Глава 6

Многократни интеграли

§ 1. Двойни интеграли. Пресмятане на двойни интеграли

Нека D е произволно ограничено множество в равнината. Числото

$$d(D) = \sup_{P,\,Q \in D} \rho(P, Q)$$

($\rho(P, Q)$ е разстоянието между точките P и Q) ще наричаме *диаметър* на множеството D.

Нека D е ограничено, затворено и квадрируемо множество в равнината, т. е. компактно множество, което има контур с лице, равно на нула. Да разделим множеството D на краен брой затворени множества D_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, такива, че лицето на сечението на всеки две от тях да бъде равно на нула и $D = \bigcup_{i=1}^{r} D_i$. Да означим с $s(D_i)$ лицето на множеството D. Числото $d = \max_{1 \leq i \leq r} d(D_i)$ ще наричаме диаметър на разбиването на D на подмножества D_i. Във всяко от множествата D_i избираме по една точка P_i.

Нека функцията $f(x, y)$ е дефинирана и ограничена в D. Числото $\sigma = \sum_{i=1}^{r} f(P_i) s(D_i)$ ще наричаме *риманова сума*, съответстваща на разбиването $\{D_i\}$ на D и на дадения избор на точките P_i.

Означаваме

$$m_i = \inf_{P \in D_i} f(P) \quad \text{и} \quad M_i = \sup_{P \in D_i} f(P).$$

Сумите

$$\underline{s} = \sum_{i=1}^{r} m_i s(D_i) \quad \text{и} \quad \overline{s} = \sum_{i=1}^{r} M_i s(D_i)$$

ще наричаме съответно малка и голяма интегрална сума на Дарбу, съответстващи на разбиването $\{D_i\}$ на D.

Дефиниция 1. Числото I се нарича двоен интеграл от функцията $f(x, y)$ върху множеството D, ако за всяко положително число ε може да се намери положително число δ, такова че за всяко разбиване $\{D_i\}$ на D с диаметър $d < \delta$ и за всеки избор на точките $P_i \in D_i$ е изпълнено неравенството $|\sigma - I| < \varepsilon$.

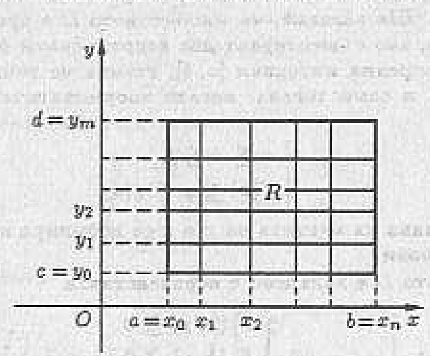
Числото I се бележи със символа

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

Дефиниция 2. Ще казваме, че функцията $f(x, y)$ е интегруема (в риманов смисъл) в множеството D, ако съществува

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

Забележка. Ако множеството D е правоъгълник, определен с неравенствата $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ (фиг. 13), същата дефиниция се получава и ако вместо произволни разбивания на D разглеждаме само разбивания на правоъгълничета със страни, успоредни на координатните оси.



Фиг. 13

Теорема 1. Ако $f(x, y)$ е непрекъсната в компактното квадрируемо множество D, то тя е интегруема в риманов смисъл в D.

Теорема 2. Ако $f(x, y)$ е дефинирана, непрекъсната и ограничена в множеството $D_1 \subset D$, където D е компактно и квадрируемо и $s(D \setminus D_1) = 0$, то $f(x, y)$ е интегруема в D_1.

Теорема 3. Ако D е компактно и квадрируемо множество, то

$$s(D) = \iint_D 1\, dxdy.$$

20

Теорема 4. Нека D_1 и D_2 са компактни и квадрируеми множества, такива че $s(D_1 \cap D_2) = 0$. Ако $f(x, y)$ е интегруема в $D = D_1 \cup D_2$, то тя е интегруема и в D_1, и в D_2 и

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\,dxdy.$$

Теорема 5. Ако функциите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в множеството D и α и β са реални числа, то функцията $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ е интегруема и

$$\iint\limits_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))\,dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy + \beta \iint\limits_D g(x, y)\,dxdy.$$

Теорема 6. Ако $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са интегруеми в множеството D и навсякъде в D е изпълнено неравенството $f(x, y) \leqq g(x, y)$, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy \leqq \iint\limits_D g(x, y)\,dxdy.$$

Дефиниция 3. Ще казваме, че множеството D е криволинеен трапец с вертикални основи, ако съществуват две непрекъснати функции $f(x)$ и $g(x)$, дефинирани в затворения интервал $[a, b]$, такива че точката (x, y) принадлежи на D тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват неравенствата

$$D: \left| \begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ f(x) \leqq y \leqq g(x). \end{array} \right.$$

Аналогично с размяна на местата на x и y се дефинира криволинеен трапец с хоризонтални основи.

Ако множеството D е зададено с неравенствата

$$D: \left| \begin{array}{l} F_1(x, y) \geqq 0 \\ F_2(x, y) \geqq 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ F_s(x, y) \geqq 0, \end{array} \right.$$

понякога можем да го представим като обединение на криволинейни трапеци по един от следните начини:

I начин — с геометрични съображения: начертаваме кривите, определени с уравненията $F_1(x, y) = 0$, $F_2(x, y) = 0, \dots$, намираме пресечните им точки и с помощта на чертежа съобразяваме как да представим D по искания начин.

II начин — аналитично:

а) Решаваме всички неравенства относно y. Като вземем предвид дефиниционните области на всички функции и условията, при които могат да се направят съответните преобразувания на неравенствата, свеждаме дадената система до системата

$$\left| \begin{array}{lll} f_1(x) \leqq y & y \leqq g_1(x) & h_1(x) \geqq 0 \\ f_2(x) \leqq y & y \leqq g_2(x) & h_2(x) \geqq 0 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{array} \right.$$

б) Намираме функциите $m_1(x) = \min(f_1, f_2, \dots)$ и $m_2(x) = \max(g_1, g_2, \dots)$.

в) Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} m_1(x) \leqq m_2(x) \\ h_1(x) \geqq 0 \\ h_2(x) \geqq 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

За удобство при пресмятанията допълнително разделяме проекцията на множеството D на интервали, във вътрешността на които функциите $m_1(x)$ и $m_2(x)$ са диференцуеми.

Теорема 7. Ако множеството D е криволинеен трапец с вертикални основи, функцията $F(x, y)$ е интегруема в D и за всяко $x \in [a, b]$ съществува

$$\int\limits_{f(x)}^{g(x)} F(x, y)\,dy,$$

то съществува и повторният интеграл

$$\int\limits_a^b \left[\int\limits_{f(x)}^{g(x)} F(x, y)\,dy \right] dx$$

и е в сила равенството

$$\iint\limits_D F(x, y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{f(x)}^{g(x)} F(x, y)\,dy \right] dx.$$

1.1. Представете множеството D, определено с неравенствата

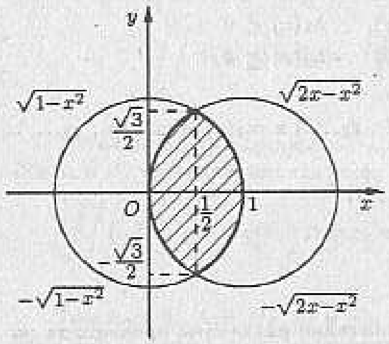
$$D: \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leqq 2x \\ x^2 + y^2 \leqq 1, \end{array} \right.$$

като криволинеен трапец или като обединение на криволинейни трапеци:

а) с вертикални основи;

б) с хоризонтални основи.

Решение. I начин (геометрично).



Фиг. 14

Първото неравенство $x^2+y^2-2x=(x-1)^2+y^2-1 \leqq 0$ определя кръг с радиус 1 и център точката $(1, 0)$, а второто — кръг с радиус 1 и център точката $(0,0)$ (фиг. 14). За да намерим пресечните точки на двете окръжности, решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2+y^2=2x \\ x^2+y^2=1. \end{array} \right.$$

Решенията са две:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

а) *С вертикални основи.* В този случай множеството D се представя като криволинеен трапец по следния начин:

$$0 \leqq x \leqq 1,$$

$$m_1=\max(-\sqrt{1-x^2}, -\sqrt{2x-x^2}) \leqq y \leqq \min(\sqrt{1-x^2}, \sqrt{2x-x^2})=m_2.$$

Функциите m_1 и m_2 обаче не са диференцуеми. Затова представяме D като обединение на два криволинейни трапеца:

$$D_1: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{2x-x^2} \end{array} \right.$$

и

$$D_2: \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}; \end{array} \right.$$

б) *С хоризонтални основи.* Множеството D се представя като криволинеен трапец по следния начин:

$$D: \left| \begin{array}{l} -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1-\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}. \end{array} \right.$$

II начин (аналитично).

а) *С вертикални основи.* Решаваме всички неравенства относно y:

$$-\sqrt{2x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{2x-x^2}, \quad 2x-x^2 \geqq 0,$$
$$-\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}, \quad 1-x^2 \geqq 0.$$

Разглеждаме два случая:

Първи случай. Ако $2x-x^2 \leqq 1-x^2$, то

$$\min(\sqrt{2x-x^2}, \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{2x-x^2}$$

и

$$\max(-\sqrt{2x-x^2}, -\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{2x-x^2};$$

Втори случай. Ако $2x-x^2 \geqq 1-x^2$, то

$$\min(\sqrt{2x-x^2}, \sqrt{1-x^2}) = \sqrt{1-x^2}$$

и

$$\max(-\sqrt{2x-x^2}, -\sqrt{1-x^2}) = -\sqrt{1-x^2}.$$

Така получихме, че D се разделя на две множества D_1 и D_2, определени с неравенствата

$$D_1: \left| \begin{array}{l} -\sqrt{2x-y^2} \leqq y \leqq \sqrt{2x-x^2} \\ 0 \leqq 2x-x^2 \leqq 1-x^2 \end{array} \right.$$

и

$$D_2: \left| \begin{array}{l} -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leqq 1-x^2 \leqq 2x-x^2. \end{array} \right.$$

Решаваме неравенствата, съдържащи ограничения за x, и получаваме

$$D_1: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \\ -\sqrt{2x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{2x-x^2} \end{array} \right.$$

и

$$D_2: \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-x^2}. \end{array} \right.$$

б) *С хоризонтални основи.* Решаваме всички неравенства относно x:

$$\left| \begin{array}{l} 1-\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq 1+\sqrt{1-y^2}, \ 1-y^2 \geqq 0 \\ -\sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}. \end{array} \right.$$

Тъй като за всяко $y \in [-1, 1]$ са в сила неравенствата

$$1 - \sqrt{1-y^2} \geqq -\sqrt{1-y^2} \quad \text{и} \quad 1 + \sqrt{1-y^2} \geqq \sqrt{1-y^2},$$

то

$$\max(-\sqrt{1-y^2},\ 1-\sqrt{1-y^2}) = 1 - \sqrt{1-y^2},$$

$$\min(\sqrt{1-y^2},\ 1+\sqrt{1-y^2}) = \sqrt{1-y^2}.$$

Решаваме системата от неравенства

$$\left|\begin{array}{l} 1 - \sqrt{1-y^2} \leqq \sqrt{1-y^2} \\ 1 - y^2 \leqq 0 \end{array}\right.$$

и получаваме

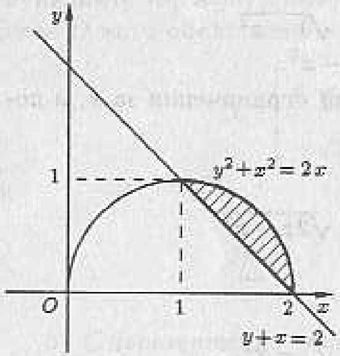
$$D: \left|\begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \sqrt{1-y^2} \leqq x \leqq \sqrt{1-y^2}. \end{array}\right.$$

1.2. Представете криволинейния трапец

$$D: \left|\begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq 1 \\ 2 - y \leqq x \leqq 1 + \sqrt{1-y^2} \end{array}\right.$$

като криволинеен трапец с вертикални основи.

Решение. I начин (геометрично). Множеството D е заградено от правите с уравнения: $2 - y = x$, $y = 0$, $y = 1$, и кривата с уравнение $x = 1 + \sqrt{1-y^2}$ (част от окръжност с уравнение $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (фиг. 15)).



Фиг. 15

Решаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x = 1 + \sqrt{1-y^2} \end{array}\right.$$

и намираме координатите на пресечните точки на двете ограничителни криви: (1, 1) и (2, 0). От чертежа е ясно, че трапецът с вертикални основи се определя с неравенствата

$$D: \left|\begin{array}{l} 1 \leqq x \leqq 2 \\ 2 - x \leqq y \leqq 2x - x^2, \end{array}\right.$$

където функциите $2 - x$ и $2x - x^2$ се получават, като се решат уравненията $2 - y = x$ и $x = 1 + \sqrt{1-y^2}$ относно y при $x \geqq 1$.

II начин (аналитично). Решаваме неравенствата относно y. От $y \leqq 1$ следва $x \geqq 2 - y \geqq 1$ и тогава неравенството $x - 1 \leqq \sqrt{1-y^2}$ е еквивалентно с $(x-1)^2 \leqq 1 - y^2$. Така получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq 1 \\ 2 - x \leqq y,\ x \leqq 1 \\ -\sqrt{2x-x^2} \leqq y \leqq \sqrt{2x-x^2},\ 2x - x^2 \geqq 0. \end{array}\right.$$

От неравенството $1 \geqq \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x-x^2}$ следва $\min(1, \sqrt{2x-x^2}) = \sqrt{2x-x^2}$.

От неравенствата $2x - x^2 \geqq 0$ и $x \geqq 1$ следва $1 \leqq x \leqq 2$, т. е. $2 - x \geqq 0$. Тогава $\max(-\sqrt{2x-x^2}, 0, 2-x) = 2 - x$ и следователно

$$D: \left|\begin{array}{l} 1 \leqq x \leqq 2 \\ 2 - x \leqq y \leqq \sqrt{2x-x^2}. \end{array}\right.$$

Остава да проверим неравенството $2 - x \leqq \sqrt{2x-x^2}$, което в интервала $[0, 2]$ е еквивалентно с

$$(2-x)^2 \leqq 2x - x^2, \quad \text{т. е.} \quad 2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2) \leqq 0.$$

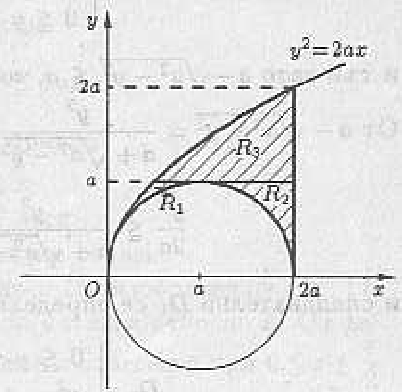
Последното неравенство очевидно е изпълнено във всички точки на интервала $[1, 2]$.

1.3. Представете множеството D, определено с неравенствата

$$y^2 \leqq 2ax \leqq x^2 + y^2, \quad 2a \geqq x, \quad 0 \leqq y,$$

като обединение на криволинейни трапеци с хоризонтални основи.

Решение. I начин. Множеството D е заградено от правите с уравнения $y = 0$ и $x = 2a$, параболата с уравнение $y = 2ax$ и окръжността с уравнение $x^2 + y^2 = 2ax$ $(y^2 + (x-a)^2 = a^2)$ (фиг. 16).



Фиг. 16

Намираме координатите на пресечните точки на правата $x = 2a$ и параболата $y^2 = 2ax$: $(2a, 2a)$ и $(2a, -2a)$. Като вземем предвид, че окръжността $x^2 + y^2 = 2ax$ има център точката $(a, 0)$ и радиус a, виждаме, че D се разлага на три криволинейни трапеца с хоризонтални основи:

$$D_1 : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq a \\ \dfrac{y^2}{2a} \leqq x \leqq a - \sqrt{a^2 - y^2}, \end{array} \right. \qquad D_2 : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq a \\ a + \sqrt{a^2 - y^2} \leqq x \leqq 2a, \end{array} \right.$$

$$D_3 : \left| \begin{array}{l} a \leqq y \leqq 2a \\ \dfrac{y^2}{2a} \leqq x \leqq 2a. \end{array} \right.$$

II начин. Още веднъж ще покажем как без геометрични разсъждения можем да представим D като обединение на криволинейни трапеци. Първо решаваме всички неравенства относно x:

$$\left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 2a, \quad y \geqq 0 \\ \dfrac{y^2}{2a} \leqq x \\ a^2 - y^2 \leqq (x - a)^2. \end{array} \right.$$

При $0 \leqq y \leqq a$ третото неравенство е еквивалентно с $\sqrt{a^2 - y^2} \leqq a - x$ при $x \leqq a$ и с $\sqrt{a^2 - y^2} \leqq x - a$ при $x \geqq a$.

а) В първия случай имаме

$$D_1 : \left| \begin{array}{l} \dfrac{y^2}{2a} \leqq x \leqq a - \sqrt{a^2 - y^2} \\ x \leqq a \\ 0 \leqq y \leqq a \end{array} \right.$$

и тъй като $a - \sqrt{a^2 - y^2} \leqq a$, то $\min(a, a - \sqrt{a^2 - y^2}) = a - \sqrt{a^2 - y^2}$.

От $a - \sqrt{a^2 - y^2} = \dfrac{y^2}{a + \sqrt{a^2 - y^2}}$ виждаме, че

$$\frac{y^2}{2a} \leqq \frac{y^2}{a + \sqrt{a^2 - y^2}} = a - \sqrt{a^2 - y^2}$$

и следователно D_1 се определя с неравенствата

$$D_1 : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq a \\ \dfrac{y^2}{2a} \leqq x \leqq a - \sqrt{a^2 - y^2}; \end{array} \right.$$

б) Във втория случай имаме

$$D_2 : \left| \begin{array}{l} a \leqq x \leqq 2a, \ 0 \leqq y \leqq a \\ a + \sqrt{a^2 - y^2} \leqq x \\ \dfrac{y^2}{2a} \leqq x. \end{array} \right.$$

Сега очевидно $a \leqq a + \sqrt{a^2 - y^2}$ и

$$\frac{y^2}{2a} \leqq \frac{y^2}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} = a + \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Тогава $\max\left(a, \dfrac{y^2}{2a}, a + \sqrt{a^2 - y^2}\right) = a + \sqrt{a^2 - y^2}$, откъдето

$$D_2 : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq a \\ a + \sqrt{a^2 - y^2} \leqq x \leqq 2a. \end{array} \right.$$

Неравенството $a + \sqrt{a^2 - y^2} \leqq 2a$ е очевидно изпълнено;

в) Ако $a \leqq y$, неравенството $a^2 - y^2 \leqq (x - a)^2$ е тъждествено изпълнено и като вземем предвид, че $\dfrac{y^2}{2a} \geqq 0$, получаваме

$$D_3 : \left| \begin{array}{l} \dfrac{y^2}{2a} \leqq x \leqq 2a \\ a \leqq y. \end{array} \right.$$

От неравенството $\dfrac{y^2}{2a} \leqq 2a$ виждаме, че $y \leqq 2a$. И така

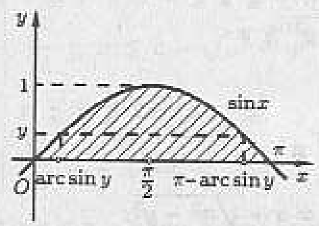
$$D_3 : \left| \begin{array}{l} a \leqq y \leqq 2a \\ \dfrac{y^2}{2a} \leqq x \leqq 2a. \end{array} \right.$$

1.4. Представете криволинейния трапец

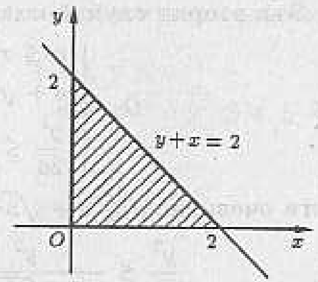
$$D : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq \pi \\ 0 \leqq y \leqq \sin x \end{array} \right.$$

като криволинеен трапец с хоризонтални основи.

Решение. Криволинейният трапец D е изобразен на фиг. 17. Нека $0 \leqq y \leqq 1$. Да решим уравнението $y = \sin x$ относно x. От дефиницията на функцията $\arcsin y$ имаме $x = \arcsin y$ при $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ и $x = \pi - \arcsin y$ при $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$. Тогава



Фиг. 17



Фиг. 18

$$D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq 1 \\ \arcsin y \leqq x \leqq \pi - \arcsin y. \end{array} \right.$$

1.5. Представете следните множества:

а) $D: \left| \begin{array}{l} y + x \leqq 1 \\ -1 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y; \end{array} \right.$ б) $D: 0 \leqq y \leqq x \leqq 1;$

в) $D: \left| \begin{array}{l} x + y \leqq 2 \\ x^2 + y^2 \leqq 2x \\ y \geqq 0; \end{array} \right.$ г) $D: \left| \begin{array}{l} 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2y \\ x \geqq 0; \end{array} \right.$

д) $D: \left| \begin{array}{l} y \leqq 8x \\ y \geqq 2x \\ y + 4x \leqq 24; \end{array} \right.$ е) $D: \left| \begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqq x \leqq \cos y, \end{array} \right.$

като криволинейни трапеци (или като обединение на криволинейни трапеци) с:

— вертикални основи;

— хоризонтални основи.

1.6. Пресметнете двойния интеграл

$$I = \iint\limits_D (x - y)\, dxdy,$$

където множеството D се определя с неравенствата $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x + y = 2$.

Решение. Множеството D е изобразено на фиг. 18. Ясно е, че то може да се представи като криволинеен трапец както

с вертикални, така и с хоризонтални основи. Да го представим например като криволинеен трапец с вертикални основи:

$$D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 2 \\ 0 \leqq y \leqq 2 - x. \end{array} \right.$$

Съгласно теорема 7 имаме

$$I = \iint\limits_D (x - y)\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (x - y)\, dy \right) dx = \int_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{2-x} dx$$

$$= \int_0^2 \left[x(2 - x) - \frac{(2 - x)^2}{2} \right] dx = \int_0^2 (8x - 3x^2 - 4)\, dx = 0.$$

1.7. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint\limits_D x^2(y - x)\, dxdy,$$

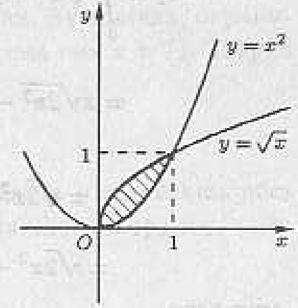
където множеството D се определя с неравенствата $y \geqq x^2$, $x \geqq y^2$.

Решение. Да представим D като криволинеен трапец с вертикални основи. Решаваме двете неравенства относно y (като използваме очевидните неравенства $x \geqq 0$ и $y \geqq 0$):

$$D: x^2 \leqq y \leqq \sqrt{x}, \quad x \geqq 0.$$

От неравенството $x^2 \leqq \sqrt{x}$ след повдигане в квадрат получаваме $x^4 - x = x(x^3 - 1) \leqq 0$ или $x \leqq 1$. Тогава

$$D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1 \\ x^2 \leqq y \leqq \sqrt{x} \end{array} \right.$$



Фиг. 19

(фиг. 19) и съгласно теорема 7:

$$I = \iint\limits_D x^2(x - y)\, dxdy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2(y - x)\, dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 \frac{y^2}{2} - x^3 y \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - x^{\frac{7}{2}} \right) - \left(\frac{x^6}{2} - x^5 \right) dx = -\frac{1}{504}.$$

1.8. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy,$$

където множеството D се определя с неравенствата $0 \leqq x \leqq y \leqq 1$.

Р е ш е н и е. Като вземем предвид, че областта е заградена с правите $y=0$, $y=x$ и $x=1$ (фиг. 20), виждаме, че тя е криволинеен трапец с вертикални основи, определен с неравенствата

$$D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq x. \end{array} \right.$$

Съгласно теорема 7 имаме

$$I = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dy \right] dx.$$

Като интегрираме по части, при $x>0$ получаваме

$$I_1 = \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dy = y\sqrt{x^2+y^2} \Big|_0^x - \int_0^x \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\, dy}$$

$$= x\sqrt{2x^2} - \int_0^x \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dy + \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dy$$

$$= \sqrt{2}x^2 - I_1 + x^2 \ln \left(y + \sqrt{x^2+y^2} \right) \Big|_0^x$$

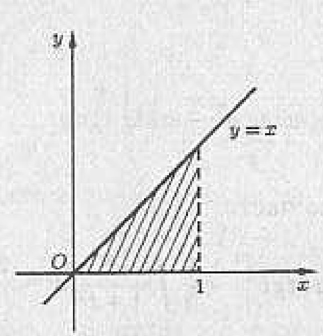
$$= \sqrt{2}x^2 - I_1 + x^2 \ln \left(x(1+\sqrt{2}) \right) - x^2 \ln x,$$

откъдето

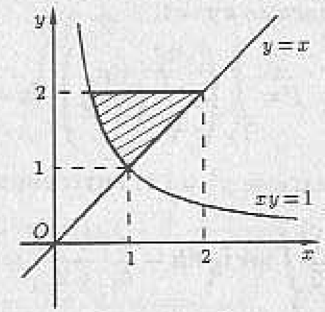
$$I_1 = \frac{\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})}{2} x^2.$$

Оттук за двойния интеграл имаме

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2} x^2\, dx = \frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{6}.$$



Фиг. 20



Фиг. 21

1.9. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint_D \frac{y^2}{1+x^2y^2}\, dxdy,$$

където множеството D се определя с неравенствата $0 \leqq x \leqq y \leqq 2$, $xy \geqq 1$.

Р е ш е н и е. Областта D се намира в първи квадрант (фиг. 21). От чертежа се вижда, че е по-удобно да разглеждаме D като криволинеен трапец с хоризонтални основи (ако го разглеждаме като криволинеен трапец с вертикални основи, функцията, ограничаваща го отдолу, няма да бъде диференцуема при $x=1$). Първо решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} xy = 1 \\ x = y \end{array} \right.$$

и намираме пресечната точка $(1, 1)$ на правата $y=x$ и хиперболата $yx=1$. Така D се представя като криволинеен трапец:

$$D: \left| \begin{array}{l} 1 \leqq y \leqq 2 \\ \frac{1}{y} \leqq x \leqq y, \end{array} \right.$$

и следователно по теорема 7

$$\iint_D \frac{y^2}{1+x^2y^2}\, dxdy = \int_1^2 \left[\int_{\frac{1}{y}}^y \frac{y^2}{1+x^2y^2}\, dx \right] dy.$$

Полагаме $xy = t$:

$$I = \int_1^2 \left(y \int_1^{y^2} \frac{dt}{1+t^2} \right) dy = \int_1^2 y(\operatorname{arctg} y^2 - \operatorname{arctg} 1)\, dy.$$

Полагаме $y^2 = t$ и интегрираме по части:

$$I = \frac{1}{2} \int_1^4 \operatorname{arctg} t\, dt - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{4-1}{2} = \frac{1}{2} t \operatorname{arctg} t \Big|_1^4 - \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{t}{1+t^2}\, dt - \frac{3\pi}{8}$$

$$= 2 \operatorname{arctg} 4 - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \ln(1+t^2) \Big|_1^4 = 2 \operatorname{arctg} 4 - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \ln \frac{2}{17}.$$

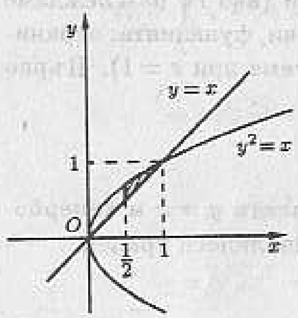
1.10. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint_D \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\, dx dy,$$

където множеството D се задава с неравенствата

$$y^2 \leqq x, \ \frac{1}{2} \leqq x \leqq y.$$

Решение. Областта D е заградена с параболата $y^2 = x$ и двете прави $x = \frac{1}{2}$ и $y = x$ (фиг. 22). Да я разгледаме като криволинеен трапец с вертикални основи:



Фиг. 22

$$D: \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \\ x \leqq y \leqq \sqrt{x}. \end{array} \right.$$

Тогава

$$I = \iint_D \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\, dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} \frac{d\frac{y}{x}}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2} \right) dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \left(\int_1^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{dt}{(1+t^2)^2} \right) dx.$$

Като вземем предвид, че

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt$$

$$= \operatorname{arctg} t + \frac{1}{2} \int t\, d\frac{1}{1+t^2} = \frac{\operatorname{arcctg} t}{2} + \frac{t}{2(t^2+1)},$$

получаваме

$$I = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} - \operatorname{arctg} 1 + \frac{\sqrt{x}}{x+1} - \frac{1}{2} \right) dx.$$

Пресмятаме

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{x}}{x+1}\, dx = \int \frac{x+1-1}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$

$$= 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x},$$

$$I_2 = \int \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = x \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x^3}}$$

$$= x \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}\, dx}{x+1} = x \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2} I_1,$$

откъдето

$$I_1 + I_2 = x \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2} I_1 = x \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} - 3 \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

От равенството $\operatorname{arctg} \alpha = \operatorname{arccotg} \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\alpha}$ следва

$$I_1 + I_2 = (x+3) \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3\pi}{2} + 3\sqrt{x}.$$

Оттук

$$I = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x} \right) dx - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x+3)\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right]\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} - \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{7\pi}{16} + \frac{11}{8} - \frac{7}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

1.11. Пресметнете двойния интеграл

$$I = \iint\limits_D ye^{-x}\,dxdy,$$

където множеството D се определя с неравенствата

$$x^2 \leqq y, \quad x^2 + y^2 \leqq 2x.$$

Р е ш е н и е. Областта D е изобразена на фиг. 23. За да намерим координатите на пресечната точка P, решаваме системата

$$\left|\begin{aligned} &x^2 = y \\ &x^2 + y^2 = 2x. \end{aligned}\right.$$

След заместване получаваме уравнението

$$x^4 + x^2 - 2x = x(x-1)(x^2+x+2) = 0,$$

което има решения $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Тогава

$$D : \left|\begin{aligned} &0 \leqq x \leqq 1 \\ &x^2 \leqq y \leqq \sqrt{2x - x^2} \end{aligned}\right.$$

и съгласно теорема 7

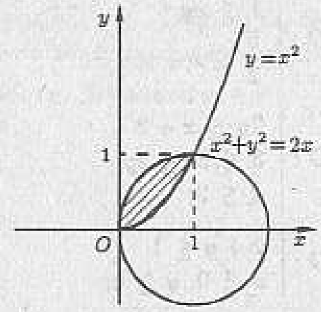
$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} ye^{-x}dy \right) dx = \int\limits_0^1 e^{-x}\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{2x-x^2}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{-x}(2x - x^2 - x^4)\,dx$$

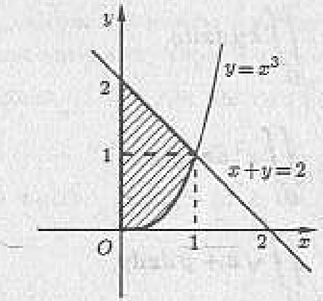
$$= \frac{1}{2}e^{-x}(x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 24x + 24)\Big|_0^1 = \frac{33}{e} - 12.$$

1.12. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint\limits_D x\,dxdy,$$



Фиг. 23



Фиг. 24

където множеството D е заградено от кривите, зададени със следните уравнения: $y = x^3$, $x + y = 2$ и $x = 0$.

Р е ш е н и е. Множеството D е изобразено на фиг. 24. Решаваме системата

$$\left|\begin{aligned} &y = x^3 \\ &x + y = 2 \end{aligned}\right.$$

и намираме пресечната точка $P(1, 1)$. Ясно е, че D се представя като криволинеен трапец с вертикални основи

$$D : \left|\begin{aligned} &0 \leqq x \leqq 1 \\ &x^3 \leqq y \leqq 2 - x \end{aligned}\right.$$

и според теорема 7

$$I = \int\limits_0^1 \left(x \int\limits_{x^3}^{2-x} dy \right) dx = \int\limits_0^1 (2x - x^2 - x^4)\,dx = \frac{7}{15}.$$

1.13. Пресметнете двойните интеграли върху съответното множество D:

а) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{4x+y}{y-2x+6}\,dxdy,$ $\qquad D : x^2 + y^2 \leqq 2x;$

б) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x+y}{x-y-1}\,dxdy,$ $\qquad D : x^2 \leqq y \leqq x;$

в) $\displaystyle\iint\limits_D x^2y^3\,dxdy,$ $\qquad D : 0 \leqq y \leqq 1 - x^2;$

г) $\iint\limits_D xy\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l} 1 \leqq xy \\ \frac{5}{2} \leqq x+y; \end{array}\right.$

д) $\iint\limits_D x^2\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l} 2y \leqq x+2 \\ 3 \leqq 2x+2y \\ x \leqq 2; \end{array}\right.$

е) $\iint\limits_D \sqrt{x+y}\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l} x+y \leqq 1 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0; \end{array}\right.$

ж) $\iint\limits_D y^2\sqrt{a^2-x^2}\,dxdy, \qquad D: x^2+y^2 \leqq a^2;$

з) $\iint\limits_D x^2\,dxdy, \qquad D: \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1;$

и) $\iint\limits_D x^2\,dxdy, \qquad D: |x|+|y| \leqq 1;$

к) $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l} x+y \leqq \pi \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0; \end{array}\right.$

л) $\iint\limits_D \frac{x}{y+1}\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l} 0 \leqq 4x \leqq y \\ y \leqq x^2+1; \end{array}\right.$

м) $\iint\limits_D e^x\,dxdy, \qquad D: 1 \leqq e^x \leqq y \leqq 2;$

н) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq x \leqq 2 \\ 1 \leqq xy. \end{array}\right.$

1.14. Пресметнете двойния интеграл

$$I = \iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy,$$

където D се определя с неравенствата $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$.

