия, используя новую терминологию.

Теорема 1. *Для того чтобы гладкое векторное поле было потенциальным в выпуклой области Ω, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из эквивалентных условий:*

1) для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой $L \in \Omega$

$$\oint\limits_L (\bar{F}(M), \bar{\tau}(M))dl = 0,$$

2) $\operatorname{rot} \bar{F}(M) = 0$.

Напомним, что для отображения $\bar{F}(M) = (P(M), Q(M), R(M))$ в силу определения имеет место равенство

$$\operatorname{rot} \bar{F}(M) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Определение 3. *Векторное поле $\bar{\varphi}(\bar{u})$ называется* **соленоидальным** *(или* **трубчатым**), *если существует векторное поле $\bar{\psi}(\bar{u})$ такое, что*

$$\bar{\varphi}(\bar{u}) = \operatorname{rot} \bar{\psi}(\bar{u}),$$

а векторное поле $\bar{\psi}(\bar{u})$ называется **векторным потенциалом поля** $\bar{\varphi}(\bar{u})$.

Теорема 2. *Пусть Ω — выпуклый компакт. Для того чтобы векторное поле $\bar{\varphi}$ было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы для всех точек Ω выполнялось равенство*

$$\operatorname{div} \bar{\varphi} \equiv 0.$$

Доказательство. Необходимость. Поле $\bar{\varphi}$ является соленоидальным. Следовательно,

$$\bar{\varphi}(\bar{u}) = \operatorname{rot} \bar{\psi}(\bar{u}).$$

Но поскольку для любого векторного поля $\bar{\psi}$ справедливо равенство $\operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{\psi} = 0$, имеем $\operatorname{div} \bar{\varphi} \equiv 0$ на области Ω. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь $\operatorname{div} \bar{\varphi} \equiv 0$ на области Ω. Докажем, что существует векторное поле $\bar{\psi}$ такое, что $\operatorname{rot} \bar{\psi} = \bar{\varphi}$. Поставим в соответствие векторному полю $\bar{\varphi} = (P, Q, R)$ дифференциальную форму

$$\omega = \omega(\bar{r}, d\bar{r}) = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

$$\bar{r} = (x, y, z), d\bar{r} = (dx, dy, dz).$$

Тогда условие $\operatorname{div} \bar{\varphi} \equiv 0$ на Ω эквивалентно тому, что $d\omega \equiv 0$ на Ω. А условие существования векторного поля $\bar{\psi} = (A, B, C)$, удовлетворяющего равенству $\operatorname{rot} \bar{\psi} = \bar{\varphi}$, означает, что найдется дифференциальная форма $\alpha = Adx + Bdy + Cdz$ такая, что $d\alpha = \omega$.

Будем искать форму α, исходя из равенства

$$d\alpha = \int\limits_0^1 \frac{d(t^2\omega(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt}\, dt = \omega(\bar{r}, d\bar{r}).$$

Рассмотрим сначала только одно слагаемое $\omega_0 = R\, dx \wedge dy$. Имеем

$$\frac{d(t^2 R(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt} = 2tR + t^2\frac{dR}{dt} =$$

$$= t\left(2R + x\frac{\partial R}{\partial x} + y\frac{\partial R}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}\right) = t\left(\frac{\partial(Rx)}{\partial x} + \frac{\partial(Ry)}{\partial y} + z\frac{\partial R}{\partial z}\right).$$

Далее воспользуемся тем, что $d\omega = 0$, т.е.

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Получим

$$\frac{d(t^2 R(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt} = t\left(\frac{\partial(Rx)}{\partial x} + \frac{\partial(Ry)}{\partial y} - z\frac{\partial P}{\partial x} - z\frac{\partial Q}{\partial y}\right) =$$

$$= t\left(\frac{\partial(Rx - Pz)}{\partial x} + \frac{\partial(Ry - Qz)}{\partial y}\right).$$

Отсюда имеем

$$\omega_0 = \int\limits_0^1 \frac{d(t^2 R(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt}\, dt\, dx \wedge dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^1 (Rx - Pz)t\, dt\right) dx \wedge dy + \frac{\partial}{\partial y}\left(\int\limits_0^1 (Qz - Ry)t\, dt\right) dy \wedge dx.$$

Аналогично получим соотношения

$$\int\limits_0^1 \frac{d(t^2 Q(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt}\, dt\, dz \wedge dx =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\int\limits_0^1 (Qz - Ry)t\, dt\right) dz \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_0^1 (Py - Qx)t\, dt\right) dx \wedge dz,$$

$$\int_0^1 \frac{d(t^2 P(t\bar{r}, d\bar{r}))}{dt}\, dt\, dy \wedge dz =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int_0^1 (Py - Qx)t\, dt\right) dy \wedge dz + \frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^1 (Rx - Pz)t\, dt\right) dz \wedge dy.$$

Следовательно, форму α можно взять в виде

$$\alpha = \left(\int_0^1 (Qz - Ry)t\, dt\right) dx +$$

$$+ \left(\int_0^1 (Rx - Pz)t\, dt\right) dy + \left(\int_0^1 (Py - Qx)\, dt\right) dz.$$

Теорема 2 доказана полностью.

Замечание. Теорема 2 — частный случай теоремы Пуанкаре о множестве замкнутых и точных дифференциальных форм. Форму α в доказательстве достаточности теоремы 2 можно выбрать не единственным способом. Например, условию теоремы удовлетворяет любая форма вида $\alpha + d\beta$. Отметим также, что любое векторное поле можно представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей.

Пример. Пусть V — некоторый выпуклый измеримый по Жордану компакт, $V \subset \mathbb{R}^3$. Для любой фиксированной точки $P \in \mathbb{R}^3$ и любой точки $M \in V$ определим радиус-вектор

$$\bar{r} = \bar{r}(M) = (x(M), y(M), z(M)), r = \sqrt{x^2(M) + y^2(M) + z^2(M)}$$

и элемент объема dV области V в виде $dV = dx(M)\, dy(M)\, dz(M)$. Пусть на области V задано векторное поле $\bar{j} = \bar{j}(M)$.

Тогда можно определить силовое поле $\bar{H} = \bar{H}(P)$ векторного поля $\bar{j}(M)$ по следующей формуле:

$$\bar{H} = \bar{H}(P) = \iiint\limits_V \frac{[\bar{j}, \bar{r}]}{r^3}\, dV.$$

Отметим, что в любой точке $P \in \mathbb{R}^3$ определено силовое поле $\bar{H}(P)$. В случае $P \in \mathbb{R}^3 \setminus V$ интеграл, задающий поле $\bar{H}$, представляет собой обычный тройной интеграл Римана от гладкой функции. Если же $P \in V$, то этот интеграл является несобственным и его сходимость следует из признака сравнения (для этого область V можно разбить на шаровые слои с центром в точке P и радиусом r с условием $\varepsilon < r \le 2\varepsilon$, $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$).

Покажем, что для любой точки $P \notin V$ имеет место равенство

$$\operatorname{div} \bar{H} = 0,$$

т.е. в силу теоремы 2 поле $\bar{H}$ является соленоидальным в области $\mathbb{R}^3 \setminus V$.

Действительно, если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — орты, направленные по осям координат Ox, Oy, Oz прямоугольной системы координат, $\bar{j} = (j_1, j_2, j_3)$, $\bar{r} = (x, y, z)$, то имеем

$$\frac{[\bar{j}, \bar{r}]}{r^3} = \frac{1}{r^3}\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{e}_1 \frac{j_2 z - j_3 y}{r^3} + \bar{e}_2 \frac{j_3 x - j_1 z}{r^3} + \bar{e}_3 \frac{j_1 y - j_2 x}{r^3} = P\bar{e}_1 + Q\bar{e}_2 + R\bar{e}_3.$$

Отсюда

$$\frac{\partial P}{\partial x} = (j_3 y - j_2 z)\frac{3x}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = (j_1 z - j_3 x)\frac{3y}{r^5}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = (j_2 x - j_1 y)\frac{3z}{r^5}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{div} \bar{H} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

т.е. поле $\bar{H}$ является соленоидальным в области $\mathbb{R}^3 \setminus V$.

Покажем теперь, что при $P \notin V$ векторным потенциалом поля $\bar{H}$ является векторное поле

$$\bar{J} = \iiint\limits_V \frac{\bar{j}\, dV}{r},$$

т.е. поле $\bar{H}$ представляется в виде $\bar{H} = \operatorname{rot} \bar{J}$.

В силу гладкости подынтегральной функции можно поменять порядок следования оператора rot и тройного интеграла. Тогда достаточно доказать, что

$$\operatorname{rot}\left(-\frac{\bar{j}}{r}\right) = \frac{[\bar{j}, \bar{r}]}{r^3}.$$

Действительно, имеем

$$\operatorname{rot} \frac{\bar{j}}{r} = [\nabla, \frac{\bar{j}}{r}] = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{j_1}{r} & \frac{j_2}{r} & \frac{j_3}{r} \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{e}_1 \left(j_3 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} - j_2 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z} \right) + \bar{e}_2 \left(j_1 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z} - j_3 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} \right) +$$

$$+ \bar{e}_3 \left(j_2 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} - j_1 \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} \right) =$$

$$= -P\bar{e}_1 - Q\bar{e}_2 - R\bar{e}_3,$$

где функции P, Q и R определены выше.

На этом мы завершаем рассмотрение вопросов, связанных с векторным анализом.

Глава XXI
ОБЩАЯ ФОРМУЛА СТОКСА

Лекция 16

§ 1. ПОНЯТИЕ ОРИЕНТИРОВАННОЙ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Общая формула Стокса является естественным многомерным обобщением теоремы Ньютона – Лейбница о выражении определенного интеграла через первообразную функцию. Впервые эта формула была опубликована А.Пуанкаре в 1899 году в знаменитом мемуаре "Новые методы небесной механики". Чтобы подчеркнуть возможность использования найденной формулы при интегрировании по поверхности любой размерности, он назвал ее обобщением теоремы Стокса, имея в виду формулу Стокса, связывающую поток векторного поля через поверхность и его циркуляцию вдоль границы поверхности.

Современное изложение доказательства различных вариантов общей формулы Стокса, как правило, опирается на применение достаточно развитой теории внешних дифференциальных форм и интегралов от них по поверхностям. Эта причина, по - видимому, является определенным препятствием для полного изложения ее доказательства в курсах анализа.

Здесь мы предлагаем новый вариант доказательства общей формулы Стокса, использующий, по существу, те же средства, что и в классическом трехмерном случае. Сначала с помощью параметризации поверхности мы определяем понятие интеграла от дифференциальной формы. При этом мы показываем, что его значение с точностью до знака не зависит от выбора параметризации. Далее обосновывается связь между выбором параметризации, определяющей ориентацию поверхности, и знаком интеграла. Следующий шаг — введение правила согласования ориентации поверхности и ориентации ее границы, что одновременно используется для конструирования поверхности путем "склейки" образов выпуклых множеств по общим частям их границ, имеющих противоположную ориентацию. Заметим, что использование выпуклости прообразов этих множеств вносит некоторые упрощения в доказательство основной теоремы без существенного ограничения общности.

Отметим еще раз важность проблемы согласования ориентации поверхности и ориентации ее границы, которая возникает неоднократно в процессе изложения. Уже на примере самой формулы Ньютона –

Лейбница эта особенность выявляется как зависимость знака интеграла от направления интегрирования, т.е. изменение знака интеграла при перестановке пределов интегрирования. Наиболее просто вопрос о согласовании ориентаций поверхности и ее границы решается в случае поверхностей размерности 1 (кривые) и коразмерности 0. Данное обстоятельство лежит в основе нашего индуктивного определения ориентации поверхности и ее границы. При этом согласование ориентаций проводится с использованием выпуклости прообраза поверхности.

В заключение следует сказать, что основная трудность при выводе общей формулы Стокса как раз и состоит в построении необходимой системы понятий, в то время как само доказательство очень простое.

Пусть k и n — натуральные числа, $1 \le k \le n$. Мы определим **кусочно-гладкую ориентированную поверхность размерности k в пространстве n измерений** индукцией по ее размерности k.

При $k = 1$ эта поверхность представляет собой **кусочно-гладкую кривую** без кратных точек, на которой задано направление обхода, т.е. начало следующего гладкого куска кривой совпадает с концом предыдущего. При этом под гладким куском кривой мы понимаем образ направленного отрезка числовой оси при гладком взаимно однозначном отображении, имеющем ранг, равный единице.

Пусть $k \ge 2$. Тогда поверхность (точнее, гладкий кусок поверхности) размерности k определяется как образ B выпуклого k-мерного множества A в k-мерном пространстве, имеющего кусочно-гладкую границу ∂A, при гладком взаимно однозначном невырожденном (то есть ранга k) отображении $\bar{\varphi}$, то есть $B = \bar{\varphi}(A)$.

Заметим, что в этом случае ∂B — граница поверхности B — является поверхностью размерности $k - 1 \ge 1(\partial B = \bar{\varphi}(\partial A))$. Прообраз A отображения $\bar{\varphi}$ называется *картой* гладкого куска поверхности B. Само отображение $\bar{\varphi}$ назовем *параметризацией* данного куска поверхности.

Пусть заданы две параметризации $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ поверхности B. Будем говорить, что они определяют **одинаковую ориентацию** поверхности B, если замена параметров является диффеоморфизмом $\bar{\lambda}$ с положительным якобианом $J_{\bar{\lambda}}$. Если же якобиан $J_{\bar{\lambda}}$ отрицателен, то параметризации $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ задают **противоположные ориентации.**

Заметим, что если якобиан отображения λ положителен хотя бы в одной точке, то он положителен и для всех точек множества A. Этот факт следует из того, что отображения $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ не вырождены, то есть матрицы Якоби $J_{\bar{\varphi}}$ и $J_{\bar{\psi}}$ отображений $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ имеют максимальный ранг, равный k, и $J_{\bar{\psi}} = J_{\bar{\lambda}} \cdot J_{\bar{\varphi}}$. Таким образом, ориентируемая поверхность допускает в точности две ориентации.

Для того чтобы определить понятие ориентированной поверхности, состоящей из многих гладких кусков, нам прежде всего потребуется "согласовать" ориентацию поверхности и ее границы.

§ 2. СОГЛАСОВАНИЕ ОРИЕНТАЦИЙ ПОВЕРХНОСТИ И ЕЕ ГРАНИЦЫ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Определим сначала **внешнюю сторону границы** $\partial A \subset \mathbb{R}^k$. Так как она является кусочно-гладкой поверхностью размерности $k-1$, то в каждой точке ее гладкости можно задать вектор нормали к ней (этот вектор ортогонален касательному подпространству размерности $k-1$). Прямая, проходящая через рассматриваемую точку $x_0 \in \partial A$ и коллинеарная вектору нормали, пересекает множество A по некоторому отрезку в силу выпуклости A. Тогда направляющий вектор $\bar{n}$ луча этой прямой с началом в точке x_0, не пересекающий множество A, называется **внешней нормалью к границе** ∂A **в точке** x_0, а вектор $(-\bar{n})$ — **внутренней нормалью.**

Пусть параметризация $\bar{\chi} = \bar{\chi}(\bar{t})$, $\bar{\chi} = (\chi_1, \ldots, \chi_k)$, $\bar{t} = (t_1, \ldots, t_{k-1})$ задает данный гладкий кусок границы множества A. Будем говорить, что эта **параметризация отвечает (соответствует) внешней стороне границы** ∂A, если матрица Якоби этого отображения, дополненная *слева* вектором внешней нормали $\bar{n}$, т.е. матрица

$$\left(\bar{n}, \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t_{k-1}}\right),$$

имеет положительный определитель. Тем самым на прообразе A мы согласовали ориентацию множества A и ориентации его границы ∂A.

Далее пусть, как и раньше, $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ задает параметризацию поверхности $B = \bar{\varphi}(A)$ и пусть $\bar{\chi} : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ задает параметризацию границы ∂A. Тогда отбражение $\bar{\varphi} \cdot \bar{\chi}$ задает параметризацию границы ∂B поверхности B.

Будем говорить, что **ориентация поверхности** B **и ориентация ее границы** ∂B **согласованы**, если ∂B есть образ границы ∂A, параметризация которой отвечает ее внешней стороне.

Пример. Пусть множество ∂B задается уравнением

$$x_k = f(x_1, \ldots, x_{k-1})$$

на границе ∂A выпуклого множества A в $k-1$ - мерном пространстве, где f — кусочно-гладкая функция на A. Тогда множество ∂B является кусочно - гладкой поверхностью размерности $k-1$ и ее параметризацию $\bar{\varphi}$ можно задать следующими уравнениями:

$$x_1 = t_1, \ldots, x_{k-1} = t_{k-1},\; x_k = f(t_1, \ldots, t_{k-1}).$$

Матрица Якоби этого отображения имеет ранг, равный $k-1$, поскольку она содержит единичную подматрицу размерности $k-1$. Внешняя нормаль $\bar{n}$ к поверхности B коллинеарна вектору

$$\bar{h} = \left(-\frac{\partial f}{\partial t_1}, -\frac{\partial f}{\partial t_2}, \ldots, -\frac{\partial f}{\partial t_{k-1}}, 1\right), \bar{n} = \frac{\bar{h}}{\bar{h}},$$

а матрица

$$\left(\bar n, \frac{\partial\bar\varphi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\bar\varphi}{\partial t_{k-1}}\right),$$

может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial t_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial t_2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{h}\frac{\partial f}{\partial t_{k-1}} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{1}{h} & \frac{\partial f}{\partial t_1} & \frac{\partial f}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial t_{k-1}} \end{pmatrix},$$

и ее определитель равен

$$(-1)^{k-1}\left(1 + (\frac{\partial f}{\partial t_1})^2 + (\frac{\partial f}{\partial t_2})^2 \dots + (\frac{\partial f}{\partial t_{k-1}})^2\right)^{1/2}.$$

Следовательно, ориентация поверхности B и ориентация ее границы ∂B в данном случае согласованы, если k – нечетное число. В случае четного числа k для того, чтобы согласовать ориентации поверхности B и ее границы, следует ориентацию границы ∂B заменить на противоположную.

Определим теперь кусочно-гладкую k-мерную ориентированную поверхность в n-мерном пространстве, состоящую из нескольких связанных между собой гладких ориентированных кусков с согласованно ориентированными границами.

Пусть два таких куска $\bar\varphi_1 : A_1 \to B_1$ и $\bar\varphi_2 : A_2 \to B_2$ соприкасаются по участку (b) их границ ∂B_1 и ∂B_2, причем $B_1 \cap B_2 = (b) \subset \partial B_1 \cap \partial B_2$. Если при этом: 1) участок (b) является кусочно-гладкой поверхностью размерности $k-1$ и 2) две ориентации поверхности (b), порождаемые $\bar\varphi_1$ и $\bar\varphi_2$, являются противоположными, то объединение поверхностей $B = B_1 \cup B_2$ мы будем рассматривать как одну кусочно-гладкую ориентированную поверхность B (состоящую из двух кусков поверхности B_1 и B_2). Аналогично поступаем и для случая любого конечного количества связанных между собою подобным образом гладких кусков поверхности.

Заметим, что при разбиении гладкого куска ориентированной поверхности на две кусочно-гладкие ориентированные поверхности при помощи кусочно-гладкой ориентированной граничной поверхности эта граничная поверхность относительно каждого из получившихся ориентированных кусков приобретет противоположные ориентации.

Совокупность карт, отвечающих всем кускам данной поверхности, будем называть ее **атласом.**

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Определение. *Пусть $1 \le k \le n$. Тогда* **дифференциальной формой k-го порядка**, *определенной на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, будем называть следующее выражение (канонический вид дифференциальной формы):*

$$\omega = \omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \sum_{1 \le m_1 < \cdots < m_k \le n} \cdots \sum F_{m_1,\ldots,m_k}(\bar{x})\, dx_{m_1} \wedge \cdots \wedge dx_{m_k},$$

причем операция $\wedge$ внешнего произведения дифференциалов (формальная) удовлетворяет условиям:

а) $(dx \wedge dy) \wedge dz = dx \wedge (dy \wedge dz)$ *(ассоциативность);*

б) $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ *(антисимметричность);*

в) $d(ax_1 + bx_2) \wedge dy \wedge \cdots \wedge dz = a\, dx_1 \wedge dy \wedge \cdots \wedge dz + b\, dx_2 \wedge dy \wedge \cdots \wedge dz$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *(полилинейность).*

Дифференциальную форму ω_0 вида $\omega = F(\bar{x})\, dx_{m_1} \wedge \cdots \wedge dx_{m_k}$ назовем **базисной дифференциальной k-формой.**

Примеры. 1. Пусть $k = 1$. Тогда форму первого порядка можно представить в виде

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \sum_{s=1}^{n} F_s(\bar{x})\, dx_s.$$

2. Пусть $k = n$. Тогда сумма в определении дифференциальной формы ω состоит из одного слагаемого, и форма ω имеет вид

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = F(\bar{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

§ 4. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Определение понятия замены переменных в дифференциальной форме нужно в основном для того, чтобы ввести понятие поверхностного интеграла по ориентированной кусочно-гладкой поверхности, размерность которой меньше размерности основного пространства. Но, разумеется, оно имеет место и в случае, когда эти размерности совпадают. По существу, данное определение достигается заменой $\bar{x}$ на $\bar{\varphi}(\bar{t})$ и dx_i на $d\varphi_i(\bar{t})$.

Определение. *Пусть ω — дифференциальная k-форма и $\bar{\varphi}$ — гладкое отображение, $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда имеет место следующее* **правило замены переменных** $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{t})$:

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \omega_1(\bar{t}, d\bar{t}),$$

где

$$\omega_1 = \omega_1(\bar{t}, d\bar{t}) = \sum_{1\le m_1<\dots<m_k\le n}\!\!\cdots\sum F_{m_1,\dots,m_k}(\bar{\varphi}(\bar{t}))\, d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \dots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t}),$$

$$d\varphi_s(\bar{t}) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \varphi_s}{\partial t_r}\, dt_r.$$

Приведем форму ω_1 к каноническому виду

$$\omega_1(\bar{t}, d\bar{t}) = \sum_{1\le r_1<\dots<r_k\le n}\!\!\cdots\sum \Phi_{r_1,\dots,r_k}(\bar{t})\, dt_{r_1} \wedge \dots \wedge dt_{r_k}.$$

Для этого сначала преобразуем к каноническому виду элементарную форму ω_0, где

$$\omega_0 = d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \dots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t}).$$

Имеем

$$\omega_0 = \left(\sum_{r_1=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial t_{r_1}}\, dt_{r_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{r_k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{m_k}}{\partial t_{r_k}}\, dt_{r_k}\right) =$$

$$= \sum_{r_1=1}^{n} \cdots \sum_{r_k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial t_{r_1}} \cdots \frac{\partial \varphi_{m_k}}{\partial t_{r_k}}\, dt_{r_1} \wedge \dots \wedge dt_{r_k} =$$

$$= \sum_{1\le r_1<\dots<r_k\le n}\!\!\cdots\sum \left(\varepsilon_\sigma \sum_{\sigma} \frac{\partial \varphi_{m_1}}{\partial t_{\sigma(r_1)}} \cdots \frac{\partial \varphi_{m_k}}{\partial t_{\sigma(r_k)}}\right) dt_{r_1} \wedge \dots \wedge dt_{r_k} =$$

$$= \sum_{1\le r_1<\dots<r_k\le n}\!\!\cdots\sum \frac{D(\varphi_{m_1}, \dots, \varphi_{m_k})}{D(t_{r_1,\dots,t_{r_k}})}\, dt_{r_1} \wedge \dots \wedge dt_{r_k}.$$

Здесь ε_σ равно $+1$ или -1 в зависимости от четности подстановки σ, составленной из чисел $\sigma(r_1), \dots, \sigma(r_k)$. Подставляя последнее выражение в равенство, определяющее форму ω_1, найдем

$$\Phi_{r_1,\dots,r_k} = \sum_{1\le m_1<\dots<m_k\le n}\!\!\cdots\sum F_{m_1,\dots,m_k}(\bar{\varphi}(\bar{t}))\, \frac{D(\varphi_{m_1}, \dots, \varphi_{m_k})}{D(t_{r_1,\dots,t_{r_k}})}.$$

Форму ω_1 обычно обозначают символом $\omega_1 = \varphi^*\omega$ и называют **формой, индуцированной отображением** φ, или просто **индуцированной формой**.