Решение. Областта D е квадрат, в който функцията под знака на модула приема както положителни, така и отрицателни стойности. Правата $x+y=\frac{\pi}{2}$ разделя D на две части (фиг. 25):

$$D_1: \left|\begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}-x, \end{array}\right. \qquad \text{в която} \quad \cos(x+y) \geqq 0,$$

и

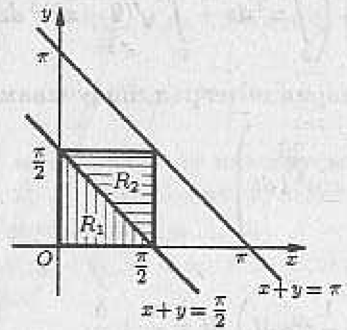
$$D_2: \left|\begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}-x \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}, \end{array}\right. \qquad \text{в която} \quad \cos(x+y) \leqq 0,$$

и съгласно теореми 4 и 7

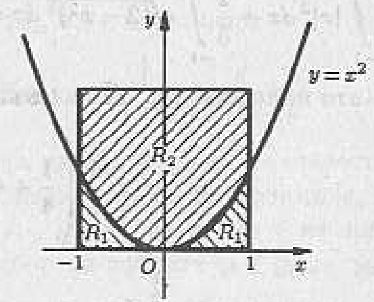
$$I = \iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy = \iint\limits_{D_1} \cos(x+y)\,dxdy - \iint\limits_{D_2} \cos(x+y)\,dxdy$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)\,dy \right) dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\,dy \right) dx$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\,dx - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right) dx = \pi - 2.$$



Фиг. 25



Фиг. 26

1.15. Пресметнете двойния интеграл

$$I = \iint_D \sqrt{|y - x^2|}\, dxdy,$$

където множеството D се определя с неравенствата $-1 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 2$.

Решение. Областта D е квадрат (фиг. 26), който се разделя от кривата $y = x^2$ на две области:

$$D_1 : \left| \begin{array}{l} -1 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq x^2, \end{array} \right. \quad \text{в която} \quad y - x^2 \leqq 0,$$

и

$$D_2 : \left| \begin{array}{l} -1 \leqq x \leqq 1 \\ x^2 \leqq y \leqq 2, \end{array} \right. \quad \text{в която} \quad y - x^2 \geqq 0.$$

Съгласно теореми 4 и 7

$$I = \iint_D \sqrt{|y - x^2|}\, dxdy = \iint_{D_1} \sqrt{x^2 - y}\, dxdy - \iint_{D_2} \sqrt{y - x^2}\, dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\, dy \right) dx + \int_{-1}^{1} \left(\int_{x^2}^{2} \sqrt{y - x^2}\, dy \right) dx$$

$$= -\frac{2}{3} \int_{-1}^{1} (x^2 - y)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{x^2} dx + \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} (y - x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x^2}^{2} dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} |x|^3\, dx + \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} \sqrt{(2 - x^2)^3}\, dx = \frac{4}{3} \left(\int_0^1 x^3\, dx + \int_0^1 \sqrt{(2 - x^2)^3}\, dx \right).$$

Като положим $x = \sqrt{2} \sin t$ във втория интеграл, получаваме

$$I = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{4} + 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t \right) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{3}.$$

1.16. Пресметнете двойните интеграли:

а) $\iint_D |x + y - 1|\, dxdy, \qquad D : \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leqq 1 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0; \end{array} \right.$

б) $\iint_D |x + y - 2|\, dxdy, \qquad D : \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leqq 2x \\ y \geqq 0. \end{array} \right.$

1.17. Докажете, че ако $f(x)$ и $g(y)$ са интегруеми функции съответно в интервалите $[a, b]$ и $[c, d]$, то функцията $F(x, y) = f(x)g(y)$ е интегруема в правоъгълника

$$D : \left| \begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ c \leqq y \leqq d \end{array} \right.$$

и

$$\iint_D f(x)g(y)\, dxdy = \int_a^b f(x)\, dx . \int_c^d g(y)\, dy.$$

Решение. Нека ε е произволно положително число. Да означим

$$I_1 = \int_a^b f(x)\, dx, \quad I_2 = \int_c^d g(y)\, dy \quad \text{и} \quad M = (d - c) \sup_{y \in [c,\, d]} g(y).$$

От интегруемостта на $f(x)$ следва, че съществува положително число δ_1, такова че за всяко разделяне на интервала $[a, b]$ на подинтервали $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, за които $(x_i - x_{i-1}) < \delta_1$, и за всеки избор на точките $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ е изпълнено

$$|I_1 - s_f| = \left| I_1 - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2(M + 1)}.$$

Аналогично от интегруемостта на $g(y)$ следва, че съществува число $\delta_2 > 0$, такова че за всяко разделяне на интервала $[c, d]$ на подинтервали $[y_{k-1}, y_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, за които е изпълнено $\max(y_k - y_{k-1}) < \delta_2$, и за всеки избор на точките $\eta_k \in [y_{k-1}, y_k]$ е в сила

$$|I_2 - s_g| = \left| I_2 - \sum_{k=1}^{m} g(\eta_k)(y_k - y_{k-1}) \right| < \frac{\varepsilon}{2(|I_1| + 1)}.$$

Ясно, е че $|s_g| \leqq M$.

Нека $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Да разделим правоъгълника D на правоъгълничета

$$D_{ik} : \left| \begin{array}{l} x_{i-1} \leqq x \leqq x_i \\ y_{k-1} \leqq y \leqq y_k, \end{array} \right.$$

така че диаметърът на всяко от тях да бъде по-малък от δ. Тогава и проекциите им върху осите Ox и Oy ще имат дължина, по-малка от δ. Във всяко от правоъгълничетата D_{ik} да изберем по една точка $P_{ik}\,(\xi_i, \eta_k)$ и да разгледаме съответната риманова сума

$$s = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} F(P_{ik})s(D_{ik}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f(\xi_i)g(\eta_k)(x_i - x_{i-1})(y_k - y_{k-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \sum_{k=1}^{m} g(\eta_k)(y_k - y_{k-1}) = s_f . s_g.$$

Тогава

$$|s - I_1 I_2| = |s_f s_g - I_1 I_2| = |s_f s_g - I_1 s_g + I_1 s_g - I_1 I_2|$$

$$\leqq |s_g|\,|s_f - I_1| + |I_1|\,|s_g - I_2| \leqq M \frac{\varepsilon}{2(M+1)} + |I_1| \frac{\varepsilon}{2(|I_1|+1)} < \varepsilon.$$

Така получихме, че за всяко положително число ε може да се намери положително число δ, такова че за всяко разделяне на правоъгълника D на правоъгълничета D_{ik} с диаметър, по-малък от δ, и за всеки избор на точките $P_{ik} \in D_{ik}$ е изпълнено $|s - I_1 I_2| < \varepsilon$, а съгласно забележката към дефиниция 2 това означава, че функцията $f(x)g(y)$ е интегруема в D и

$$\iint_D f(x)g(y)\,dxdy = \int_a^b f(x)\,dx. \int_c^d g(y)\,dy.$$

З а б е л е ж к а. Ако допълнително предположим, че функцията $f(x)g(y)$ е интегруема (например, ако $f(x)$ и $g(x)$ са непрекъснати), то доказаното равенство следва непосредствено от теорема 7. Направете самостоятелно пресмятанията.

1.18. Докажете, че ако $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в $[a, b]$ и $f(x) > 0$ за всяко $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx. \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \geqq (b-a)^2.$$

Р е ш е н и е. Да разгледаме двойния интеграл

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,dxdy, \quad D : \left| \begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ a \leqq y \leqq b. \end{array} \right.$$

Като приложим зад. 1.17, получаваме

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,dxdy = \int_a^b f(x)\,dx. \int_a^b \frac{dy}{f(y)} = \int_a^b f(x)\,dx. \int_a^b \frac{dx}{f(x)}.$$

Тук използвахме, че определените интеграли не зависят от означението на интерграционната променлива. Ясно е, че

$$\iint_D \frac{f(y)}{f(x)}\,dxdy = \int_a^b f(x)\,dx. \int_a^b \frac{dx}{f(x)} = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,dxdy.$$

От неравенството

$$\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \geqq 2$$

и от теореми 6 и 3 следва

$$2 \int_a^b f(x)\,dx. \int_a^b \frac{dx}{f(x)} = \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,dxdy + \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}\,dxdy$$

$$= \iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} \right) dxdy \geqq \iint_D 2dxdy = 2 \iint_D dxdy = 2(b-a)^2.$$

Да отбележим, че ако $f(x, y) \geqq g(x, y)$ за всяка точка $(x, y) \in D$, като поне в една точка $f(x_0, y_0) > g(x_0, y_0)$, и ако $f(x, y)$ и $g(x, y)$ са непрекъснати в D, то

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy > \iint_D g(x, y)\,dxdy.$$

Като вземем предвид, че равенството

$$\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)} = 2$$

е изпълнено за всяка точка $(x, y) \in D$ тогава и само тогава, когато $f(x)$ е константа, виждаме, че в доказаното неравенство има равенство точно тогава, когато $f(x)$ е константа.

1.19. Докажете, че ако функцията $f(x)$ е дефинирана и непрекъсната в интервала $[a, b]$, то

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \leqq (b-a)\int_a^b f^2(x)\,dx,$$

като равенство има само ако $f(x)$ е константа.

У п ъ т в а н е. Разгледайте двойния интеграл

$$\iint_D (f(x) - f(y))^2\,dxdy, \quad D: \left|\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ a \leqq y \leqq b. \end{array}\right.$$

1.20. Докажете, че ако функциите $f(x)$ и $g(x)$ са интегруеми в интервала $[a, b]$, то

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$$

(н е р а в е н с т в о н а К о ш и – Б у н я к о в с к и).

У п ъ т в а н е. Разгледайте двойния интеграл

$$\iint_D (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2\,dxdy, \quad D: \left|\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ a \leqq y \leqq b. \end{array}\right.$$

1.21. Докажете, че ако $p(x)$ е неотрицателна интегруема функция, а $f(x)$ и $g(x)$ са монотонно растящи функции, дефинирани в интервала $[a, b]$, то

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx \cdot \int_a^b p(x)g(x)\,dx \leqq \int_a^b p(x)\,dx \cdot \int_a^b p(x)f(x)g(x)\,dx$$

(н е р а в е н с т в о н а Ч е б и ш о в).

У п ъ т в а н е. Разгледайте двойния интеграл

$$\iint_D p(x)p(y)\Big(f(x) - f(y)\Big)\Big(g(x) - g(y)\Big)\,dxdy, \quad D: \left|\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ a \leqq y \leqq b. \end{array}\right.$$

Използвайте, че от монотонността на $f(x)$ и $g(x)$ следва, че подинтегралната функция е неотрицателна.

1.22. Да се докаже, че ако функцията $f(x)$ е непрекъсната и неотрицателна в интервала $[a, b]$, то

$$0 \leqq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 - \left(\int_a^b f(x)\cos x\,dx\right)^2 - \left(\int_a^b f(x)\sin x\,dx\right)^2$$

$$\leqq M^2\frac{(b-a)^4}{12},$$

където $M = \max\limits_{x\in[a,\,b]} f(x)$.

Р е ш е н и е. Да разгледаме двойния интеграл

$$I = \iint_D f(x)f(y))[(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2]\,dxdy,$$

$$D: \left|\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ a \leqq y \leqq b. \end{array}\right.$$

Тъй като подинтегралната функция е неотрицателна, то $I \geqq 0$. От друга страна, от неравенството

$$f(x)f(y)[(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2]$$

$$\leqq M^2(2 - 2\cos x\cos y - 2\sin x\sin y) = 2M^2[1 - \cos(x-y)]$$

според теорема 6 имаме

$$I \leqq \iint_D 2M^2[1 - \cos(x-y)]\,dxdy$$

$$= 2M^2\left(\iint_D 1\,dxdy - \iint_D \cos(x-y)\,dxdy\right)$$

$$= 2M^2\left[(b-a)^2 - \int_a^b\left(\int_a^b \cos(x-y)\,dy\right)\,dx\right]$$

$$= 2M^2 \left[(b-a)^2 + \int_a^b [\sin(x-b) - \sin(x-a)]\, dx \right]$$

$$= 2M^2 [(b-a)^2 + (-1 + \cos(a-b) + \cos(a-b) - 1]$$

$$= 2M^2 \left[(b-a)^2 - 4\sin^2 \frac{b-a}{2} \right] = 8M^2 \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 - \sin^2 \frac{b-a}{2} \right].$$

Сега ще използваме, че за всяко положително число x са в сила неравенствата

$$0 \leqq x - \sin x \leqq \frac{x^3}{31} \quad \text{и} \quad 0 \leqq x + \sin x \leqq 2x.$$

След почленното им умножаване получаваме

$$0 \leqq (x - \sin x)(x + \sin x) = x^2 - \sin^2 x \leqq \frac{x^4}{3}.$$

Полагаме $x = \dfrac{b-a}{2}$:

$$I \leqq 8M^2 \left[\left(\frac{b-a}{2} \right)^2 - \sin^2 \frac{b-a}{2} \right] \leqq 8M^2 \frac{(b-a)^4}{3.16} = M^2 \frac{(b-a)^4}{6}.$$

С това показахме, че

$$0 \leqq I \leqq M^2 \frac{(b-a)^4}{6}.$$

От друга страна,

$$I = \iint_D f(x)f(y)[(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2]\, dxdy$$

$$= 2 \iint_D f(x)f(y)(1 - \cos x \cos y - \sin x \sin y)\, dxdy$$

$$= 2\Big(\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b f(y)\, dy - \int_a^b f(x) \cos x\, dx \int_a^b f(y) \cos y\, dy$$

$$- \int_a^b f(x) \sin x\, dx \int_a^b f(y) \sin y\, dy\Big)$$

$$= 2 \left[\left(\int_a^b f(x)\, dx \right)^2 - \left(\int_a^b f(x) \cos x\, dx \right)^2 - \left(\int_a^b f(x) \sin x\, dx \right)^2 \right].$$

Като заместим получения израз в доказаното по-горе неравенство, се получава твърдението на задачата.

1.23. Пресметнете несобствения интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2^{x^2}} - \frac{1}{3^{x^2}} \right) dx.$$

Р е ш е н и е. Да разгледаме двойния интеграл

$$\iint_{D_{\varepsilon p}} x y^{-x^2-1}\, dxdy, \quad D_{\varepsilon p} : \left| \begin{array}{l} 0 < \varepsilon \leqq x \leqq p \\ 2 \leqq y \leqq 3. \end{array} \right.$$

Ще пресметнем първо интеграла, разглеждайки $D_{\varepsilon p}$ като криволинеен трапец с хоризонтални основи:

$$\iint_{D_{\varepsilon p}} x y^{-x^2-1}\, dxdy = \int_2^3 \left(\int_\varepsilon^p x y^{-x^2-1} dx \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^3 \left(\int_\varepsilon^p y^{-x^2-1} dx^2 \right) dy$$

$$= -\frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{\ln y} \left(\int_\varepsilon^p e^{(-x^2-1)\ln y} d(-x^2-1)\ln y \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{e^{-(\varepsilon^2+1)\ln y}}{\ln y}\, dy - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{1}{\ln y}\, e^{-(p^2+1)\ln y}\, dy.$$

Тъй като функцията

$$\frac{e^{-(\varepsilon^2+1)\ln y}}{\ln y}$$

е непрекъсната в правоъгълника $[0 \leqq \varepsilon \leqq 1,\ 2 \leqq y \leqq 3]$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_2^3 \frac{e^{-(\varepsilon^2+1)\ln y}}{\ln y}\, dy = \int_2^3 \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{-(\varepsilon^2+1)\ln y}}{\ln y}\, dy$$

$$= \int_2^3 \frac{e^{-\ln y}}{\ln y}\, dy = \int_2^3 \frac{dy}{y \ln y} = \ln \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

От неравенствата

$$0 \leqq \int_2^3 \frac{e^{-(p^2+1)\ln y}}{\ln y}\, dy \leqq \int_2^3 \frac{e^{-(p^2+1)\ln 2}}{\ln 2}\, dy = \frac{1}{\ln 2 . 2^{p^2+1}}$$

следва

$$\lim_{p\to\infty} \int_2^3 \frac{1}{\ln y}\, e^{-(p^2+1)\ln y}\, dy = 0.$$

С това показахме, че

$$\lim_{p\to\infty} (\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{D_{\varepsilon p}} xy^{-x^2-1}\, dxdy) = \frac{1}{2} \ln \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Сега да пресметнем $\iint\limits_{D_{\varepsilon p}} xy^{-x^2-1}\, dxdy$, разглеждайки $D_{\varepsilon p}$ като криволинеен трапец с вертикални основи:

$$\iint_{D_{\varepsilon p}} xy^{-x^2-1}\, dxdy = \int_\varepsilon^p (x \int_2^3 y^{-x^2-1} dy)\, dx = \int_\varepsilon^p \frac{x}{-x^2}\, y^{-x^2} \Big|_2^3 dx$$

$$= \int_\varepsilon^p \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2^{x^2}} - \frac{1}{3^{x^2}} \right) dx.$$

Тъй като границата

$$\lim_{p\to\infty} \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^p \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2^{x^2}} - \frac{1}{3^{x^2}} \right) dx \right) = \lim_{p\to\infty} \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{D_{\varepsilon p}} xy^{-x^2-1}\, dxdy \right)$$

съществува, то несобственият интеграл е сходящ и

$$\int_0^\infty \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2^{x^2}} - \frac{1}{3^{x^2}} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

1.24. Пресметнете несобствения интеграл

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x^3 - \arcsin x^2}{x \ln x}\, dx.$$

Р е ш е н и е. Да пресметнем двойния интеграл

$$\iint_{D_{\varepsilon p}} \frac{x^{y-1}}{\sqrt{1-x^{2y}}}\, dxdy, \qquad D_{\varepsilon p} : \left| \begin{array}{l} 0 < \varepsilon \leqq x \leqq p < 1 \\ 2 \leqq y \leqq 3. \end{array} \right.$$

Първо ще разгледаме $D_{\varepsilon p}$ като криволинеен трапец с хоризонтални основи:

$$\iint_{D_{\varepsilon p}} \frac{x^{y-1}}{\sqrt{1-x^{2y}}}\, dxdy = \int_2^3 \left(\int_\varepsilon^p \frac{x^{y-1}}{\sqrt{1-x^{2y}}}\, dx \right) dy = \int_2^3 \left(\frac{1}{y} \int_\varepsilon^p \frac{dx^y}{\sqrt{1-x^{2y}}} \right) dy$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{y} \arcsin x^y \Big|_\varepsilon^p dy = \int_2^3 \frac{1}{y} (\arcsin p^y - \arcsin \varepsilon^y)\, dy.$$

Като вземем предвид, че функцията

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y = e^{y \ln x} & \text{при } x > 0,\ 2 \leqq y \leqq 3 \\ 0, & \text{при } x = 0,\ 2 \leqq y \leqq 3 \end{cases}$$

е непрекъсната в правоъгълника $\{0 \leqq x \leqq 1,\ 2 \leqq y \leqq 3\}$, то

$$\lim_{p\to 1} \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_2^3 \frac{1}{y} \arcsin p^y\, dy - \int_2^3 \frac{1}{y} \arcsin \varepsilon^y\, dy \right)$$

$$= \int_2^3 \lim_{p\to 1} \frac{1}{y} \arcsin p^y\, dy - \int_2^3 \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin \varepsilon^y\, dy = \int_2^3 \frac{\pi}{2y}\, dy = \frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

Сега ще извършим пресмятанията, разглеждайки $D_{\varepsilon p}$ като криволинеен трапец с вертикални основи:

$$\iint_{D_{\varepsilon p}} \frac{x^{y-1}}{\sqrt{1-x^{2y}}}\, dxdy = \int_\varepsilon^p \left(\frac{1}{x} \int_2^3 \frac{e^{y \ln x}}{\sqrt{1-x^{2y}}}\, dy \right) dx$$

$$= \int_{\varepsilon}^{p} \left(\frac{1}{x \ln x} \int_{2}^{3} \frac{dx^y}{\sqrt{1-x^{2y}}} \right) dx = \int_{\varepsilon}^{p} \frac{1}{x \ln x} \arcsin x^y \Big|_2^3 dx$$

$$= \int_{\varepsilon}^{p} \frac{\arcsin x^3 - \arcsin y^2}{x \ln x} dx.$$

Тъй като границата

$$\lim_{p\to 1} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_{\varepsilon p}} \frac{x^{y-1}}{\sqrt{1-x^{2y}}} dx dy \right) = \lim_{p \to 0} \left(\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{p} \frac{\arcsin x^3 - \arcsin y^2}{x \ln x} dx \right)$$

съществува, то несобственият интеграл е сходящ и

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x^3 - \arcsin x^2}{x \ln x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

1.25. Пресметнете несобствения интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx.$$

Решение. Ще пресметнем двойния интеграл

$$I_{\alpha\beta} = \iint_{D_{\alpha\beta}} \frac{\sin y \cos y}{\cos^2 y + x^2 \sin^2 y} dx dy, \quad D_{\alpha\beta} : \left| \begin{array}{l} 0 < \alpha \leqq x \leqq \beta < 1 \\ 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Първо да разгледаме $D_{\alpha\beta}$ като криволинеен трапец с хоризонтални основи:

$$I_{\alpha\beta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin y \cos y}{\cos^2 y + x^2 \sin^2 y} dx \right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\alpha, \beta, y)\, dy.$$

Нека $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Тогава

$$F(\alpha, \beta, y) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin y \cos y}{\cos^2 y + x^2 \sin^2 y} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx \operatorname{tg} y}{1 + x^2 \operatorname{tg}^2 y}$$

$$= \operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg} y) - \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} y).$$

След елементарни пресмятания при $y = 0$ и $y = \frac{\pi}{2}$ за $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq 1$ получаваме

$$F(\alpha, \beta, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y = 0, \\ \operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg} y) - \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} y) & \text{при } 0 < y < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Нека $0 \leqq y \leqq h < \frac{\pi}{2}$. Функциите $\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} y)$ и $\operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg} y)$ са непрекъснати при $0 \leqq y \leqq h$, $0 \leqq \alpha, \beta \leqq 1$.

Тогава

$$\lim_{\alpha \to 0} f(\alpha) = \lim_{\alpha \to 0} \int_0^h \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} y)\, dy = \int_0^h \lim_{\alpha \to 0} \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} y)\, dy = 0,$$

$$\lim_{\beta \to 1} f(\beta) = \lim_{\beta \to 1} \int_0^h \operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg} y)\, dy = \int_0^h \lim_{\beta \to 1} \operatorname{arctg}(\beta \operatorname{tg} y)\, dy = \int_0^h y\, dy.$$

Нека ε е произволно положително число, по-малко от $\frac{\pi^2}{2}$, и нека $h = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{\pi}$.

От равенството $\lim\limits_{\alpha \to 0} f(\alpha) = 0$ следва, че можем да намерим положително число δ_1, такова че при $0 < \alpha < \delta_1$ да бъде в сила $0 < f(\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$. Като вземем предвид, че $\operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} y) < \frac{\pi}{2}$, получаваме

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} y)\, dy = \int_0^h \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} y)\, dy + \int_h^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{tg} y)\, dy$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{2} + \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2} dy = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - h \right) = \varepsilon.$$

Тъй като ε беше избрано произволно, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(\alpha \operatorname{tg} y)\,dy = 0.$$

Нека отново да вземем произволно положително число ε и да положим $h = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2\pi}$. От равенството $\lim\limits_{\beta\to 1} f(\beta) = \int_0^h y\,dy$ следва, че можем да намерим число δ_2, такова че за всяко число β, удовлетворяващо $|1-\beta| < \delta_2$, да бъде изпълнено

$$\left| f(\beta) - \int_0^h y\,dy \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогава за всяко β, за което $|1-\beta| < \delta_2$, ще имаме

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(\beta \operatorname{tg} y)\,dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dy \right|$$

$$= \left| \int_0^h \operatorname{arc\,tg}(\beta \operatorname{tg} y)\,dy - \int_0^h y dy + \int_h^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(\beta \operatorname{tg} y)\,dy - \int_h^{\frac{\pi}{2}} y dy \right|$$

$$\leqq |f(\beta) - \int_0^h y dy| + \int_h^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(\beta \operatorname{tg} y)\,dy + \int_h^{\frac{\pi}{2}} y dy$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\,dy + \int_h^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2}\,dy = \frac{\varepsilon}{2} + 2\left(\frac{\pi}{2} - h\right)\frac{\pi}{2} = \varepsilon.$$

Тъй като ε е произволно, то

$$\lim_{\beta\to 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(\beta \operatorname{tg} y)\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y dy = \frac{\pi^2}{8}.$$

Сега ще пресметнем двойния интеграл, разглеждайки $D_{\alpha\beta}$ като криволинеен трапец с вертикални основи:

$$I_{\alpha\beta} = \iint_{D_{\alpha\beta}} \frac{\sin y \cos y}{\cos^2 y + x^2 \sin^2 y}\,dx dy = \int_\alpha^\beta \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin y \cos y}{\cos^2 y + x^2 \sin^2 y}\,dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2y}{1 + \cos 2y + x^2(1-\cos 2y)}\,d2y \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{1-x^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\cos 2y(1-x^2)}{1 + x^2 + (1-x^2)\cos 2y} \right) dx.$$

Да направим смяната $t = (1-x^2)\cos 2y$:

$$I_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left(\frac{1}{1-x^2} \int_{-(1-x^2)}^{1-x^2} \frac{1}{1+x^2+t}\,dt \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{1}{1-x^2} \ln(1+x^2+t)\Big|_{-(1-x^2)}^{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\ln 2 - \ln 2x^2}{1-x^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx.$$

И така

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\lim_{\beta\to 1} \int_\alpha^\beta \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx \right) = \lim_{\alpha\to 0}\left(\lim_{\beta\to 1} I_{\alpha\beta}\right)$$

$$= \lim_{\beta\to 1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(\beta \operatorname{tg} y)\,dy - \lim_{\alpha\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arc\,tg}(\alpha \operatorname{tg} y)\,dy = \frac{\pi^2}{8}.$$

С това показахме, че несобственият интеграл е сходящ и

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

1.26. Пресметнете несобствения интеграл

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{x^a \ln x}\left(a+\frac{1}{\ln x}\right) - \frac{1}{\ln^2 x}\right] dx \text{ при } 0<a<1.$$

Упътване. Разгледайте двойния интеграл

$$\iint_{D_\varepsilon} yx^{-y}\,dxdy, \qquad D_\varepsilon: \left|\begin{array}{l} 0<\varepsilon \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq a. \end{array}\right.$$

1.27. Пресметнете несобствения интеграл

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2\sqrt{x}) - \ln(1+x\sqrt{x})}{x \ln x}\,dx.$$

Упътване. Разгледайте двойния интеграл

$$\iint_{D_{\alpha\beta}} \frac{x^{y-1}}{1+x^y}\,dxdy, \quad D_{\alpha\beta}: \left|\begin{array}{l} 0<\alpha \leqq x \leqq \beta < 1 \\ \frac{3}{2} \leqq y \leqq \frac{5}{2}. \end{array}\right.$$

1.28. Пресметнете несобствения интеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx.$$

Упътване. Разгледайте двойния интеграл

$$\iint_{D_{\alpha\beta}} \frac{dx\,dy}{(1-x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad D_{\alpha\beta}: \left|\begin{array}{l} 0<\alpha \leqq x \leqq \beta < 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1. \end{array}\right.$$

1.29. Пресметнете несобствения интеграл

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2x^2} - e^{-x^2}}{x}\,dx.$$

Упътване. Разгледайте двойния интеграл

$$\int_{D_{\alpha\beta}} xe^{-yx^2}\,dxdy, \quad D_{\alpha\beta}: \left|\begin{array}{l} 0<\alpha \leqq x \leqq p \\ 1 \leqq y \leqq 2. \end{array}\right.$$

1.30. Пресметнете несобствения интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \operatorname{cotg}\frac{x}{2}\,dx.$$

Упътване. Разгледайте двойния интеграл

$$\iint_{D_{\alpha\beta}} \frac{dx\,dy}{1-y^2\cos^2 x}, \quad D_{\alpha\beta}: \left|\begin{array}{l} 0<\alpha \leqq x \leqq \beta < \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq y \leqq 1. \end{array}\right.$$

§ 2. Смяна на променливите при двойни интеграли

Теорема 1. Нека компактното квадрируемо множество D' се изобразява еднозначно с помощта на трансформацията

$$T: \left|\begin{array}{l} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \end{array}\right.$$

в компактното квадрируемо множество D. Нека функциите $f(u, v)$ и $g(u, v)$ притежават непрекъснати частни производни в D' и нека

$$\Delta = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \left|\begin{array}{cc} f'_u & f'_v \\ g'_u & g'_v \end{array}\right| \neq 0$$

навсякъде в D' с изключение на множество с лице нула. Тогава, ако функцията $F(x, y)$ е интегруема в D, то и функцията $F(f, g)$ е интегруема в D' и

$$\iint_D F(x, y)\,dxdy = \iint_{D'} F(f, g)\,|\Delta|\,dudv.$$

Забележка. Условието за еднозначност в D' може да бъде нарушено в множество с лице, равно на нула.

Теорема 2. Ако

$$T_1: \left|\begin{array}{l} x = F(s, t) \\ y = G(s, t) \end{array}\right. \quad \text{и} \quad T_2: \left|\begin{array}{l} s = f(u, v) \\ t = g(u, v) \end{array}\right.$$

са две трансформации и

$$T = T_1T_2: \left|\begin{array}{l} x = F(f(u, v), g(u, v)) \\ y = G(f(u, v), g(u, v)), \end{array}\right.$$

то

$$\frac{D(F,G)}{D(u,v)}=\frac{D(F,G)}{D(s,t)}\cdot\frac{D(f,g)}{D(u,v)}.$$

Най-често срещаната смяна на променливите е в полярни координати:

$$T:\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi, \quad 0\leqq\rho, \quad \alpha\leqq\varphi\leqq\alpha+2\pi, \end{array}\right.$$

където α е фиксирано число. Обикновено α се избира 0 или $-\pi$.

$$\Delta=\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho.$$

Геометричният смисъл на ρ и φ е следният: ρ е разстоянието от точката (x, y) до началото на координатната система $(0, 0)$, а φ — ъгълът, който сключват оста Ox и радиус-векторът на точката (x, y) (фиг. 27).

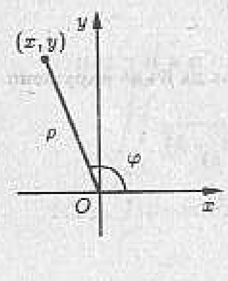
Ако областта D е криволинеен сектор в равнината Oxy (фиг. 28), т. е. D се определя с неравенствата

$$D:\left|\begin{array}{l} \alpha\leqq\varphi\leqq\beta \\ \rho_1(\varphi)\leqq\rho\leqq\rho_2(\varphi), \end{array}\right.$$

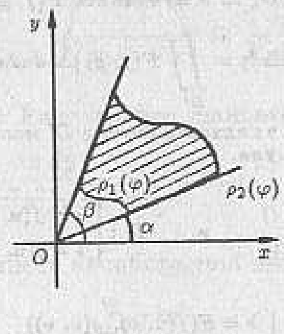
след смяната на променливите множеството D' ще бъде криволинеен трапец с вертикални основи в равнината $O\rho\varphi$. Ако пък D е криволинеен венец в равнината Oxy (фиг. 29), т. е. D се определя с неравенствата

$$D:\left|\begin{array}{l} a\leqq\rho\leqq b \\ \varphi_1(\rho)\leqq\varphi\leqq\varphi_2(\rho), \end{array}\right.$$

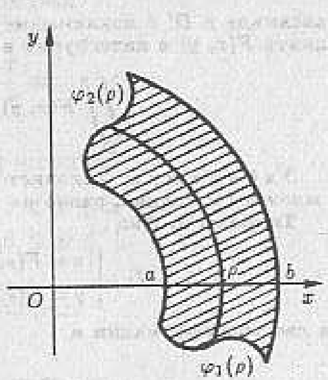
след смяната на променливите множеството D' ще бъде криволинеен трапец с хоризонтални основи в равнината $O\rho\varphi$.



Фиг. 27



Фиг. 28



Фиг. 29

2.1. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \qquad D: x^2+y^2\leqq R \quad (R>0).$$

Р е ш е н и е. Да направим смяна в полярни координати. Като заместим $x=\rho\cos\varphi$ и $y=\rho\sin\varphi$ в неравенството, определящо D, получаваме

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2\leqq R^2$$

и тъй като $\rho\geqq 0$, то $0\leqq\rho\leqq R$. Така за D' получаваме неравенствата (избираме $\alpha=0$)

$$D':\left|\begin{array}{l} 0\leqq\varphi\leqq 2\pi \\ 0\leqq\rho\leqq R. \end{array}\right.$$

Тогава съгласно теорема 1 имаме

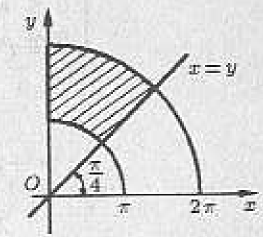
$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=\iint\limits_{D'}\sqrt{\rho^2}.\rho\,d\varphi\,d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi.\int_0^R\rho^2\,d\rho=2\pi\,\frac{R^3}{3}.$$

2.2. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy, \qquad D:\left|\begin{array}{l} 0\leqq x\leqq y \\ \pi^2\leqq x^2+y^2\leqq 4\pi^2. \end{array}\right.$$

Р е ш е н и е. Ясно е, че областта D е разположена в първи квадрант (фиг. 30). Ще направим смяна в полярни координати, като ъгъла φ меним в интервала $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. За D' получаваме неравенствата

$$D':\left|\begin{array}{l} 0\leqq\rho\cos\varphi\leqq\rho\sin\varphi \\ \pi^2\leqq\rho^2\leqq 4\pi^2 \\ \rho\geqq 0,\ 0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$



Фиг. 30

От $0\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$ и $\cos\varphi\leqq\sin\varphi$ следва $\frac{\pi}{4}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2}$ и като вземем предвид, че $\rho\geqq 0$, получаваме

$$D':\left|\begin{array}{l} \frac{\pi}{4}\leqq\varphi\leqq\frac{\pi}{2} \\ \pi\leqq\rho\leqq 2\pi. \end{array}\right.$$

Тогава според теорема 1

$$\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D'} \sin\rho.\rho\,d\varphi\,d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi.\int\limits_{\pi}^{2\pi}\rho\sin\rho\,d\rho$$

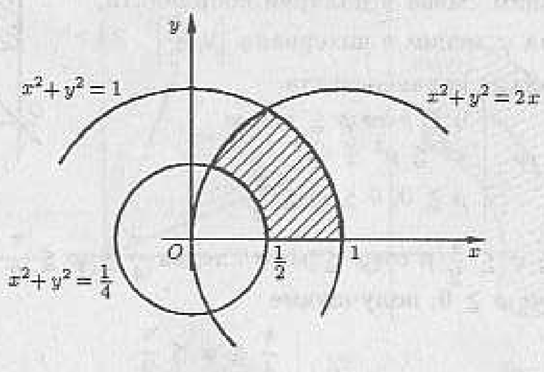
$$= \frac{\pi}{4}\Big(-\rho\cos\rho\Big|_{\pi}^{2\pi} + \int\limits_{\pi}^{2\pi}\cos\rho\,d\rho\Big) = \frac{\pi}{4}\left(-3\pi+\sin\rho\Big|_{\pi}^{2\pi}\right) = -\frac{3\pi^2}{4}.$$

2.3. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(x^2+y^2)\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l} \frac{1}{4} \leqq x^2+y^2 \leqq 1 \\ x^2+y^2 \leqq 2x \\ 0 \leqq y. \end{array}\right.$$

Р е ш е н и е. Областта D е криволинеен венец, разположен в първи квадрант (фиг. 31). Ще направим смяна на променливите в полярни координати и ще представим D' в равнината $O\varphi\rho$ като криволинеен трапец с хоризонтални основи:

$$D': \left|\begin{array}{l} \frac{1}{4} \leqq \rho^2 \leqq 1 \\ \rho^2 \leqq 2\rho\cos\varphi \\ 0 \leqq \sin\varphi \\ 0 \leqq \rho, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{array}\right. \qquad \text{или} \quad D': \left|\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leqq \rho \leqq 1 \\ \rho \leqq 2\cos\varphi \\ 0 \leqq \sin\varphi \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi. \end{array}\right.$$



Фиг. 31

От последните две неравенства следва $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Като вземем предвид, че в този интервал $\arccos(\cos\varphi) = \varphi$ и че функцията $\arccos x$ е монотонно намаляваща, можем да заключим, че неравенството $\frac{\rho}{2} \leqq \cos\varphi$ е еквивалентно с неравенствата $\frac{\rho}{2} \leqq 1$ и $\arccos\frac{\rho}{2} \geqq \arccos(\cos\varphi) = \varphi$. Така за D' получаваме

$$D': \left|\begin{array}{l} \frac{1}{2} \leqq \rho \leqq 1 \\ 0 \leqq \varphi \leqq \arccos\frac{\rho}{2}. \end{array}\right.$$

Тогава

$$\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln(x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{\rho\sin\varphi}{\rho}\ln\rho^2.\rho d\varphi d\rho$$

$$= 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}(\rho\ln\rho\int\limits_{0}^{\arccos\frac{\rho}{2}}\sin\varphi d\varphi)\,d\rho = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\rho\ln\rho(-\cos\varphi)\Big|_0^{\arccos\frac{\rho}{2}}d\rho$$

$$= 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\rho\ln\rho\left(1-\frac{\rho}{2}\right)d\rho = 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\ln\rho\,d\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{6}\right)$$

$$= 2\ln\rho\cdot\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{6}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} - 2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{\rho}{2}-\frac{\rho^2}{6}\right)d\rho$$

$$= -\frac{5}{24}\ln\frac{1}{2} - 2\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho^3}{18}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{5}{24}\ln 2 - \frac{1}{4}.$$

2.4. Пресметнете двойния интеграл

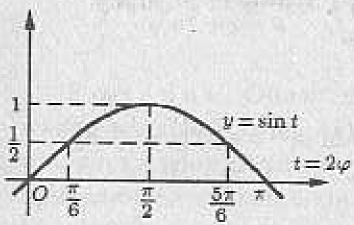
$$\iint\limits_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq x \\ 1 \leqq 2xy \\ x^2+y^2 \leqq 2. \end{array}\right.$$

Р е ш е н и е. Тъй като областта D е криволинеен сектор, разположен в първи квадрант, ще направим смяна на променливите в полярни координати при $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. За D' получаваме неравенствата

$$D': \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \rho \sin\varphi \leqq \rho \cos\varphi \\ 2\rho^2 \sin\varphi \cos\varphi \geqq 1 \\ \rho^2 \leqq 2 \\ 0 \leqq \rho,\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad D': \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \sin\varphi \leqq \cos\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi\cos\varphi}} \leqq \rho \leqq \sqrt{2} \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

От първото и третото неравенство следва $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$, а от второто:

$$\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi\cos\varphi}} \leqq \sqrt{2} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} \leqq \sin 2\varphi.$$



Фиг. 32

Тъй като $0 \leqq 2\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, неравенството $\frac{1}{2} \leqq \sin 2\varphi$ е изпълнено при $\frac{\pi}{6} \leqq 2\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, т. е. при $\frac{\pi}{12} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$ (фиг. 32).

И така

$$D': \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{12} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi\cos\varphi}} \leqq \rho \leqq \sqrt{2}. \end{array} \right.$$

Тогава според теорема 1

$$\iint\limits_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{\rho\cos\varphi\,\rho\sin\varphi}{(\rho^2)^3}\,\rho\,d\varphi\,d\rho$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin\varphi\cos\varphi \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2\sin\varphi\cos\varphi}}}^{\sqrt{2}} \frac{d\rho}{\rho^3} \right) d\varphi$$

$$= -\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi \left(\frac{1}{2} - 2\sin\varphi\cos\varphi \right) d\varphi = \frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{64}.$$

2.5. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^{11}(x^2+y^2)}}{y^4}\,dxdy, \quad D: \left| \begin{array}{l} (x^2+y^2)^7 \leqq xy^6 \\ 0 \leqq x \leqq y. \end{array} \right.$$

Решение. Подинтегралната функция не е дефинирана в точката $(0, 0)$, но тъй като в множеството D е изпълнено неравенството $x \leqq y$, то

$$0 \leqq F(x, y) = \sqrt{\frac{x^{11}(x^2+y^2)}{y^4}} \leqq \frac{\sqrt{y^{11}.2y^2}}{y^4} \leqq \sqrt[3]{2y},$$

а оттук следва, че $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} F(x, y) = 0$ и следователно, ако дефинираме $F(0, 0) = 0$, функцията $F(x, y)$ ще бъде непрекъсната навсякъде в D.

След смяна в полярни координати имаме

$$D': \left| \begin{array}{l} \rho^{14} \leqq \rho^7 \cos\varphi \sin^6\varphi \\ 0 \leqq \cos\varphi\sin\varphi \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ \rho \geqq 0. \end{array} \right.$$

Тъй като $\cos\varphi \geqq 0$ и $\sin\varphi \geqq 0$, то $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, а в първи квадрант неравенството $\cos\varphi \leqq \sin\varphi$ е еквивалентно с неравенството $\frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$.

Така получихме

$$D': \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \rho \leqq \sqrt[7]{\cos\varphi \sin^6\varphi} \end{array} \right.$$

и следователно

$$\iint\limits_D \frac{\sqrt[3]{x^{11}(x^2+y^2)}}{y^4}\,dxdy = \iint\limits_{D'} \frac{\sqrt[3]{\rho^{13}\cos^{11}\varphi}}{\rho^4\sin^4\varphi}\,\rho\,d\varphi d\rho$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_0^{\sqrt[7]{\cos\varphi\sin^6\varphi}} \frac{\cos^{\frac{11}{3}}\varphi}{\sin^4\varphi}\,\rho^{\frac{4}{3}}d\rho \right) d\varphi = \frac{3}{7}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$= \frac{3}{7}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin^2\varphi)^2}{\sin^2\varphi}\,d\varphi = -\frac{3}{7}(\operatorname{cotg}\varphi + 2\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{3}{7} - \frac{3\pi}{14} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{38-5\pi}{56}.$$

2.6. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l} (x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}x \leqq x^2 - 3y^2 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0. \end{array}\right.$$

Решение. Ще направим смяна в полярни координати. За областта D' получаваме неравенствата

$$D': \left|\begin{array}{l} \rho^5.\rho\cos\varphi \leqq \rho^2\cos^2\varphi - 3\rho^2\sin^2\varphi \\ \cos\varphi \geqq 0,\ \sin\varphi \geqq 0 \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ \rho \geqq 0. \end{array}\right.$$

От $\rho^4\cos\varphi \leqq \cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi$ и $\cos\varphi \geqq 0$ следва

$$0 \leqq \cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi = (\cos\varphi + \sqrt{3}\sin\varphi)(\cos\varphi - \sqrt{3}\sin\varphi).$$

Тъй като първият множител е положителен, то това неравенство е еквивалентно с неравенството $\cos\varphi \geqq \sqrt{3}\sin\varphi$, което в първи квадрант е изпълнено при $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{6}$. Оттук е ясно, че $\cos\varphi \neq 0$, и следователно за D' получаваме

$$D': \left|\begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{6} \\ 0 \leqq \rho \leqq \sqrt[4]{\frac{\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi}{\cos\varphi}} = \rho(\varphi). \end{array}\right.$$

Тогава

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D'} \rho^2.\rho d\varphi\,d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{\rho(\varphi)} \rho^3\,d\rho\right) d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^4(\varphi)\,d\varphi$$

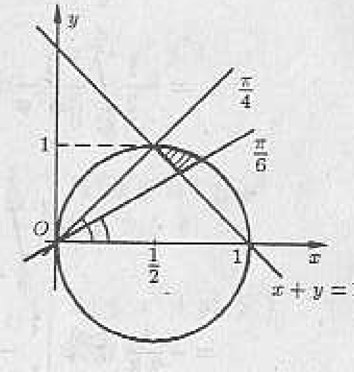
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos\varphi\,d\varphi - \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= \sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{3}{4}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\ln 3.$$

2.7. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2(x^2+y^2)}, \quad \text{където} \quad D: \left|\begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq x \leqq \sqrt{3}y \\ 1 \leqq x+y. \end{array}\right.$$

Решение. От фиг. 33 е ясно, че множеството D е криволинеен сектор, заключен между правата $x = \sqrt{3}y$, която сключва с оста Ox ъгъл, равен на $\frac{\pi}{6}$, и правата p, минаваща през пресечната точка P на окръжността $x^2+y^2 = x$ с правата $x+y=1$. Като решим съответната система, получаваме координатите на P: $x = y = \frac{1}{2}$. Следователно правата p има уравнение $y = x$ и сключва с оста Ox ъгъл, равен на $\frac{\pi}{4}$.



Фиг. 33

Функцията $\rho_1(\varphi)$, която ограничава D' отдолу, ще намерим след заместване в уравнението на правата $x+y=1$:

$$\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi = 1 \quad \text{или} \quad \rho_1(\varphi) = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

Функцията $\rho_2(\varphi)$, която ограничава областта D' отгоре, ще намерим след заместване в уравнението на окръжността $x^2+y^2 = x$:

$$\rho^2 = \rho\cos\varphi \quad \text{или} \quad \rho_2(\varphi) = \cos\varphi.$$

Получихме, че множеството D' се определя с неравенствата

$$D' : \left| \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi} \leqq \rho \leqq \cos\varphi. \end{array} \right.$$

Тогава

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2(x^2+y^2)} = \iint\limits_{D'} \frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi\,\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \frac{d\rho}{\rho^3} \right) d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\varphi} \left[\frac{1}{\cos^2\varphi} - (\sin\varphi + \cos\varphi)^2 \right] d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2\varphi} \left(\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} - 2\sin\varphi\cos\varphi \right) d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi + \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2.3}\,\mathrm{tg}^3\varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} - \ln\cos\varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-9+\sqrt{3}}{54} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

2.8. Пресметнете следните двойни интеграли:

а) $\displaystyle\iint\limits_D (x^2+y^2)^3\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} (x^2+y^2)^2 \leqq xy \\ x \geqq 0; \end{array} \right.$

б) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{xy}{\sqrt{1+(x^2+y^2)^2}}\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2y \\ x \geqq 0; \end{array} \right.$

в) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{xy}{\sqrt{25(x^2+y^2)^2-1}}\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} \frac{1}{4} \leqq x^2+y^2 \leqq x \\ y \geqq 0; \end{array} \right.$

г) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{(6-x^2-y^2)^2},\qquad D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq 2y \\ y \leqq \sqrt{3}x; \end{array} \right.$

д) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq 2 \\ x^2-y^2 \geqq 1 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0; \end{array} \right.$

е) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{y^2\sqrt{x^2+y^2}},\qquad D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq 2y \\ \sqrt{3} \leqq x+\sqrt{3}y \\ y \leqq \sqrt{3}x; \end{array} \right.$

ж) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq 1 \\ y^2 \leqq x^2 \\ 0 \leqq x,\ y \leqq \frac{1}{2}; \end{array} \right.$

з) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{2(x^2+y^2)^2+1}\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq 1 \\ y^2 \leqq x^2 \\ 0 \leqq x; \end{array} \right.$

и) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} (x^2+y^2)x^2 \leqq y^2 \\ 0 \leqq y \leqq x; \end{array} \right.$

к) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2-y^2)^2}\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} 2x \leqq x^2+y^2 \leqq 4 \\ 0 \leqq y; \end{array} \right.$

л) $\displaystyle\iint\limits_D y\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} (x^2+y^2)^2 x \leqq x^2-y^2 \\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y; \end{array} \right.$

м) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} (x^2+y^2)^2 \leqq x^3-xy^2 \\ \frac{3}{8} \leqq x; \end{array} \right.$

н) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\,dxdy,\qquad D: \left| \begin{array}{l} (x^2+y^2)^2 \leqq 3y^3-x^2y \\ \frac{1}{2} \leqq y; \end{array} \right.$

о) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2+6}\,dxdy$, $\qquad D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq 3 \\ x^2 \leqq y^2 \\ 0 \leqq y; \end{array} \right.$

п) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x}{x^2+y^2+1}\,dxdy$, $\qquad D: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq 3 \\ x^2 \leqq 3y^2 \\ 0 \leqq x. \end{array} \right.$

2.9. Пресметнете двойните интеграли:

а) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x^4}\,dxdy$, $\qquad D: \left| \begin{array}{l} 9x^2+9y^2+1 \leqq 10x \\ 0 \leqq y; \end{array} \right.$

б) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{y^4}\,dxdy$, $\qquad D: \left| \begin{array}{l} 2x^2+2y^2+2 \leqq 5y \\ 0 \leqq x; \end{array} \right.$

в) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $\qquad D: \left| \begin{array}{l} 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2x \\ 0 \leqq 0. \end{array} \right.$

Упътване. Направете смяна в полярни координати и разгледайте D' като криволинеен трапец с основи, успоредни на оста $O\varphi$.

В някои интеграли, в които се среща групата $\left(\frac{x}{a}\right)^\beta + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta$, е удобно да се направи смяна на променливите в обобщени полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = a\rho\cos^\alpha\varphi \\ y = b\rho\sin^\alpha\varphi, \end{array} \right.$$

където числото α се избира така, че след заместване да имаме

$$\left(\frac{x}{a}\right)^\beta + \left(\frac{y}{b}\right)^\beta = \rho^\beta.$$

Обикновено при тази смяна ъгълът φ трябва да се мени в интервала $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, защото:

— ако α не е цяло число, функциите $\cos^\alpha\varphi$ и $\sin^\alpha\varphi$ може да са дефинирани само при $\cos\varphi \geqq 0$ и $\sin\varphi \geqq 0$;

— ако α е четно естествено число и например $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$, имаме $a\rho\cos^\alpha\varphi \geqq 0$ и $b\rho\sin^\alpha\varphi \geqq 0$. Лесно се съобразява, че множеството D', определено с неравенствата $\rho \geqq 0$ и $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, при тази трансформация се изобразява взаимно-еднозначно върху първи квадрант (с изключение на

отсечката $\rho = 0$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$). Ако ъгълът φ се изменя в по-голям интервал, то еднозначността на трансформацията ще бъде нарушена в множество с лице, различно от нула.

Функционалната детерминанта на тази трансформация е

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos^\alpha\varphi & -\alpha a\rho\cos^{\alpha-1}\varphi\sin\varphi \\ b\sin^\alpha\varphi & \alpha b\rho\sin^{\alpha-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = \alpha ab\rho\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi.$$

2.10. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint\limits_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dxdy, \qquad D: \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq \sqrt{a} \quad (a>0) \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0. \end{array} \right.$$

Решение. Ще направим смяната

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos^4\varphi \\ y = \rho\sin^4\varphi, \qquad \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Функционалната детерминанта е

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = 4\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi.$$

След заместване в неравенствата, определящи D, получаваме

$$D': \left| \begin{array}{l} \rho\cos^4\varphi+\rho\sin^4\varphi = \sqrt{\rho} \leqq \sqrt{a} \\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad D': \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \rho \leqq a. \end{array} \right.$$

Тогава според теорема 1

$$\iint\limits_D (\sqrt{x}+\sqrt{y})\,dxdy = \iint\limits_{D'} \sqrt{\rho}.4\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi\,d\varphi d\rho$$

$$= 4\int\limits_0^a \rho^{\frac{3}{2}}d\rho.\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\sin^3\varphi d\varphi = \frac{8}{5}\,a^{\frac{5}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\sin^3\varphi\,d\sin\varphi$$

$$= \frac{8}{5}\sqrt{a^5}\left(\frac{1}{4}\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{6}\sin^6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{15}\sqrt{a^5}.$$

2.11. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint\limits_D xy\,dxdy, \qquad D: \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 \leqq \dfrac{x^2y}{c^3}\ (a,\ b,\ c>0) \\ x \geqq 0. \end{array} \right.$$

Р е ш е н и е. Ще направим смяната

$$\left| \begin{array}{l} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi, \qquad \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi. \end{array} \right.$$

Функционалната детерминанта е $\Delta = ab\rho$.

След заместване в неравенствата, определящи D, получаваме

$$D': \left| \begin{array}{l} \rho^4 \leqq \dfrac{a^2b}{c^3}\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \geqq 0 \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ \rho \geqq 0. \end{array} \right.$$

От първото неравенство следва, че $\sin\varphi \geqq 0$, и тъй като $\cos\varphi \geqq 0$ и $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, то $0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$.

И така D' се определя с неравенствата

$$D': \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \rho \leqq \dfrac{a^2b}{c^3}\cos^2\varphi\sin\varphi = \rho(\varphi). \end{array} \right.$$

Тогава

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \iint\limits_{D'} ab\rho^2\cos\varphi\sin\varphi . ab\rho\,d\varphi d\rho$$

$$= a^2b^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\varphi\sin\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)}\rho^3\,d\rho\right)d\varphi$$

$$= \frac{a^2b^2}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^8b^4}{c^{12}}\cos^9\varphi\sin^5\varphi\,d\varphi = \frac{a^{10}b^6}{840c^{12}}.$$

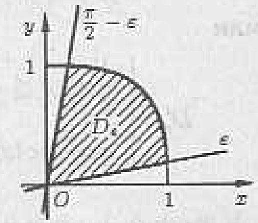
2.12. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint\limits_D \frac{xy^2\sqrt{1-x^3-y^3}}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}}\,dxdy, \qquad D: \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{27} \leqq x^3+y^3 \leqq 1 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0. \end{array} \right.$$

Р е ш е н и е. Ще направим смяната

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos^{\frac{2}{3}}\varphi \\ y = \rho\sin^{\frac{2}{3}}\varphi, \qquad \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

При $\varphi = 0$ не съществува частната производна y'_φ, а при $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ не съществува x'_φ. Затова ще разгледаме областта



Фиг. 34

$$D_\varepsilon: \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{27} \leqq x^3+y^3 \leqq 1 \\ \operatorname{tg}\varepsilon \leqq \dfrac{y}{x} \leqq \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0, \end{array} \right.$$

където ε е произволно число от интервала $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ (фиг. 34).

Ясно е, че областта $D \setminus D_\varepsilon$ се покрива с два сектора с радиус 1 и ъгъл ε, т. е. $s(D \setminus D_\varepsilon) < \varepsilon$. От неравенството

$$\frac{x\sqrt{1-x^3-y^3}}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}} \leqq 9$$

следва

$$I_\varepsilon = \iint\limits_{D\setminus D_\varepsilon}\frac{x\sqrt{1-x^3-y^3}}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}}\,dxdy \leqq 9\iint\limits_{D\setminus D_\varepsilon}dxdy = 9s(D\setminus D_\varepsilon) < 9\varepsilon$$

и след граничен преход получаваме $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 0$.

От последното равенство и от $\iint\limits_D = \iint\limits_{D_\varepsilon} + \iint\limits_{D\setminus D_\varepsilon}$ получаваме

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint\limits_{D_\varepsilon} = \iint\limits_D.$$

Тъй като в D_ε всички частни производни съществуват и са непрекъснати, то в двойния интеграл

$$\iint\limits_{D_\varepsilon}\frac{xy^2\sqrt[3]{1-x^3-y^3}}{(x^3+y^3)^{\frac{2}{3}}}\,dxdy$$

можем да направим разглежданата смяна. Областта D'_ε се определя с неравенствата

$$D'_\varepsilon : \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{27} \leqq \rho^3 \leqq 1 \\ \operatorname{tg}\varepsilon \leqq \operatorname{tg}^{\frac{2}{3}} \varphi \leqq \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \end{array} \right.$$

или

$$D'_\varepsilon : \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{3} \leqq \rho \leqq 1 \\ \alpha = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} \varepsilon\right) \leqq \varphi \leqq \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right) = \beta. \end{array} \right.$$

Тъй като при $\varepsilon \to 0$ имаме $\operatorname{tg}\varepsilon \to 0$ и $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) \to \infty$, то $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \alpha = 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \beta = \frac{\pi}{2}$.

Функционалната детерминанта е

$$\Delta = \frac{2\rho}{3\cos^{\frac{1}{3}} \varphi \sin^{\frac{1}{3}} \varphi}.$$

И така

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} \frac{xy^2 \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}}{(x^3 + y^3)^{\frac{2}{3}}}\, dxdy = \frac{2}{3} \iint\limits_{D'_\varepsilon} \frac{\rho \cos^{\frac{2}{3}} \varphi\, \rho^2 \sin^{\frac{4}{3}} \varphi\, \rho \sqrt[3]{1 - \rho^3}}{\rho^2 \cos^{\frac{1}{3}} \varphi \sin^{\frac{1}{3}} \varphi}\, d\varphi d\rho$$

$$= \frac{2}{3} \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \rho^2 \sqrt[3]{1 - \rho^3}\, d\rho . \int\limits_{\alpha}^{\beta} \cos^{\frac{1}{3}} \varphi \sin \varphi\, d\varphi = \frac{2.3}{3.16} \left(\frac{26}{27}\right)^{\frac{4}{3}} (\cos^{\frac{4}{3}} \alpha - \cos^{\frac{4}{3}} \beta).$$

Следователно

$$\iint\limits_{D} \frac{xy^2 \sqrt[3]{1 - x^3 - y^3}}{(x^3 + y^3)^{\frac{2}{3}}}\, dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} = \frac{13\sqrt[3]{26}}{324}.$$

2.13. Пресметнете следните двойни интеграли:

а) $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{2x^2 + y^2}{(2x^2 + y^2 + y)^3}\, dxdy, \qquad D : \left| \begin{array}{l} 1 \leqq 2x^2 + y^2 \leqq 2 - 2y \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0; \end{array} \right.$

б) $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{x^2 + 4y^2}{(x^2 + 4y^2 + x)^3}\, dxdy, \qquad D : \left| \begin{array}{l} 2 - 2x \leqq x^2 + 4y^2 \leqq 1 \\ y \geqq 0; \end{array} \right.$

в) $\displaystyle\iint\limits_{D} \frac{dxdy}{(x^2 + 2y^2 + 2)^2}, \qquad D : \left| \begin{array}{l} \left(\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2}\right)^2 \leqq \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} \\ x^2 + 2y^2 \geqq 2; \end{array} \right.$

г) $\displaystyle\iint\limits_{D} x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3}\, dxdy, \qquad D : \left| \begin{array}{l} x^3 + y^3 \leqq 1 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0. \end{array} \right.$

2.14. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint\limits_{D} \frac{x^2 \sin(xy)}{y}\, dxdy, \qquad D : \left| \begin{array}{l} ay \leqq x^2 \leqq by \\ cx \leqq y^2 \leqq dx,\ 0 < a < b,\ 0 < c < d. \end{array} \right.$$

Р е ш е н и е. Да направим смяната

$$T^{-1} : \left| \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{y} = u \\ \dfrac{y^2}{x} = v \end{array} \right. \quad \text{или} \quad T : \left| \begin{array}{l} x = \sqrt[3]{u^2 v} \\ y = \sqrt[3]{uv^2}. \end{array} \right.$$

Функционалната детерминанта е

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{u^2}{v^2}} \\ \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{v^2}{u^2}} & \dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

Очевидно областта D се преобразува в правоъгълника

$$D' : \left| \begin{array}{l} a \leqq u \leqq b \\ c \leqq v \leqq d \end{array} \right.$$

и следователно

$$\iint\limits_{D} \frac{x^2 \sin(xy)}{y}\, dxdy = \iint\limits_{D'} u.\sin(uv).\frac{1}{3}\, dudv$$

$$= \int\limits_{a}^{b} \left(\int\limits_{c}^{d} u \sin(uv)\, dv \right) du = \int\limits_{a}^{b} [\cos(cu) - \cos(du)]\, du$$

$$= \frac{1}{c}[\sin(cb) - \sin(ca)] - \frac{1}{d}[\sin(db) - \sin(da)].$$

2.15. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint_D \frac{x^5}{y^3(1+x^4)^3}\,dxdy, \qquad D: \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leqq x \leqq 4y \leqq 4x \\ xy \leqq 1. \end{array} \right.$$

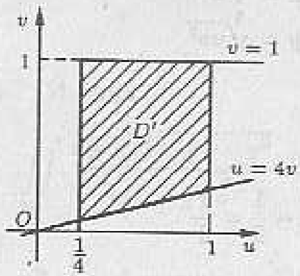
Р е ш е н и е. Да направим смяната

$$T^{-1}: \left| \begin{array}{l} \frac{y}{x} = u \\ yx = v \end{array} \right. \quad \text{или} \quad T: \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{v}{u}} \\ y = \sqrt{uv}. \end{array} \right.$$

Функционалната детерминанта е

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u^3}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{uv}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4u} - \frac{1}{4u} = -\frac{1}{2u}.$$

Множеството D' се определя от неравенствата (фиг. 35)



Фиг. 35

$$D': \left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \leqq \sqrt{\frac{v}{u}} \\ \frac{1}{4} \leqq u \leqq 1 \\ 1 \leqq v \end{array} \right.$$

или

$$D': \left| \begin{array}{l} \frac{1}{4} \leqq u \leqq 1 \\ \frac{1}{4}u \leqq v \leqq 1. \end{array} \right.$$

И така

$$\iint_D \frac{x^5}{y^3(1+x^4)^3}\,dxdy = \iint_{D'} \sqrt{\frac{v^5}{u^5 . u^3 v^3}} \cdot \frac{dudv}{\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)^3 .2u}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D'} \frac{v\,dudv}{u^5\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)^3} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[\int_{\frac{u}{4}}^{1} \frac{v\,dv}{u^5\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)^3}\right] du$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left[\frac{1}{u^3}\int_{\frac{u}{4}}^{1} \frac{d\frac{v^2}{u^2}}{\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)^3}\right] du = -\frac{1}{8}\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{u^3}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{16}\right)^2}\right] du$$

$$= \frac{1}{16}\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{d\frac{1}{u^2}}{\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^2} + \frac{240}{289} = -\frac{15}{534} + \frac{240}{289} = \frac{7425}{9248}.$$

2.16. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint_D \sqrt{y^2 - x^2}\,dxdy, \qquad D: 0 \leqq 3x \leqq y \leqq 1 + x.$$

У п ъ т в а н е. Направете смяна на променливите

$$T^{-1}: \left| \begin{array}{l} u = y - x \\ v = y + x. \end{array} \right.$$

2.17. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint_R (x+y)\sqrt{x-y}\,dxdy, \qquad D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq x \\ x^2 + y^2 \leqq 1. \end{array} \right.$$

У п ъ т в а н е. Направете смяна на променливите

$$T^{-1}: \left| \begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y. \end{array} \right.$$

2.18. Пресметнете двойнил интеграл

$$\iint_D xy^3\,dxdy, \qquad D: \left| \begin{array}{l} ax^3 \leqq y \leqq bx^3 \\ cx^2 \leqq y^3 \leqq dx^2, \ 0 < a < b, \ 0 < c < d. \end{array} \right.$$

У п ъ т в а н е. Направете смяна на променливите

$$T: \left| \begin{array}{l} y = ux^3 \\ y^3 = vx^2. \end{array} \right.$$

2.19. Пресметнете двойния интеграл

$$\iint_D xy^3\,dxdy, \qquad D: \left| \begin{array}{l} ax^3 \leqq y \leqq bx^3 \\ cy^2 \leqq x \leqq dy^2, \ 0 < a < b, \ 0 < c < d. \end{array} \right.$$

2.20. Нека множеството D е симетрично относно оста Oy и нека $F(x, y)$ е дефинирана и интегруема в D. Да означим

$$D_1 = \{(x, y) \in D,\ x \geqq 0\} \quad \text{и} \quad D_2 = \{(x, y) \in D,\ x \leqq 0\}:$$

а) Докажете, че ако функцията $F(x, y)$ е четна относно x в D, т. е. $F(-x, y) = F(x, y)$, то

$$\iint\limits_{D} F(x, y)\,dxdy = 2\iint\limits_{D_1} F(x, y)\,dxdy = 2\iint\limits_{D_2} F(x, y)\,dxdy;$$

б) Докажете, че ако функцията $F(x, y)$ е нечетна относно x в D, т. е. $F(-x, y) = -F(x, y)$, то

$$\iint\limits_{D} F(x, y)\,dxdy = 0.$$

Решение. В интеграла

$$\iint\limits_{D_2} F(x, y)\,dxdy$$

ще направим смяна на променливите T: $x = -u$, $y = v$.

Ясно е, че $D_2' = D_1$ и

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

а) Нека функцията $F(x, y)$ е четна относно x. Тогава

$$\iint\limits_{D_2} F(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_2'} F(-u, v)\,dudv$$

$$= \iint\limits_{D_2'} F(u, v)\,dudv = \iint\limits_{D_1} F(x, y)\,dxdy$$

и следователно

$$\iint\limits_{D} F(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} F(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} F(x, y)\,dxdy$$

$$= 2\iint\limits_{D_1} F(x, y)\,dxdy;$$

б) Нека функцията $F(x, y)$ е нечетна относно x. Тогава

$$\iint\limits_{D_2} F(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_2'} F(-u, v)\,dudv$$

$$= -\iint\limits_{D_2'} F(u, v)\,dudv = -\iint\limits_{D_1} F(x, y)\,dxdy$$

и следователно

$$\iint\limits_{D} F(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} F(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} F(x, y)\,dxdy = 0.$$

2.21. Докажете равенството

$$\iint\limits_{D} \cos(2a\sin\varphi\sin\theta)\,d\varphi d\theta = \left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\sin t)\,dt\right]^2,$$

където a е произволно реално число, а D е правоъгълникът $\left\{0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Решение. В двойния интеграл да направим следните тригонометрични преобразувания:

$$\iint\limits_{D} \cos\left[a\big(\cos(\varphi - \theta) - \cos(\varphi + \theta)\big)\right]\,d\varphi d\theta$$

$$= \iint\limits_{D} \big[\cos\big(a\cos(\varphi - \theta)\big).\cos\big(a\cos(\varphi + \theta)\big)$$

$$+ \sin\big(a\cos(\varphi - \theta)\big).\sin\big(a\cos(\varphi + \theta)\big)\big]\,d\varphi d\theta.$$

Сега, за да опростим интеграла, виждаме, че е добре да направим следната смяна на променливите:

$$T^{-1}: \left|\begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} - (\varphi - \theta) = u \\ \dfrac{\pi}{2} - (\varphi + \theta) = v \end{array}\right. \quad \text{или} \quad T: \left|\begin{array}{l} \theta = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{u + v}{2} \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{u - v}{2}. \end{array}\right.$$

След пресмятания получаваме (фиг. 36)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad D' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq u+v \leqq \pi \\ 0 \leqq u-v \leqq \pi. \end{array} \right.$$

Тогава

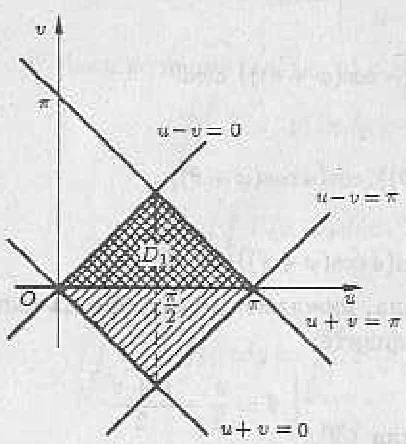
$$\iint\limits_D \cos(2a \sin\varphi \sin\theta)\, d\varphi d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{D'} \cos(a \sin u)\, \cos(a \sin v)\, dudv + \frac{1}{2} \iint\limits_{D'} \sin(a \sin u)\, \sin(a \sin v)\, dudv.$$

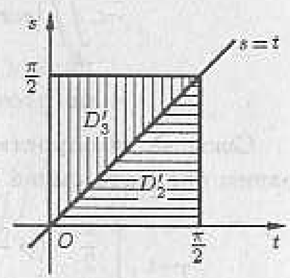
Като вземем предвид, че множеството D' е симетрично относно оста Ou, а функцията $\cos(a \sin u).\cos(a \sin v)$ е четна относно v и функцията $\sin(a \sin u).\sin(a \sin v)$ е нечетна относно v, то съгласно задача 2.20 имаме

$$\iint\limits_D \cos(2a \sin\varphi \sin\theta)\, d\varphi d\theta = \iint\limits_{D_1} \cos(a \sin u).\cos(a \sin v)\, dudv,$$

където $D_1 = \{(u, v) \in D',\ v \geqq 0\}$.