Примеры. 1. Пусть $k = 1$. Тогда

$$\varphi^*\omega = \sum_{r=1}^{n} \Phi_r(\bar{t})\, dt_r, \quad \Phi_r(\bar{t}) = \sum_{m=1}^{n} F_m(\bar{\varphi}(\bar{t}))\, \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_r}.$$

2. При $k = n$ имеем

$$\varphi^*\omega = F(\bar{\varphi}(\bar{t}))\, \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(t_1, \dots, t_n)}\, dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n.$$

§ 5. ИНТЕГРАЛ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Сначала рассмотрим интеграл от дифференциальной n-формы по n-мерной ориентированной поверхности B в пространстве n измерений. Канонический вид формы ω в этом случае можно записать, так:

$$\omega = F(\bar{x})\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Определим интеграл от ω по поверхности B (ориентированной естественным образом) как n-кратный интеграл Римана, т.е.

$$\int\limits_B \omega = \int\limits_B F(\bar{x})\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Поскольку после замены переменных $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{t})$, связанной с параметризацией поверхности $B = \bar{\varphi}(A)$, отвечающей ее ориентации, мы приходим к дифференциальной k-форме $\varphi^*\omega$, определенной на k-мерном множестве A в пространстве k измерений и имеющей канонический вид

$$\omega_1 = \varphi^*\omega = \Phi(t_1, \ldots, t_k)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k,$$

по аналогии со случаем $k = n$ мы имеем правило, выражающее k-кратный поверхностный интеграл от k-формы ω_1 через обычный k-кратный интеграл Римана.

Это обстоятельство позволяет нам дать следующее определение поверхностного интеграла от дифференциальной формы.

Определение. Поверхностным интегралом I **по кусочно-гладкой ориентированной поверхности** B *от гладкой дифференциальной* k*-формы* ω *(т.е. формы с гладкими коэффицентами) называется выражение*

$$I = \int\limits_B \omega = \int\limits_A \varphi^*\omega,$$

где множество A *есть* k*-мерное выпуклое компактное измеримое по Жордану множество в пространстве* k *измерений,* $B = \bar{\varphi}(A)$.

При этом интеграл по множеству A*, как и в случае* $k = n$*, выражается через обычный* k*-кратный интеграл Римана с помощью формальной замены выражения* $dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k$ *на выражение* $dt_1 \ldots dt_k$.

Заметим еще, что если параметризация $\bar{\varphi}$ поверхности B определяет на B ориентацию, противоположную заданной, то согласно данному выше определению

$$I = \int\limits_B \omega = -\int\limits_A \varphi^* \omega.$$

Пример. Пусть $B = L$ - окружность с центром в нуле радиуса 1 на плоскости xOy, пробегаемая против часовой стрелки. Зададим эту ориентацию с помощью отображения $\bar{\varphi} : [0, 2\pi] \to B$ равенствами

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Рассмотрим дифференциальную 1 - форму

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Тогда имеем $\varphi^* \omega = dt$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_L \omega = \int\limits_A \varphi^* \omega = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Для проверки корректности определения интеграла $\int\limits_B \omega$ надо доказать, что его величина не зависит от параметризации $\bar{\varphi}$, сохраняющей ориентацию. Напомним, что любые две такие параметризации $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ связаны между собой соотношением $\bar{\psi} = \bar{\varphi} \cdot \bar{\lambda}$, где $\lambda : A \to A_1$ — некоторый диффеоморфизм с положительным якобианом.

Теорема 1. *Пусть параметризации $\bar{\varphi} : A \to B$ и $\bar{\psi} : A_1 \to B$ задают одну и ту же ориентацию поверхности B. Тогда имеем*

$$\int\limits_A \varphi^* \omega = \int\limits_A \psi^* \omega.$$

Доказательство. Дифференциальная форма $\bar{\varphi}^* \omega$ является k-формой в пространстве $\mathbb{R}^k$ той же размерности k, поэтому канонический вид ее таков:

$$\bar{\varphi}^* \omega = \Phi(\bar{t})\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k.$$

Воспользуемся теперь формулой замены переменных:

$$\psi(\bar{u}) = (\bar{\varphi} \cdot \bar{\lambda})(\bar{u}),\ \bar{t} = \bar{\lambda}(\bar{u}).$$

Получим

$$\bar{\psi}^*\omega = (\bar{\varphi}\cdot\bar{\lambda})^*\omega = \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u}))\, d\lambda_1(\bar{u})\wedge\dots\wedge d\lambda_k(\bar{u}) =$$

$$= \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u}))\frac{D(\bar{\lambda})}{D(\bar{u})}\, du_1\wedge\dots\wedge du_k.$$

Так как $\frac{D(\bar{\lambda})}{D(\bar{u})} > 0$ (из условия сохранения ориентации), то по формуле замены переменных в кратном интеграле имеем

$$\int\limits_A \bar{\psi}^*\omega = \int\limits_A (\bar{\varphi}\cdot\bar{\lambda})^*\omega = \int\limits_A \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u}))\frac{D(\bar{\lambda})}{D(\bar{u})}\, du_1\wedge\dots\wedge du_k =$$

$$= \int\limits_A \Phi(\bar{\lambda}(\bar{u}))\frac{D(\bar{\lambda})}{D(\bar{u})}\, du_1\dots du_k = \int\limits_A \Phi(\bar{t})\, dt_1\dots dt_k =$$

$$= \int\limits_A \Phi(\bar{t})\, dt_1\wedge\dots\wedge dt_k = \int\limits_A \bar{\varphi}^*\omega.$$

Теорема 1 доказана.

Следующая теорема является весьма полезным инструментом в различных приложениях поверхностных интегралов. В случае интеграла Римана она решает задачу нахождения подынтегральной функции по ее первообразной.

Теорема 2. *Пусть U — выпуклый измеримый компакт в $\mathbb{R}^n$. Пусть также для любой ориентированной кусочно-гладкой k-мерной поверхности $B \subset U$ существует интеграл второго рода $I(B)$ от непрерывной дифференциальной k-формы ω. Тогда форма ω однозначно определяется по значениям интегралов $I(B)$.*

Доказательство. Пусть форма ω имеет вид

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\!\!\cdots\sum a_{i_1,\dots,i_k}(\bar{x})\, dx_{i_1}\wedge\dots\wedge dx_{i_k}.$$

Пусть $a(\bar{x}) = a_{i_1,\dots,i_k}(\bar{x})$ — любой коэффициент формы ω. Найдем его значение в точке $\bar{x}_0 = (x_{10},\dots,x_{n0}) \in U$. Для этого на k - мерной плоскости $x_i = x_{i0}, i \ne i_1,\dots,i_k$ возьмем ε-окрестность S_ε точки $\bar{x}_0$. Это будет ориентируемая поверхность в $\mathbb{R}^n$. В качестве параметризации ее возьмем переменные $\bar{t} = (t_1,\dots,t_k)$, $t_1 = x_{i1},\dots,t_k = x_{i_k}$. Тогда интеграл $I(S_\epsilon)$ равен

$$\int\limits_{S_\varepsilon}\omega = \int\limits_{S_\epsilon} a(x_{10},\dots,t_1,\dots,x_{n0})\, dt_1\dots dt_k,$$

где последний интеграл является обычным k-кратным интегралом Римана. Отсюда по теореме о среднем имеем

$$a(\bar{x}_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\mu(S_\varepsilon)} \int\limits_{S_\varepsilon} \omega.$$

Теорема 2 доказана.

§ 6. ОПЕРАЦИЯ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В дальнейшем мы всюду будем пользоваться тем, что выражение, т.е. дифференциальную форму $dF(\bar{x})$, записанную в каноническом виде, можно рассматривать и как обычный дифференциал функции $F(\bar{x})$. Приведем теперь определение внешнего дифференциала.

Определение. Дифференциалом (*точнее, внешним дифференциалом*) *дифференциальной k-формы ω называется $k+1$-форма $\omega_1 = d\omega$ вида*

$$d\omega = \sum_{1 \le m_1 < \dots < m_k \le n} \!\!\cdots\! \sum dF_{m_1 \dots m_k}(\bar{x}) \wedge dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_k}.$$

Примеры. 1. Пусть $k = 1$. Тогда

$$d\omega = \sum_{1 \le m \le n} dF_m(\bar{x}) \wedge dx_m = \sum_{1 \le m \le n} \sum_{1 \le r \le n} \frac{\partial F_m}{\partial x_r} dx_r \wedge dx_m =$$

$$= \sum\sum_{1 \le r < m \le n} \left(\frac{\partial F_m}{\partial x_r} - \frac{\partial F_r}{\partial x_m} \right) dx_r \wedge dx_m.$$

2. Пусть $k = n-1 = 2$, $\bar{a} = (P, Q, R)$, $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$. Тогда

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = (\operatorname{div} \bar{a})\, dx \wedge dy \wedge dz.$$

Лемма 1. *Пусть заданы ω_1 — дифференциальная k_1-форма,..., ω_r — дифференциальная k_r-форма. Тогда имеет место равенство*

$$d(\omega) = d(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_r) = \sum_{s=1}^{r} (-1)^{k_1 + \dots + k_s} \omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_s \wedge \dots \omega_r.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, можно ограничиться рассмотрением базисных дифференциальных форм вида

$$\omega_1 = F_1(\bar{x})\,dx_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\sigma(k_1)} = F_1(\bar{x})\omega_{1,0}, \dots,$$

$$\omega_r = F_r(\bar{x})\,dx_{\tau(1)} \wedge \dots \wedge dx_{\tau(k_r)} = F_r(\bar{x})\omega_{r,0},$$

где σ, τ — некоторые подстановки n чисел. По определению имеем

$$d(\omega) = d(F_1(\bar{x}) \dots F_r(\bar{x})) \wedge \omega_{1,0} \wedge \dots \wedge \omega_{r,0} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} (F_1(\bar{x}) \dots dF_s(\bar{x}) \dots F_r(\bar{x})) \wedge \omega_{1,0} \wedge \dots \wedge \omega_{r,0} =$$

$$= \sum_{s=1}^{r} (-1)^{k_1+\dots+k_s} \omega_1 \wedge \dots \wedge d\omega_s \wedge \dots \omega_r.$$

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Справедливо равенство $d^2\omega = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, имеем

$$d^2\omega = d(d\omega) =$$

$$= \sum_{1 \le m_1 <} \dots \sum_{\dots < m_k \le n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 F_{m_1,\dots,m_k}(\bar{x})}{\partial x_s \partial x_r}\, dx_s \wedge dx_r \wedge dx_{m_1} \wedge dx_{m_k} =$$

$$= \sum_{1 \le m_1 <} \dots \sum_{\dots < m_k \le n} \sum\sum_{1 \le s < r \le n} \left(\frac{\partial^2 F_{m_1,\dots,m_k}(\bar{x})}{\partial x_s \partial x_r} - \frac{\partial^2 F_{m_1,\dots,m_k}(\bar{x})}{\partial x_r \partial x_s} \right) \times$$

$$\times dx_s \wedge dx_r \wedge dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_k} = 0.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Шварца о равенстве вторых смешанных производных при условии их непрерывности.

Лемма 2 доказана.