Фиг. 36



Фиг. 37

Сега да разложим областта D_1 на две части:

$$D_2 : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq u \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq v \leqq u \end{array} \right. \quad \text{и} \quad D_3 : \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \pi \\ 0 \leqq v \leqq \pi - u. \end{array} \right.$$

В интеграла $\iint\limits_{D_2} \cos(a \sin u)\, \cos(a \sin v)\, dudv$ ще направим смяната T: $u = t$, $v = s$, а в интеграла $\iint\limits_{D_3} \cos(a \sin u)\, \cos(a \sin v)\, dudv$ — смяната $u = -s$, $v = t$. Очевидно абсолютните стойности и на двете функционални детерминанти са равни на 1 и (фиг. 37)

$$D_2' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq s \leqq t \end{array} \right. \quad \text{и} \quad D_3' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq t \leqq s, \end{array} \right.$$

т. е. $D_2' \cup D_3' = D_4$ е квадратът, определен с неравенствата $\left\{0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{2}\right\}$. Тогава

$$\iint\limits_D \cos(2a \sin\varphi \sin\theta)\, d\varphi d\theta$$

$$= \iint\limits_{D_2} \cos(a \sin u)\, \cos(a \sin v)\, dudv + \iint\limits_{D_3} \cos(a \sin u)\, \cos(a \sin v)\, dudv$$

$$= \iint\limits_{D_2'} \cos(a \sin t)\, \cos(a \sin s)\, dtds + \iint\limits_{D_3'} \cos(a \sin s)\, \cos(a \sin t)\, dtds$$

$$= \iint\limits_{D_4} \cos(a \sin t)\, \cos(a \sin s)\, dtds$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \sin t)\, dt . \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \sin s)\, ds = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \sin t)\, dt \right)^2.$$

2.22. Пресметнете несобствения интеграл

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Решение. Нека R е произволно положително число. Да разгледаме множествата, определени с неравенствата

$$D_1: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq R^2 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0, \end{array} \right. \quad D_2: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq R \\ 0 \leqq y \leqq R, \end{array} \right. \quad D_3: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq \sqrt{2}R \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0. \end{array} \right.$$

Очевидно $D_1 \subset D_2 \subset D_3$ и тъй като $e^{-x^2-y^2} > 0$, то лесно се съобразява, че от теореми 4 и 6 на § 1 следва

$$\iint\limits_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leqq \iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leqq \iint\limits_{D_3} e^{-x^2-y^2}\,dxdy.$$

В първия и третия интеграл ще направим смяна в полярни координати. За образите D_1' и D_3' имаме съответно

$$D_1': \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \rho \leqq R \end{array} \right. \quad \text{и} \quad D_3': \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \rho \leqq \sqrt{2}R. \end{array} \right.$$

Тогава

$$\iint\limits_{D_1'} \rho e^{-\rho^2}\,d\varphi d\rho \leqq \iint\limits_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \leqq \iint\limits_{D_3'} \rho e^{-\rho^2}\,d\varphi d\rho.$$

Като приложим задача 1.16, имаме

$$\int\limits_0^R \rho e^{-\rho^2}\,d\rho . \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \leqq \int\limits_0^R e^{-x^2}dx . \int\limits_0^R e^{-y^2}\,dy \leqq \int\limits_0^{\sqrt{2}R} \rho e^{-\rho^2}\,d\rho . \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi,$$

откъдето

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) \leqq \left(\int\limits_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 \leqq \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

След граничен преход при $R \to \infty$ получаваме

$$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

§ 3. Пресмятане на лица на равнинни фигури

Както знаем от § 1, ако D е квадрируемо равнинно множество, то лицето му $s(D)$ се пресмята по формулата $s(D) = \iint\limits_D dxdy$.

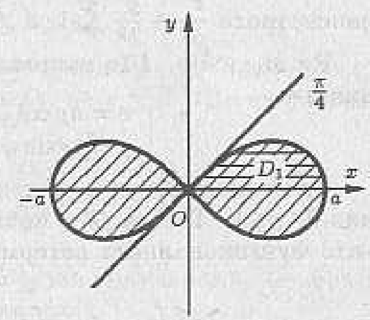
3.1. Пресметнете лицето на множеството D, заградено от кривата, определена с равенството (фиг. 38)

$$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), \quad a > 0$$

(лемниската на Бернули).

Решение. Очевидно множеството D е симетрично относно двете координатни оси и затова ще пресметнем само лицето на частта $D_1 \subset D$, която е разположена в първи квадрант. Ще направим смяна на променливите в полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi,\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$



Фиг. 38

Като заместим в уравнението на лемниската на Бернули, получаваме:

$$\rho^4 = 2a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 2a^2\rho^2\cos 2\varphi.$$

От равенството следва, че

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = (\cos\varphi - \sin\varphi)(\cos\varphi + \sin\varphi) \geqq 0,$$

и тъй като в първи квадрант $\cos\varphi + \sin\varphi \geqq 0$, то $\cos\varphi - \sin\varphi \geqq 0$, което е еквивалентно на $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$. Оттук е ясно, че областта D се определя с неравенствата

$$D_1': \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leqq \rho \leqq a\sqrt{2\cos 2\varphi} = \rho(\varphi). \end{array} \right.$$

Тогава

$$s(D) = 4s(D_1) = 4\iint\limits_{D_1} dxdy = 4\iint\limits_{D_1'} \rho d\varphi\, d\rho = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int\limits_0^{\rho(\varphi)} \rho\, d\rho\right) d\varphi$$

$$= 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi\, d\varphi = 2a^2.$$

3.2. Пресметнете лицето на множеството D, определено с неравенството $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1$, $a > 0$, $b > 0$ (елипса).

Решение. Ще направим смяна в обобщени полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = a\rho\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\varphi,\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi. \end{array} \right.$$

След заместване в даденото неравенство получаваме $\rho^2 \leqq 1$ или $0 \leqq \rho \leqq 1$. Тогава D' е правоъгълника $\{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \rho \leqq 1\}$ и тъй като функционалната детерминанта $\Delta = ab\rho$, намираме

$$s(D) = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D'} ab\rho\, d\varphi d\rho = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi . \int\limits_0^1 \rho d\rho = \pi ab.$$

3.3. Пресметнете лицето на множеството D, определено с неравенството $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leqq 1$.

Решение. Ще направим смяна в обобщени полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos^3\varphi \\ y = \rho\sin^3\varphi,\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi. \end{array} \right.$$

Образът D' на множеството D се определя с неравенствата

$$D' : \left| \begin{array}{l} \rho^{\frac{2}{3}}\cos^2\varphi + \rho^{\frac{2}{3}}\sin^2\varphi = \rho^{\frac{2}{3}} \leqq 1 \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ \rho \geqq 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad D' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \rho \leqq 1. \end{array} \right.$$

Функционалната детерминанта е $\Delta = 3\rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. Тогава

$$s(D) = \iint\limits_D dxdy = 3\iint\limits_{D'} \rho\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi d\rho$$

$$= 3\int\limits_0^1 \rho d\rho . \int\limits_0^{2\pi} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{3}{8}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{3}{16}\int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos 4\varphi)\, d\varphi = \frac{3}{8}\pi.$$

3.4. Пресметнете лицето на множеството D, определено с неравенствата

$$D : \left| \begin{array}{l} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 \leqq x^2 y \\ x \geqq 0\ (a > 0,\ b > 0). \end{array} \right.$$

Решение. Множеството D е разположено в първи квадрант, тъй като от първото неравенство следва, че $y \geqq 0$. Ще направим смяна в полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = a\rho\cos^2\varphi \\ y = b\rho\sin^2\varphi,\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

След заместване в дадените неравенства получаваме, че образът D' на D се определя от неравенствата

$$D' : \left| \begin{array}{l} \rho^4 \leqq a^2 b\rho^3\cos^4\varphi\sin^2\varphi \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \rho \end{array} \right.$$

или

$$D' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \rho \leqq a^2 b\cos^4\varphi\sin^2\varphi = \rho(\varphi). \end{array} \right.$$

Като вземем предвил, че функционалната детерминанта е $\Delta = 2\rho ab\cos\varphi\sin\varphi$, пресмятаме

$$s(D) = \iint\limits_D dxdy = 2\iint\limits_{D'} ab\rho\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi d\rho$$

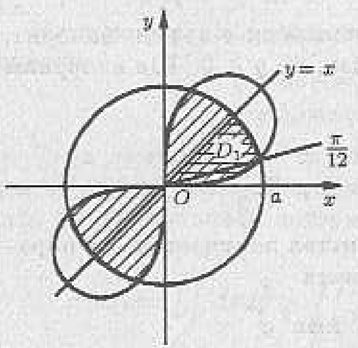
$$= 2ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_0^{\rho(\varphi)} \rho\sin\varphi\cos\varphi\, d\rho\right] d\varphi = a^5 b^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9\varphi\sin^5\varphi\, d\varphi$$

$$= -a^5b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9\varphi \sin^4\varphi d\sin\varphi = -\frac{a^5b^3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8\varphi(1-\cos^2\varphi)^2\, d\cos^2\varphi$$

$$= \frac{a^5b^3}{2} \int_0^1 t^4(1-t)^2\, dt = \frac{a^5b^3}{210}.$$

3.5. Пресметнете лицето на множеството D, определено с неравенствата

$$D: \left| \begin{array}{l} (x^2+y^2)^2 \leqq 4a^2xy \\ x^2+y^2 \leqq a^2 \ (a>0). \end{array} \right.$$



Фиг. 39

Р е ш е н и е. Множеството D е заградено от лемниската на Бернули и се намира в кръг с радиус a (фиг. 39). От първото неравенство следва, че ако $(x,\, y) \in D$, то x и y имат еднакви знаци, т. е. множеството е разположено в първи и трети квадрант. Освен това е ясно, че то е симетрично относно началото на координатната система и относно ъглополовящата на първи и трети квадрант (правата $y = x$). Затова ще пресметнем лицето на частта $D_1 \subset D$, която удовлетворява допълнително неравенствата $0 \leqq y \leqq x$. По този начин ще пресметнем $\frac{1}{4}$ от търсеното лице. Ще направим смяна в полярни координати:

$$\left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi,\ 0 \leqq \rho,\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}. \end{array} \right.$$

След заместване получаваме

$$D_1' : \left| \begin{array}{l} \rho^4 \leqq 4a^2\rho^2\cos\varphi\sin\varphi \\ \rho^2 \leqq a^2 \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad D_1' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \rho \leqq 2a\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi} \\ \rho \leqq a \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}. \end{array} \right.$$

П ъ р в и н а ч и н. Да разгледаме D_1' като криволинеен трапец с оси, успоредни на оста $O\rho$.

Нека $a \leqq 2a\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}$, т. е. $\frac{1}{2} \leqq 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$. Тъй като $0 \leqq 2\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, това неравенство е изпълнено при $\frac{\pi}{6} \leqq 2\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, т. е. при $\frac{\pi}{12} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$. В този случай $\min(a,\, 2a\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}) = a$ и следователно имаме

$$D_{11}' : \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{12} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leqq \rho \leqq a. \end{array} \right.$$

Нека $a \geqq 2a\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}$. Ясно е, че това ще бъде изпълнено при $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{12}$. Сега $\min(a,\, 2a\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}) = 2a\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}$ и следователно

$$D_{12}' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{12} \\ 0 \leqq \rho \leqq 2a\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi} = \rho(\varphi). \end{array} \right.$$

Множеството D_1' представихме като обединение на два криволинейни трапеца: $D_1' = D_{11}' \cup D_{12}'$. Тогава

$$s(D) = \iint_D dxdy = 4\iint_{D_1} dxdy = 4\iint_{D_1'} \rho\, d\varphi d\rho$$

$$= 4\iint_{D_{11}'} \rho\, d\varphi d\rho + 4\iint_{D_{12}'} \rho\, d\varphi d\rho = 4\int_0^a \rho\, d\rho . \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi + 4\int_0^{\frac{\pi}{12}} \left[\int_0^{\rho(\varphi)} \rho\, d\rho\right] d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{3}a^2 + 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{12}} 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{3}a^2 + 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin 2\varphi\, d2\varphi$$

$$= \frac{\pi}{3}a^2 + 2a^2 - \sqrt{3}a^2.$$

В т о р и н а ч и н. Да разгледаме D_1' като криволинеен трапец с основи, успоредни на оста $O\varphi$. Решаваме първото неравенство, определящо D_1', относно φ:

$$\frac{\rho^2}{2a^2} \leqq 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi.$$

Ще използваме, че при $0 \leqq 2\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ е изпълнено равенството $\arcsin(\sin 2\varphi) = 2\varphi$. Тъй като функцията $\arcsin x$ е монотонно растяща, получаваме

$$D_1' : \left| \begin{array}{l} \arcsin \frac{\rho^2}{2a^2} \leqq \arcsin(\sin 2\varphi) = 2\varphi \\ \frac{\rho^2}{2a^2} \leqq 1 \\ \rho \leqq a \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}, \end{array} \right.$$

а от $a \leqq \sqrt{2}a$ и $0 \leqq \arcsin \frac{\rho^2}{2a^2}$ следва

$$D_1' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \rho \leqq a \\ \varphi(\rho) = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\rho^2}{2a^2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}. \end{array} \right.$$

Остава да проверим неравенството $\frac{1}{2} \arcsin \frac{\rho^2}{2a^2} \leqq \frac{\pi}{4}$, което очевидно е изпълнено. Тогава

$$s(D) = 4 \iint\limits_{D_1'} \rho d\varphi d\rho = 4 \int\limits_0^a \left[\int\limits_{\varphi(\rho)}^{\frac{\pi}{4}} \rho \, d\varphi \right] d\rho$$

$$= 4 \int\limits_0^a \rho \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\rho^2}{2a^2} \right) d\rho = \frac{\pi a^2}{2} - 2a^2 \int\limits_0^a \arcsin \frac{\rho^2}{2a^2} \, d \frac{\rho^2}{2a^2}$$

$$= \frac{\pi a^2}{2} - 2a^2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \arcsin t \, dt = \frac{\pi a^2}{2} - 2a^2 \left(t \arcsin t \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{t \, dt}{\sqrt{1-t^2}} \right)$$

$$= \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{6} - a^2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-t^2)$$

$$= \frac{\pi a^2}{3} - 2a^2 (1-t^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi a^2}{3} + 2a^2 - \sqrt{3}a^2.$$

3.6. Пресметнете лицето на множеството D, определено с неравенствата

$$D : \left| \begin{array}{l} y^2 \leqq x \leqq y \\ x^2 + y^2 \leqq 4xy. \end{array} \right.$$

Р е ш е н и е. П ъ р в и   н а ч и н. Този начин е по-дълъг, но искаме да покажем още веднъж как дадена област се представя като обединение на криволинейни трапеци чрез формални еквивалентни преобразувания.

От неравенството

$$y^2 - 4xy + x^2 = y^2 - 4xy + 4x^2 - 3x^2 = \left[y - (2-\sqrt{3})x \right] \left[y - (2+\sqrt{3})x \right] \leqq 0,$$

като вземем предвид, че $y \geqq x \geqq (2-\sqrt{3})x \geqq 0$, получаваме $y \leqq (2+\sqrt{3})x$ или

$$D : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq y \leqq \sqrt{x}. \\ y \leqq (2+\sqrt{3})x. \end{array} \right.$$

Нека $\sqrt{x} \leqq (2+\sqrt{3})x$. Тогава $x \geqq \frac{1}{(2+\sqrt{3})^2} = (2-\sqrt{3})^2 = a^2$ и $\min(\sqrt{x}, (2+\sqrt{3})x) = \sqrt{x}$.

Ако $0 \leqq x \leqq a$, то $\min(\sqrt{x}, (2+\sqrt{3})x) = (2+\sqrt{3})x = \frac{x}{a}$.

Така множеството D се представя като обединение на две множества

$$D_1 : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq a^2 \\ x \leqq y \leqq \frac{x}{a} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad D_2 : \left| \begin{array}{l} a^2 \leqq x \\ x \leqq y \leqq \sqrt{x}. \end{array} \right.$$

За първото множество трябва да бъде изпълнено неравенството $x \leqq \frac{x}{a}$, а за второто — $x \leqq \sqrt{x}$, откъдето получаваме

$$D_1 : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq a^2 \\ x \leqq y \leqq \frac{x}{a} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad D_2 : \left| \begin{array}{l} a^2 \leqq x \leqq 1 \\ x \leqq y \leqq \sqrt{x}. \end{array} \right.$$

Тогава

$$s(D) = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy$$

$$= \int_0^{a^2}\left(\int_x^{\frac{x}{a}} dy\right) dx + \int_{a^2}^{1}\left(\int_x^{\sqrt{x}} dy\right) dx = \int_0^{a^2}\left(\frac{1}{a}-1\right) x\,dx + \int_{a^2}^{1}(\sqrt{x}-x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-a}{a}a^4 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{2}{3}a^3 + \frac{a^4}{2} = \frac{1-a^3}{6} = \frac{1-(2-\sqrt{3})^3}{6} = \frac{15\sqrt{3}-25}{6}.$$

Втори начин. Тъй като множеството D е разположено между двете прави $y = x$ и $y = (2+\sqrt{3})x$, минаващи през началото на координатната система (фиг. 40), удобно е да се направи или смяната $\frac{y}{x} = u$, $y = v$, или смяна в полярни координати. Ще пресметнем двойния интеграл, като направим първата смяна, а самостоятелно извършете пресмятанията при смяна в полярни координати.

Множеството D се преобразува в множеството

$$D' : \left|\begin{array}{l} v^2 \leqq \frac{v}{u} \leqq v \\ u^2 + 1 \leqq 4u. \end{array}\right.$$

От $u^2 - 4u + 1 \leqq 0$ следва $2-\sqrt{3} \leqq u \leqq 2+\sqrt{3}$, а от първото неравенство следва, че $v \geqq 0$. След разделяне на v получаваме

$$D' : \left|\begin{array}{l} 0 \leqq v \leqq \frac{1}{u} \leqq 1 \\ 2-\sqrt{3} \leqq u \leqq 2+\sqrt{3} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad D' : \left|\begin{array}{l} 0 \leqq v \leqq \frac{1}{u} \\ 1 \leqq u \leqq 2+\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

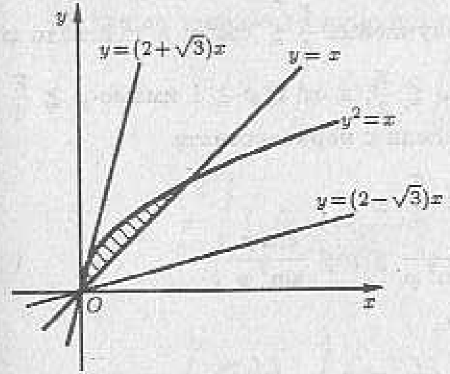
Функционалната детерминанта е

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{v}{u^2}.$$

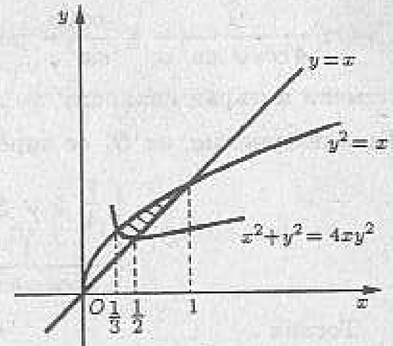
Тогава

$$s(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \frac{v}{u^2}\,du\,dv = \int_1^{2+\sqrt{3}}\left(\int_0^{\frac{1}{u}} \frac{v}{u^2}\,dv\right) du$$

$$= \int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{du}{u^4} = \frac{1-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^3}}{6} = \frac{1-(2-\sqrt{3})^3}{6}.$$



Фиг. 40



Фиг. 41

3.7. Пресметнете лицето на множеството D, определено с неравенствата

$$D : \left|\begin{array}{l} y^2 \leqq x \leqq y \\ x^2 + y^2 \leqq 4xy^2. \end{array}\right.$$

Решение. Първи начин. От първото неравенство следва, че D е разположено в първи квадрант. Ще направим смяна на променливите в полярни координати: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, $\rho \geqq 0$. Образът D' на D се определя с неравенствата

$$D' : \left|\begin{array}{l} \rho^2\sin^2\varphi \leqq \rho\cos\varphi \leqq \rho\sin\varphi \\ \rho^2 \leqq 4\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Нека $\rho \neq 0$. Разделяме второто неравенство на ρ. От полученото следва, че $\cos\varphi > 0$ и $\sin\varphi > 0$, следователно можем да делим на $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Да отбележим, че след тези преобразувания ще определим множеството $D'_1 = D' \setminus (0, 0)$ и точката $(0, 0)$ ще се окаже изолирана точка за множеството D, и следователно можем да я пренебрегнем при пресмятането на $s(D)$ (фиг. 41). След като извършим указаните преобразувания, получаваме

$$D'_1 : \left|\begin{array}{l} \frac{1}{4\cos\varphi\sin^2\varphi} \leqq \rho \leqq \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \\ 1 \leqq \operatorname{tg}\varphi \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

От $\dfrac{1}{4\cos\varphi\sin^2\varphi} \leqq \dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ получаваме $\dfrac{1}{4} \leqq \cos^2\varphi$ и тъй като φ се мени в първи квадрант, то $\varphi \leqq \dfrac{\pi}{3}$, а от $\operatorname{tg}\varphi \geqq 1$ имаме $\varphi \geqq \dfrac{\pi}{4}$. Така получихме, че D_1' се определя с неравенствата

$$D_1' : \left| \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{1}{4\cos\varphi\sin^2\varphi} \leqq \rho \leqq \dfrac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}. \end{array} \right.$$

Тогава

$$s(D) = \iint\limits_{D} dx dy = \iint\limits_{D'} \rho\, d\varphi d\rho = \iint\limits_{D_1'} \rho\, d\varphi d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi} - \frac{1}{16\cos^2\varphi\sin^4\varphi} \right) d\varphi$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\operatorname{cotg}^3\varphi + \frac{1}{16.3}\operatorname{cotg}^3\varphi + \frac{2}{16}\operatorname{cotg}\varphi - \frac{1}{16}\operatorname{tg}\varphi \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{36}.$$

В т о р и н а ч и н. Като решим второто неравенство относно y при $4x - 1 \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x \geqq 0$ (тук отново отстраняваме точката $(0, 0)$), получаваме, че областта $D_1 = D \setminus (0, 0)$ се определя с неравенствата

$$D_1 : \left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{\sqrt{4x-1}} \leqq y \leqq \sqrt{x} \\ x \leqq y. \end{array} \right.$$

Да разгледаме графиките на функциите $\dfrac{x}{\sqrt{4x-1}}$, $\sqrt{x}$, x (фиг. 41). Намираме абсцисите на пресечните им точки $x_A = \dfrac{1}{3}$, $x_B = \dfrac{1}{2}$, $x_C = 1$. Тогава $D_1 = D_2 \cup D_3$, където

$$D_2 : \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{\sqrt{4x-1}} \leqq y \leqq \sqrt{x} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad D_3 : \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1 \\ x \leqq y \leqq \sqrt{x}. \end{array} \right.$$

Оттук за търсеното лице получаваме

$$s(D) = \iint\limits_{D_1} dx dy = \iint\limits_{D_2} dx dy + \iint\limits_{D_3} dx dy$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{x} - \frac{x}{\sqrt{4x-1}} \right) dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (\sqrt{x} - x)\, dx$$

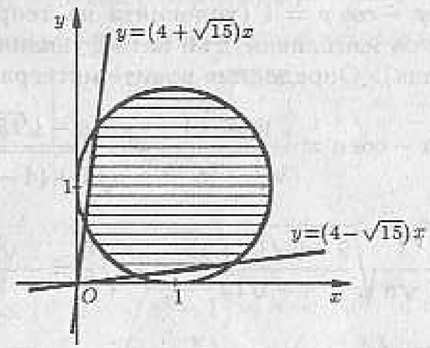
$$= \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \sqrt{x}\, dx - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\, dx - \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{4x-1}}\, dx = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{36}.$$

3.8. Пресметнете лицето на множеството D, определено с неравенствата $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqq 1$, $x^2 + y^2 \leqq 8xy$.

Р е ш е н и е. Множеството от точки, удовлетворяващи първото неравенство, е кръг с радиус 1 и център точката $(1, 1)$. От

$$x^2 + y^2 - 8xy = y^2 - 8xy + 16x^2 - 15x^2 = [y - (4 - \sqrt{15})x][y - (4 + \sqrt{15})x] \leqq 0$$

виждаме, че множеството от точки, удовлетворяващи второто неравенство, е ъгълът, заключен между правите $y = x(4 - \sqrt{15}) = x\operatorname{tg}\alpha$ и $y = x(4 + \sqrt{15}) = x\operatorname{tg}\beta$, съдържащ точката $(1, 1)$ (фиг. 42). Тъй като $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = (4 - \sqrt{15})(4 + \sqrt{15}) = 1$, то $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.



Фиг. 42

Ще направим смяна в полярни координати: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\rho \geqq 0$. От направените разсъждения е ясно, че $\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$. За да пресметнем границите, в които се мени ρ, заместваме в неравенството, определящо кръга

$$\rho^2 - 2\rho(\cos\varphi + \sin\varphi) + 1 \leqq 0 \quad \text{или} \quad \rho_1 \leqq \rho \leqq \rho_2,$$

където

$$\rho_1 = \cos\varphi + \sin\varphi - \sqrt{(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 - 1},$$

$$\rho_2 = \cos\varphi + \sin\varphi + \sqrt{(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 - 1}.$$

За лицето на разглежданата фигура получаваме

$$s(D) = \iint_D dxdy = \iint_{D'} \rho d\varphi d\rho$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{2}\, d\varphi = \int_\alpha^\beta \frac{(\rho_2 + \rho_1)(\rho_2 - \rho_1)}{2}\, d\varphi$$

$$= 2\int_\alpha^\beta (\cos\varphi + \sin\varphi)\sqrt{(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 - 1}\, d\varphi$$

$$= 2\int_\alpha^\beta \sqrt{1 - (\cos\varphi - \sin\varphi)^2}\, d(\sin\varphi - \cos\varphi).$$

Полагаме $\sin\varphi - \cos\varphi = t$ (условията на теоремата за смяна на променливите са изпълнени, тъй като функцията $\sin\varphi - \cos\varphi$ е монотонно растяща). Определяме новите интеграционни граници

$$a = \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{(4 - \sqrt{15}) - 1}{\sqrt{1 + (4 - \sqrt{15})^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{\frac{9 - 6\sqrt{15} + 15}{4 - \sqrt{15}}} = -\sqrt{\frac{6}{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

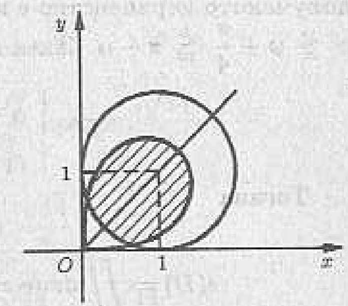
$$b = \sin\beta - \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha - \sin\alpha = -a = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

И така

$$s(D) = 2\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - t^2}\, dt = (t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t)\Big|_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}.$$

3.9. Пресметнете лицето на множеството D, определено с неравенствата $(x^2 + y^2)^2 \leqq 8xy$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqq 1$.

Решение. Множеството D е заградено от лемниската на Бернули и се съдържа в кръг с радиус 1 и център точката $(1, 1)$ (фиг. 43), и следователно се съдържа изцяло в първи квадрант. Ще направим смяна на променливите в полярни координати: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, $\rho \geqq 0$. Образът D' на D се определя с неравенствата



Фиг. 43

$$D' : \left|\begin{array}{l} \rho^2 \leqq 8\cos\varphi\sin\varphi \\ \rho^2 - 2\rho(\cos\varphi + \sin\varphi) + 1 \leqq 0 \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},\ \rho \geqq 0. \end{array}\right.$$

Да положим за краткост $\cos\varphi + \sin\varphi = a$. Тогава

$$2\sin\varphi\cos\varphi = (\cos\varphi + \sin\varphi)^2 - 1 = a^2 - 1.$$

След извършване на съответните преобразувания имаме

$$D' : \left|\begin{array}{l} 0 \leqq \rho \leqq 2\sqrt{a^2 - 1} \\ a - \sqrt{a^2 - 1} \leqq \rho \leqq a + \sqrt{a^2 - 1} \\ a^2 \geqq 1,\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Тъй като $a = \sin\varphi + \cos\varphi \geqq 0$, то $a \geqq 1$, $a - \sqrt{a^2 - 1} \geqq 0$ и $a + \sqrt{a^2 - 1} \geqq 2\sqrt{a^2 - 1}$, т. е.

$$\max\left(0,\ a - \sqrt{a^2 - 1}\right) = a - \sqrt{a^2 - 1} = \rho_1,$$

$$\min\left(2\sqrt{a^2 - 1},\ a + \sqrt{a^2 - 1}\right) = 2\sqrt{a^2 - 1} = \rho_2.$$

Остава да вземем предвид неравенството

$$a-\sqrt{a^2-1} \leqq 2\sqrt{a^2-1} \quad \text{или} \quad a^2 \leqq 9(a^2-1),$$

откъдето $\sqrt{\dfrac{9}{8}} \leqq a = \cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{2}\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)$, т. е.
$\dfrac{3}{4} \leqq \sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Да означим $\alpha = \arcsin\dfrac{3}{4} > \dfrac{\pi}{4}$. Тъй като $\dfrac{\pi}{4} \leqq \varphi+\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}$, полученото неравенство е изпълнено тогава и само тогава, когато $\alpha \leqq \varphi+\dfrac{\pi}{4} \leqq \pi-\alpha$. Така получихме

$$D' : \left|\begin{array}{l} \alpha-\dfrac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \dfrac{3\pi}{4}-\alpha \\ \rho_1 \leqq \rho \leqq \rho_2. \end{array}\right.$$

Тогава

$$s(D) = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D'} \rho\, d\varphi d\rho = \int\limits_{\alpha-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\alpha} \frac{\rho_2^2-\rho_1^2}{2}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\alpha} 4(a^2-1) - \left(a^2-2a\sqrt{a^2-1}+a^2-1\right) d\varphi$$

$$= \int\limits_{\alpha-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\alpha} \left[2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{2} + (\sin\varphi+\cos\varphi)\sqrt{(\sin\varphi+\cos\varphi)^2-1}\right] d\varphi$$

$$= \sin^2\varphi \int\limits_{\alpha-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\alpha} -\frac{\pi}{2}+\alpha+1-(\sin\varphi-\cos\varphi)^2\, d(\sin\varphi-\cos\varphi).$$

Полагаме $t = \sin\varphi - \cos\varphi = 2\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)$ и определяме интеграционните граници

$$b = 2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\alpha, \quad c = 2\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha-\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos\alpha.$$

Тогава

$$s(D) = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\Bigg|_{\alpha-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}-\alpha} - \frac{\pi}{2}+\alpha+\int\limits_b^c \sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$= \sin 2\alpha - \frac{\pi}{2}+\alpha+\frac{t\sqrt{1-t^2}+\arcsin t}{2}\Bigg|_b^c$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\pi}{2}+\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha\sqrt{1-2\cos^2\alpha}+\arcsin(\sqrt{2}\cos\alpha).$$

От $\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$ имаме $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$ и следователно

$$s(D) = \frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{8} + \arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

От

$$\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$$

$$= \sqrt{1-\frac{9}{16}}\cdot\sqrt{1-\frac{14}{16}} - \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{14}}{4} = -\frac{\sqrt{14}}{8}$$

и от

$$0 \leqq \arcsin\frac{3}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4} \leqq \pi$$

получаваме

$$\arcsin\frac{3}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{14}}{4} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{14}}{8}\right),$$

откъдето

$$s(D) = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{\pi}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{14}}{8}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{14}}{8}.$$

3.10. Пресметнете лицето на множеството D, определено с неравенството $(x^2+y^2)^2 \leqq x^3+y^3$.

Упътване. Направете смяна в полярни координати, като мените ъгъла φ в интервала $[-\pi, \pi]$ и покажете, че образът на D е

$$D' : \left|\begin{array}{l} -\dfrac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \dfrac{3\pi}{4}, \\ 0 \leqq \rho \leqq \cos^3\varphi+\sin^3\varphi. \end{array}\right.$$

3.11. Пресметнете лицето на множеството D, заградено от кривата с уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = x + y$.

Упътване. Направете смяна на променливите $x = au$, $y = bv$ и покажете, че образът D' на D е кръг с център точката $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ и радиус $\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

3.12. Пресметнете лицето на множеството D, определено с неравенствата $\dfrac{x^3}{a^3} + \dfrac{y^3}{b^3} \leqq x^2 + y^2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ $(a > 0, b > 0)$.

Упътване. Направете смяна в обобщени полярни координати: $x = a\rho\cos^{\frac{2}{3}}\varphi$, $y = b\rho\sin^{\frac{2}{3}}\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$, $\rho \geqq 0$. При пресмятането на определените интеграли използвайте, че

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt$$

и след това в интеграла

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{3}}\varphi \cos^{\frac{7}{3}}\varphi \, d\varphi$$

положете $\operatorname{tg}\varphi = t^3$.

3.13. Пресметнете лицето на частта от равнината, заградена от кривата с уравнение

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0)$$

и координатните оси.

3.14. Пресметнете лицето на частта от първи квадрант, заградена от кривата с уравнение

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \quad (a > 0,\ b > 0)$$

и координатните оси.

Упътване. Първи начин. Направете смяна на променливите в обобщени полярни координати и покажете, че образът D' на разглежданото множество се определя с неравенствата

$$D' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \leqq \rho \leqq \cos 2\varphi. \end{array} \right.$$

Втори начин. Направете смяна на променливите

$$T^{-1} : \left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = u \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = v \end{array} \right. \quad \text{или} \quad T : \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{a}{2}(u + v) \\ y = \dfrac{b}{2}(u - v) \end{array} \right.$$

и покажете, че образът на разглежданото множество е

$$D' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq u \leqq 1 \\ u^2 \leqq v \leqq u. \end{array} \right.$$

3.15. Намерете лицата на частите, на които кръгът $x^2+y^2 \leqq 8$ се разделя от кривата с уравнение

$$\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)^6 = x^2 + y^2.$$

§ 4. Тройни интеграли. Пресмятане на обеми

Дефиницията и основните свойства на тройните интеграли са аналогични на съответните дефиниция и свойства на двойни интеграли, приведени в § 1 и 2, като вместо равнинни квадрируеми множества и функции на две променливи се разглеждат кубируеми тримерни множества, вместо лица се пресмятат обеми и т. н. Тук ще цитираме само факти, отнасящи се за пресмятане на тройни интеграли.

Дефиниция 1. Ще казваме, че множеството K е цилиндрично тяло (с вертикална образувателна или образувателна, успоредна на оста Oz), ако съществуват равнинно компактно квадрируемо множество D и две непрекъснати функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$, дефинирани в D, такива че точката $(x, y, z) \in K$ тогава и само тогава, когато $(x, y) \in D$ и $f(x, y) \leqq z \leqq g(x, y)$.

Теорема 1. Нека функцията $F(x, y, z)$ е дефинирана и интегруема в цилиндричното тяло K. Тогава

$$\iiint\limits_K F(x, y, z)\,dxdydz = \iint\limits_D \left[\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x, y, z)\,dz \right] dxdy.$$

В частност, ако множеството D е криволинеен трапец, т. е. съществуват непрекъснати функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, дефинирани в интервала $[a, b]$, такива че

$$T: \left| \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \\ f(x, y) \leq z \leq g(x, y), \end{array} \right.$$

то

$$\iiint\limits_K F(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int\limits_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x, y, z)\, dz \right) dy \right] dx.$$

Да означим с D_c сечението на тялото K с равнината $z = c$ (равнина, перпендикулярна на оста Oz). Ако K е компактно множество, то съществува интервал $[a, b]$, такъв че за всяко $z \overline{\in} [a, b]$ сечението D_z е празно.

Теорема 2. Нека функцията $F(x, y, z)$ е интегруема в компактното кубируемо множество K и нека за всяко $z \in [a, b]$ сечението D_z е квадрируемо. Тогава

$$\iiint\limits_K F(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_a^b \left[\iint\limits_{D_z} F(x, y, z)\, dxdy \right] dz.$$

Най-често срещаните смени на променливите в тройни интеграли са следните:

• *цилиндрични координати* (фиг. 44)

$$T: \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = t,\ \rho \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{array} \right.$$

За функционалната детерминанта имаме

$$\Delta = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, t)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

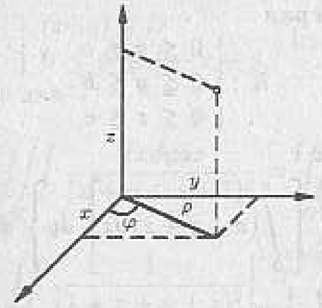
Понякога е удобно да се направи смяна в обобщени цилиндрични координати

$$T: \left| \begin{array}{l} x = a\rho\cos^\alpha\varphi \\ y = b\rho\sin^\alpha\varphi \\ z = t, \end{array} \right.$$

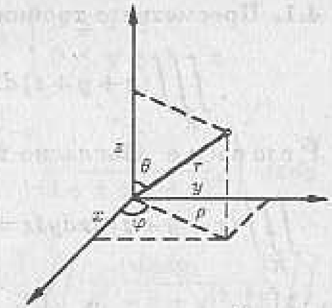
където параметрите a, b и α се избират по подходящ начин. В този случай функционалната детерминанта $\Delta = ab\rho\alpha \sin^{\alpha-1}\varphi \cos^{\alpha-1}\varphi$.

• *сферични координати* (фиг. 45)

$$T: \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta,\ r \geq 0,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi. \end{array} \right.$$



Фиг. 44



Фиг. 45

Тази трансформация може да се представи като произведение на следните две трансформации:

$$T_1: \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos u \\ y = \rho\sin u \\ z = t \end{array} \right. \quad \text{и} \quad T_2: \left| \begin{array}{l} \rho = r\sin\theta \\ u = \varphi \\ t = r\cos\theta \end{array} \right.$$

съответно с функционални детерминанти

$$\Delta_1 = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, u, t)} = \begin{vmatrix} \cos u & -\rho\sin u & 0 \\ \sin u & \rho\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

$$\Delta_2 = \frac{D(\rho, u, t)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r.$$

Оттук, като приложим теорема 2 от § 2, намираме функционалната детерминанта на трансформацията T:

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \Delta_1 . \Delta_2 = \rho . r = r\sin\theta . r = r^2\sin\theta.$$

Понякога е удобно да се направи смяна в обобщени сферични координати

$$T: \left| \begin{array}{l} x = a\rho\cos^\alpha\varphi\sin^\beta\theta \\ y = b\rho\sin^\alpha\varphi\sin^\beta\theta \\ z = c\rho\cos^\beta\theta, \end{array} \right.$$

където a, b, c, α и β са подходящо избрани параметри. След разлагане на произведение на две трансформации, лесно се намира, че функционалната детерминанта е

$$\Delta = abc\alpha\beta\rho^2\cos^{\alpha-1}\theta\sin^{2\alpha-1}\theta\sin^{\beta-1}\varphi\cos^{\beta-1}\varphi.$$

4.1. Пресметнете тройния интеграл

$$\iiint\limits_K (x+y+z)\,dxdydz, \qquad K: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq a \\ 0 \leqq y \leqq b \\ 0 \leqq z \leqq c. \end{array}\right.$$

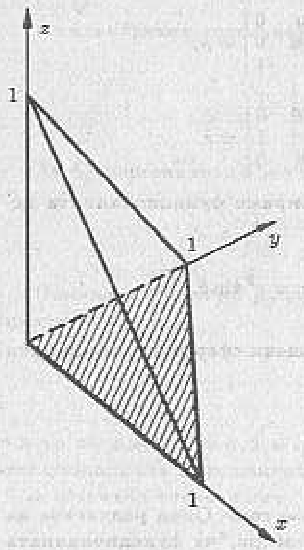
Решение. Съгласно теорема 1

$$\iiint\limits_K (x+y+z)\,dxdydz = \int_0^a \left\{ \int_0^b \left[\int_0^c (x+y+z)\,dz \right] dy \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a \left[\int_0^b (x+y+z)^2 \Big|_0^c dy \right] dx = \frac{1}{2}\int_0^a \left\{ \int_0^b [(x+y+c)^2-(x+y)^2] dy \right\} dx$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^a \left[\int_0^b (2x+2y+c)\,dy \right] dx = \frac{c}{8}\int_0^a (2x+2y+c)^2 \Big|_0^b dx$$

$$= \frac{bc}{4}\int_0^a (4x+2b+2c)\,dx = \frac{bc}{32}(4x+2b+2c)\Big|_0^b = \frac{abc}{2}(a+b+c).$$



Фиг. 46

4.2. Пресметнете тройния интеграл

$$\iiint\limits_K \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3},$$

където тялото K е частта от пространството, заградена от координатните равнини и равнината с уравнение $x+y+z=1$.

Решение. Първи начин. Тялото K е пирамида с основа триъгълника D, заграден от правите $x=0$, $y=0$ и $x+y=1$ (фиг. 46). Нека $(x, y) \in D$. Ако точката $(x, y, z) \in K$, то тя се намира над равнината Oxy и под равнината $z=1-x-y$, т. е. $0 \leqq z \leqq 1-x-y$. Тъй като D е криволинеен трапец, получаваме

$$K: \left| \begin{array}{l} (x, y) \in D \\ 0 \leqq z \leqq 1-x-y, \end{array}\right. \text{ където } D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1-x. \end{array}\right.$$

Тогава

$$\iiint\limits_K \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} = \iint\limits_D \left(\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \right) dxdy$$

$$= -\frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Big|_0^{1-x-y} dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{8}\iint\limits_D dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}\,dy \right) dx - \frac{1}{16} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)}\Big|_0^{1-x} dx - \frac{1}{16}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{5}{16}.$$

Втори начин. Да направим смяната

$$T: \left| \begin{array}{l} x = t(1-u) \\ y = tu(1-v) \\ z = tuv. \end{array}\right.$$

Функционалната детерминанта е

$$\Delta = \frac{D(x, y, z)}{D(t, u, v)} = \begin{vmatrix} 1-u & -t & 0 \\ u(1-v) & t(1-v) & -tu \\ uv & tv & tu \end{vmatrix} = t^2u.$$

Да отбележим, че $\Delta = 0$ и трансформацията не е обратима в множество с обем, равен на 0 — множеството от точки (t, u, v), за които $t=0$ или $u=0$, а това съгласно забележката към теорема 1 от § 2 не е пречка за прилагането на теоремата.

След заместване в неравенствата, определящи K, получаваме

$$K': \left| \begin{array}{l} t(1-u) \geqq 0 \\ tu(1-v) \geqq 0 \\ tuv \geqq 0 \\ t \leqq 1, \end{array}\right. \quad \text{т. е.} \quad K': \left| \begin{array}{l} 0 \leqq t \leqq 1 \\ 0 \leqq u \leqq 1 \\ 0 \leqq v \leqq 1. \end{array}\right.$$

(Тази трансформация преобразува тетраедъра K в куба K'!)

И така

$$\iiint\limits_K \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dxdydz = \iiint\limits_{K'} \frac{t^2u}{(t+1)^3}\,dtdudv$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{t^2}{(t+1)^3}\,dt.\int\limits_0^1 u\,du.\int\limits_0^1 dv = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 \frac{(s-1)^2}{s^3}\,ds = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$$

Тук при пресмятанията използувахме резултатите от следващата задача.

4.3. Нека функциите $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ са дефинирани и непрекъснати съответно в интервалите $[a,\,b]$, $[c,\,d]$ и $[e,\,f]$ и нека K е паралелепипедът

$$K: \left|\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ c \leqq y \leqq d \\ e \leqq z \leqq f. \end{array}\right.$$

Докажете, че

$$\iiint\limits_K f(x)g(y)h(z)\,dxdydz = \int\limits_a^b f(x)\,dx.\int\limits_c^d g(y)\,dy.\int\limits_e^f h(z)\,dz.$$

4.4. Пресметнете тройния интеграл $\iiint\limits_K z^2\,dxdydz$, където K е кълбото, заградено от сферата $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение. Първи начин. Нека D_z е сечението на K с равнина, перпендикулярна на оста Oz, минаваща през точката $(0,\,0,\,z)$. Лесно се съобразява, че при $-R \leqq z \leqq R$ сечението е кръг с радиус $\sqrt{R^2-z^2}$ (в краищата този кръг се изражда в точка), а вън от интервала $[-R,\,R]$ множеството D_z е празно. Тогава съгласно теорема 2

$$\iiint\limits_K z^2 dxdydz = \int\limits_{-R}^{R}\left(\iint\limits_{D_z} z^2\,dxdy\right)dz = \int\limits_{-R}^{R}\left(z^2\iint\limits_{D_z} dxdy\right)dz$$

$$= \int\limits_{-R}^{R} z^2\pi(R^2-z^2)\,dz = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

Втори начин. Ще направим смяна в сферични координати. След заместване в уравнението на сферата получаваме $x^2+y^2+z^2=r^2=R^2$, откъдето се вижда, че

$$K: \left|\begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ 0 \leqq r \leqq R. \end{array}\right.$$

Тогава

$$\iiint\limits_K z^2 dxdydz = \iiint\limits_{K'} r^2\cos^2\theta.r^2\sin\theta\,d\varphi d\theta dr$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi.\int\limits_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta.\int\limits_0^R r^4dr = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

4.5. Пресметнете обема на елипсоида

$$K: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqq 1 \quad (a>0,\,b>0,\,c>0).$$

Решение. Първи начин. Елипсоидът е разположен между равнините с уравнения $z=-c$ и $z=c$. Нека z_0 е фиксирано число от интервала $[-c,\,c]$. Сечението D_{z_0} на елипсоида K с равнината $z=z_0$ е елипса с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1-\frac{z_0^2}{c^2} = A^2 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{(aA)^2}+\frac{y^2}{(bA)^2} = 1.$$

Като приложим задача 3.2, намираме $s(D_z)=\pi abA^2=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$.

Оттук съгласно теорема 2

$$v(K) = \iiint\limits_K dxdydz = \int\limits_{-c}^{c}\left(\iint\limits_{D_z} dxdy\right) = \pi\int\limits_{-c}^{c} ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right) = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Втори начин. Да направим смяна в обобщени сферични координати:

$$T: \left|\begin{array}{l} x = a\,r\cos\varphi\sin\theta \\ y = b\,r\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\,r\cos\theta,\ r \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi. \end{array}\right.$$

След заместване в уравнението на елипсоида получаваме $r^2 = 1$, откъдето виждаме, че K' е паралелепипеда

$$K' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ 0 \leqq r \leqq 1. \end{array} \right.$$

Функционалната детерминанта е $\Delta = abcr^2 \sin\theta$. За обема на K получаваме

$$v(K) = \iiint\limits_K dxdydz = abc \iiint\limits_{K'} r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta dr$$

$$= abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi . \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta . \int\limits_0^1 r^2 dr = \frac{4}{3}\pi abc.$$

4.6. Пресметнете обема на тялото K, определено с неравенствата $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2x$, $x \leqq \sqrt{3}y$, $y^4 z^2 \leqq x^4$.

Р е ш е н и е. От първото и второ неравенство непосредствено следва, че $y > 0$. Оттук, след решаване на третото неравенство относно z, представяме K като цилиндрично тяло по следния начин:

$$K : \left| \begin{array}{l} (x, y) \in D \\ z_1 = -\dfrac{x^2}{y^2} \leqq z \leqq \dfrac{x^2}{y^2} = z_2, \end{array} \right. \quad \text{където} \quad D : \left| \begin{array}{l} 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 2x \\ x \leqq \sqrt{3}y. \end{array} \right.$$

Според теорема 1

$$v(K) = \iiint\limits_K dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1}^{z_2} dz \right) dxdy = 2 \iint\limits_D \frac{x^2}{y^2} dxdy.$$

В двойния интеграл ще направим смяна на променливите в полярни координати. Имаме

$$D' : \left| \begin{array}{l} 1 \leqq \rho^2 \leqq 2\rho\cos\varphi \\ \cos\varphi \leqq \sqrt{3}\sin\varphi \\ \rho \geqq 0,\, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \end{array} \right. \quad \text{или} \quad D' : \left| \begin{array}{l} 1 \leqq \rho \leqq 2\cos\varphi \\ \dfrac{\pi}{6} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Освен това от $1 \leqq 2\cos\varphi$, $\dfrac{\pi}{6} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ получаваме

$$D' : \left| \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{3} \\ 1 \leqq \rho \leqq 2\cos\varphi \end{array} \right.$$

и тогава

$$v(K) = 2 \iint\limits_{D'} \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} \rho \, d\varphi d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} (4\cos^2\varphi - 1) \, d\varphi$$

$$= (-3\operatorname{cotg}\varphi - 5\varphi + \sin 2\varphi) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{5\pi}{6}.$$

4.7. Намерете обема на тялото K, определено с неравенствата $z^2(3 + x^2) \leqq y^2$, $y^4(3 + x^2) \geqq 1$, $2\sqrt{2}y \geqq 1$.

Р е ш е н и е. Като решим първото неравенство относно z (имайки предвид, че $y > 0$), виждаме, че K се представя като цилиндрично тяло по следния начин:

$$K : \left| \begin{array}{l} (x, y) \in D \\ z_1 = -\dfrac{y}{\sqrt{3 + x^2}} \leqq z \leqq \dfrac{y}{\sqrt{3 + x^2}} = z_2, \end{array} \right.$$

където

$$D : \left| \begin{array}{l} 2\sqrt{2}y \geqq 1 \\ y^4(3 + x^2)^3 \leqq 1. \end{array} \right.$$

След опростяване на неравенствата, определящи D, имаме

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \leqq y \leqq \frac{1}{\sqrt{(3 + x^2)^3}} = \varphi(x)$$

и като вземем предвид неравенството $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \dfrac{1}{\sqrt{(3 + x^2)^3}}$, т. е. $3 + x^2 \leqq 4$, представяме D като криволинеен трапец:

$$D : \left| \begin{array}{l} -1 \leqq x \leqq 1 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \leqq y \leqq \varphi(x). \end{array} \right.$$

Тогава

$$v(K) = \iiint\limits_K dxdydz = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1}^{z_2} dz \right) dxdy = 2 \iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{3 + x^2}} dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{3+x^2}} \left[\varphi^2(x) - \frac{1}{8}\right] dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(3+x^2)^2} - \int_{-1}^{1} \frac{dx}{8\sqrt{3+x^2}}$$

$$= \left[\frac{x}{6(3+x^2)} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{8} \ln(x + \sqrt{(3+x^2)})\right]\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{\pi}{18\sqrt{3}} - \frac{1}{8} \ln 3.$$

4.8. Пресметнете тройния интеграл

$$\iiint_K xye^{-z}\, dxdydz, \qquad K: \left| \begin{array}{l} x \leqq y\sqrt{3} \\ y \leqq x\sqrt{3} \\ xy \leqq z \leqq 1. \end{array} \right.$$

Р е ш е н и е. П ъ р в и н а ч и н. Да направим смяна в цилиндрични координати. След заместване в неравенствата, определящи K, имаме

$$K': \left| \begin{array}{l} \rho\cos\varphi \leqq \sqrt{3}\rho\sin\varphi \\ \rho\sin\varphi \leqq \sqrt{3}\rho\cos\varphi \\ \rho^2\sin\varphi\cos\varphi \leqq t \leqq 1,\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi. \end{array} \right.$$

От неравенствата $\cos\varphi \leqq \sqrt{3}\sin\varphi \leqq \sqrt{3}.\sqrt{3}\cos\varphi$ следва, че $\cos\varphi > 0$ и $\sin\varphi > 0$, откъдето получаваме $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, а от неравенствата, в които участва t, следва неравенството $\rho^2\sin\varphi\cos\varphi \leqq 1$. И така

$$K': \left| \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{3}} \leqq \operatorname{tg}\varphi \leqq \sqrt{3} \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ \rho^2\sin\varphi\cos\varphi \leqq t \leqq 1 \\ \rho^2\sin\varphi\cos\varphi \leqq 1 \\ \rho \geqq 0 \end{array} \right. \quad \text{или } K': \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{6} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{3} \\ 0 \leqq \rho \leqq \frac{1}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} = \rho(\varphi) \\ t_1 = \rho^2\sin\varphi\cos\varphi \leqq t \leqq 1. \end{array} \right.$$

Тогава

$$I = \iiint_K xye^{-z}\, dxdydz = \iiint_{K'} \rho^3 \sin\varphi\cos\varphi e^{-t}\, d\varphi d\rho dt$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_0^{\rho(\varphi)} \rho^3 \cos\varphi\sin\varphi \left(e^{-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{1}{e}\right) d\rho\right] d\varphi.$$

Полагаме $\rho^2\sin\varphi\cos\varphi = u$:

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\sin\varphi\cos\varphi} \left[\int_0^1 \left(e^{-u} - \frac{1}{e}\right) udu\right] d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\sin\varphi\cos\varphi} \cdot \int_0^1 \left(e^{-u} - \frac{1}{e}\right) u\, du = \frac{2e-5}{4e} \ln 3.$$

В т о р и н а ч и н. Множеството K може да се представи като цилиндрично тяло:

$$K: \left| \begin{array}{l} (x,\, y) \in D \\ xy \leqq z \leqq 1, \end{array} \right. \quad \text{където} \quad D: \left| \begin{array}{l} x \leqq \sqrt{3}y \\ y \leqq \sqrt{3}x \\ xy \leqq 1. \end{array} \right.$$

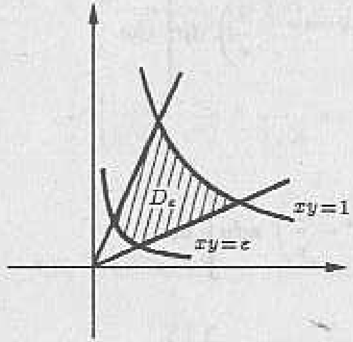
Тогава

$$I = \iiint_K xye^{-z}\, dxdydz = \iint_D xy \left(\int_{xy}^{1} e^{-z} dx\right) dxdy$$

$$= \iint_D xy \left(e^{-xy} - \frac{1}{e}\right) dxdy.$$

Тъй като в подинтегралната функция и в неравенствата, определящи D, се срещат групите xy и $\frac{x}{y}$, то може да се направи следната смяна на променливите:

$$T: \left| \begin{array}{l} u = xy \\ v = \frac{x}{y} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad T: \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv}. \end{array} \right.$$



Фиг. 47

Областта D съдържа точката $(0,0)$, в която функцията $v = \dfrac{y}{x}$ не е дефинирана. За това ще разгледаме областта (фиг. 47)

$$D_\varepsilon : \left| \begin{array}{l} \varepsilon \leqq xy \leqq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq \dfrac{y}{x} \leqq \sqrt{3}, \end{array} \right.$$

където $0 < \varepsilon < 1$.

Лесно се съобразява, че $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} s(D\setminus D_\varepsilon) = 0$, и тъй като подинтегралната функция е непрекъсната в D, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{D\setminus D_\varepsilon} xy\left(e^{-xy} - \frac{1}{e}\right) dxdy = 0.$$

От равенството $\iint\limits_D = \iint\limits_{D_\varepsilon} + \iint\limits_{D\setminus D_\varepsilon}$ следва

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} xy\left(e^{-xy} - \frac{1}{e}\right) dxdy = \iint\limits_{D} xy\left(e^{-xy} - \frac{1}{e}\right) dxdy.$$

Функционалната детерминанта е $\Delta = \dfrac{1}{2v}$, а областта D'_ε е правоъгълникът $\left\{\varepsilon \leqq u \leqq 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq v \leqq \sqrt{3}\right\}$. Следователно

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} xy\left(e^{-xy} - \frac{1}{e}\right) dxdy = \iint\limits_{D'_\varepsilon} u\left(e^{-u} - \frac{1}{e}\right) \frac{1}{2v}\, dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dv}{v} \cdot \int\limits_{\varepsilon}^{1} u\left(e^{-u} - \frac{1}{e}\right) du = \frac{1}{2}\ln 3\left(-\frac{5}{2e} + \varepsilon e^{-\varepsilon} + e^{-\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{2e}\right).$$

След граничен преход получаваме

$$I = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint\limits_{D_\varepsilon} xy\left(e^{-xy} - \frac{1}{e}\right) dxdy = \frac{1}{2}\ln 3\left(1 - \frac{5}{2e}\right).$$

Трети начин. От първите две неравенства следва, че $x \geqq 0$ и $y \geqq 0$, и следователно, като вземем предвид третото неравенство, имаме $z \geqq 0$. Нека z_0 е фиксирано число от $[0, 1]$. Да означим с D_{z_0} сечението на K_1 с равнината $z = z_0$. Тогава

$$I = \iiint\limits_K xye^{-z}\, dxdydz = \int\limits_0^1 \left(\iint\limits_{D_z} xye^{-z}\, dxdy\right) dz,$$

където

$$D_{z_0} : \left| \begin{array}{l} x \leqq \sqrt{3}y \\ y \leqq \sqrt{3}x \\ xy \leqq z_0. \end{array} \right.$$

При пресмятане на двойния интеграл ще направим смяна в полярни координати. Тогава

$$D'_{z_0} : \left| \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \leqq \rho \leqq \sqrt{\dfrac{z_0}{\cos\varphi\,\sin\varphi}} = \rho(\varphi), \end{array} \right.$$

откъдето

$$\iint\limits_{D_{z_0}} xy\, dxdy = \iint\limits_{D'_{z_0}} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi d\rho = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int\limits_0^{\rho(\varphi)} \rho^3 \cos\varphi \sin\varphi\, d\rho\right) d\varphi$$

$$= \frac{z_0^2}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\varphi}{\cos\varphi\,\sin\varphi} = \frac{z_0^2}{4}\ln 3.$$

Оттук за тройния интеграл получаваме

$$I = \int\limits_0^1 \frac{z^2\ln 3}{4} e^{-z} dz = \left(2 - \frac{5}{e}\right)\frac{\ln 3}{4}.$$

4.9. Пресметнете тройния интеграл

$$\iiint\limits_K \frac{z}{x^2(x^2+y^2)}\, dxdydz, \qquad K : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq z \leqq x^2 + y^2 \leqq 4 \\ \sqrt{3} \leqq xy \\ x \geqq 0. \end{array} \right.$$

Решение. Първи начин. Нека $0 \leqq z_0 \leqq 4$. Да разгледаме сечението D_{z_0} на тялото K с равнината $z = z_0$. Имаме

$$D_{z_0}: \left| \begin{array}{l} (x, y) \in D_0 \\ z_0 \leqq x^2 + y^2, \end{array} \right. \quad \text{където} \quad D_0: \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leqq 4 \\ \sqrt{3} \leqq xy \\ x \geqq 0. \end{array} \right.$$

Ясно е, че D_{z_0} е онази част на множеството D_0, която се намира извън кръга C_{z_0} с радиус $\sqrt{z_0}$ и център точката $(0, 0)$. Ще разгледаме следните два случая:

а) Нека кръгът C_{z_0} и множеството D_0 имат най-много една обща точка, т. е. $z_0 \leqq 2\sqrt{3}$ (фиг. 48а). В този случай имаме $D_{z_0} = D_0$. В двойния интеграл

$$\iint\limits_{D_{z_0}} \frac{dxdy}{x^2(x^2+y^2)} = \iint\limits_{D_0} \frac{dxdy}{x^2(x^2+y^2)}$$

ще направим смяна на променливите в полярни координати. Получаваме

$$D'_{z_0}: \left| \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{3} \\ \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\varphi\cos\varphi}} \leqq \rho \leqq 2. \end{array} \right.$$

Тогава

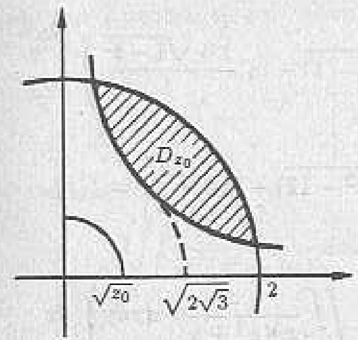
$$I_{z_0} = \iint\limits_{D_{z_0}} \frac{dxdy}{x^2(x^2+y^2)} = \iint\limits_{D'_{z_0}} \frac{\rho\, d\rho d\varphi}{\rho^4 \cos^2\varphi}$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2\varphi} \left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \right) d\varphi$$

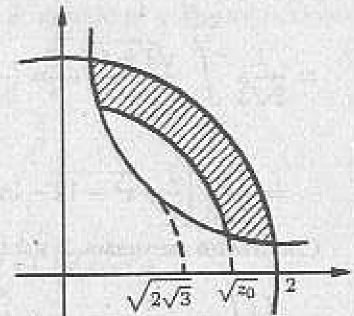
$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln\cos\varphi + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}(\ln 3 - 1).$$

б) Нека сега $2\sqrt{3} \leqq z_0 \leqq 4$ (фиг. 48б). Имаме

$$D_{z_0}: \left| \begin{array}{l} z_0 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4 \\ \sqrt{3} \leqq xy \\ x > 0. \end{array} \right.$$



Фиг. 48а



Фиг. 48б

Отново в двойния интеграл I_{z_0} ще направим смяна в полярни координати, но тъй като D_{z_0} е криволинеен венец, сега ще разглеждаме D'_{z_0} като криволинеен трапец с основи, успоредни на оста $O\varphi$. След заместване получаваме

$$D'_{z_0}: \left| \begin{array}{l} z_0 \leqq \rho^2 \leqq 4 \\ \sqrt{3} \leqq \rho^2 \cos\varphi\sin\varphi \\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad \text{или} \quad D'_{z_0}: \left| \begin{array}{l} \sqrt{z_0} \leqq \rho \leqq 2 \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{\rho^2} \leqq \sin 2\varphi \\ 0 < 2\varphi < \pi. \end{array} \right.$$

Да означим $\alpha = \arcsin \dfrac{2\sqrt{3}}{\rho^2}$. Неравенствата, съдържащи φ, са изпълнени тогава и само тогава, когато $\alpha \leqq 2\varphi \leqq \pi - \alpha$ и следователно

$$D'_{z_0}: \left| \begin{array}{l} \sqrt{z_0} \leqq \rho \leqq 2 \\ \dfrac{\alpha}{2} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi-\alpha}{2}. \end{array} \right.$$

Тогава

$$I_{z_0} = \iint\limits_{D_{z_0}} \frac{dxdy}{x^2(x^2+y^2)} = \int\limits_{\sqrt{z_0}}^{2} \left(\int\limits_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi-\alpha}{2}} \frac{d\varphi}{\rho^3\cos^2\varphi} \right) d\rho = \int\limits_{\sqrt{z_0}}^{2} \frac{2\cos\alpha}{\rho^3 \sin\alpha}\, d\rho$$

$$= 2\int\limits_{\sqrt{z_0}}^{2} \frac{1}{\rho^3} \cdot \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{\rho^2}\right)^2}}{\frac{2\sqrt{3}}{\rho^2}}\, d\rho = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \int\limits_{\sqrt{z_0}}^{2} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{\rho^2}\right)^2}}{\frac{2\sqrt{3}}{\rho^2}}\, d\,\frac{2\sqrt{3}}{\rho^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{3}}{z_0}} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\, dt = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\sqrt{1-t^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \right) \Bigg|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{2\sqrt{3}}{z_0}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[\frac{1}{z}\sqrt{z^2-12} - \ln(z+\sqrt{z^2-12}) + \ln 6 - \frac{1}{2} \right] = f(z).$$

Съгласно теорема 2 имаме

$$\iiint\limits_K \frac{z}{x^2(x^2+y^2)}\, dxdydz = \int\limits_0^4 \left(\iint\limits_{D_z} \frac{z}{x^2(x^2+y^2)}\, dxdy \right) dz$$

$$= \int\limits_0^{2\sqrt{3}} \left(\iint\limits_{D_z} \frac{z}{x^2(x^2+y^2)}\, dxdy \right) dz + \int\limits_0^{2\sqrt{3}} \left(\iint\limits_{D_z} \frac{z}{x^2(x^2+y^2)}\, dxdy \right) dz$$

$$= \int\limits_0^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{12}(\ln 3 - 1) z\, dz + \int\limits_{2\sqrt{3}}^4 z f(z)\, dz.$$

Като вземем предвид, че

$$\int \sqrt{z^2-12}\, dz = \frac{1}{2}\left(z\sqrt{z^2-12} - 12\ln(z+\sqrt{z^2-12}) \right),$$

$$\int z\ln(z+\sqrt{z^2-12})\, dz = \frac{1}{4}\left[(2z^2-12)\ln(z+\sqrt{z^2-12}) - z\sqrt{z^2-12} \right],$$

намираме

$$\iiint\limits_K \frac{z}{x^2(x^2+y^2)}\, dxdydz = \frac{\sqrt{3}}{12}(4 - 3\ln 3).$$

В т о р и н а ч и н. Ще направим смяна в цилиндрични координати. След заместване получаваме

$$K' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq t \leqq \rho^2 \leqq 4 \\ \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi \geqq 3 \\ \cos\varphi > 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad K' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq t \leqq \rho^2 \\ \rho(\varphi) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\varphi \sin\varphi}} \leqq \rho \leqq 2 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\varphi\sin\varphi} \leqq 4 \\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

След като решим неравенствата, ограничаващи φ, получаваме

$$K' : \left| \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{6} \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{3} \\ \rho(\varphi) \leqq \rho \leqq 2 \\ 0 \leqq t \leqq \rho^2. \end{array} \right.$$

Тогава

$$\iiint\limits_K \frac{z}{x^2(x^2+y^2)}\, dxdydz = \iiint\limits_{K'} \frac{t\rho}{\rho^4 \cos^2\varphi}\, d\varphi d\rho dt$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\int\limits_{\rho(\varphi)}^{2} \frac{1}{\rho^3 \cos^2\varphi} \left(\int\limits_0^{\rho^2} t\, dt \right) d\rho \right] d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int\limits_{\rho(\varphi)}^{2} \frac{\rho\, d\rho}{\cos^2\varphi} \right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{4} \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2\varphi} \left(4 - \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi \sin\varphi} \right) d\varphi$$

$$= \left(\operatorname{tg}\varphi - \frac{\sqrt{3}}{8\cos^2\varphi} - \frac{\sqrt{3}}{4} \ln \operatorname{tg}\varphi \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12}(4 - 3\ln 3).$$

4.10. Пресметнете тройния интеграл

$$\iiint\limits_K \frac{1}{y^2}\, dxdydz, \qquad K : \left| \begin{array}{l} 2x^2 + 3y^2 \leqq z \leqq 5y \\ 2 \leqq x^2 + y^2. \end{array} \right.$$

Р е ш е н и е. Ще направим смяна в цилиндрични координати. След заместване в неравенствата, определящи K, имаме

$$K' : \left| \begin{array}{l} 2\rho^2 + \rho^2\sin^2\varphi \leqq t \leqq 5\rho\sin\varphi \\ 2 \leqq \rho^2,\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \end{array} \right.$$

или

$$K' : \left| \begin{array}{l} (\rho, \varphi) \in D \\ 2\rho^2 + \rho^2\sin^2\varphi \leqq t \leqq 5\sin\varphi, \end{array} \right.$$