Т е о р е м а. *Пусть $\bar{\varphi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — дважды непрерывно дифференцируемое отображение и ω — гладкая дифференциальная форма. Тогда справедливо равенство*

$$\bar{\varphi}^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, достаточно доказать утверждение теоремы только для дифференциальной формы

$$\omega = F(\bar{x})\,dx_{m_1} \wedge \dots \wedge dx_{m_k}.$$

Из определения дифференциала формы ω и леммы 1 имеем

$$d(\bar{\varphi}^*\omega) = d(F(\bar{\varphi}(\bar{t}))\, d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t})) =$$

$$= d(F(\bar{\varphi}(\bar{t})) \wedge d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t})) +$$

$$+ F(\bar{\varphi}(\bar{t}) \wedge d(d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t})) = A + B.$$

Вновь воспользуемся леммой 1, а затем — леммой 2. Получим

$$B = \sum_{s=1}^{k} d\varphi_{m_1}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d^2\varphi_{m_s}(\bar{t}) \wedge \cdots \wedge d\varphi_{m_k}(\bar{t}) = 0.$$

Далее по определению индуцированной формы имеем

$$A = \bar{\varphi}^*(dF(\bar{x}) \wedge dx_{m_1} \wedge \cdots \wedge dx_{m_k}) = \bar{\varphi}^*(d\omega).$$

Теорема доказана.

§ 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОБЩЕЙ ФОРМУЛЫ СТОКСА

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а. (общая формула Стокса). *Пусть B — кусочно-гладкая ориентированная поверхность размерности k и ориентация ее границы ∂B согласована с ориентацией самой поверхности B, ω — гладкая $k-1$-форма. Тогда справедливо равенство*

$$\int_{\partial B} \omega = \int_{B} d\omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть поверхность B задается отображением $\bar{\varphi} : A \to B$. Тогда из следующей цепочки равенств получаем утверждение теоремы:

$$\int_{\partial B} \omega \overset{(1)}{=} \int_{\partial A} \bar{\varphi}^*\omega \overset{(2)}{=} \int_{A} d(\bar{\varphi}^*\omega) \overset{(3)}{=} \int_{A} \bar{\varphi}^*(d\omega) \overset{(4)}{=} \int_{B} d\omega.$$

В доказательстве нуждается только второе равенство

$$\int_{\partial A} \bar{\varphi}^*\omega = \int_{A} d(\bar{\varphi}^*\omega),$$

так как первое и четвертое равенства следуют из определения поверхностного интеграла второго рода, а третье — из справедливости соотношения $\bar{\varphi}^*(d\omega) = d(\bar{\varphi}^*\omega)$.

Согласно определению $k-1$-формы в k-мерном пространстве и операции дифференцирования имеем

$$\bar{\varphi}^*\omega = \sum_{1\le m_1<\dots<m_{k-1}\le k}\cdots\sum \Phi_{m_1,\dots,m_{k-1}}(t_1,\dots,t_k)\, dt_{m_1}\wedge\dots\wedge dt_{m_{k-1}},$$

$$d(\bar{\varphi}^*\omega) = \sum_{1\le m_1<\dots<m_{k-1}\le k}\cdots\sum \frac{\partial\Phi_{m_1,\dots,m_{k-1}}(t_1,\dots,t_k)}{\partial t_s}\, dt_s\wedge dt_{m_1}\wedge\dots\wedge dt_{m_{k-1}},$$

где $1\le s\le k$, $s\ne m_1,\dots,m_{k-1}$.

Из этого представления в силу линейности интеграла следует, что достаточно доказать равенство $\bar{t} = (t_1,\dots,t_{k-1})$:

$$\int\limits_{\partial A}\Phi(\bar{t},t_k)\,dt_1\wedge\dots\wedge dt_{k-1} = \int\limits_{A}\frac{\partial\Phi(\bar{t},t_k)}{\partial t_k}\,dt_k\wedge dt_1\wedge\dots\wedge dt_{k-1}.$$

Обозначим через D проекцию множества A на гиперплоскость $t_k=0$. В силу выпуклости множества A его можно представить в виде

$$A = \{(\bar{t},t_k) : \bar{t}\in D, f_1(\bar{t})\le t_k\le f_2(\bar{t})\},$$

где $f_1(t_1,\dots,t_{k-1}), f_2(t_1,\dots,t_{k-1})$ — некоторые функции, определенные на множестве D.

Границу множества D можно разбить на три множества:

$$\Pi_1 = \{(\bar{t},t_k) : \bar{t}\in D,\ t_k = f_1(t_1,\dots,t_{k-1})\},$$

$$\Pi_2 = \{(\bar{t},t_k) : \bar{t}\in D,\ t_k = f_2(t_1,\dots,t_{k-1})\},$$

$$\Pi_3 = \{(\bar{t},t_k) : \bar{t}\in \partial D,\ f_1(\bar{t} < t_k < f_2(\bar{t})\}.$$

Ограничимся здесь случаем, когда поверхность Π_3 является кусочно-гладкой ориентированной поверхностью. Она также является цилиндрической, а поверхности Π_1 и Π_2 можно представлять себе как "нижнюю" и "верхнюю" крышки этой цилиндрической поверхности.

Следует отметить, что множество Π_3 может быть и пустым, что, например, имеет место в случае, когда A есть k-мерный шар вида $t_1^2+\dots+t_k^2\le 1$. Тогда, очевидно, поверхности Π_1 и Π_2 являются полусферами вида $t_1^2+\dots+t_k^2 = 1$ с условием $t_k\le 0$ и $t_k\ge 0$ соответственно.

Покажем, что интеграл по поверхности Π_3 равен нулю. Действительно, поскольку Π_3 есть $k-1$-мерная поверхность в пространстве k измерений, то ее можно параметризовать

$$t_1 = t_1(\bar{u}), \ldots, t_{k-1} = t_{k-1}(\bar{u}),\ \bar{u} = (u_1, \ldots, u_{k-1}) \in \pi_3,\ \bar{t}(\pi_3) = \Pi_3.$$

Заметим, что $\bar{t}(\bar{u})$ является диффеоморфизмом.

Предположим, что якобиан отображения $\bar{t} : \pi_3 \to \Pi_3$ в точке $\bar{u} = \bar{u}_0$ не равен нулю, т.е.

$$J(\bar{u}_0) = \frac{D(t_1, \ldots, t_{k-1})}{D(u_1, \ldots, u_{k-1})} \neq 0.$$

Тогда в силу непрерывности функции $J(\bar{u})$ в некоторой окрестности точки $\bar{u} = \bar{u}_0$ она отлична от нуля. Далее, согласно теореме об обратном отображении точка $\bar{t}(\bar{u}_0)$ будет внутренней точкой множества D (проекции множества A на гиперплоскость $t_k = 0$). Но точка $\bar{t}(\bar{u}_0)$ — граничная точка множества D, что невозможно. Следовательно, в любой точке $\bar{u} \in \pi_3$ имеем равенство

$$J(\bar{u}) = \frac{D(t_1, \ldots, t_{k-1})}{D(u_1, \ldots, u_{k-1})} = 0.$$

Используя это, после замены переменных $\bar{t} = \bar{t}(\bar{u})$ в поверхностном интеграле получим

$$\int\limits_{\Pi_3} \Phi(\bar{t}, t_k)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = \int\limits_{\pi_3} \Phi(\bar{t}(\bar{u}), t_k) J(\bar{u})\, du_1 \wedge \cdots \wedge du_{k-1} = 0.$$

Рассмотрим теперь интегралы по поверхностям Π_1 и Π_2. В силу определения ориентации поверхности (см. пример §12) имеем

$$\int\limits_{\Pi_2} \Phi(\bar{t}, t_k)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = (-1)^{k-1} \int\limits_{D} \Phi(\bar{t}, t_k, f_2(\bar{t}))\, dt_1 \ldots dt_{k-1},$$

$$\int\limits_{\Pi_1} \Phi(\bar{t}, t_k)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = (-1)^{k} \int\limits_{D} \Phi(\bar{t}, t_k, f_1(\bar{t}))\, dt_1 \ldots dt_{k-1}.$$

Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$\int\limits_{\partial A} \Phi(\bar{t}, t_k)\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1} = \int\limits_{\Pi_1} + \int\limits_{\Pi_2} =$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{D} (\Phi(\bar t, f_2(\bar t)) - \Phi(\bar t, f_1(\bar t)))\, dt_1 \ldots dt_{k-1} =$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{D} \left(\int\limits_{f_2(\bar t)}^{f_1(\bar t)} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}\, dt_k \right) dt_1 \ldots dt_{k-1} =$$

$$= (-1)^{k-1} \int\limits_{A} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}\, dt_1 \ldots dt_k = (-1)^{k-1} \int\limits_{A} \frac{\partial \Phi}{\partial t_k}\, dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_k =$$

$$= \int\limits_{A} \frac{\partial \Phi(\bar t)}{\partial t_k}\, dt_k \wedge dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_{k-1}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Ограничение на множество Π_3, наложенное при доказательстве последней теоремы, на самом деле не являются существенными. Дело в том, что любое выпуклое тело D в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно рассматривать как бесконечно-гладкий образ другого выпуклого тела $D_0 \subset \mathbb{R}^n$, граница ∂D_0 которого не содержит отрезков прямой, а для такого тела множество Π_3 пусто.

Легко построить какое-либо бесконечно-гладкое в обе стороны отображение φ такое, что $\varphi(D_0) = D$ Ь $\psi(D) = D_0$, причем $\varphi(\psi(\bar x)) = \bar x$ для всех $\bar x \in \mathbb{R}^n$. В качестве соответствующего примера рассмотрим отображение $\psi(\bar x)$, задаваемое равенством

$$\psi(\bar x) = \bar x_0 + (\bar x - \bar x_0)\left(1 + e^{-\delta|\bar x - \bar x_0|^2}\right).$$

Здесь $\bar x_0$ — некоторая фиксированная внутренняя точка тела $D \subset \mathbb{R}^n$, а $\delta > 0$ — вещественная постоянная. Тогда тело D_0 получается как образ D при отображении ψ. Ясно, что обратное отображение φ всегда существует, причем как φ, так и ψ являются бесконечно-гладкими.

С другой стороны, с помощью стандартных вычислений можно показать, что при достаточно малом (в зависимости от отношения минимального и максимального расстояний от точки x_0 до границы ∂D тела D) значении параметра δ тело D_0 будет выпуклым и его граница ∂D_0 не будет содержать отрезков прямой. Учитывая достаточную громоздкость этих выкладок и большой произвол в выборе отображения ψ, проводить их здесь мы не будем, а ограничимся только сделанным замечанием.

Лекция 18

ДОПОЛНЕНИЕ.

§ 1. ПОНЯТИЕ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЛЕММА ОБ ОЦЕНКЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Понятие равномерного распределения значений числовых последовательностей на отрезке ввел в математику Г.Вейль (H.Weyl.*Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins.* Math. Ann.,1916, Bd.77, S.313 – 352). Он заложил основы теории равномерного распределения, которая получила дальнейшее развитие в теории чисел, теории функций, классической механике. Здесь мы докажем критерий равномерного распределения значений числовой последовательности на отрезке, принадлежащий Г.Вейлю.

Пусть $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательность вещественных чисел. Построим последовательность дробных частей $\{x_1\}, \ldots, \{x_n\}, \ldots$. Для простоты изложения в дальнейшем будем считать, что все члены последовательности $\{x_n\}$ находятся на полуинтервале $[0, 1)$. Пусть $F(N) = F(N, \alpha, \beta)$ обозначает количество членов последовательности $\{x_n\}$, таких, что $n \leq N$ и $\alpha \leq \{x_n\} < \beta$, причем $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

Положим

$$D(N) = \sup_{0 \leq \alpha < \beta \leq 1} |N^{-1} F(N, \alpha, \beta) - (\beta - \alpha)|.$$

Величина $D(N)$ называется *отклонением* первых N членов последовательности $\{x_n\}$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется *равномерно распределенной по модулю, равному единице* (р.р. mod 1 или просто р.р.), если $\lim\limits_{N \to \infty} D(N) = 0$.

Для дальнейшего нам будет необходима следующая лемма об оценке сверху абсолютной величины коэффициентов Фурье одной функции.