където

$$D : \left| \begin{array}{l} 2\rho^2 + \rho^2\sin^2\varphi \leqq 5\rho\sin\varphi \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ \sqrt{2} \leqq \rho. \end{array} \right.$$

Като преобразуваме неравенствата, съдържащи ρ, имаме

$$\sqrt{2} \leqq \rho \leqq \frac{5\sin\varphi}{2+\sin^2\varphi},$$

откъдето $\sqrt{2} \leqq \dfrac{5\sin\varphi}{2+\sin^2\varphi}$ или

$$\sqrt{2}\sin^2\varphi - 5\sin\varphi + 2\sqrt{2} = 2\left(\sin\varphi - \frac{4}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqq 0.$$

Тъй като $\sin\varphi < \dfrac{4}{\sqrt{2}}$, то последното неравенство е изпълнено при $\sin\varphi \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и от $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ окончателно получаваме

$$D: \left| \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{4} \leqq \varphi \leqq \dfrac{3\pi}{4} \\ \sqrt{2} \leqq \rho \leqq \dfrac{5\sin\varphi}{2+\sin^2\varphi} = \rho(\varphi). \end{array} \right.$$

Тогава

$$\iiint\limits_K \frac{1}{y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{K'} \frac{\rho\, d\rho d\varphi dt}{\rho^2 \sin^2\varphi} = \iint\limits_D \frac{5\rho\sin\varphi - \rho^2(2+\sin^2\varphi)}{\rho\sin^2\varphi}\,d\varphi d\rho$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\int\limits_{\sqrt{2}}^{\rho(\varphi)} \left(\frac{5}{\sin\varphi} - \frac{2+\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}\rho\right) d\rho\right] d\varphi$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\frac{25}{2(2+\sin^2\varphi)} - \frac{5\sqrt{2}}{\sin\varphi} + \frac{2}{\sin^2\varphi} + 1\right) d\varphi$$

$$= \left[-\frac{25}{2\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{cotg}\varphi\right) - 5\sqrt{2}\ln\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 2\operatorname{cotg}\varphi + \varphi\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= \frac{25}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}} + 10\sqrt{2}\,\ln(\sqrt{2}-1) + 4 + \frac{\pi}{2}.$$

4.11. Пресметнете тройния интеграл

$$\iiint\limits_K yzdxdy, \quad \text{където} \quad K: \left| \begin{array}{l} x^2+y^2 \leqq z^2 \leqq 2y - x^2 - y^2 \\ z \geqq 0. \end{array} \right.$$

Решение. Първи начин. Ще направим смяна на променливите в цилиндрични координати. След заместване в неравенствата, определящи K, получаваме

$$K': \left| \begin{array}{l} \rho^2 \leqq t^2 \leqq 2\rho\sin\varphi - \rho^2 \\ t \geqq 0 \\ \rho \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi. \end{array} \right.$$

Тялото K' ще представим като цилиндрично тяло с образувателна, успоредна на оста Ot. След определяне на границите, в които се мени t, имаме

$$K': \left| \begin{array}{l} (\rho, \varphi) \in D \\ \rho \leqq t \leqq \sqrt{2\rho\sin\varphi - \rho^2} = t_1, \end{array} \right.$$

където

$$D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \rho \leqq \sqrt{2\rho\sin\varphi - \rho^2}. \end{array} \right.$$

Оттук, разглеждайки D като криволинеен трапец с основи, успоредни на оста $O\rho$, получаваме

$$D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq \rho \leqq \sin\varphi \\ 0 \leqq \sin\varphi \end{array} \right. \quad \text{или} \quad D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \pi \\ 0 \leqq \rho \leqq \sin\varphi. \end{array} \right.$$

Тогава

$$\iiint\limits_K yz\,dxdydz = \iiint\limits_{K'} \rho\sin\varphi . t\,d\varphi d\rho dt = \iint\limits_D \left(\rho\sin\varphi \int\limits_\rho^{t_1} t\,dt\right) d\varphi d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_D \rho^2\sin\varphi(2\rho\sin\varphi - \rho^2 - \rho^2)\,d\varphi d\rho$$

$$= \int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{4}\sin^6\varphi - \frac{1}{5}\sin^6\varphi\right) d\varphi = \frac{1}{20}\int\limits_0^\pi \sin^6\varphi\,d\varphi = \frac{\pi}{64}.$$

В т о р и н а ч и н. Ще направим смяна на променливите в сферични координати. Тогава

$$K': \left|\begin{array}{l} r\cos\theta \geqq 0 \\ r^2\sin^2\theta \leqq r^2\cos^2\theta \\ r^2 \leqq 2r\sin\varphi\sin\theta \\ 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ r \geqq 0 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad K': \left|\begin{array}{l} 0 \leqq \theta \leqq \pi \\ \sin\theta \leqq \cos\theta \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq r \leqq 2\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \geqq 0. \end{array}\right.$$

Тъй като неравенствата, съдържащи θ, са еквивалентни на $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$ и от последното неравенство следва $\sin\varphi \geqq 0$, то

$$K': \left|\begin{array}{l} (\varphi,\theta) \in D \\ 0 \leqq r \leqq 2\sin\varphi\sin\theta = a, \end{array}\right. \quad \text{където} \quad D: \left|\begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \pi \\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}. \end{array}\right.$$

Тогава

$$\iiint\limits_K xy\,dxdydz = \iiint\limits_{K'} r\sin\varphi\sin\theta . r\cos\varphi\sin\theta . r^2\sin\theta\, d\varphi d\theta dr$$

$$= \iint\limits_D \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\left(\int\limits_0^a r^4\,dr\right) d\varphi d\theta = \frac{32}{5}\iint\limits_D \sin^7\theta\sin^6\varphi\cos\theta\, d\varphi d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^7\theta\cos\theta\, d\theta . \int\limits_0^{\pi}\sin^6\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{64}.$$

4.12. Пресметнете обемите на частите, на които се разделя кълбото с радиус 1 и център $(0,0,0)$ от цилиндъра с уравнение $(x^2+y^2)(1-x^2-y^2) = x^2$.

Р е ш е н и е. Неравенството, което определя кълбото, е $x^2+y^2+z^2 \leqq 1$. Ще пресметнем обема на онази част от него, чиито точки удовлетворяват неравенството $(x^2+y^2)(1-x^2-y^2) \leqq x^2$. Освен това от съображения за симетрия относно координатните равнини ще разгледаме само подмножеството K, което се съдържа в първи октант.

П ъ р в и н а ч и н. Да направим смяна в цилиндрични координати. След заместване в неравенствата, определящи K, имаме

$$K': \left|\begin{array}{l} \rho^2(1-\rho^2) \leqq \rho^2\cos^2\varphi \\ t^2+\rho^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ \rho \geqq 0,\ t \geqq 0 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad K': \left|\begin{array}{l} \sin^2\varphi \leqq \rho^2 \leqq 1-t^2 \\ 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ \rho \geqq 0,\ t \geqq 0. \end{array}\right.$$

Оттук, като направим съответните преобразувания, получаваме

$$K': \left|\begin{array}{l} \sin\varphi \leqq \rho \leqq \sqrt{1-t^2} \\ \sin^2\varphi \leqq 1-t^2 \\ 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right. \quad \text{или} \quad K': \left|\begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqq t \leqq \cos\varphi \\ \sin\varphi \leqq \rho \leqq \sqrt{1-t^2}. \end{array}\right.$$

Тогава

$$v(K) = \iiint\limits_{K'} \rho\, d\varphi d\rho dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_0^{\cos\varphi}\left(\int\limits_{\sin\varphi}^{\sqrt{1-t^2}} \rho\, d\rho\right) dt\right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_0^{\cos\varphi}(1-t^2-\sin\varphi)\,dt\right] d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{2}{9}.$$

Като вземем предвид, че пресметнахме само $\dfrac{1}{8}$ от обема на едната част на сферата, то търсените обеми са съответно $\dfrac{16}{9}$ и $\dfrac{3\pi}{4} - \dfrac{16}{9}$.

Множеството K' може да се представи и като цилиндрично тяло с образувателни, успоредни на оста Ot. Направете самостоятелно тези пресмятания.

В т о р и н а ч и н. Да направим смяна на променливите в сферични координати. Тогава

$$K': \left|\begin{array}{l} r^2 \leqq 1 \\ r^2\sin^2\theta(1-r^2\sin^2\theta) \leqq r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi \\ 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right.$$

или

$$K':\left|\begin{array}{l}0 \leqq r \leqq 1\\ \sin\varphi \leqq r\sin\theta\\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\\ 0 \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}.\end{array}\right.$$

За да можем да извършваме пресмятанията е необходимо $\sin\theta > 0$. За целта може да разгледаме тялото K'_ε, определено с неравенствата

$$K'_\varepsilon:\left|\begin{array}{l}\varepsilon \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}\\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} \leqq r \leqq 1\\ \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} \leqq 1\end{array}\right. \quad \text{или} \quad K'_\varepsilon:\left|\begin{array}{l}\varepsilon \leqq \varphi \leqq \dfrac{\pi}{2}\\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\\ b = \dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} \leqq r \leqq 1.\end{array}\right.$$

Лесно се съобразява, че в K'_ε имаме $\sin\theta>0$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} v(K_\varepsilon) = v(K)$.

Тогава

$$v(K_\varepsilon) = \iiint\limits_{K_\varepsilon} r^2\sin\theta\, d\varphi d\theta dr = \int\limits_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_b^1 r^2\sin\theta dr\right) d\theta\right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\left[\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\left(1-\frac{\sin^3\varphi}{\sin^3\theta}\right) d\theta\right] d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi(1-\sin^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3} - \sin\varepsilon + \frac{\sin^3\varepsilon}{3}\right).$$

Оттук получаваме $v(K) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} v(K_\varepsilon) = \dfrac{2}{9}$.

4.13. Пресметнете тройния интеграл

$$\iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz, \qquad K:\left|\begin{array}{l}x^2+y^2+z^2 \leqq 4\\ x^2+y^2 \leqq 3z.\end{array}\right.$$

Решение. Да направим смяна на променливите в сферични координати. Имаме

$$K':\left|\begin{array}{l}r^2 \leqq 4\\ r^2\sin^2\theta \leqq 3r\cos\theta\\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\\ 0 \leqq \theta \leqq \pi,\ r \geqq 0\end{array}\right. \quad \text{или} \quad K':\left|\begin{array}{l}0 \leqq r \leqq 2\\ r\sin^2\theta \leqq 3\cos\theta\\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\\ 0 \leqq \theta \leqq \pi.\end{array}\right.$$

Първи начин. Да представим K' като цилиндрично тяло с образувателна, успоредна на оста Or. Тъй като имаме две функции, ограничаващи r отгоре, ще разгледаме два случая: $2 \leqq \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$ и $2 \geqq \dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$. От първото неравенство или, което е същото, от

$$2\sin^2\theta = 2(1-\cos^2\theta) \leqq 3\cos\theta$$

и от $0 \leqq \theta \leqq \pi$ имаме $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$. Така K' се представя като обединение на две цилиндрични тела:

$$K_1:\left|\begin{array}{l}0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\\ 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}\\ 0 \leqq r \leqq 2\end{array}\right. \quad \text{и} \quad K_2:\left|\begin{array}{l}0 \leqq \varphi \leqq 2\pi\\ \dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \pi\\ 0 \leqq r \leqq \dfrac{3\cos\theta}{\sin^2\theta} = a.\end{array}\right.$$

От последното неравенство, определящо K_2, следва $\cos\theta \geqq 0$ и следователно $\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$.

Тогава

$$I = \iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz = \iiint\limits_{K'} r.r^2\sin\theta\, d\varphi d\theta dr$$

$$= \iiint\limits_{K_1} r^3\sin\theta\, d\varphi d\theta dr + \iiint\limits_{K_2} r^3\sin\theta\, d\varphi d\theta dr = I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi.\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\, d\theta.\int\limits_0^2 r^3\, dr = 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{4} = 4\pi.$$

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int\limits_0^a r^3\sin\theta\, dr\right) d\theta\right] d\varphi = \frac{2\pi}{4}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\frac{81\cos^4\theta}{\sin^8\theta}\, d\theta$$

26

$$= \frac{81\pi}{2}\left(-\frac{\cos^3 x}{6\sin^6 x} + \frac{\cos x}{8\sin^4 x} - \frac{\cos x}{16\sin^2 x} + \frac{1}{16}\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{13\pi}{8.27} + \frac{81\pi}{64}\ln 3.$$

И така

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{64}(204 + 81.\ln 3).$$

В т о р и   н а ч и н. Да разгледаме K' като цилиндрично тяло с образувателна, успоредна на оста $O\theta$. Решаваме второто неравенство относно θ. При $r \neq 0$ от

$$r\cos^2\theta + 3\cos\theta - r = r(\cos\theta - b_1)(\cos\theta - b_2) \geqq 0,$$

$$b_1 = \frac{-3 - \sqrt{9+4r^2}}{2r} < -1 \quad \text{и} \quad 0 \leqq b_2 = \frac{-3 + \sqrt{9+4r^2}}{2r} < 1$$

имаме $b_2 \leqq \cos\theta$ и следователно $0 \leqq \theta \leqq \arccos b_2 = \beta$.

От

$$b_2 = \frac{-3 + \sqrt{9+4r^2}}{2r} = \frac{2r}{\sqrt{9+4r^2}+3}$$

виждаме, че $\lim\limits_{r\to 0} b_2 = 0$ и следователно $\lim\limits_{r\to 0} \arccos b_2 = \frac{\pi}{2}$, откъдето е ясно, че ако при $r = 0$ положим $\beta = \frac{\pi}{2}$, то с точност до множество с обем, равен на 0 (т. е. множество, което не влияе на смяната на променливите), множеството K' се определя с неравенствата

$$K' : \left|\begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \\ 0 \leqq r \leqq 2 \\ 0 \leqq \theta \leqq \arccos b_2 = \beta. \end{array}\right.$$

Тогава

$$I = \iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{K'} r^3 \sin\theta\, d\varphi d\theta dr$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^2\left(\int\limits_0^\beta r^3\sin\theta\,d\theta\right)dr\right]d\varphi = 2\pi\int\limits_0^2 r^3(1-\cos\beta)\,dr$$

$$= 16\pi - \pi\int\limits_0^2 r^2\sqrt{9+r^2}\,dr = 16\pi - \pi\frac{205}{16} + \frac{81}{8.8}\ln 3 = \frac{51}{16}\pi + \frac{81}{64}\ln 3.$$

4.14. Пресметнете тройния интеграл

$$\iiint\limits_K \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dxdydz, \qquad K : \left|\begin{array}{l} 1 \leqq (x^2+y^2+z^2)^2 \leqq 2(x^2-y^2) \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0. \end{array}\right.$$

Р е ш е н и е. Ще направим смяна в сферични координати. Тъй като тялото K е разположено в първи октант, то за образа K' имаме

$$K' : \left|\begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \\ 1 \leqq r^4 \leqq 2r^2\sin^2\theta(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\ r \geqq 0. \end{array}\right.$$

Като вземем предвид, че в първи квадрант неравенството

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = (\cos\varphi - \sin\varphi)(\cos\varphi + \sin\varphi) \geqq 0$$

е изпълнено тогава и само тогава, когато $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4}$, имаме

$$K' : \left|\begin{array}{l} (\varphi,\theta) \in D \\ 1 \leqq r \leqq \sin\theta\sqrt{2\cos 2\varphi} = a, \end{array}\right. \text{където } D : \left|\begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{4} \\ 1 \leqq \sin\theta\sqrt{2\cos 2\varphi} \\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Тогава

$$I = \iiint\limits_K \frac{xy}{(x^2+y^2)}\,dxdydz = \iiint\limits_{K'} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi\sin^2\theta}{r^4\sin^4\theta}\,r^2\sin\theta\,d\varphi d\theta dr$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\theta}\int\limits_1^a dr\right)d\varphi d\theta = \iint\limits_D \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\sin\theta\sqrt{2\cos 2\varphi} - 1\right)d\varphi d\theta.$$

Да представим областта D като криволинеен трапец с основи, успоредни на оста $O\varphi$. От $0 \leqq 2\varphi \leqq \frac{\pi}{2}$ следва $\arccos(\cos 2\varphi) = 2\varphi$ и тъй като функцията $\arccos x$ е монотонно намаляваща, от последното неравенство, определящо D, получаваме последователно:

$$\frac{1}{2\sin^2\theta} \leqq \cos 2\varphi \leqq 1, \quad \arccos\frac{1}{2\sin^2\theta} \geqq \arccos(\cos 2\varphi) = 2\varphi.$$

Интервала, в който се мени θ, намираме от неравенството $\frac{1}{2\sin^2\theta} \leqq 1$. Тъй като $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$, това неравенство е еквивалентно на $\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$. Така получаваме

$$D : \left| \begin{array}{l} \frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sin^2\theta} = b. \end{array} \right.$$

Тогава

$$I = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int\limits_0^b \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\sin\theta} (\sqrt{2\cos 2\varphi}\, \sin\theta - 1)\, d\varphi \right] d\theta.$$

Ще направим смяна $2\cos 2\varphi = t$:

$$I = \frac{1}{8} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int\limits_{\frac{1}{\sin^2\theta}}^{2} \frac{\sqrt{t}\sin\theta - 1}{\sin\theta}\, dt \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3\sin^3\theta} - \frac{2}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin^3\theta} \right) d\theta$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{24} + \frac{\sqrt{2}}{48} + \frac{11}{48} \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Забележка. Двойният интеграл може да се пресметне и чрез представянето на D като криволинеен трапец с основи, успоредни на оста $O\theta$, но пресмятанията са свързани с повече технически трудности.

4.15. Пресметнете тройния интеграл

$$\iiint\limits_K xy^3z^2\, dxdydz, \qquad K : \left| \begin{array}{l} x^2 + y^4 + z^6 \leqq 1 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0. \end{array} \right.$$

Решение. Ще направим следната смяна на променливите:

$$T : \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = \sqrt{r\sin\varphi\, \sin\theta} \\ z = \sqrt[3]{r\cos\theta},\ r \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Трансформацията T може да се разложи като произведение на следните две трансформации:

$$T_1 : \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = \sqrt{u} \\ z = \sqrt[3]{v} \end{array} \right. \quad \text{и} \quad T_2 : \left| \begin{array}{l} t = r\cos\varphi\sin\theta \\ u = r\sin\varphi\sin\theta \\ v = r\cos\theta. \end{array} \right.$$

Намираме съответните функционални детерминанти

$$\frac{D(x,\, y,\, z)}{D(t,\, u,\, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{u}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3\sqrt[3]{v^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{6\sqrt{u}\sqrt[3]{v^2}}$$

и

$$\frac{D(t,\, u,\, v)}{D(r,\, \theta,\, \varphi)} = r^2 \sin\theta,$$

откъдето за функционалната детерминанта на трансформацията T имаме

$$\frac{D(x,\, y,\, z)}{D(r,\, \theta,\, \varphi)} = \frac{D(x,\, y,\, z)}{D(t,\, u,\, v)} \cdot \frac{D(t,\, u,\, v)}{D(r,\, \theta,\, \varphi)} = \frac{r^2\sin\theta}{6\sqrt{u}\,\sqrt[3]{v^2}}.$$

След заместване в неравенствата, определящи K, намираме, че образът K' е паралелепипедът

$$K' : \left| \begin{array}{l} 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq r \leqq 1 \end{array} \right.$$

и следователно

$$I = \iiint\limits_K xy^3z^2\, dxdydz = \iiint\limits_{K'} t\sqrt{u^3}\sqrt[3]{v^2}\, \frac{r^2\sin\theta}{6\sqrt{u}\,\sqrt[3]{v^2}}\, d\theta d\varphi dr$$

$$= \frac{1}{6} \iiint\limits_{K'} r^4 \cos\varphi\sin\varphi\sin^3\theta\, d\varphi d\theta dr$$

$$= \frac{1}{6} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi . \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta . \int\limits_0^1 r^4\, dr = \frac{1}{90}.$$

4.16. Пресметнете тройния интеграл

$$\iiint\limits_K e^{xyz}x^2y\,dxdydz, \qquad K:\left|\begin{array}{l} a \leqq x\,(0<a<1)\\ 1\leqq y\\ 1\leqq z\\ xyz\leqq 1.\end{array}\right.$$

Р е ш е н и е. П ъ р в и н а ч и н. K може да се представи като цилиндрично тяло по следния начин:

$$K:\left|\begin{array}{l}(x,y)\in D\\ 1\leqq z\leqq \dfrac{1}{xy},\end{array}\right. \quad \text{където} \quad D:\left|\begin{array}{l} a\leqq x\leqq 1\\ 1\leqq y\leqq \dfrac{1}{x}.\end{array}\right.$$

Тогава

$$\iiint\limits_K e^{xyz}x^2y\,dxdydz=\iint\limits_D\left(x\int\limits_1^{\frac{1}{xy}}e^{xyz}\,d(xyz)\right)dxdy$$

$$=\iint\limits_D x(e-e^{xy})\,dxdy=\int\limits_a^1\left[\int\limits_1^{\frac{1}{x}}(e-e^{xy})\,dy\right]dx$$

$$=\int\limits_a^1(e^x-ex)\,dx=\frac{e}{2}-e^a+\frac{e}{2}a^2.$$

В т о р и н а ч и н. Да направим смяна на променливите

$$T:\left|\begin{array}{l} x=u\\ y=\dfrac{u+v}{u}\\ z=\dfrac{u+v+w}{u+v}.\end{array}\right.$$

Функционалната детерминанта е

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix}1&0&0\\ y'_u&\dfrac{1}{u}&0\\ z'_u&z'_v&\dfrac{1}{u+v}\end{vmatrix}=\frac{1}{u(u+v)}.$$

За образа K' на множеството K имаме неравенствата

$$K':\left|\begin{array}{l} a\leqq u\\ 1\leqq \dfrac{u+v}{u}\\ 1\leqq \dfrac{u+v+w}{u+v}\\ u+v+w\leqq 1\end{array}\right. \quad \text{или} \quad K':\left|\begin{array}{l} a\leqq u\\ 0\leqq v\\ 0\leqq w\\ u+v+w\leqq 1.\end{array}\right.$$

Оттук е ясно, че K' се представя като цилиндрично тяло по следния начин:

$$K':\left|\begin{array}{l} a\leqq u\leqq 1\\ 0\leqq v\leqq 1-u\\ 0\leqq w\leqq 1-u-v,\end{array}\right. \quad \text{като} \quad D:\left|\begin{array}{l} a\leqq u\leqq 1\\ 0\leqq v\leqq 1-u.\end{array}\right.$$

Така

$$\iiint\limits_K e^{xyz}x^2y\,dxdydz=\iiint\limits_{K'} e^{u+v+w}\cdot u^2\cdot\frac{u+v}{u}\cdot\frac{1}{u(u+v)}\,dudvdw$$

$$=\iint\limits_D e^{u+v}\left(\int\limits_0^{1-u-v}e^w\,dw\right)dudv=\iint\limits_D e^{u+v}(e^{1-u-v}-1)\,dudv$$

$$=\int\limits_a^1\left[\int\limits_0^{1-u}(e-e^{u+v})\,dv\right]du=\int\limits_a^1[e(1-u)-(e-e^u)]\,du=\frac{e}{2}-e^a+\frac{e}{2}a^2.$$

4.17. Пресметнете обема на телата, определени със следните неравенства:

а) $K:\left|\begin{array}{l} x^2+y^2\leqq 3z\\ x^2+y^2+z^2\leqq 4\\ x\geqq 0,\ y\geqq 0;\end{array}\right.$ б) $K:\left|\begin{array}{l} x^2+y^2\geqq 2\\ 0\leqq x\leqq y\leqq 2\\ 0\leqq z(1+x^2+y^2)^2\leqq 1;\end{array}\right.$

в) $K:\left|\begin{array}{l} x^7+3y^2\leqq x^2\\ x^2+y^2\leqq z^3;\end{array}\right.$ г) $K:\left|\begin{array}{l} x^2+y^2\leqq z^2\\ y^2+z^5\leqq 3x^2\\ z\geqq 0;\end{array}\right.$

д) $K:\left|\begin{array}{l} \dfrac{7}{5}-x\leqq y\leqq\sqrt{1-x^2}\\ 0\leqq xy^2z\leqq 1;\end{array}\right.$

е) $K : (x^2+y^2+z^2)^7 \leqq (3x^2-y^2)y^2z^4$;

ж) $K : (x^2+y^2+z^2)^6 \leqq (x^4-y^4)x^2$.

4.18. Намерете обемите на частите, на които параболоидът с уравнение $x^2+y^2=3az\ (a>0)$ разделя сферата $x^2+y^2+z^2 \leqq 4a^2$.

4.19. Намерете обема на тялото, заградено от повърхнините с уравнения $x^2+y^2=az$, $x^2+y^2=ax\ (a>0)$ и $z=0$.

4.20. Пресметнете следните тройни интеграли:

а) $\iiint\limits_K (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz, \qquad K : \left| \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \leqq R^2 \\ x^2+y^2 \leqq z^2 \\ z \geqq 0\ (R>0); \end{array} \right.$

б) $\iiint\limits_K \dfrac{Rz}{\sqrt{(x^2+y^2)^5}}\,dxdydz, \qquad K : \left| \begin{array}{l} 3R^2 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq 2Ry \\ x \geqq 0,\ z \geqq 0\ (R>0); \end{array} \right.$

в) $\iiint\limits_K z^3\,dxdydz, \qquad K : \left| \begin{array}{l} (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2) \leqq a^2xy \\ x^2+y^2 \leqq 3z^2 \\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0\ (a>0); \end{array} \right.$

г) $\iiint\limits_K \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,\ K : \left| \begin{array}{l} z^2-x^2-y^2 \leqq (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} \\ x^2+y^2+z^2 \leqq \sqrt{x^2+y^2}; \end{array} \right.$

д) $\iiint\limits_K \left(\dfrac{x^2+4y^2+9z^2}{x^2+4y^2}\right)^2 dxdydz,$

$$K : \left| \begin{array}{l} 1 \leqq 16(x^2+4y^2+9z^2)^2 \\ (x^2+4y^2+9z^2)^2 \leqq x^2+4y^2. \end{array} \right.$$

Упътване. г) След смяна в сферични координати тялото K' се разделя на две тела:

$$K_1' : \{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ \frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ \cos^2\theta-\sin^2\theta \leqq r \leqq \sin\theta\},$$

$$K_2' : \{0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ \frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ 0 \leqq r \leqq \sin\theta\}.$$

§ 5. Многократни интеграли

Дефинициите и основните свойства на n-кратните интеграли са аналогични на съответните дефиниции и свойства на двойни и тройни интеграли, дадени в предишните параграфи, като навсякъде се разглеждат измерими в смисъл на Пеано — Жордан множества в n-мерно пространство. Тук ще споменем само една теорема за пресмятане на n-кратни интеграли.

За краткост понякога ще използваме означенията

$$\int\limits_K \cdots \int F(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n = \int\limits_K F(x_1,\dots,x_n)\,dx = \int\limits_K F(x)\,dx.$$

Нека множеството $K \subset R^k \times R^n$ е компактно и измеримо в смисъл на Пеано — Жордан. Ще казваме, че K е цилиндрично тяло с основи в R^k, ако:

а) съществува компактно и измеримо в смисъл на Пеано — Жордан множество $D \subset R^k$;

б) за всяко $x=(x_1,x_2,\dots,x_k) \in D$ съществува компактно и измеримо в смисъл на Пеано — Жордан множество $D_x \subset R^n$, такова че $(x,y) = (x_1,x_2,\dots,x_k,y_1,y_2,\dots,y_n) \in K$ тогава и само тогава, когато $(x_1,x_2,\dots,x_k) \in D$ и $(y_1,y_2,\dots,y_n) \in D_x$.

Теорема 1. Нека функцията $F(x_1,x_2,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)$ е интегруема в цилиндрично тяло K и нека за всяка фиксирана точка $x=(x_1,x_2,\dots,x_k) \in D$ функцията $F(x_1,x_2,\dots,x_k,y_1,y_2,\dots,y_n)$ е интегруема в D_x. Тогава функцията

$$\int\limits_{D_x} F(x_1,x_2,\dots,x_k,y_1,y_2,\dots,y_n)\,dy$$

е интегруема в D и

$$\int\limits_K \cdots \int F(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)\,dx_1dx_2\dots dx_k dy_1dy_2\dots dy_n$$

$$= \int\limits_D \left[\ \int\limits_{D_x} F(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)\,dy\right] dx.$$

Очевидно теоремата е в сила, ако функцията F е непрекъсната.

5.1. Пресметнете обема на n-мерен тетраедър, зададен с неравенствата

$$K_n(a) : \left| \begin{array}{l} x_1+x_2+\dots+x_n \leqq a\ (a>0) \\ x_i \geqq 0,\ i=1,2,\dots,n. \end{array} \right.$$

Р е ш е н и е. П ъ р в и н а ч и н. В интеграла

$$I_n(a) = \int\limits_{K_n(a)} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

ще направим смяна на променливите $T: \{x_i = at_i,\ i = 1, 2, \dots, n\}$.

Функционалната детерминанта е $\Delta_n = a^n$, а K_n' се определя с неравенствата

$$K_n' : \left| \begin{array}{l} t_1 + t_2 + \dots + t_n \leqq 1 \\ t_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

Тогава

$$I_n(a) = \int\limits_{K_n(a)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int\limits_{K_n'} a^n dt_1 dt_2 \dots dt_n = a^n I_n(1).$$

Нека сега да фиксираме $x_n \in [0, 1] = D$ и да означим с D_{x_n} подмножеството на R^{n-1}, определено с неравенствата

$$D_{x_n} : \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leqq 1 - x_n \\ x_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

Така представихме $K_n(1)$ като цилиндрично тяло и следователно можем да приложим теорема 1:

$$I_n(1) = \int\limits_{K_n(1)} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{D_{x_n}} dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \right] dx_n$$

$$= \int\limits_0^1 I_{n-1}(1 - x_n)\, dx_n = \int\limits_0^1 (1 - x_n)^{n-1} I_{n-1}(1)\, dx = \frac{1}{n} I_{n-1}(1).$$

След последователно заместване в равенствата

$$I_n(1) = \frac{1}{n} I_{n-1}(1)$$

$$I_{n-1}(1) = \frac{1}{n-1} I_{n-2}(1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$I_2(1) = \frac{1}{2} I_1(1) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 dx_1 = \frac{1}{2}$$

получаваме $I_n(1) = \frac{1}{n!}$ и следователно $I_n(a) = \frac{1}{n!} a^n$.

В т о р и н а ч и н. Да направим следната смяна на променливите (вж. зад. 4.2):

$$T : \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{a} y_1 (a - y_2) \\ x_2 = \frac{1}{a^2} y_1 y_2 (a - y_3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = \frac{1}{a^{n-1}} y_1 y_2 \dots y_{n-1} (a - y_n) \\ x_n = \frac{1}{a^{n-1}} y_1 y_2 \dots y_{n-1} y_n. \end{array} \right.$$

Лесно се установява, че функционалната детерминанта е

$$\Delta_n = \frac{1}{a^{\frac{n(n-1)}{2}}} y_1^{n-1} y_2^{n-2} \dots y_{n-2}^2 y_{n-1},$$

и образът на тетраедъра $K_n(a)$ е кубът $K_n'(a)\ :\ \{0 \leqq y_i \leqq a,\ i = 1, \dots, n\}$.

Тогава

$$I_n(a) = \int\limits_{K_n'(a)} \frac{1}{a^{\frac{n(n-1)}{2}}} y_1^{n-1} y_2^{n-2} \dots y_{n-1}\, dy_1 dy_2 \dots dy_n$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{n(n-1)}{2}}} \int\limits_0^a y_1^{n-1} dy_1 \cdot \int\limits_0^a y_2^{n-2} dy_2 \dots \int\limits_0^a y_{n-1} dy_{n-1} \cdot \int\limits_0^a dy_n$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{n(n-1)}{2}}} \cdot \frac{a^n}{n} \cdot \frac{a^{n-1}}{n-1} \cdots \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{1}{n!} a^n.$$

5.2. Пресметнете обема на тялото $K_n(a)$, определено с неравенството $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \leqq a$ $(a > 0)$.

У п ъ т в а н е. Използвайте симетричността на тялото относно координатните хиперравнини и сведете до предишната задача.

5.3. Пресметнете интеграла

$$I_{n,k}(a) = \int\limits_{K_n(a)} x_1^k\, dx_1 dx_2 \dots dx_n \ (k \in N),$$

$$K_n(a): \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq a \, (a > 0) \\ x_i \geqq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n. \end{array} \right.$$

Упътване. Използвайте зад. 5.1 и формулата (зад. 4.21, гл. 5)

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-1}\,dx = B(k, n) = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(n)}{\Gamma(k+n)} = \frac{(k-1)!\,(n-1)!}{(k+n-1)!}.$$

5.4. Пресметнете следните интеграли:

а) $I_{n,1} = \int\limits_{K_n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n$;

б) $I_{n,2} = \int\limits_{K_n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n$;

в) $I_{n,3} = \int\limits_{K_n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^3\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n$;

г) $I_{n,4} = \int\limits_{K_n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^4\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n$,

където $K_n : \{0 \leqq x_i \leqq 1, \; i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Решение.

а)

$$I_{n,1} = \int\limits_{K_n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\int\limits_{K_n} x_i dx_1 dx_2 \ldots dx_n\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 dx_1 \ldots \int_0^1 dx_{i-1} \cdot \int_0^1 x_i dx_i \cdot \int_0^1 dx_{i+1} \ldots \int_0^1 dx_n\right) = \frac{n}{2};$$

б)

$$I_{n,2} = \int\limits_{K_n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_{K_n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n\right)^2 dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \int\limits_{K_n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^2 dx_1 \ldots dx_n + 2 \int\limits_{K_n} x_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) dx_1 \ldots dx_n$$

$$+ \int\limits_{K_n} x_n^2 dx_1 \ldots dx_n = \int_0^1 dx_n \cdot \int\limits_{K_{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right)^2 dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$+2 \int_0^1 x_n dx_n \cdot \int\limits_{K_{n-1}} \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$+ \int_0^1 dx_1 \cdot \int_0^1 dx_2 \ldots \int_0^1 dx_{n-1} \cdot \int_0^1 x_n^2 dx_n$$

$$= I_{n-1,2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot I_{n-1,1} + \frac{1}{3} = I_{n-1,2} + I_{n-1,1} + \frac{1}{3}$$

$$= I_{n-1,2} + \frac{n-1}{2} + \frac{1}{3} = I_{n-1,2} + \frac{3n-1}{6}.$$

Като съберем почленно неравенствата, които се получават от доказаното при $n = 2, 3, \ldots$:

$$I_{2,2} = I_{2,1} + \frac{3.2-1}{6}$$
$$I_{3,2} = I_{2,2} + \frac{3.3-1}{6}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$I_{n,2} = I_{n-1,2} + \frac{3n-1}{6},$$

и вземем предвид, че

$$I_{2,1} = \int_0^1 x_1^2\,dx = \frac{1}{3},$$

получаваме

$$I_{n,2} = \frac{(3.2-1) + (3.3-1) + \cdots + (3n-1)}{6} + I_{2,1} = \frac{(3n+1)n}{6};$$

в) и г) Упътване. Аналогично на б) докажете равенствата

$$I_{n,3} = I_{n-1,3} + \frac{3}{2} I_{n-1,2} + I_{n-1,1} + \frac{1}{4},$$

$$I_{n,4} = I_{n-1,4} + 2I_{n-1,3} + 2I_{n-1,2} + I_{n-1,1} + \frac{1}{5}$$

и използвайте формулите

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

5.5. Пресметнете интегралите:

а) $I_{n,1} = \int\limits_{K_n} (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)\, dx_1dx_2\dots dx_n$;

б) $I_{n,2} = \int\limits_{K_n} (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2\, dx_1dx_2\dots dx_n$;

в) $I_{n,k} = \int\limits_{K_n} (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^k\, dx_1dx_2\dots dx_n$ $(k \in N)$,

където $K_n : \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \dots + x_n \leqq 1 \\ x_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$

(a_i — произволни реални числа).

Р е ш е н и е. Ще направим смяна на променливите, аналогична на смяната в зад. 5.1. За удобство ще променим номерацията на променливите:

$$T: \left| \begin{array}{l} x_1 = y_1y_2\dots y_n \\ x_2 = (1-y_1)y_2y_3\dots y_n \\ x_3 = (1-y_2)y_3y_4\dots y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = (1-y_{n-1})y_n. \end{array} \right.$$

Функционалната детерминанта е $\Delta_n = y_n^{n-1}y_{n-1}^{n-2}\dots y_2$. При тази смяна хипертетраедърът K_n се преобразува в хиперкуба K_n': $\{0 \leqq y_i \leqq 1,\ i = 1, 2, \dots, n\}$. При пресмятанията по-нататък многократно ще използваме, че

$$\int\limits_{K_n'} f(y_1, \dots, y_{n-1})g(y_n)\, dy_1\dots dy_n$$

$$= \int\limits_{K_{n-1}'} f(y_1, \dots, y_{n-1})\, dy_1\dots dy_{n-1} \cdot \int\limits_0^1 g(y_n)\, dy_n$$

и формулата

$$\int\limits_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-1}\, dx = B(k, n) = \frac{\Gamma(k)\,\Gamma(n)}{\Gamma(k+n)} = \frac{(k-1)!(n-1)!}{(k+n-1)!}.$$

И така

$$I_{n,k} = \int\limits_{K_n} (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^k\, dx_1\dots dx_n$$

$$= \int\limits_{K_n'} \Big[a_1y_1\dots y_n + \sum_{i=2}^{n-1} a_i(1-y_{i-1})y_i\dots y_n$$

$$+ a_n(1-y_{n-1})y_n\Big]^k y_n^{n-1}\dots y_2\, dy_1\dots dy_n$$

$$= \int\limits_0^1 y_n^{n+k-1}\, dy_n \cdot \int\limits_{K_{n-1}'} \Big[a_1y_1\dots y_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-1} a_i(1-y_{i-1})y_i\dots y_{n-1}$$

$$+ a_n(1-y_{n-1})\Big] y_{n-1}^{n-2}\dots y_2\, dy_1\dots dy_{n-1} = \frac{1}{n+k}\, G_{n,k}.$$

а) Нека $k = 1$ и $n \geqq 2$.

$$G_{n,1} = \int\limits_{K_{n-1}'} \Big(a_1y_1\dots y_{n-1}$$

$$+ \sum_{i=2}^{n-1} a_i(1-y_{i-1})y_i\dots y_{n-1}\Big) y_{n-1}^{n-2}y_{n-2}^{n-3}\dots y_2\, dy_1\dots dy_{n-1}$$

$$+ \int\limits_{K_{n-1}'} a_n(1-y_{n-1})y_{n-1}^{n-2}y_{n-2}^{n-3}\dots y_2dy_1\dots dy_{n-1}$$

$$= \int\limits_0^1 y_{n-1}^{n-1} dy_{n-1} . G_{n-1,1}$$

$$+a_n\int_0^1(1-y_{n-1})y_{n-1}^{n-2}\,dy_{n-1}\cdot\int_0^1 y_{n-2}^{n-3}\,dy_{n-2}\cdots\int_0^1 y_2\,dy_2\cdot\int_0^1 dy_1$$

$$=\frac{1}{n}G_{n-1,1}+a_n\cdot\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{n}G_{n-1,1}+\frac{a_n}{n!}.$$

Така получихме, че $G_{n,1}=\frac{1}{n}G_{n-1,1}+\frac{a_n}{n!}\cdot$ Освен това

$$G_{2,1}=\int_0^1[(a_1y_1+a_2(1-y_1)]\,dy_1=\frac{a_1+a_2}{2}.$$

Тогава (съгласно принципа на математическата индукция) имаме

$$G_{3,1}=\frac{1}{3}G_{2,1}+\frac{a_3}{3!}=\frac{a_1+a_2}{3.2}+\frac{a_3}{3!}$$
$$G_{4,1}=\frac{1}{4}G_{3,1}+\frac{a_4}{4!}=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4!}$$

....

$$G_{n,1}=\frac{1}{n}G_{n-1,1}+\frac{a_n}{n!}=\frac{a_1+a_2+a_3+\dots+a_n}{n!}.$$

Оттук получаваме

$$I_{n,1}=\frac{1}{n+1}G_{n,1}=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{(n+1)!};$$

б) Нека $k=2$ и $n\geqq 2$.

$$G_{n,2}=\int\limits_{K'_{n-1}}\Big[a_1y_1\dots y_{n-1}+\sum_{i=2}^{n-1}a_i(1-y_{i-1})y_i\dots y_{n-1}$$

$$+a_n(1-y_{n-1})\Big]^2 y_{n-1}^{n-2}\dots y_2\,dy_1\dots dy_{n-1}$$

$$=\int\limits_{K'_{n-1}}\Big[a_1y_1\dots y_{n-1}+\sum_{i=2}^{n-1}a_i(1-y_{i-1})y_i\dots y_{n-1}\Big]^2 y_{n-1}^{n-2}\dots y_2\,dy_1\dots dy_{n-1}$$

$$+2a_n\int\limits_{K'_{n-1}}(1-y_{n-1})\Big[a_1y_1\dots y_{n-1}$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1}a_i(1-y_{i-1})y_i\dots y_{n-1}\Big]y_{n-1}^{n-2}\dots y_2\,dy_1\dots dy_{n-1}$$

$$+a_n^2\int\limits_{K'_{n-1}}(1-y_{n-1})^2y_{n-1}^{n-2}\dots y_2\,dy_1\dots dy_{n-1}$$

$$=\frac{1}{n+1}G_{n-1,2}+\frac{2a_n}{(n+1)n}G_{n-1,1}+\frac{2a_n^2}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)}G_{n-1,2}+\frac{2a_n\sum_{i=1}^{n-1}a_i}{(n+1)n(n-1)!}+\frac{2a_n^2}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}G_{n-1,2}+\frac{2a_n\sum_{i=1}^{n}a_i}{(n+1)!}.$$

Като вземем предвид, че

$$G_{2,2}=\int_0^1(a_1y_1+a_2(1-y_1)^2\,dy_1=\frac{a_1^2+a_1a_2+a_2^2}{3}=\frac{2[a_1^2+a_2(a_1+a_2)]}{3!},$$

от принципа на математическата индукция имаме

$$G_{3,2}=\frac{1}{4}G_{2,2}+\frac{2a_3(a_1+a_2+a_3)}{4!}$$
$$=\frac{2[a_1^2+a_2(a_1+a_2)+a_3(a_1+a_2+a_3)]}{4!},$$

$$G_{4,2}=\frac{1}{5}G_{3,2}+\frac{2a_4\sum_{i=1}^{4}a_i}{5!}=\frac{2\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{k}a_ka_i}{5!},$$

....

$$G_{n,2}=\frac{1}{n+1}G_{n-1,2}+\frac{2a_n\sum_{i=1}^{n}a_i}{(n+1)!}=\frac{2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}a_ka_i}{(n+1)!}.$$

Оттук

$$I_{n,2}=\frac{1}{n+2}G_{n-1,2}=\frac{2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}a_ka_i}{(n+2)!};$$

в) Упътване. Докажете, че

$$G_{n,k}=\frac{k!}{(n+k-1)!}\sum_{i_1\leqq i_2\leqq\dots\leqq i_k}^{n}a_{i_1}a_{i_2}\dots a_{i_k},$$

27

като предварително покажете, че

$$G_{n,k} = \frac{1}{n+k-1} G_{n-1,k} + \frac{k!}{(n+k-1)!} \sum_{s=1}^{k-1} \frac{(n+s-2)!}{s!} G_{n-1,s}$$

$$+ \frac{k!\, a_n^k}{(n+k-1)!} = \frac{1}{n+k-1} G_{n-1,k}$$

$$+ \frac{k!}{(n+k-1)!} \sum_{s=1}^{k} \sum_{i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_{k-s}}^{n-1} a_n^s a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{k-s}}.$$

5.6. Нека числата a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, са различни и никое от тях не е равно на 0. Докажете, че

$$I_n = \int_{K_n} e^{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{a_k} - 1}{(a_k - a_1)\ldots(a_k - a_{k-1})(a_k - a_{k+1})\ldots(a_k - a_n)},$$

където

$$K_n : \left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqq 1 \\ x_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{array} \right.$$

Упътване. **1.** Докажете, че

$$I_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{e^{a_n}}{a_n} I_{n-1}(a_1 - a_n, a_2 - a_n, \ldots, a_{n-1} - a_n)$$

$$- \frac{1}{a_n} I_{n-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}).$$

2. Докажете тъждеството

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x - a_1)\ldots(x - a_{i-1})(x - a_{i+1})\ldots(x - a_{n-1})}{(a_i - a_1)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_{n-1})} = 1,$$

като използвате принципа за сравняване на коефициентите.

3. В така доказаното неравенство положете $x = a_n$ и покажете, че

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(a_i - a_1)\ldots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\ldots(a_i - a_n)}$$

$$= \frac{-1}{(a_n - a_1)\ldots(a_n - a_{n-1})}.$$

4. Докажете равенството от условието на задачата с принципа на математическата индукция, като използвате доказаното в **3** и равенството

$$I_1(a_1) = \frac{e^{a_1} - 1}{a_1}.$$

5.7. Пресметнете обема на n-мерна хиперсфера.

Решение. Първи начин. В интеграла

$$v_n(R) = \int_{K_n(R)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n, \text{ където } K_n(R) : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq R^2,$$

ще направим смяната $T : \{x_i = Rt_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Функционалната детерминанта $\Delta_n = R^n$, образът на $K_n(R)$ е единичната хиперсфера $K_n' : t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_n^2 \leqq 1$. Тогава

$$v_n(R) = \int_{K_n'} R^n\, dt_1 dt_2 \ldots dt_n = R^n v_n(1).$$

Нека $n \geqq 3$. Да означим с D_2, множеството от всички точки $x = (x_1, x_2)$, за които $x_1^2 + x_2^2 \leqq 1$.

Да вземем произволна точка $x \in D_2$. Множеството D_x, определено с неравенството $x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1 - x_1^2 - x_2^2$, е $(n-2)$-мерна хиперсфера с радиус $R_x = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. Следователно

$$\int_{D_x} dx_3 dx_4 \ldots dx_n = v_{n-2}(R) = R^{n-2} v_{n-2}(1).$$

Тогава съгласно теорема 1

$$v_n(1) = \int_{K_n(R)} dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int_{D_2} \left(\int_{D_x} dx_2 dx_3 \ldots dx_n \right) dx_1 dx_2$$

$$= v_{n-2}(1) \int_{D_2} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n-2}{2}}\, dx_1 dx_2.$$

След смяна на променливите в полярни координати получаваме

$$\iint_{D_2} (1 - x_1^2 - x_2^2)^{\frac{n-2}{2}} \, dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho (1-\rho^2)^{\frac{n-2}{2}} d\rho \right) d\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

и следователно

$$v_n(1) = \frac{2\pi}{n} v_{n-2}(1).$$

Тъй като

$$v_1(1) = \int_0^1 dx_1 = 1 \quad \text{и} \quad v_2(1) = \iint_{D_2} dx_1 dx_2 = \pi,$$

от доказаното равенство с последователно заместване получаваме

$$v_{2n+1}(1) = \frac{2\pi}{2n+1} v_{2n-1}(1) = \frac{(2\pi)^2}{(2n+1)(2n-1)} v_{2n-3}(1) = \cdots$$
$$= \frac{(2\pi)^n}{(2n+1)(2n-1)\dots 3.1},$$

$$v_{2n}(1) = \frac{2\pi}{2n} v_{2n-2}(1) = \frac{(2\pi)^2}{2n(2n-2)} v_{2n-4}(1) = \cdots = \frac{(2\pi)^n.\pi}{2n(2n-2)\dots 4.2}.$$

В т о р и н а ч и н. При пресмятане на n-кратни интеграли понякога е удобно да се направи смяна в сферични координати:

$$T: \left| \begin{array}{l} x_1 = r \sin\varphi_{n-1} \sin\varphi_{n-2} \dots \sin\varphi_2 \sin\varphi_1 \\ x_2 = r \sin\varphi_{n-1} \sin\varphi_{n-2} \dots \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \\ x_3 = r \sin\varphi_{n-1} \sin\varphi_{n-2} \dots \cos\varphi_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = r \cos\varphi_{n-1}, \end{array} \right.$$

$$r \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi_1 \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \varphi_i \leqq \pi \quad \text{при} \quad i = 2, 3, \dots, n-1.$$

Като представим тази трансформация като произведение на две трансформации (вж. § 4), с принципа на математическата индукция се установява, че $\Delta_n = r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_{n-1} \sin^{n-3}\varphi_{n-2} \dots \sin\varphi_2$.

Тогава

$$v_n(R) = \int_{K_n'} r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_{n-1} \sin^{n-3}\varphi_{n-2} \dots \sin\varphi_2 \, dr d\varphi_1 d\varphi_2 \dots d\varphi_{n-1}$$

$$= \int_0^R r^{n-1} dr. \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^\pi \sin\varphi_2 \, d\varphi_2 \dots \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_{n-1} \, d\varphi_{n-1}.$$

За да се получи окончателният резултат, е достатъчно да използваме връзката

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n t \, dt = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} t \, dt = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

5.8. Докажете равенството

$$\int_{K_n} \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{x_1 x_2 \dots x_n \sqrt{1 - a_1 x_1 - \dots - a_n x_n}} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \dots a_k,$$

$$K_n: \left| \begin{array}{l} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leqq 1 \\ x_i \geqq 0,\ i = 1, 2, \dots, n \\ a_i > 0. \end{array} \right.$$

5.9. Докажете равенството

$$\int_{K_n} (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n)^m \, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$= \frac{(2m-1)!!\pi(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^m}{2^m \Gamma\left(m + 1 + \frac{n}{2}\right)},$$

където $K_n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq 1 \ (m \in N)$.

5.10. Пресметнете обема на тялото

$$K_n: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x_1 \leqq 1 \\ 0 \leqq x_2 \leqq 1 + x_1 \\ 0 \leqq x_3 \leqq 1 + x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \leqq x_n \leqq 1 + x_{n-1}. \end{array} \right.$$

§ 6. Несобствени многократни интеграли

Дефиниция 1. Нека $D \subset R^n$ е свързано множество. Казваме, че редицата $\{D_k\}$ запълва монотонно D, ако:

а) множествата D_k са свързани, отворени подмножества на R^n;

б) за всяко естествено число k е в сила $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$ (с $\overline{D}_k$ означаваме затворената обвивка на D_k);

в) за всяко естествено число k множеството $\overline{D}_k$ е компактно и измеримо в смисъл на Пеано — Жордан;

г) $\bigcup\limits_k D_k = D$.

Дефиниция 2. Нека функцията $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е дефинирана в свързаното множество $D \subset R^n$ и интегруема в смисъл на Риман върху всяко компактно и измеримо подмножество на D. Казваме, че несобственият интеграл

$$\int\limits_D F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

съществува (или е сходящ), ако за всяка редица $\{D_k\}$, запълваща D, редицата

$$\int\limits_{\overline{D}_k} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

е сходяща и границата ѝ не зависи от избора на $\{D_k\}$. Означаваме

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\overline{D}_k} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int\limits_D F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Ако за някоя редица $\{D_k\}$, запълваща D, тази граница не съществува, казваме, че несобственият интеграл

$$\int\limits_D F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

не съществува (или е разходящ).

Дефиниция 3. Казваме, че интегралът

$$\int\limits_D F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

е абсолютно сходящ, ако е сходящ интегралът

$$\int\limits_D |F(x_1, x_2, \ldots, x_n)|\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Теорема 1. Необходимо и достатъчно условие един n-кратен несобствен интеграл ($n \geqq 2$) да бъде сходящ е той да бъде абсолютно сходящ.

Теорема 2. Ако функцията $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е неотрицателна, то за сходимостта на интеграла

$$\int\limits_D F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

е необходимо и достатъчно да съществува поне една редица $\{D_k\}$, запълваща D, за която редицата

$$\int\limits_{\overline{D}_k} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

е ограничена (и следователно сходяща).

Теорема 3 (принцип за сравняване). Нека функциите F и G са дефинирани в отвореното множество $D \subset R^n$ и навсякъде в D е в сила неравенството $0 \leqq F \leqq G$. Тогава от сходимостта на интеграла

$$\int\limits_D G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

следва сходимостта на интеграла

$$\int\limits_D F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

а от разходимостта на втория интеграл следва разходимостта на първия.

6.1. Нека $R > 0$ е дадено число. Изследвайте за кои стойности на параметъра α е сходящ несобственият интеграл

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha}, \qquad D: x^2+y^2 \geqq R^2.$$

Да разгледаме редицата

$$D_k : R^2 \leqq x^2+y^2 < (R+k)^2.$$

Очевидно $\{D_k\}$ запълва монотонно D, а функцията

$$F(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

е дефинирана и непрекъсната в $\overline{D}_k$.

която монотонно запълва D и направете смяна в сферични координати (вж. зад. 5.7).

6.5. Докажете, че несобственият интеграл

$$\iint\limits_D \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_n}{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^\alpha}, \qquad D : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq R^2$$

е сходящ при $2\alpha < n$ и разходящ при $2\alpha \geqq n$.

6.6. Нека

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{при } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

а) Докажете, че

$$\iint\limits_D F(x, y)\,dxdy, \qquad D: \left| \begin{array}{l} -1 \leqq x \leqq 1 \\ -1 \leqq y \leqq 1, \end{array} \right.$$

е разходящ (т. е. функцията $F(x, y)$ не е сумируема върху D в лебегов смисъл);

б) Докажете, че повторните интеграли

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 F(x, y)\,dy \right] dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 \left[\int_0^1 F(x, y)\,dx \right] dy$$

съществуват в риманов смисъл и са равни помежду си.

З а б е л е ж к а. Този пример показва, че повторните интеграли могат да съществуват и да са равни помежду си, а функцията $F(x, y)$ да не бъде сумируема в лебегов смисъл (срв. теорема на Фубини).

Р е ш е н и е. а) Съгласно теорема 1 за да покажем, че интегралът е разходящ, е достатъчно да установим, че интегралът не е абсолютно сходящ. От съображения за симетрия пък е ясно, че е достатъчно да докажем, че

$$\iint\limits_{D^*} F(x, y)\,dxdy, \quad \text{където} \quad D^*: \left| \begin{array}{l} 0 < x \leqq 1 \\ 0 < y \leqq 1, \end{array} \right.$$

е сходящ. Да разгледаме редицата от множества

$$D_k: \left| \begin{array}{l} \frac{1}{k} \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1, \quad k = 1, 2, \dots, \end{array} \right.$$

която запълва монотонно D. Имаме

$$\iint\limits_{D_k} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = \int_{\frac{1}{k}}^1 x \left(\int_0^1 \frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{k}}^1 x \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{4} \ln \frac{k^2+1}{2}.$$

Оттук е ясно, че

$$\lim_{k\to\infty} \iint\limits_{D_k} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy = +\infty$$

и следователно разглежданият несобствен интеграл е разходящ;

б) Нека y_0 е фиксирано число от $[-1, 1]$. Ако $y_0 = 0$, то функцията $F(x, 0) = 0$ за всяко $x \in [-1, 1]$ и следователно тя е непрекъсната. При $y_0 \neq 0$ имаме $F(x, y_0) = \dfrac{xy_0}{(x^2+y_0^2)^2}$ за всяко $x \in [-1, 1]$ и следователно също е непрекъсната. С това показахме, че функцията $F(x, y_0)$ е непрекъсната при всяко фиксирано y_0 и следователно е интегруема в риманов смисъл. Тъй като $F(x, y_0)$ е нечетна, имаме

$$\int_{-1}^1 F(x, y_0)\,dx = 0 \text{ за всяко } y_0 \in [-1, 1].$$

Тогава очевидно

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 F(x, y)\,dx \right] dy = 0.$$

Аналогично се вижда, че и вторият повторен интеграл съществува и е равен на 0.

6.7. Нека

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{при } x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Докажете, че:

а) несобственият интеграл

$$\iint\limits_{D} F(x, y)\, dxdy, \qquad D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq 1, \end{array} \right.$$

е разходящ;

б) повторните интеграли

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 F(x, y)\, dy \right] dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 \left[\int_0^1 F(x, y)\, dx \right] dy$$

съществуват в смисъл на Риман, но не са равни.

Упътване. а) Разгледайте интегралите

$$\iint\limits_{D_k} |F(x, y)|\, dxdy = 2 \iint\limits_{D_k^*} F(x, y)\, dxdy,$$

$$D_k: \left| \begin{array}{l} \frac{1}{k} \leqq x \leqq 1 \\ \frac{1}{k} \leqq y \leqq 1 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad D_k^*: \left| \begin{array}{l} \frac{1}{k} \leqq x \leqq 1 \\ \frac{1}{k} \leqq y \leqq x; \end{array} \right.$$

б) Покажете, че

$$f(x) = \int_0^1 F(x, y)\, dy = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{при } x \neq 0 \\ -\infty & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

и използвайте, че тъй като $f(x)$ се различава от интегруемата в $[0, 1]$ функция $\dfrac{1}{1+x^2}$ само в една точка, то тя също е интегруема и интегралите от двете функции са равни, т. е.

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Аналогично се установява, че

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 F(x, y)\, dx \right] dy = -\frac{\pi}{4}.$$

6.8. Изследвайте за кои стойности на α, β и γ е сходящ и за кои разходящ несобственият троен интеграл

$$\iiint\limits_{D} \frac{dxdydz}{x^\alpha y^\beta z^\gamma}, \qquad D: x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1.$$

Решение. Съгласно теорема 1 за да бъде сходящ разглежданият интеграл, е необходимо и достатъчно да бъде сходящ интегралът

$$\iiint\limits_{D} \frac{dxdydz}{|x^\alpha y^\beta z^\gamma|}.$$

От съображения за симетрия достатъчно е да докажем, че интегралът е сходящ върху частта от D, която се намира в първи октант.

Нека $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, $n \in N$. С D_n ще означим множеството от точки (x, y, z) на D, чиито сферични координати (r, φ, θ) удовлетворяват неравенствата: $\varepsilon < \theta < \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon < \varphi < \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon < r \leqq 1$. Ясно е, че редицата $\{D_n\}$ запълва монотонно D. След смяна в сферични координати имаме

$$\iiint\limits_{D_n} \frac{dxdydz}{x^\alpha y^\beta z^\gamma} = \iiint\limits_{D'_n} \frac{r^2 \sin\theta\, d\varphi\, dr\, d\theta}{r^{\alpha+\beta+\gamma} \cos^\alpha \varphi \sin^\beta \varphi \sin^{\alpha+\beta} \theta \cos^\gamma \theta}$$

$$= \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{d\varphi}{\cos^\alpha \varphi \sin^\beta \varphi} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{d\theta}{\sin^{\alpha+\beta-1} \theta \cos^\gamma \theta} \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{\alpha+\beta+\gamma-2}}.$$

Оттук виждаме, че тройният несобствен интеграл ще бъде сходящ тогава и само тогава, когато са сходящи едновременно следните три несобствени интеграла:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^\alpha \varphi \sin^\beta \varphi}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin^{\alpha+\beta-1} \theta \cos^\gamma \theta}, \quad \int_0^1 \frac{dr}{r^{\alpha+\beta+\gamma-2}}.$$

Това ще бъде изпълнено при $\alpha < 1$, $\beta < 1$, $\alpha + \beta - 1 < 1$, $\gamma < 1$, $\alpha + \beta + \gamma - 2 < 1$. И така тройният несобствен интеграл

$$\iiint\limits_{D} \frac{dxdydz}{x^\alpha y^\beta z^\gamma}$$

е сходящ тогава и само тогава, когато са изпълнени и трите неравенства $\alpha < 1$, $\beta < 1$ и $\gamma < 1$.

6.9. Изследвайте за сходимост интеграла

$$\iiint\limits_D e^{x+y+z}\,dxdydz,$$

където множеството D е определено съответно с неравенствата:

а) $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$; **б)** $x \leqq 0,\ y \leqq 0,\ z \leqq 0$;
в) $x + y + z \leqq 0$.

6.10. Изследвайте за кои стойности на α е сходящ и за кои разходящ интегралът

$$I = \iint \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha}, \qquad D: \left|\begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq x, \end{array}\right.$$

и пресметнете стойността му в случая, когато е сходящ.

Р е ш е н и е. Нека

$$D_\varepsilon: \left|\begin{array}{l} \varepsilon \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq y \leqq x - \varepsilon. \end{array}\right.$$

Ще направим смяна на променливите

$$T^{-1}: \left|\begin{array}{l} x - y = u \\ x = v \end{array}\right. \quad \text{или} \quad T: \left|\begin{array}{l} x = v \\ y = v - u. \end{array}\right.$$

Функционалната детерминанта е $\Delta = 1$, а

$$D'_\varepsilon: \left|\begin{array}{l} \varepsilon \leqq v \leqq 1 \\ 0 \leqq v - u \leqq v - \varepsilon \end{array}\right. \quad \text{или} \quad D'_\varepsilon: \left|\begin{array}{l} \varepsilon \leqq v \leqq 1 \\ \varepsilon \leqq u \leqq v. \end{array}\right.$$

Нека $\alpha \neq 1, 2$. Тогава

$$I_\varepsilon = \iint\limits_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{(x-y)^\alpha} = \iint\limits_{D'_\varepsilon} \frac{dudv}{u^\alpha} = \int\limits_\varepsilon^1 \left(\int\limits_\varepsilon^v \frac{du}{u^\alpha} \right) dv$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}(1 - \varepsilon^{1-\alpha}).$$

Оттук следва, че при $\alpha < 1$ несобственият интеграл е сходящ и

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)},$$

а при $\alpha > 1$ и $\alpha \neq 2$ той е разходящ.

Нека $\alpha = 1$.

$$I_\varepsilon = \int\limits_\varepsilon^1 (\ln v - \ln \varepsilon)\,dv = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon - (1 - \varepsilon) \ln \varepsilon,$$

откъдето следва $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = +\infty$ и следователно интегралът е разходящ. Аналогично се установява, че и при $\alpha = 2$ интегралът е разходящ.

6.11. Докажете, че е сходящ и пресметнете несобствения интеграл

$$\iint\limits_D e^{-xy}\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l} 0 < a \leqq y \leqq b \\ 0 \leqq x. \end{array}\right.$$

Р е ш е н и е. Нека

$$D_n: \left|\begin{array}{l} \frac{1}{n} \leqq x \leqq n \\ a \leqq y \leqq b. \end{array}\right.$$

Имаме

$$\iint\limits_{D_n} e^{-xy}\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\frac{1}{y} \int\limits_{\frac{1}{n}}^n e^{-xy}\,dxy \right) dy = \int\limits_a^b \frac{1}{y}(e^{-\frac{y}{n}} - e^{-ny})\,dy.$$

Тъй като при $a > 0$ са в сила

$$\left| \frac{1}{y} e^{-\frac{y}{n}} - \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{y}\left(1 - e^{-\frac{y}{n}}\right) \leqq \frac{1}{a}\left(1 - e^{-\frac{b}{n}}\right) = a_n,$$

$$\left| \frac{1}{y} e^{-ny} \right| \leqq \frac{1}{a} e^{-na} = b_n,$$

като $\lim a_n = \lim b_n = 0$, то можем да приложим теоремата за граничен преход под знака на интеграла и следователно

$$\iint\limits_D e^{-xy}\,dxdy = \lim_{n \to \infty} \iint\limits_{D_n} e^{-xy}\,dxdy = \int\limits_a^b \frac{1}{y}\,dy = \ln \frac{b}{a}.$$

З а б е л е ж к а. От друга страна,

$$\iint\limits_{D_n} e^{-xy}\,dxdy = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\int\limits_{a}^{b} e^{-xy}\,dy\right)dx = \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$$

и след граничен преход получаваме

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n} e^{-xy}\,dxdy = \iint\limits_{D} e^{-xy}\,dxdy = \ln\frac{b}{a}.$$

6.12. Докажете, че е сходящ и пресметнете несобствения интеграл

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{x+y}\,e^{-px-qy}dxdy, \qquad D: x \geqq 0,\ y \geqq 0\ (0<p<q).$$

Р е ш е н и е. Нека

$$D_n: \left|\begin{array}{l}\frac{1}{n} \leqq x+y \leqq n\\ x \geqq 0,\ y \geqq 0.\end{array}\right.$$

Ще направим смяната

$$T^{-1}\left|\begin{array}{l}u = x+y\\ v = px+qy\end{array}\right. \quad \text{или} \quad T: \left|\begin{array}{l}x = \dfrac{qu-v}{q-p}\\ y = \dfrac{v-pu}{q-p}\end{array}\right.$$

с функционална детерминанта $\Delta = \dfrac{1}{q-p}$.

Имаме

$$D_n': \left|\begin{array}{l}\frac{1}{n} \leqq u \leqq n\\ qu-v \geqq 0\\ v-pu \geqq 0,\end{array}\right. \quad \text{т. е.} \quad D_n': \left|\begin{array}{l}\frac{1}{n} \leqq u \leqq n\\ pu \leqq v \leqq qu.\end{array}\right.$$

Тогава

$$\iint\limits_{D_n}\frac{1}{x+y}\,e^{-px-qy}dxdy = \iint\limits_{D_n'}\frac{1}{(p-q)u}\,e^{-v}dudv$$

$$= \frac{1}{q-p}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{n}\left(\frac{1}{u}\int\limits_{pu}^{qu} e^{-v}dv\right)du = \frac{1}{q-p}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{n}\frac{e^{-pu}-e^{-qu}}{u}\,du.$$

Като използваме резултата от предишната задача, след граничен преход получаваме

$$\iint\limits_{D}\frac{1}{x+y}\,e^{-px-qy}dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D_n}\frac{1}{x+y}\,e^{-px-qy}dxdy$$

$$= \frac{1}{q-p}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-pu}-e^{-qu}}{u}\,du = \frac{1}{q-p}\,\ln\frac{q}{p}.$$

6.13. Нека a, b, p и q са положителни числа, такива че $aq-bp \neq 0$ и нека функцията $f(t)$ е дефинирана и непрекъсната при $t>0$. Докажете, че ако несобственият интеграл

$$I_1 = \int\limits_{0}^{\infty} f(t)(e^{-at}-e^{-bt})\,dt$$

е сходящ, то и двойният несобствен интеграл

$$I_2 = \iint\limits_{D} f(ax+by)e^{-px-qy}\,dxdy, \qquad D: x \geqq 0,\ y \geqq 0,$$

е сходящ и $I_2 = (aq-bp)I_1$.

У п ъ т в а н е. В двойния интеграл

$$\iint\limits_{D_n} f(ax+by)e^{-px-qy}\,dxdy, \qquad D: \left|\begin{array}{l}\frac{1}{n} \leqq ax+by \leqq n\\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\end{array}\right.$$

направете смяната

$$T: \left|\begin{array}{l}u = ax+by\\ v = px+qy.\end{array}\right.$$

6.14. Докажете, че са сходящи и пресметнете следните несобствени интеграли:

а) $\displaystyle\iint\limits_{D}\frac{1}{\sqrt{xy}}\,e^{-x-y}\cos 2\sqrt{xy}\,dxdy$; б) $\displaystyle\iint\limits_{D} e^{-x-y}\sin 2\sqrt{xy}\,dxdy$;

в) $\iint\limits_D ye^{-x-y}\sin\sqrt{xy}\,dxdy$; г) $\iint\limits_D \frac{1}{xy}\,e^{-x-y}\sin\sqrt{xy}\,dxdy$;

д) $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-x-y}\sin 2\sqrt{xy}dxdy$; е) $\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{y}}\,e^{-x-y}\cos 2\sqrt{xy}\,dxdy$;

ж) $\iint\limits_D e^{-px-qy}\sin(x+y)\,dxdy$; з) $\iint\limits_D e^{-px-qy}\cos(x+y)\,dxdy$;

и) $\iint\limits_D e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\cos ax\,\cos bx\,dxdy$;

к) $\iint\limits_D e^{-x-y}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dxdy$;

л) $\iint\limits_D e^{-x-y}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,dxdy$; м) $\iint\limits_D e^{-x-y}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dxdy$,

където $D: x \geqq 0,\ y \geqq 0$.