Лемма. *Пусть задано разложение функции*

$$\psi(x) = \psi_N(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + N^2 \sin^2 \pi x}}$$

в ряд Фурье

$$\psi(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{2\pi i m x}.$$

Тогда при $N \geq 1$ и $m \geq 0$ справедлива оценка

$$|c_m| = |c_{-m}| \leq \frac{4 + \ln N}{\pi N} e^{-m/N}.$$

Доказательство. Очевидно, для коэффициентов Фурье имеет место равенство

$$c_{-m} = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \psi_N(t) e^{2\pi imt}\, dt = \varepsilon \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{e^{2\pi imt}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2 \pi t}}\, dt = \varepsilon K_m,$$

где $\varepsilon = 1/N$.

Рассмотрим в полуполосе $\Pi = \{z|\ \Im z \geq 0,\ |\Re z| \leq \frac{1}{2}\}$ функцию комплексного переменного

$$f(z) = \frac{e^{2\pi imz}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2 \pi z}}.$$

Знаменатель ее обращается в нуль в точке

$$z = ia = i\frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2})}{\pi}.$$

Функция $f(z)$ будет однозначной функцией в области Π с разрезом по лучу $(ia, +i\infty)$.

Рассмотрим произвольное число $b > a > 0$ и построим контур L, состоящий из следующих промежутков вида $L_1 = [-1/2, 1/2]$, $L_2 = [1/2, 1/2 + ib]$, $L_3 = [1/2 + ib, ib]$, $L_4 = [ib, ia]$, $L_5 = [ia, ib]$, $L_6 = [ib, -1/2 + ib]$, $L_7 = [-1/2 + ib, -1/2]$, т.е. построим замкнутый контур $L = \bigcup\limits_{s=1}^{7} L_s$, который обходится в положительном направлении ("против часовой стрелки").

В силу основной теоремы Коши (пример к §8) имеем

$$\int\limits_L f(z)\, dz = 0.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$c_m = \int\limits_{L_1} f(z)\, dz = -\int\limits_{L_2} f(z)\, dz - \cdots - \int\limits_{L_7} f(z)\, dz.$$

В силу периодичности подынтегральной функции $(f(z+1) = f(z))$ имеем

$$\int\limits_{L_2} f(z)\, dz = -\int\limits_{L_7} f(z)\, dz.$$

Далее, поскольку по разным берегам разреза значение квадратного корня от аналитической функции отличаются только знаком, а направления обхода по отрезкам L_4 и L_5 — противоположны, то

$$\int_{L_4} f(z)\,dz = \int_{L_5} f(z)\,dz.$$

Пусть $z = x + ib$, $x \in L_1$. Тогда при $b \to +\infty$ имеет место равномерный предел

$$f(z) = \frac{e^{2\pi imz}}{\sqrt{\varepsilon^2 + \sin^2 \pi z}} \underset{S}{\rightrightarrows} 0.$$

Здесь мы воспользовались теоремой Вейерштрасса, поскольку для некоторой постоянной $c > 0$ справедливо неравенство

$$|f(z)| = |f(x + ib)| \leq ce^{-\pi b(2m+1)}.$$

Следовательно, по теореме о переходе к пределу под знаком собственного интеграла от функции, зависящей от параметра, получим

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{L_3} f(z)\,dz = \lim_{b\to+\infty} \int_{L_6} f(z)\,dz = 0.$$

Таким образом, имеем

$$K_\varepsilon = \int_{L_1} f(z)\,dz = 2 \lim_{b\to+\infty} \int_{L_4} f(z)\,dz = 2 \int_{ia}^{+i\infty} f(z)\,dz.$$

Заметим, что $\sin(\pi it) = i\,\mathrm{sh}\,(\pi t)$. Поэтому интеграл K_ε преобразуется к виду

$$K_\varepsilon = 2i \int_a^{+\infty} \frac{e^{-2\pi mt}}{\sqrt{\varepsilon^2 - \mathrm{sh}^2\, \pi t}}\,dt = 2 \int_a^{+\infty} \frac{e^{-2\pi mt}}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\, \pi t - \varepsilon^2}}\,dt.$$

Очевидно, имеем

$$\pi a = \ln(\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2}), \quad e^{\pi a} = \varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2},$$

$$e^{-\pi a} = -\varepsilon + \sqrt{1 + \varepsilon^2}, \quad \mathrm{sh}\,\pi a = \varepsilon,$$

Выполним в последнем выражении для интеграла K_ε замену переменных вида $x = t - a$. Получим

$$K_\varepsilon = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\pi m(x+a)}}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\, \pi(x + a) - \mathrm{sh}^2\, \pi a}}\,dx.$$

Используя формулы,

$$\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v = 2 \operatorname{sh} \frac{u+v}{2} \operatorname{ch} \frac{u-v}{2}, \quad \operatorname{sh} u - \operatorname{sh} v = 2 \operatorname{ch} \frac{u+v}{2} \operatorname{sh} \frac{u-v}{2},$$

найдем

$$\operatorname{sh}^2 \pi(x+a) - \operatorname{sh}^2 \pi a = \operatorname{sh} \pi(x+2a) \cdot \operatorname{sh} \pi x.$$

Следовательно, интеграл K_ε примет вид

$$K_\varepsilon = 2e^{-2\pi am} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\pi mx}}{\sqrt{\operatorname{sh} \pi(x+2a) \operatorname{sh} \pi x}}\, dx = 2e^{-2\pi am} G_a.$$

Так как при $x \geq 0$ функция $\operatorname{sh} x$ — монотонная и $\operatorname{sh} \pi x \geq \pi x$, то справедливы неравенства

$$G_a \leq I_1 + I_2,\ I_1 = \int_0^{2a} \frac{e^{-2\pi mx}}{\sqrt{\pi x \operatorname{sh} \pi(x+2a)}}\, dx,\ I_2 = \int_{2a}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \pi x}\, dx.$$

Далее, имеем $(\operatorname{sh} 2\pi a = 2\epsilon\sqrt{1+\epsilon^2})$:

$$I_1 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{sh} 2\pi a}} \int_0^{2a} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{8a}{\pi \operatorname{sh} 2\pi a}} \leq \frac{2}{\pi}.$$

После замены переменной $t = e^{\pi x}$ получим

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int_{e^{2\pi a}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1}.$$

В результате замены переменной $u = 1/t$ находим

$$\int_{e^{2\pi a}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1} = \int_0^{e^{-2\pi a}} \frac{du}{1-u^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \pi a}{\operatorname{sh} \pi a} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$G_a \leq \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

Наконец, получаем оценку для коэффициента Фурье

$$|c_m| \le 2\varepsilon \left(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}}{\varepsilon} \right) e^{-m\varepsilon} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{\pi} \left(4 + \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) e^{-m\varepsilon} = \frac{4 + \ln N}{\pi N} e^{-m/N}.$$

Лемма полностью доказана.

Заметим, что в дальнейшем мы могли бы воспользоваться более слабыми оценками коэффициентов Фурье функции $\psi_N(x)$, но приведенная оценка имеет самостоятельный интерес.

§ 2. КРИТЕРИЙ Г. ВЕЙЛЯ

Докажем теперь следующую теорему, которая называется **критерием Г.Вейля** равномерного распределения значений последовательности по модулю, равному единице.

Теорема. *Эквивалентны следующие утверждения:*

1) последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю единица;

2) при любых фиксированных α и $\beta, 0 \le \alpha < \beta < 1$, имеет место соотношение

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F(N,\alpha,\beta)}{N} = \beta - \alpha;$$

3) для любой интегрируемой по Риману функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0,1]$, справедливо соотношение

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,dx;$$

4) для любой непрерывной функции $f(x)$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,dx;$$

5) при любом целом числе $m \ne 0$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n} = 0.$$

Доказательство. Очевидно, из определения имеем, что из первого утверждения теоремы следует второе утверждение. Кроме того, из третьего утверждения следует четвертое утверждение, а из него следует утверждение 5). Остается только доказать, что справедливы импликации: 2) $\Rightarrow$ 3) и 5) $\Rightarrow$ 1).

Докажем, что из утверждения 2) следует утверждение 3). Определим периодическую функцию $g(x)$ с периодом 1 равенством

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \alpha \le x < \beta, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда утверждение 2) можно представить в виде

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} g(x_n) = \int\limits_0^1 g(x)\,dx.$$

Заметим, что если последнее равенство выполняется для нескольких функциий $g_1(x), \ldots, g_k(x)$, то оно выполняется для любой их линейной комбинации $c_1 g_1(x) + \cdots + c_k g_k(x)$ с вещественными коэффициентами $c_1, \ldots, c_k$. Следовательно, это равенство имеет место для любой кусочно-постоянной функции.

Возьмем теперь любую интегрируемую функцию $f(x)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $T : 0 = x_0 < \cdots < x_r = 1$ отрезка $[0, 1]$, что выполняются неравенства

$$s(T) \le \int\limits_0^1 f(x)\,dx \le S(T), \quad S(T) - s(T) < \frac{\varepsilon}{3},$$

где $s(T)$ и $S(T)$ — соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу,

$$s(T) = \sum_{t=1}^{r} m_t \Delta x_t, \; S(T) = \sum_{t=1}^{r} M_t \Delta x_t,$$

$$m_t = \inf_{x\in\Delta_k} f(x), M_t = \sup_{x\in\Delta_k} f(x).$$

Суммы Дарбу $s(T)$ и $S(T)$ можно представить также в виде

$$s(T) = \int\limits_0^1 h(x)\,dx, \; S(T) = \int\limits_0^1 H(x)\,dx,$$

где

$$h(x) = m_t, H(x) = M_t, \text{если} \quad x \in \Delta_t = [x_{t-1}, x_t), t = 1, \ldots, r.$$

Так как $h(x)$ и $H(x)$ — кусочно-постоянные функции, то существует число N_0 такое, что для всех $N > N_0$ выполняются неравенства

$$|N^{-1}\sum_{n=1}^{N} h(x_n) - \int_0^1 h(x)\,dx| < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|N^{-1}\sum_{n=1}^{N} H(x_n) - \int_0^1 H(x)\,dx| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, имеем

$$s(T) - \frac{\varepsilon}{3} < N^{-1}\sum_{n=1}^{N} h(x_n) \le N^{-1}\sum_{n=1}^{N} H(x_n) < S(T) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но поскольку для всех точек $x \in [0,1]$ выполняется неравенство $h(x) \le f(x) \le H(x)$, будем иметь

$$N^{-1}\sum_{n=1}^{N} h(x_n) \le N^{-1}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \le N^{-1}\sum_{n=1}^{N} H(x_n).$$

Поэтому из предыдущего неравенства получим

$$s(T) - \frac{\varepsilon}{3} < N^{-1}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) < S(T) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, имеем

$$|N^{-1}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_0^1 f(x)\,dx| < S(T) - s(T) + \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

А это и означает, что выполняется утверждение 3).

Докажем теперь, что из 5) следует 1). Надо доказать, что

$$\lim_{Q\to\infty} D(Q) = 0.$$

Для этого преобразуем функцию

$$F(Q,\alpha,\beta) = \sum_{n\le Q} g(x_n),$$

где

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \alpha \le x < \beta, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Заметим, что функцию $g(x)$ можно представить в виде

$$g(x) = \rho(\beta - x) - \rho(\alpha - x) + (\beta - \alpha),$$

где $\rho(x) = 1/2 - \{x\}$. Рассмотрим далее периодическую функцию $g_0(x)$, с периодом 1,

$$g_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \alpha < x < \beta, \\ 1/2, & \text{если} \quad x = \alpha, x = \beta, \\ 0, & \text{если} \quad 0 \le x < \alpha, \beta < x < 1. \end{cases}$$

Она совпадает с функцией $g(x)$ во всех точках, кроме точек $x = \alpha$ и $x = \beta$, в которых она принимает значение, равное $1/2$. Эту функцию можно представить в виде

$$g_0(x) = \rho_0(\beta - x) - \rho_0(\alpha - x) + \beta - \alpha,$$

где

$$\rho_0(x) = \begin{cases} 1/2 - \{x\}, & \text{если} \quad x \quad \text{— нецелое число,} \\ 0, & \text{если} \quad x \quad \text{— целое число.} \end{cases}$$

Ранее (см. лекцию 23, ч. III) для любого $N \ge 1$ мы получили неравенство

$$|\rho_0(x) - \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin 2\pi n x}{\pi n}| \le \psi_N(x),$$

где $\psi_N(x) = \frac{4}{\sqrt{1+N^2 \sin^2 \pi x}}$. Заметим, что последнее неравенство остается справедливым, если значение функции ρ_0 в целых точках, равное нулю, заменить на значение $1/2$ функции $\rho(x) = 1/2 - \{x\}$ в тех же точках.

Разложим функцию $\psi_N(x)$ в ряд Фурье. По лемме его коэффициенты Фурье c_m оцениваются следующим образом

$$|c_m| \le (\pi N)^{-1}(4 + \ln N)e^{-|m|/N}.$$

Таким образом

$$g(x) = \beta - \alpha + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi n}(\sin 2\pi n(\beta - x) - \sin 2\pi n(\alpha - x)) + R_N,$$

где
$$|R_N| \le \psi_N(\beta - x) + \psi_N(\alpha - x).$$
Положим $M = [N \ln N] + 1$. Тогда функцию $\psi_N(x)$ можно представить в виде
$$\psi_N(x) = \sum_{0<|m|\le M} c_m e^{2\pi i m x} + O\left(\frac{\ln M}{M}\right).$$

Теперь преобразуем функцию $F(Q;\alpha,\beta)$, исходя из соотношений для функции $g(x)$. Получим
$$|Q^{-1}F(Q;\alpha,\beta) - (\beta-\alpha)| = |Q^{-1}\sum_{n\le Q} g(x_n) - (\beta-\alpha)| \le$$
$$\le Q^{-1}\sum_{1\le|m|\le M}(|c_m| + \frac{1}{2\pi|m|})(|T_m(\beta)| + |T_m(\alpha)|) + \frac{A\ln N}{N},$$
где $A > 0$ — некоторая постоянная,
$$T_m(\beta) = \sum_{n\le Q} e^{2\pi i m(\beta - x_n)}.$$

Заметим, что для любого вещественного числа β справедливо равенство
$$|T_m(\beta)| = |T_m(0)| = T_m.$$

Возьмем любое число $\epsilon > 0$. Выберем наименьшее число N из условия
$$\frac{A\ln N}{N} < \frac{\varepsilon}{2},$$
т.е. возьмем
$$N = \left[\frac{2A}{\varepsilon}\ln\frac{2A}{\varepsilon}\right] + 1.$$

Так как $\lim\limits_{Q\to\infty} Q^{-1}T_m = 0$, то существует число Q_0 такое, что для всех $Q > Q_0$ и для всех m, $1 \le m \le M = [N\log N] + 1$ выполняется неравенство
$$|Q^{-1}T_m| \le \frac{\pi\varepsilon}{4(1+\ln N)\ln N}.$$

Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ мы нашли число Q_0 такое, что для всех $Q > Q_0$ справедливо неравенство
$$D(Q) = \sup_{0\le\alpha<\beta<1} |Q^{-1}F(Q;\alpha,\beta) - (\beta-\alpha)| < \varepsilon.$$

Это означает, что $\lim\limits_{N\to\infty} D(Q) = 0$.

Теорема доказана полностью.

Примеры. **1.** Пусть α и β — вещественные числа и α — иррациональное число. Тогда последовательность $\{\alpha n+\beta\}$ равномерно распределена по модулю 1.

Действительно, при любом фиксированном целом числе m, отличном от нуля, имеем

$$\sigma_N = |N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m(\alpha n+\beta)}| \leq \frac{1}{N|\sin \pi m\alpha|}.$$

Так как α — иррациональное число, то $\sin \pi m\alpha \neq 0$. Поэтому $\sigma_N \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, согласно критерию Г.Вейля последовательность $\{\alpha n+\beta\}$ равномерно распределена по модулю 1.

2. Пусть α — иррациональное число и $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \to \alpha$ при $n \to \infty$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1. В частности, последовательность $x_n = \alpha n + \sqrt{n}$ равномерно распределена по модулю 1.

Положим $x_{n+1} - x_n = \alpha + y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Рассмотрим тригонометрическую сумму

$$S_N = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n}.$$

Тогда имеем

$$S_N e^{2\pi i m\alpha} = N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m(x_{n+1}-y_n)} =$$

$$= N^{-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_{n+1}} + r_N,$$

где

$$r_N = N^{-1}\sum_{n=1}^{N}\left(e^{2\pi i m(x_{n+1}-y_n)} - e^{2\pi i m x_{n+1}}\right).$$

Отсюда получим

$$S_N(1 - e^{2\pi i m\alpha}) = r_N + N^{-1}(e^{2\pi i m x_{N+1}} - e^{2\pi i m x_1}).$$

Правая часть последнего равенства стремится к 0 при $N \to \infty$. Действительно, имеем

$$|r_N| \leq N^{-1}\sum_{n=1}^{N}|e^{-2\pi i m y_n} - 1| = \frac{2}{N}\sum_{n=1}^{N}|\sin \pi m y_n| \leq 2\pi|m|N^{-1}\sum_{n=1}^{N}|y_n|.$$

Воспользуемся тем, что $\lim_{n\to\infty} |y_n| = 0$. Получаем

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1}\sum_{n=1}^{N} |y_n| = 0.$$

Поэтому имеем $\lim_{N\to\infty} r_N = 0$.

Так как $1 - e^{2\pi i m\alpha} \neq 0$ (ввиду иррациональности числа α), то $\lim_{N\to\infty} S_N = 0$, а это и означает, что последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1.

3. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность чисел Фибоначчи: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ при $n \geq 2$. Тогда последовательность $\{\ln F_n\}$ равномерно распределена по модулю 1.

Действительно, для F_n имеет место формула

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Отсюда получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha.$$

Следовательно, при $n\to\infty$ имеем, что

$$\ln F_{n+1} - \ln F_n \to \ln\alpha,$$

поскольку число $\ln\alpha$ является иррациональным.

Значит, в силу утверждения примера 2 последовательность $\{\ln F_n\}$ равномерно распределена по модулю 1.

4. Пусть $\lim_{x\to\infty} f'(x) = \alpha$ — иррациональное число. Тогда последовательность $\{f(n)\}$ равномерно распределена по модулю 1.

В самом деле, из теоремы Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$\lim_{n\to\infty}\Delta f(n) = \alpha.$$

Отсюда, используя утверждение примера 2, получим, что $\{f(n)\}$ равномерно распределена по модулю 1.

Прежде чем рассматривать следующий пример, докажем неравенство Г.Вейля - ван дер Корпута.

Лемма. *Пусть $u_1,\ldots,u_N$ — любые комплексные числа, H — натуральное число, $1\leq H\leq N$. Тогда справедливо неравенство*

$$H^2\left|\sum_{1\leq n\leq N} u_n\right|^2 \leq H(N+H-1)\sum_{1\leq n\leq N}|u_n|^2 +$$

$$+2(N+H-1)\sum_{h=1}^{H-1}(H-h)\left|\sum_{1\le n\le N-h}u_n\bar{u}_{n+h}\right|.$$

Здесь $\bar{u}$ обозначает число, комплексно сопряженное к числу u.

Доказательство. Для удобства рассуждений определим числа u_n для всех целых значений n следующим образом: $u_n=0$ при $n\le 0$ и при $n>N$. Тогда имеет место равенство

$$H\sum_{n=1}^{N}u_n=\sum_{n=1}^{N+H-1}\sum_{m=0}^{H-1}u_{n-m}.$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат, и, пользуясь неравенством Коши:

$$\left|\sum a_\nu b_\nu\right|^2\le\sum|a_\nu|^2\sum|b_\nu|^2,$$

получим

$$H^2\left|\sum_{n=1}^{N}u_n\right|^2\le(N+H-1)W,$$

где

$$W=\sum_{n=1}^{N+H-1}\left|\sum_{m=0}^{H-1}u_{n-m}\right|^2.$$

Преобразуем сумму W. Для этого выделим сумму “диагональных” членов W_1 и сумму “недиагональных” членов W_2. Имеем

$$W=\sum_{m=0}^{H-1}\sum_{k=0}^{H-1}\sum_{n=1}^{N+H-1}u_{n-m}\bar{u}_{n-k}=W_1+W_2,$$

где

$$W_1=\sum_{m=0}^{H-1}\left|\sum_{n=1}^{N+H-1}u_{n-m}\right|^2,$$

$$W_2=\sum\sum_{0\le m<k\le H-1}\sum_{n=1}^{N+H-1}\left(u_{n-m}\bar{u}_{n-k}+\bar{u}_{n-m}u_{n-k}\right).$$

Очевидно, справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{N+H-1}u_{n-m}=\sum_{n=1}^{N}u_n,$$

поскольку $u_n = 0$ при $n \le 0$ и при $n > N$. Поэтому

$$W_1 = H \left| \sum_{n=1}^{N} u_n \right|^2.$$

Преобразуем сумму W_2. Для этого обозначим $n-m=l, n-k=l+h$. Получим

$$W_2 = \sum_{m=0}^{H-1} \sum_{h=1}^{H-m-1} \sum_{l=1}^{N-h} (u_l \bar{u}_{l+h} + \bar{u}_l u_{l+h}).$$

Меняя порядок суммирования по h и по m в сумме W_2, и, переходя к неравенствам, имеем

$$|W_2| \le 2 \sum_{h=1}^{H-1} \sum_{m=0}^{H-h-1} \left| \sum_{l=1}^{N-h} u_l u_{l+h} \right| = 2 \sum_{h=1}^{H-1} (H-h-1) \left| \sum_{n=1}^{N-h} u_n u_{n+h} \right|$$

Лемма доказана.

5. Пусть для любого фиксированного натурального числа h последовательность $\{x_{n+h} - x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1. Тогда $\{x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1.

Зафиксируем целое число m, отличное от нуля, и натуральное число H. По неравенству Г.Вейля – ван дер Корпута имеем

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n} \right|^2 \le \frac{H+N-1}{HN} +$$

$$+ \sum_{h=1}^{H-1} \frac{(H+N-1)(H-h)}{H^2 N} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i m (x_{n+h} - x_n)} \right|.$$

При любом фиксированном $h \ge 1$ последовательность $\{x_{n+h} - x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1, следовательно, по критерию Г.Вейля при $N \to \infty$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i m (x_{n+h} - x_n)} \to 0.$$

Устремляя N к бесконечности в предыдущем неравенстве, получим

$$\varlimsup_{N \to \infty} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n} \right|^2 \le \frac{1}{H}.$$

В силу того, что последнее неравенство имеет место для сколь угодно больших H, имеем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m x_n} = 0,$$

а это и означает, что $\{x_n\}$ р.р. mod 1.

6. Пусть $k \geq 1$ — некоторое фиксированное число. Пусть также предел

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^k x_n = \alpha$$

является иррациональным числом. Тогда последовательность $\{x_n\}$ — равномерно распределена по модулю 1.

Доказательство утверждения получается по индукции по параметру k. При $k = 1$ оно совпадает с утверждением примера 2. Предположим, что это утверждение верно при $k = m$. Докажем его при $k = m + 1$. Имеем

$$\Delta_h(\Delta^m x_n) = \Delta^m x_{n+h} - \Delta^m x_n =$$

$$= \Delta^{m+1} x_n + \Delta^{m+1} x_{n+1} + \cdots + \Delta^{m+1} x_{n+h-1}.$$

Отсюда при фиксированном $h \geq 1$ и при $n \to \infty$ получим

$$\Delta_h(\Delta^m x_n) \to h\alpha,$$

причем $h\alpha$ — также иррациональное число.

Заметим теперь, что

$$\Delta_h(\Delta^m x_n) = \Delta^m(\Delta_h x_n).$$

В силу предположения индукции, примененного к последовательности $\{\Delta_h x_n\}$, имеем, что последовательность $\{\Delta_h x_n\}$ равномерно распределена по модулю 1 при любом фиксированном $h \geq 1$.

Следовательно, из утверждения примера 5 имеем, что последовательность $\{x_n\}$ — равномерно распределена по модулю 1. В частности, отсюда следует, что последовательность значений многочлена $f(n)$ со старшим коэффициентом, являющимся иррациональным числом, будет равномерно распределена по модулю 1.

Примерные вопросы и задачи к коллоквиумам и экзаменам
Семестр I, коллоквиум №1

1. Множества. Операции над множествами. Декартово произведение. Отображения, функции. Взаимно - однозначное соответствие. Обратная функция.

2. Эквивалентность множеств. Счётные множества. Счётность множества рациональных чисел.

3. Теорема Г.Кантора о неэквивалентности множества и множества всех его подмножеств.

4. Множество мощности континуум. Несчётность континуума.

5. Иррациональность квадратного корня из двух. Десятичная запись вещественного числа. Свойства вещественных чисел. Аксиома Архимеда.

6. Теорема о существовании точной верхней грани у ограниченного сверху числового множества.

7. Лемма об отделимости множеств. Лемма о системе вложенных отрезков. Лемма о последовательности стягивающихся отрезков.

8. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности и их свойства.

9. Неравенство Бернулли и бином Ньютона.

10. Сходящиеся последовательности и их арифметические свойства.

11. Предельный переход в неравенствах.

12. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса.

13. Число "e" и его иррациональность. Постоянная Эйлера.

14. Теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании частичного предела ограниченной числовой последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.

15. Критерий Коши сходимости последовательности.

16. Теорема Штольца. Предел последовательности средних арифметических членов сходящейся последовательности. Существование решения уравнения И.Кеплера.

17. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии. Итерационная формула Герона. Предельные соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1, a > 0; \quad \lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1.$$

Задачи к коллоквиуму

1. Доказать, что $[a,b] \sim (a,b)$, $[a,b] \sim [a,b)$.

2. $\sup A = -\inf(-A)$, $\sup A \cup B = \max(\sup A, \sup B)$.

3. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$, где k — постоянная.

б). $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a$, $a > 0$.

4. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+\dots+x_n}{n} = +\infty$.

5. Пусть $p_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} (p_1 \dots p_n)^{1/n} = p$.

6. Исходя из $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$ доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n!)^{1/n}} = e$.

7. Доказать, что последовательность $a_n = (1+1/n)^{n+p}$ строго убывает тогда и только тогда, когда $p \geq 1/2$.

8. Для любого рационального числа r с условием $|r| < 1$ справедливо равенство $1 + r \leq e^r \leq 1 + \frac{r}{1-r}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots \frac{1}{2n}\right) = \ln 2$.

10. Пусть x_n — последовательность с ограниченным изменением, т.е. существует $C > 0$, такое, что для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\sum_{k=1}^{n-1}|x_{k+1} - x_k| < c$. Тогда последовательность x_n сходится.

11. Пусть $0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n$. Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$.

12. а) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n + \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n$, если последние пределы существуют.

б). Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n = b$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_nb_n = ab$.

в). $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-a_n)$.

13. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = +\infty$. Тогда существует $\min\limits_{n\in\mathbb{N}}a_n$.

14. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$. Тогда последовательность $\{a_n\}$ имеет либо наибольший, либо наименьший элемент, либо и тот и другой.

15. Пусть $s_n = a_1 + \cdots + a_n \to +\infty$, $a_k > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$. Тогда множество предельных точек дробных частей $\{s_n\}$ совпадает с отрезком $[0,1]$.

16. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = 0$ и не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$, и пусть $l = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}s_n$, $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}s_n$. Тогда последовательность s_n расположена всюду плотно на отрезке $[l, L]$.

17. а) Пусть $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$. Тогда существует бесконечно много номеров n, таких, что $a_n > \max(a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots)$.

б) Пусть $a_n > 0$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n = 0$. Тогда существует бесконечно много номеров n, таких, что $a_n < \min(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$.

Семестр I, коллоквиум №2

1. Предел функции в точке. Функции, бесконечно малые в точке. Финальная ограниченность функций, имеющих предел в точке. Арифметические операции над функциями, имеющими предел. Свойство монотонности предела функции.

2. Критерий Коши существования предела функции по базе множеств.

3. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне.

4. Теоремы о пределе сложной функции по базам множеств.

5. Непрерывность функции в точке. Односторонняя непрерывность. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность синуса и показательной функции.

6. Замечательные пределы.

7. Разрывы функции в точке и их классификация. Разрывы монотонных функций.

8. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема о непрерывности обратной функции. Непрерывность элементарных функций.

Непрерывность уравнения Кеплера.

9. Теоремы Коши о промежуточных значениях функций, непрерывных на отрезке. Теоремы Вейерштрасса об ограниченности и о достижении экстремальных значений функциями, непрерывными на отрезке.

10. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции на отрезке. Свойства открытых и замкнутых множеств на числовой оси.

11. Лемма Бореля о конечном покрытии компакта открытыми множествами. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции на компакте.

12. Понятия дифференциала и производной функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Односторонние производные. Связь дифференцируемости и непрерывности функции.

13. Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциремость решения уравнения Кеплера.

14. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производные элементарных функций.

15. Производные и дифференциалы высших порядков. Формулы Лейбница и Валле Пуссена.

16. Теорема Дарбу о возрастании функции в точке. Теорема Ролля о нуле производной. Теоремы Коши и Лагранжа о конечных приращениях.

17. Теорема Ферма об экстремуме функции. Теорема Дарбу о промежуточном значении производной. Теорема о точках разрыва производной на интервале.

Задачи к коллоквиуму

1. Доказать, что а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0$ $(a>1,\ n>0)$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0$ $(a>1,\ \varepsilon>0)$.

2. Пусть функция $f(x)$ ограничена на любом интервале $(1,b)$, $b>1$. Тогда а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)}$ $(f(x)\geq C>0)$.

3. Пусть функция $f(x)$ ограничена на любом интервале $(1,b)$, $b>1$, и пусть $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$.

4. Пусть при $x>1$ задана последовательность вещественнозначных функций $f_1(x),f_2(x),\ldots,f_n(x),\ldots$. Тогда найдется функция $f(x)$, растущая быстрее любой из этих функций при $x\to+\infty$.

5. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда функции

$$f_c(x)=\begin{cases}-c, & \text{если } f(x)<-c,\\ f(x), & \text{если } |f(x)|<c,\\ c, & \text{если } f(x)>c,\end{cases}$$

где $c>0$ — любое вещественное число,

$$m(x)=\inf_{a\leq y<x}f(y),\quad M(x)=\sup_{a\leq y<x}f(y),$$

также непрерывны.

6. Пусть $f(x)$ непрерывна и ограничена на интервале $(a,+\infty)$. Тогда для любого числа T найдется последовательность $x_n \to +\infty$, такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x_n+T)-f(x_n))=0$.

7. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Тогда существует точка $\xi\in(a,b)$, такая, что $f(\xi)=\frac{f(x_0)+\cdots+f(x_n)}{n+1}$.

8. Для того, чтобы функцию $f(x)$, непрерывную на конечном интервале (a,b), можно было продолжить непрерывным образом на отрезок $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на интервале (a,b).

9. Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, непрерывна хотя бы в одной точке, периодична и отлична от постоянной. Тогда она имеет наименьший положительный период.

10. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси, отлична от постоянной и удовлетворяет функциональному уравнению $f(x+y)=f(x)f(y)$. Тогда $f(x)=a^x$, где $a=f(1)$. В этой задаче условие непрерывности можно заменить на условие ограниченности функции на любом интервале $(0,\alpha)$.

11. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$$

бесконечно дифференцируема при $x=0$.

12. Привести пример функции, определенной на всей числовой оси, непрерывной и разрывной почти всюду на ней.

13. Пусть уравнение $x^3+px+q=0$, $p,q\in\mathbb{R}$ имеет три различных вещественных корня. Тогда $p<0$.

14. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $(n-1)$-го порядка на интервале (a,b), n раз дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и справедливы равенства
$f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)\quad(a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b)$.
Тогда существует точка $\xi\in(a,b)$, такая, что $f^{(n)}(\xi)=0$.

15. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[1,+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$. И наоборот, если $f(x)=o(x)$, то $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$.

16. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$, $f(a)<0$ и при некотором положительном k для всех $x>a$ выполняется неравенство $f'(x)>.k$ Тогда уравнение $f(x)=0$ имеет единственный корень в интервале $(a,\ a-f(a)/k)$.

17. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы n раз при $x\geq x_0$, пусть также
$f(x_0)=g(x_0)$, $f^{(k)}(x_0)=g^{(k)}(x_0)$ при $k=1,\ldots,n-1$ и $f^{(n)}(x)>g^{(n)}(x)$ при всех $x>x_0$. Тогда при $x>x_0$ справедливо неравенство $f(x)>g(x)$.

Семестр II, коллоквиум

1. Критерий Римана интегрируемости функции на отрезке

2. Эквивалентность трех условий интегрируемости функции по Риману. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману.

3. Интеграл Римана как предел по базе. Классы интегрируемых функций.

4. Основные свойства определенного интеграла. Аддитивность интеграла.

5. Интеграл как функция верхнего (нижнего) предела интегрирования. Производная интеграла.

6. Теорема Ньютона - Лейбница. Формулы суммирования Эйлера и Абеля.

7. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.

8. Первая и вторая теоремы о среднем значении.

9. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

10. Неравенства, содержащие интегралы.

11. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

12. Определение несобственного интеграла. Критерий Коши и достаточное условие сходимости несобственных интегралов.

13. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Специальные признаки сходимости.

14. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в несобственном интеграле.

15. Кривые в многомерном пространстве. Теорема о длине дуги кривой.

16. Площадь плоской фигуры и объем пространственного тела. Определение меры Жордана.

17. Критерий измеримости множества по Жордану.

18. Свойства меры Жордана. Измеримость спрямляемой кривой.

19. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.

20. Определение и свойства меры Лебега. Интеграл Лебега. Интеграл Стильтьеса.

Задачи к коллоквиуму

1. Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда точки непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ образуют всюду плотное множество.

2. Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда для выполнения равенства $\int_a^b f^2(x)\,dx = 0$ необходимо и достаточно, чтобы $f(x) = 0$ во всех точках непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

3. Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда функция $f(x)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{h\to 0} \int\limits_a^b |f(x+h) - f(x)|\,dx = 0$.

4. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

5. Пусть $f(x) \in C[0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx$.

6. Пусть $f(x)$ непрерывная периодическая функция с периодом T. Тогда функцию
$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ можно представить в виде суммы линейной функции и периодической функции с периодом T.

7. Пусть $f(x)$ — многочлен степени большей 1. Тогда $\int\limits_0^{\infty} \sin(f(x))\,dx$ сходится.

8. Пусть $f'(x)$ — монотонна и $|f'(x)| \geq A$ на $[a,b]$. Тогда имеем $\left|\int\limits_a^b \sin(f(x))\,dx\right| \leq \frac{2}{A}$.

9. Пусть $f''(x)$ — непрерывна и $|f''(x)| \geq A$ на $[a,b]$. Тогда имеем $\left|\int\limits_a^b \sin(f(x))\,dx\right| \leq \frac{4}{\sqrt{A}}$.

10. Пусть функция $f(x)$ монотонна на интервале $(0,a)$ и существует интеграл $\int\limits_0^a x^p f(x)\,dx$. Тогда $\lim\limits_{x\to+0} x^{p+1}f(x) = 0$.

11. Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin nx\,dx = 0$.

12. Пусть $f(x) \in R[a,b]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)|\sin nx|\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

13. Пусть $f(x) \in R[0,1]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum\limits_{\nu=1}^{[n/2]} f(\frac{2\nu-1}{n}) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

14. Пусть $f(x) \in R[0,1]$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(1/n)-f(2/n)+\cdots+(-1)^n f((n-1)/n)}{n} = 0$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}\right)^{2/(n(n+1))} = e$.

16. Доказать формулу Валлиса $\pi = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\frac{1}{n}$, интегрируя по отрезку $[0,\pi/2]$ неравенство $\sin^{2n+1}x \leq \sin^{2n}x \leq \sin^{2n-1}x$.

17. Пусть функция $f(x)$ ограничена. Для того чтобы $f \in R[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ множество точек отрезка $[a,b]$, в которых $f(x)$ имеет колебание больше чем ε, можно покрыть конечным числом интервалов, сумма длин которых меньше δ (Критерий Дюбуа-Реймона).

18. Пусть $f,g \in R[a,b]$. Тогда $\max(f,g) \in R[a,b]$ и $\min(f,g) \in R[a,b]$.

19. Пусть $a(t), b(t) \in C[a,b]$ и $\int\limits_a^b (a(t)x'(t) + b(t)x(t))\,dt = 0\ \forall x(t) \in C^1[a,b]$, $x(a) = x(b) = 0$. Тогда функция $a(t)$ дифференцируема и $a'(t) = b(t)$.

20. При $s > 1$ имеем $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s} = s\int\limits_1^{\infty}\frac{\rho(x)}{x^{s+1}}\,dx + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}$, $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$.

21. $\lim\limits_{s\to1+}\left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1}\right) = \gamma$.

22. Пусть $f(x) > 0$ и не убывает на $[1,+\infty)$, и пусть при $x \to +\infty$ справедливо соотношение $\int\limits_1^x \frac{f(u)}{u}\,du \sim x$. Тогда имеем $f(x) \sim x$ при $x \to +\infty$.

23. Пусть $f(x) \geq 0$ на $[0,+\infty)$, и пусть при $\delta \to 0+$ справедливо равенство $\int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-\delta t}\,dt \sim \frac{1}{\delta}$. Тогда при $T \to +\infty$ имеем $\int\limits_0^T f(t\,dt) \sim T$.

24. Пусть $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$ и $f \in R[a,b]$. Тогда справедливо равенство
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int\limits_a^b f^n(x)\,dx\right)^{1/n} = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Семестр II, экзамен

1. Критерий Римана интегрируемости функции на отрезке

2. Эквивалентность трех условий интегрируемости функции по Риману. Специальный критерий интегрируемости функции по Риману.

3. Интеграл Римана как предел по базе. Классы интегрируемых функций.

4. Основные свойства определенного интеграла. Аддитивность интеграла.

5. Интеграл как функция верхнего (нижнего) предела интегрирования. Производная интеграла.

6. Теорема Ньютона - Лейбница. Формулы суммирования Эйлера и Абеля.

7. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.

8. Первая и вторая теоремы о среднем значении.

9. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

10. Неравенства, содержащие интегралы.

11. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

12. Определение несобственного интеграла. Критерий Коши и достаточное условие сходимости несобственных интегралов.

13. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Специальные признаки сходимости.

14. Формулы замены переменной и интегрирования по частям в несобственном интеграле.

15. Кривые в многомерном пространстве. Теорема о длине дуги кривой.

16. Площадь плоской фигуры и объем пространственного тела. Определение меры Жордана.

17. Критерий измеримости множества по Жордану.

18. Свойства меры Жордана. Измеримость спрямляемой кривой.

19. Связь между интегрируемостью функции по Риману и измеримостью по Жордану ее криволинейной трапеции.

20. Непрерывные функции в $\mathbb{R}^n$. Дифференцируемые функции в $\mathbb{R}^n$. Достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

21. Теорема о дифференцировании сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила дифференцирования. Производная по направлению. Градиент. Геометрический смысл дифференциала.

22. Частные производные высших порядков. Теоремы о равенстве смешанных производных второго порядка.

23. Дифференциалы высших порядков. Достаточное условие дифференцируемости. Формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.

24. Приложение формулы Тейлора. Локальный экстремум функции многих переменных. Достаточное условие экстремума.

25. Неявные функции. Теорема о неявной функции.

26. Система неявных функций. Теорема теорема о системе неявных функций. Теорема об обратном отображении.

27. Условный экстремум функции многих переменных. Необходимое условие условного экстремума. Метод множителей Лагранжа.

Семестр III, экзамен

1. Сходимость числового ряда. Гармонический ряд. Формулировка критерия Коши. Общий член и остаток ряда.

2. Признаки сходимости рядов (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Куммера и Раабе). Интегральный признак Коши – Маклорена. Сходимость ряда дзета-функции Римана.

3. Признаки сходимости Лейбница, Абеля и Дирихле для произвольных числовых рядов.

4. Абсолютная и условная сходимость рядов. Перестановки членов абсолютно сходящегося ряда.

5. Теорема Римана о перестановках членов в условно сходящихся рядах.

6. Теорема о произведении абсолютно сходящихся рядов. Теорема Мертенса о произведении рядов.

7. Теоремы о сходимости двойного и повторных числовых рядов.

8. Равномерная сходимость функциональных рядов. Непрерывность суммы равномерно сходящегося функционального ряда. Критерий Коши и признак Вейерштрасса для равномерной сходимости функционального ряда.

9. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости ряда.

10. Теорема Дини о равномерной сходимости функционального ряда.

11. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

12. Теорема о двойном и повторных пределах по базам множеств.

13. Степенные ряды. Радиус сходимости. Теорема Коши Адамара. Теорема Абеля о непрерывности суммы ряда на отрезке.

14. Бесконечные произведения. Признак абсолютной сходимости. Выражение гамма-функции в виде бесконечного произведения, формула Эйлера и функциональное уравнение для гамма-функции.

15. Непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра. Правило Лейбница. Теорема о равенстве повторных интегралов.

16. Признаки Вейерштрасса, Абеля и Дирихле для равномерной сходимости несобственных интегралов.

17. Теоремы о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости несобственных интегралов.

18. Теорема о повторных интегралах с бесконечными пределами. Вычисление интеграла Дирихле.

19. Интегральное представление для гамма-функции Эйлера. Формула дополнения. Формула Стирлинга.

20. Теорема о приближении функции Бернулли тригонометрическим многочленом.

21. Неравенство Бесселя для строго регулярной функции. Полнота замкнутой ортонормированной системы.

22. Теорема о замкнутости тригонометрической системы функций.

23. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье для строго кусочно-гладкой функции.

24. Ядро Дирихле и интегральное представление частичной суммы ряда Фурье. Принцип локализации Римана.

25. Признак Дини для сходимости ряда Фурье. Признаки Липшица, Жордана и Дирихле.

26. Разложение котангенса на простейшие дроби. Представление синуса в виде бесконечного произведения.

27. Ядро Фейера. Аппроксимационная теорема Вейерштрасса для тригонометрических и алгебраических многочленов.

28. Методы Лапласа и стационарной фазы.

Семестр IV, экзамен

1. Двойной интеграл Римана как предел по базе. Критерий Римана интегрируемости функции от двух переменных по прямоугольнику.

2. Эквивалентность трех формулировок критерия существования двойного интеграла по прямоугольнику. Специальный критерий интегрируемости функции двух переменных по прямоугольнику, связанный с равномерными разбиениями.

3. Критерий измеримости по Жордану цилиндрической криволинейной фигуры.

4. Эквивалентность двух определений — обобщенного и через характеристическую функцию множества, — двойного интеграла по ограниченной области, измеримой по Жордану.

5. Критерий измеримости по Жордану плоского множества.

6. Основные свойства двойного интеграла (линейность, интегрирование неравенств, теорема о среднем, аддитивность). Сведение двойного интеграла к повторному.

7. Интегрируемость функции двух переменных: а) непрерывной на прямоугольнике, б) непрерывной и ограниченной на множестве, измеримом по Жордану.

8. Теорема об оценке погрешности при замене приращения гладкого отображения на его дифференциал на компактном выпуклом множестве.

9. Лемма о площади образа выпуклого множества при гладком отображении. Замена переменных в двойном интеграле.

10. Критерий Лебега интегрируемости функции двух переменных по Риману.

11. Несобственные интегралы первого и второго рода. Критерий сходимости и признак сравнения для несобственного интеграла первого рода от неотрицательной функции.

12. Площадь поверхности. Выражение площади поверхности через двойной интеграл.

13. Свойства криволинейных интегралов первого и второго рода. Сведение криволинейного интеграла к определенному интегралу.

14. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутой кривой. Формула Грина.

15. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Ориентация кусочно-гладких поверхностей.

16. Формула Стокса.

17. Формула Гаусса-Остроградского.

18. Замена переменных в дифференциальной форме. Интеграл от дифференциальной формы по ориентированной поверхности.

19. Общая формула Стокса.

20. Потенциальное и соленоидальное векторные поля. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

21. Дивергенция и ротор векторного поля. Основные формулы векторного анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. Т. I, II. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.

2. *Валле-Пуссен Ш.* Курс анализа бесконечно малых. Т. I, II. Л.; М.: ГТТИ, 1933.

3. *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н.* Курс современного анализа. Т. I, II. Л.; М.: ГТТИ, 1933.

4. *Фихтенгольц Г.М.* Курс математического анализа. Т. I – III. М.: Физматгиз, 1962.

5. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

6. *Дьедонне Ж.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1964.

7. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. I, II. М.: Наука, 1990.

8. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. I – III. М.: Высшая школа, 1981.

9. *Виноградов И. М.* Дифференциальное исчисление. М.: Наука, 1985.

10. *Ильин В.А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Ч. I. Изд. 4-е, перераб. и доп., 1982, Ч. II. Изд. 2-е, стереотип., 1980. М.: Наука.

11. *Камынин Л. И.* Курс математического анализа. Ч. I, II. 1993, 1995. М.: Изд-во Моск. ун-та.

12. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. I. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Фазис, 1997. Ч. II. М.: Наука, 1990.

13. *Садовничий В. А.* Теория операторов. М.: Изд-во МГУ, 1980.

14. *Ландау Э.* Основы анализа. М.: ИЛ, 1947.

15. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

16. *Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.

17. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. I, II. Изд. 3-е. М.: Наука, 1978.

18. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

19. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983.

20. *Архипов Г. И., Карацуба А. А., Чубариков В. Н.* Теория кратных тригонометрических сумм. М.: Наука, 1987.

21. *Малышев Ф. М.* Симплециальные системы линейных уравнений. В кн.: Алгебра. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. С. 53 – 56.

22. *Крыжановский Д. А.* Sur les différentes définitions de limite. Одеса. Наукови записки науково-дослидчих катедр. 1924. Т.1(№8-9), с. 1 – 10.

23. *Гливенко В. И.* Опыт общего определения интеграла. Докл. АН СССР, 1937. Т.4, №2, с. 61 – 63.

24. *Arkhipov G. I., Sadovnichii V. A., Chubarikov V. N.* A generalisation of the Heine limit for functions which converge on a base. Analysis Math. 1993, 30,№4, p.161 – 171.

25. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Об эквивалентноси двух типов сходимости по базе множеств. Докл. РАН 1993,т.330, №6, с.677 – 679.

26. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* О сходимости по декартову произведению баз и о последовательных пределах. Докл. РАН. 1994,т. 339, №4, с. 437 – 438.

27. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Об общей формуле Стокса. Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех. 1995, №2, с. 34 – 44.

28. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* О двойных и повторных пределах по базе. Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех. 1995, №5, с. 31.

29. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* О равномерной сходимости функций в смысле Гейне. ДАН. 1996, т.347,№3, с.298 – 299.

30. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* О равномерной поточечной сходимости по базе множеств. Вестник МГУ. Сер. Мат., Мех. 1997, №1, с. 70 – 72.

31. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М., 1967.

32. *Gordon R. A.* An iterated limits theorem applied to the Henstok integral. Real Analysis Exchange. 1995/96, v. 21(2) p.774 – 781.

33. *Lyche R. T.* Sur les fonctions d'une variable réelle. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Forhandliger. – 1938, Bd. XI, №2, S.4 – 6.

34. *Nagell T.* Introduction to Number Theory. Stockholm.: Wiley& Sons, 1951.

35. *De la Vallée Poussin Ch.-J.* Mém. de l'Acad. de Belgique. 1896, v. LIII, №6.

36. *Chaundy T. W., Joliffe A. E.* The uniform convergence of a certain class of trigonometrical series. Proc. London Math. Soc.(2), 1916, v.15, p.214 – 216.

37. *Hardy G. H.* Some theorems concerning trigonometrical series of a special type. Proc. London Math. Soc.(2), 1930, v.32, p.441 – 448.

СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 18