Решение. а) Нека $D_{n,\varepsilon}$ е областта, която след смяната

$$T:\left|\begin{array}{l} x = r\cos^2\varphi \\ y = r\sin^2\varphi \quad \left(r \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\right)\end{array}\right.$$

се преобразува в множеството

$$D'_{n,\varepsilon}:\left|\begin{array}{l} \varepsilon \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}-\varepsilon \\ \frac{1}{n} \leqq r \leqq n. \end{array}\right.$$

Като вземем предвид, че функционалната детерминанта на разглежданата смяна е $\Delta = 2r\sin\varphi\cos\varphi$, то

$$I_{n,\varepsilon} = \iint\limits_{D_{n,\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{xy}}\,e^{-x-y}\cos 2\sqrt{xy}\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{D'_{n,\varepsilon}} e^{-r}\frac{\cos(2r\cos\varphi\sin\varphi)}{r\cos\varphi\sin\varphi}\,2r\sin\varphi\cos\varphi\,drd\varphi$$

$$= 2\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\left[\int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-r}\cos(r\sin 2\varphi)\,dr\right]d\varphi.$$

Да означим

$$F(r,\varphi) = \int e^{-r}\cos(r\sin 2\varphi)\,dr$$

$$= \frac{-e^{-r}\cos(r\sin 2\varphi) + e^{-r}\sin 2\varphi\,\sin(r\sin 2\varphi)}{1+\sin^2 2\varphi}.$$

Тъй като подинтегралната функция е дефинирана и непрекъсната навсякъде, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{n,\varepsilon} = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[F(n,\varphi) - F\left(\frac{1}{n},\varphi\right)\right]d\varphi.$$

Като използваме неравенствата

$$|\cos x| \leqq 1, \quad |\sin x| \leqq 1, \quad |\sin x| \leqq x,$$

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n}\sin 2\varphi\right)\right| \leqq \frac{1}{n}\sin 2\varphi \leqq \frac{1}{n},$$

$$\left|\cos\left(\frac{1}{n}\sin 2\varphi\right)\right| \geqq 1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{n^2} \geqq 1 - \frac{1}{n^2},$$

получаваме

$$|F(n,\varphi)| \leqq 2e^{-n},$$

$$\left|F\left(\frac{1}{n},\varphi\right) + \frac{1}{1+\sin^2 2\varphi}\right|$$

$$\leqq \frac{1-e^{-\frac{1}{n}}\cos\left(\frac{1}{n}\sin 2\varphi\right)}{1+\sin^2 2\varphi} + \frac{e^{-\frac{1}{n}}\sin 2\varphi\sin\left(\frac{1}{n}\sin 2\varphi\right)}{1+\sin^2 2\varphi}$$

$$\leqq 1 - e^{-\frac{1}{n}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n} = b_n.$$

Сега от $\lim\limits_{n\to\infty} 2e^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ следва, че можем да извършим граничен преход под знака на интеграла:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\varepsilon\to 0} I_{n,\varepsilon}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+\sin^2 2\varphi} = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{1+\cos^2 2\varphi}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{1+\cos^2 2\varphi} = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{2+t^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

6.15. Пресметнете несобствения n-кратен интеграл

$$I_n = \int\limits_{T_n} \frac{(1-x_1)^k}{x_2x_3\ldots x_n}\,dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

където $T_n : 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq 1$.

Решение. Нека ε е произволно положително число, по-малко от 1. Да разгледаме тялото $T_{n,\varepsilon} : \varepsilon \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n \leqq 1$. То може да се представи като цилиндрично тяло:

$$T_{n,\varepsilon} : \left|\begin{array}{l} \varepsilon \leqq x_1 \leqq 1 \\ x_1 \leqq x_2 \leqq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} \leqq x_n \leqq 1. \end{array}\right.$$

Тогава

$$I_{n,\varepsilon} = \int\limits_{T_{n,\varepsilon}} \frac{(1-x_1)^k}{x_2x_3\ldots x_n}\,dx_1dx_2\ldots dx_n$$

$$= \int\limits_{T_{n-1,\varepsilon}} \left(\frac{(1-x_1)^k}{x_2x_3\ldots x_{n-1}} \int_{x_{n-1}}^1 \frac{dx_n}{x_n}\right) dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}$$

$$= -\int\limits_{T_{n-1,\varepsilon}} \frac{(1-x_1)^k \ln x_{n-1}}{x_2x_3\ldots x_{n-1}}\,dx_1dx_2\ldots dx_{n-1}$$

$$= -\int\limits_{T_{n-2,\varepsilon}} \left(\frac{(1-x_1)^k}{x_2x_3\ldots x_{n-2}} \int_{x_{n-2}}^1 \frac{\ln x_{n-1}dx_{n-1}}{x_{n-1}}\right) dx_1dx_2\ldots dx_{n-2}$$

$$= \frac{(-1)^2}{2} \int\limits_{T_{n-2,\varepsilon}} \left(\frac{(1-x_1)^k(\ln x_{n-2})^2}{x_2x_3\ldots x_{n-2}}\,dx_1dx_2\ldots dx_{n-2}\right.$$

....

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_{\varepsilon}^1 (1-x_1)^k(\ln x_1)^{n-1}dx_1.$$

И така

$$I_n = \lim_{\varepsilon\to 0} I_{n,\varepsilon} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x_1)^k(\ln x_1)^{n-1}dx_1.$$

С интегриране по части, като използваме $\lim\limits_{x\to 0} x^s \ln^n x = 0$, получаваме

$$\int_0^1 x^s(\ln x)^n dx = \frac{n}{s+1}\int_0^1 x^s(\ln x)^{n-1}dx \quad (s\in N,\ n\in N).$$

От последното равенство и принципа на математическата индукция следва

$$\int_0^1 x^s(\ln x)^n\,dx = \frac{(-1)^n\,n!}{(s+1)^{n+1}}.$$

Тогава

$$I_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1 (1-x)^k(\ln x)^{n-1}\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^1 \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}(-1)^i x^i(\ln x)^{n-1}\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=0}^k(-1)^i\binom{k}{i}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(i+1)^n} = \sum_{i=0}^k(-1)^i\binom{k}{i}\frac{1}{(i+1)^n}.$$

6.16 (Абел). Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и притежава непрекъсната производна в интервала $[0, a]$. Намерете функция

$F(x)$, дефинирана и непрекъсната в интервала $[0, a]$, такава че за всяко x от този интервал да бъде изпълнено равенството

$$f(x) = \int_0^x \frac{F(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy + f(0).$$

Р е ш е н и е. Ще решим предварително две помощни задачи.

1. Нека $g(x)$ е непрекъсната функция в интервала $[0, a]$. Да разгледаме несобствения двоен интеграл

$$\iint\limits_D \frac{g(y)\, dx dy}{\sqrt{(t-x)(x-y)}}, \qquad D: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq t \leqq a \\ 0 \leqq y \leqq x. \end{array} \right.$$

Нека

$$D_n: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq t - \dfrac{1}{n} \\ 0 \leqq y \leqq x - \dfrac{1}{n}. \end{array} \right.$$

От една страна,

$$\iint\limits_{D_n} \frac{g(y)\, dx dy}{\sqrt{(t-x)(x-y)}} = \int_0^{t-\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{t-x}} \int_0^{x-\frac{1}{n}} \frac{g(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy \right) dx.$$

Тъй като несобственият интеграл $\displaystyle\int_0^b \frac{du}{\sqrt{b-u}}$ е сходящ и $g(x)$ е непрекъсната функция, лесно се установява, че

$$\iint\limits_D \frac{g(y)\, dx dy}{\sqrt{(t-x)(x-y)}} = \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \frac{g(y)\, dx dy}{\sqrt{(t-x)(x-y)}}$$

$$= \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{t-x}} \int_0^x \frac{g(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy \right) dx.$$

От друга страна, D_n може да се представи като криволинеен трапец с хоризонтални основи:

$$D_n: \left| \begin{array}{l} 0 \leqq y \leqq t - \dfrac{2}{n} \\ y + \dfrac{1}{n} \leqq x \leqq t - \dfrac{1}{n}. \end{array} \right.$$

Тогава

$$\iint\limits_{D_n} \frac{g(y)\, dx dy}{\sqrt{(t-x)(x-y)}} = \int_0^{t-\frac{2}{n}} \left[g(y) \int_{y+\frac{1}{n}}^{t-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{(t-x)(x-y)}} \right] dy.$$

Във вътрешния интеграл ще направим смяната

$$x = \frac{t-y}{2} u + \frac{t+y}{2} \qquad \left(u = \frac{2x}{t-y} - \frac{t+y}{t-y} \right).$$

За новите интеграционни граници имаме

$$\frac{2}{t-y}\left(t - \frac{1}{n}\right) - \frac{t+y}{t-y} = 1 - \frac{1}{n(t-y)} = \alpha_n,$$

$$\frac{2}{t-y}\left(y + \frac{1}{n}\right) - \frac{t+y}{t-y} = -1 + \frac{1}{n(t-y)} = -\alpha_n.$$

И така

$$\int_0^{t-\frac{2}{n}} \left[g(y) \int_{y+\frac{1}{n}}^{t-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{(t-x)(x-y)}} \right] dy = \int_0^{t-\frac{2}{n}} \left[g(y) \int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \right] dy$$

$$= 2 \int_0^{t-\frac{2}{n}} g(y) \arcsin \alpha_n\, dy.$$

Функцията $g(y)$ е непрекъсната, следователно можем да извършим граничен преход:

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} \frac{g(y)\, dx dy}{\sqrt{(t-x)(x-y)}} = 2 \int_0^t g(y) \arcsin 1\, dy = \pi \int_0^t g(y)\, dy.$$

С това доказахме равенството

$$\int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{t-x}} \int_0^x \frac{g(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy \right) dx = \pi \int_0^t g(y) dy.$$

2. Сега ще покажем, че функцията

$$\varphi(t) = \int_0^t \frac{f(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx = 2\sqrt{t}f(0) + 2\int_0^t f'(x)\sqrt{t-x}\,dx$$

е диференцуема в интервала $(0, a]$ и

$$\varphi'(t) = \frac{f(0)}{\sqrt{t}} + \int_0^t \frac{f'(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx.$$

Нека $A = \max\limits_{x\in[0,\,a]} f'(x)$. Имаме при $h > 0$ (при $h < 0$ разсъжденията са аналогични):

$$\left|\frac{\int_0^{t+h} f'(x)\sqrt{t+h-x}\,dx - \int_0^t f'(x)\sqrt{t-x}\,dx}{h} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{f'(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx\right|$$

$$\leqq \left|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f'(x)\sqrt{t+h-x}\,dx\right|$$

$$+\left|\int_0^t f'(x)\left(\frac{\sqrt{t+h-x}-\sqrt{t-x}}{h} - \frac{1}{2\sqrt{t-x}}\right)dx\right|$$

$$\leqq \frac{1}{h}h.A\sqrt{h} + A\int_0^t \left(\frac{1}{2\sqrt{t-x}} - \frac{1}{h}\sqrt{t+h-x} + \frac{1}{h}\sqrt{t-x}\right)dx$$

$$= A\sqrt{h} + A\sqrt{t} + \frac{2}{3}\sqrt{h} - \frac{2}{3h}\left[-(t+h)^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{3}{2}}\right] = \psi(h).$$

Ясно е, че $\lim\limits_{h\to 0}\psi(h) = 0$ и следователно

$$\left(\int_0^t f'(x)\sqrt{t-x}\,dx\right)' = \frac{1}{2}\int_0^t \frac{f'(x)}{\sqrt{t-x}}\,dx.$$

3. Нека $F(x)$ е решение на интегралното уравнение в условието на задачата, т. е. $F(x)$ е непрекъсната функция, удовлетворяваща равенството

$$f(x) = \int_0^x \frac{F(t)}{\sqrt{t-x}}\,dt.$$

(За простота на пресмятанията ще смятаме, че $f(0) = 0$.)

Умножаваме равенството с $\dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$, интегрираме и прилагаме доказаното в **1** равенство:

$$\int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}}\,dx = \int_0^y \left(\frac{1}{\sqrt{y-x}}\int_0^x \frac{F(t)}{\sqrt{t-x}}\,dt\right)dx = \pi\int_0^y F(t)\,dt.$$

Тъй като функцията $F(y)$ е непрекъсната, за дясната страна на горното равенство можем да приложим теоремата на Лайбниц — Нютон и съгласно доказаното в **2** имаме

$$\left(\int_0^y \frac{f(x)}{\sqrt{y-x}}\,dx\right)' = \int_0^y \frac{f'(y)}{\sqrt{y-x}}\,dx = \pi F(y).$$

С това показахме, че ако разглежданото интегрално уравнение има решение, то това решение се определя еднозначно от получената формула.

4. Да разгледаме функцията

$$F(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^y \frac{f'(x)}{\sqrt{y-x}}\,dx & \text{при } 0 < y \leqq a \\ 0 & \text{при } y = 0. \end{cases}$$

От неравенството

$$|F(y)| \leqq A\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{y-x}} \leqq 2A\sqrt{y}$$

следва непрекъснатостта на $F(y)$ при $y = 0$.

Нека $y > 0$ и $h \geqq 0$ (аналогично се разглежда случаят $h < 0$). От неравенството

$$\left| \int_0^{y+h} \frac{f'(x)}{\sqrt{y+h-x}}\, dx - \int_0^y \frac{f'(x)}{\sqrt{y-x}}\, dx \right|$$

$$\leqq A \left(\int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-x}} - \frac{1}{\sqrt{y+h-x}} \right) dx + A \int_y^{y+h} \frac{dx}{\sqrt{y+h-x}}$$

$$\leqq 2A(\sqrt{y+h} - \sqrt{y}) + 2A\sqrt{h}$$

следва непрекъснатостта на $F(y)$ при $y > 0$.

Освен това, като приложим доказаното в **1** равенство, имаме

$$\int_0^x \frac{F(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-y}} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{f'(t)}{\sqrt{y-t}}\, dt \right) dy = \frac{\pi}{\pi} \int_0^x f'(t)\, dt = f(x).$$

С това показахме, че функцията $F(y)$ удовлетворява условията на задачата.

Глава 7

Криволинейни и повърхнинни интеграли

§ 1. Криволинейни интеграли от първи род

Нека L: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \leqq t \leqq b$, е гладка крива, т. е. φ' и ψ' съществуват и са непрекъснати в $[a, b]$.

Дефиниция 1. Криволинеен интеграл от *първи род* от f върху L наричаме интеграла

$$\int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$$

и означаваме с някой от символите $\int_L f(x, y)\, dl$ или $\int_{AB} f(x, y)\, dl$, където с A и B са означени крайните точки на кривата L.

Криволинейният интеграл от първи род не зависи от параметричното представяне на кривата.

Горната дефиниция се отнася за криви в двумерното пространство R^2, но по аналогия можем да я обобщим за гладки параметрични криви в R^n. Нека L е крива в R^n, зададена с параметричните уравнения

$$x_1 = \varphi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t).$$

Предполагаме, че $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ са гладки функции, дефинирани в затворения интервал $[a, b]$.

Дефиниция 2. Криволинеен интеграл от първи род от $f : R^n \to R$ върху $L : \int_L f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dl$, наричаме интеграла

$$\int_a^b f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \cdots + \varphi_n'^2(t)}\, dt.$$

Ако кривата не е гладка, но може да се представи като сума на краен брой гладки криви, то под криволинеен интеграл от f върху L ще разбираме сумата от интегралите върху гладките части.

1.1. Пресметнете $\int\limits_L xy\,dl$, където L е частта от елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, която лежи в първи квадрант.

Решение. Ще предположим, че $a>0$ и $b>0$. Тогава имаме следното параметрично представяне на L: $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$. Като приложим дефиницията, получаваме

$$\int\limits_L xy\,dl=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\, b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2 t}\,d\sin t$$

$$=ab\int\limits_0^1 u\sqrt{b^2+(a^2-b^2)u^2}\,du=\frac{ab}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)u^2}\,du^2$$

$$=\frac{ab}{2(a^2-b^2)}\,\frac{2\left[b^2+(a^2-b^2)u^2\right]^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1=\frac{ab}{3(a^2-b^2)}(a^3-b^3)$$

$$=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

При решаването използвахме, че $a\neq b$, но крайният резултат е валиден и при $a=b$. Проверете! Решете задачата, като използвате друго представяне на L: $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $0\leqq x\leqq a$.

1.2. Пресметнете $\int\limits_L\frac{dl}{x-y}$, където L е частта от правата $y=\frac{1}{2}x-2$, лежаща между точките $A(0,-2)$, $B(4,0)$.

Решение. От дефиницията имаме

$$\int\limits_L\frac{dl}{x-y}=\int\limits_0^4\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}}{x-\frac{1}{2}x+2}\,dx=\frac{\sqrt5}{2}\int\limits_0^4\frac{2dx}{x+4}=\sqrt5\ln 2.$$

1.3. Намерете дължините на следните равнинни криви:

а) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$;

б) $8y^2=x^2(1-x^2)$.

Решение. б) Кривата е симетрична относно двете координатни оси, следователно достатъчно е да намерим дължината ѝ в първи квадрант и тогава цялата ѝ дължина l е равна на

$$4\int\limits_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

Като диференцираме уравнението на кривата относно x, получаваме

$$16y\frac{dy}{dx}=2x(1-2x^2)$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x(1-2x^2)}{8y};\quad\frac{9-12x^2+4x^4}{8(1-x^2)}=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Следователно

$$l=4\int\limits_0^1\frac{3-2x^2}{2\sqrt2\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sqrt2\int\limits_0^1\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-2\sqrt2\int\limits_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sqrt2\pi.$$

С помощта на криволинейни интеграли от първи род се намират дължините на криви. Дължината на крива L е равна на $\int\limits_L dl$.

1.4. Пресметнете дължините на следните криви:

а) първата извивка на витловата линия

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ 0\leqq t\leqq 2\pi;$$

б) първата извивка на коничната витлова линия

$$x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t,\ 0\leqq t\leqq 2\pi;$$

в) $x=e^t$, $y=t$, $z=e^t$, $0\leqq t\leqq 1$;

г) $x=\sin 3t$, $y=\cos 3t$, $z=2t^{\frac{3}{2}}$, $0\leqq t\leqq 1$.

Решение. а)

$$l_L = \int_L dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\, dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2};$$

в) $l_L = \int_0^1 \sqrt{1+2e^{2t}}\, dt$. Извършваме субституцията $u = \sqrt{1+2e^{2t}}$ и получаваме

$$l_L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{1+2e^2}} \frac{u^2}{u^2-1}\, du = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{1+2e^2}} du + \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{1+2e^2}} \frac{du}{u^2-1}$$

$$= \sqrt{1+2e^2} - \sqrt{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+e^2+\sqrt{1+2e^2}}{e^2(2-\sqrt{3})}.$$

1.5. Намерете дължините на кривите:

а) $x = \left(b + a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\varphi,\ y = \left(b + a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin\varphi,\ z = a\frac{\sqrt{2}}{2},$

$$0 \leqq \varphi \leqq 2\pi;$$

б) $x = \frac{b + a\cos\psi}{2},\ y = \frac{b+a\cos\psi}{2}\sqrt{3},\ z = a\sin\psi,$

$$0 \leqq \psi \leqq 2\pi,$$

лежащи върху тора

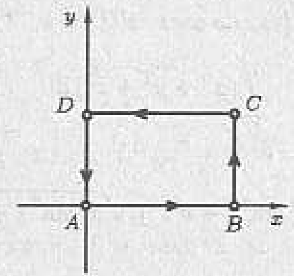
$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi,\ y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi,\ z = a\sin\psi,\ 0 < a < b.$$

Какво представляват тези криви?

1.6. Пресметнете $\int_L xy\, dl$, където L е контурът на правоъгълник с върхове $A(0,\ 0)$, $B(4,\ 0)$, $C(4,\ 2)$, $D(0,\ 2)$.

Упътване. $\int_L xy\, dl = \int_{AB} xy\, dl + \int_{BC} xy\, dl + \int_{CD} xy\, dl + \int_{DA} xy\, dl,$

където AB, BC, CD, DA са отсечки (фиг. 49).



Фиг. 49

1.7. Пресметнете:

а) $\int_L (x^2+y^2)^n\, dl, \quad L : x = r\cos t,\ y = r\sin t;$

б) $\int_L \sqrt{y}\, dl, \quad L : x = r(t - \sin t),\ y = r(1-\cos t),\ 0 \leqq t \leqq 2\pi;$

в) $\int_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}})\, dl, \quad L : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ a > 0;$

г) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\, dl,\ L : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi;$

д) $\int_L z\, dl, \quad L : x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t,\ 0 \leqq t \leqq t_0;$

е) $\int_L x^2\, dl$, където L е окръжността, получена от пресичането на сферата $x^2+y^2+z^2 = r^2$ с равнината $x+y+z = 0$;

ж) $\int_L z\, dl$, L е частта от кривата, получена при пресичането на повърхнините $x^2+y^2 = z^2$ и $y^2 = x$, лежаща между точките $(0,\ 0,\ 0)$ и $(1,\ 1,\ \sqrt{2})$.

Решение. в) Кривата L има параметрично представяне

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi;$$

г) $x'(t) = -a\sin t,\ y'(t) = a\cos t,\ z'(t) = b.$ Тогава

$$\int_L (x^2 + y^2 + z^2)\,dl$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2).\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,dt = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2 + \frac{(2\pi b)^2}{3}\right);$$

е) Поради симетрията на L относно трите координатни оси

$$\int_L x^2 dl = \int_L y^2 dl = \int_L z^2\,dl, \quad \text{т. е.} \quad 3\int_L x^2\,dl = r^2\int_L dl,$$

но $\int_L dl$ е дължината на кривата, която в случая е $2\pi r$;

ж) Удобно е да изберем x за параметър t. Тогава

$$L : x = t,\ y = \sqrt{t},\ z = \sqrt{t^2+t},\ 0 \leqq t \leqq 1.$$

1.8. Да се изрази $\int_L f(x, y)\,dl$ чрез обикновен риманов интеграл, ако L: $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \varphi_2$, се задава с полярно уравнение.

Р е ш е н и е. Имаме

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi, \quad x' = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,$$

$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi, \quad y' = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi,$$

$$dl = \sqrt{(r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi)^2 + (r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi)^2}\,d\varphi$$

$$= \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)}\,d\varphi,$$

$$\int_L f(x, y)\,dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

1.9. Пресметнете:

а) $\int_L (x - y)\,dl, \quad L : x^2 + y^2 = ax;$

б) $\int_L x\sqrt{x^2 - y^2}\,dl$, където $L : (x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2,\ x \geqq 0;$

в) $\int_L \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\,dl$, където L е частта от спиралата $r = \varphi$, която лежи в кръг с радиус $R < \frac{\pi}{2}$.

У п ъ т в а н е. Приложете зад. 1.8, като предварително получите $r(\varphi)$.

Криволинейните интеграли от първи род служат за изразяване на някои механични величини. Ако $p(x, y)$ е функция на линейна плътност, разпределена по материална частично гладка крива L, то:

1) масата m на кривата L е $m = \int_L p(x, y)\,dl$.

2) Статистическите моменти на L се намират по формулите

$$M_x = \int_L yp(x, y)\,dl, \quad M_y = \int_L xp(x, y)\,dl.$$

3) Инерционните моменти на L се изразяват чрез

$$I_x = \int_L y^2p(x, y)\,dl, \quad I_y = \int_L x^2p(x, y)\,dl.$$

1.10. Нека $L : x = a\cos t,\ y = a\sin t$ и $p(x, y) = |x|$ е плътност. Пресметнете:

а) масата на L с плътност p;

б) статистическите моменти на L;

в) инерционните моменти на L.

Ако кривата L е пространствена и означим с $\rho(x, y, z)$ плътността ѝ, то

$$M_{yz} = \int_L x\rho(x, y, z)\,dl, \quad M_{zx} = \int_L y\rho(x, y, z)\,dl, \quad M_{xy} = \int_L z\rho(x, y, z)\,dl$$

се наричат статистически моменти на L относно съответните координатни равнини.

Числата

$$I_x = \int\limits_L (y^2+z^2)\rho(x, y, z)\, dl,\ I_y = \int\limits_L (x^2+z^2)\rho(x, y, z)\, dl,\ I_z = \int\limits_L (x^2+y^2)\rho(x, y, z)\, dl$$

са инерционни моменти на L относно координатните оси.

1.11. Намерете масата на кривата L, ако плътността ѝ е обратно-пропорционална на квадрата на полярното ѝ разстояние:

а) $L : x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$, т. е. първата извивка на витловата линия;

б) $L : x = e^t\cos t,\ y = e^t \sin t,\ z = e^t,\ 0 \leqq t \leqq t_0$.

1.12. За кривата от 1.11 а) да се пресметнат:

а) $M_{x\,y}$;   б) I_z.

1.13. За кривата от 1.11 б) да се пресметнат:

а) M_{yz};   б) M_{zx};   в) M_{xy};

г) I_x;   д) I_y;   е) I_z.

1.14. Пресметнете $\displaystyle\int\limits_L \frac{dl}{y}$, където:

а) L е отсечката, свързваща точките $(-x, y)$ и (x, y), $y > 0$;

б) L е частта от окръжност с център в началото, свързваща точките $(-x, y)$ и (x, y), $y > 0$.

Числото, което се получава в б), се нарича *хиперболично разстояние* между точките $(-x, y)$ и (x, y) и е по-малко от числото, получено в а); изобщо то е най-малкото число, което може да се получи при интегриране върху крива, свързваща точките $(-x, y)$ и (x, y) и лежаща в горната полуравнина.

§ 2. Криволинейни интеграли от втори род

Нека $L : x = \varphi_1(t),\ y = \varphi_2(t),\ a \leqq t \leqq b$ е гладка крива.

Дефиниция. Криволинеен интеграл от втори род върху L от диференциалния израз $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ наричаме интеграла

$$\int\limits_a^b \left[P(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_1'(t) + Q(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_2'(t)\right] dt$$

и го означаваме със символите

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy, \qquad \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Функциите P, Q предполагаме непрекъснати в точките от графиката на L. Криволинейният интеграл от втори род за разлика от интегралите от първи род зависи от посоката, в която се описва кривата.

2.1. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род $\displaystyle\int\limits_L \frac{y\,dx}{x^2+y^2}$ съответно върху кривите:

а) $L : x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ r > 0,\ 0 \leqq t \leqq \pi$;

б) $L : x = -r\cos t,\ y = r\sin t,\ r > 0,\ 0 \leqq t \leqq \pi$.

По същия начин както при криволинейни интеграли от първи род разширяваме дефиницията за интеграли върху частично гладки криви.

Аналогично дефинираме и криволинейни интеграли от втори род за криви в R^3 и изобщо в R^n.

Ако кривата е затворена без точки на самопресичане, ще предполагаме, че се описва в положителна посока, т. е в посока, обратна на движението на часовниковата стрелка. За криволинейния интеграл, получен по този начин, ще използваме символа

$$\oint\limits_L P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

2.2. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$\int\limits_L 2xy\, dx + x^2\, dy,$$

където:

а) $L : y = x,\ 0 \leqq x \leqq 1$;   б) $L : y = x^2,\ 0 \leqq x \leqq 1$;

в) $L : y^2 = x,\ 0 \leqq y \leqq 1$;   г) $L : y = x^3,\ 0 \leqq x \leqq 1$.

Решение. а) $L : x = t,\ y = t,\ 0 \leqq t \leqq 1$,

$$\int\limits_L 2xy\, dx + x^2\, dy = \int\limits_0^1 (2t^2 + t^2)\, dt = 3\int\limits_0^1 t^2\, dt = 1;$$

б) $L : x = t,\ y = t^2,\ 0 \leqq t \leqq 1$, $\displaystyle\int\limits_L 2xy\, dx + x^2\, dy = \int\limits_0^1 4t^3\, dt = 1$;

в) $L : x = t^2,\ y = t,\ 0 \leqq t \leqq 1,\ \int\limits_L 2xy\,dx + x^2\,dy = \int\limits_0^1 5t^4\,dt = 1;$

г) $L : x = t,\ y = t^3,\ 0 \leqq t \leqq 1,\ \int\limits_L 2xy\,dx + x^3\,dy = \int\limits_0^1 5t^4\,dt = 1.$

2.3. Пресметнете

$$\int\limits_L xy\,dx + (y - x)\,dy$$

върху кривите от зад. 2.2.

2.4. Пресметнете

$$\int\limits_L (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy,$$

където $L : y = 1 - |1 - x|,\ 0 \leqq x \leqq 2$.

Решение. L не е гладка при $x = 1$, затова я разделяме на две гладки части —

$$L_1 : y = 1 - |1 - x|,\ 0 \leqq x \leqq 1;$$
$$L_2 : y = 1 - |1 - x|,\ 1 \leqq x \leqq 2.$$

Тогава

$$L_1 : y = x,\ 0 \leqq x \leqq 1; \quad L_2 : y = 2 - x,\ 1 \leqq x \leqq 2$$

и

$$\int\limits_L (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$$

$$= \int\limits_{L_1} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy + \int\limits_{L_2} (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$$

$$= \int\limits_0^1 2x^2\,dx + \int\limits_0^1 2x^2\,dx = \frac{4}{3}.$$

2.5. Пресметнете криволинейните интеграли:

а) $\oint\limits_L (x + y)\,dx + (x - y)\,dy, \quad L : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$

б) $\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}, \quad L : x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2},\ a > 0;$

в) $\int\limits_L (2a - y)\,dx - (a - y)\,dy, \quad L : x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),$ $0 \leqq t \leqq 2\pi;$

г) $\oint\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + xy + y^2}, \quad L : x^2 + y^2 = r^2;$

д) $\int\limits_{OPA} (x - y^2)\,dx + 2xy\,dy$, където OPA е начупена линия, свързваща точките $O(0, 0)$, $P(0, 1)$, $A(1, 1)$;

е) $\int\limits_{OA} (y^2 + 2xy)\,dx + (2xy + x^2)\,dy$, където OA е отсечка или начупена линия, свързваща точките $O(0, 0)$ и $A(1, 1)$.

Решение. г) $L : x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi$, така L се описва точно в положителна посока. Получаваме

$$\oint\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + xy + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t}\,dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + \frac{\sin 2t}{2}} = \int\limits_0^{4\pi} \frac{du}{2 + \sin u} = 2\int\limits_0^{2\pi} \frac{du}{2 + \sin u} = 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{2 + \sin u}$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \frac{4}{\sqrt{3}}\ \mathrm{arc\,tg}\,\frac{2t + 1}{\sqrt{3}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

2.6. Докажете, че

$$\lim_{r\to\infty} \oint\limits_{L_r} \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2 + xy + y^2)^2} = 0, \quad L_r : x^2 + y^2 = r^2.$$

Решение. Лесно се вижда, че

$$\oint\limits_{L_r} \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2 + xy + y^2)^2} = \frac{1}{r^2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + \cos t \sin t)^2},$$

откъдето следва твърдението.

2.7. Пресметнете:

а) $\displaystyle\int\limits_L xy\,dx + x^4\,dy$, $L: x = \dfrac{1}{\cos t}$, $y = \sin t$, $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$;

б) $\displaystyle\int\limits_L \ln^2\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) dx + 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dy$, $L: x = t$, $y = t^2$, $0 \leqq t \leqq 1$.

2.8. а) Нека L е контурът на

$$D: \left|\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ g(x) \leqq y \leqq f(x), \end{array}\right.$$

f и g са непрекъснати функции. Докажете, че $S_D = -\displaystyle\oint\limits_L y\,dx$;

б) Нека L е контурът на

$$D: \left|\begin{array}{l} a \leqq x \leqq b \\ \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x), \end{array}\right.$$

φ и ψ са непрекъснати функции. Докажете, че $S_D = +\displaystyle\oint\limits_L x\,dy$;

в) Нека L е контурът на криволинеен трапец D. Докажете, че

(1) $$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx.$$

Упътване. а) Използвайте, че $S_D = \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

2.9. Като използвате (1), пресметнете:
а) лицето на елипсата $x = a\cos t$, $y = b\sin t$;
б) лицето на астроидата $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;
в) лицето на примката от декартовия лист $x^3 + y^3 = 3axy$.
Упътване. Покажете, че

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L x^2 d\frac{y}{x},$$

и използвайте параметричното представяне

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Изразът $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ се нарича *пълен диференциал*, ако съществува такава функция $u(x, y)$, че

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y).$$

Функцията $u(x, y)$ се нарича *потенциал* на векторната функция $A(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, а A се нарича *градиент* на u. Връзката между тях се записва чрез векторното равенство

$$A(x, y) = \operatorname{grad} u(x, y) = \nabla u.$$

2.10. Нека $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ е пълен диференциал с потенциална функция $u(x, y)$. Докажете, че:

а) $\displaystyle\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = u(B) - u(A)$;

б) $\displaystyle\oint\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$.

Упътване. а) Разгледайте първо случая, когато кривата, свързваща A и B, е гладка и приложете дефиницията.

2.11. Нека D е свързана област. (Да припомним, че едно множество се нарича свързано, ако всеки две негови точки могат да се съединят с гладка крива, принадлежаща на множеството.) Нека $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекъснати в D и

$$\oint\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

за всяка затворена частично гладка крива, лежаща в D. Докажете, че $(P(x, y), Q(x, y))$ притежава потенциал в D.

Упътване. Фиксирайте точка $A_0(x_0, y_0) \in D$ и нека $A(x, y) \in D$. Дефинирайте функцията $u(x, y)$ по следния начин:

$$u(x, y) = \int\limits_{\overset{\frown}{A_0A}} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy.$$

За да покажете, че $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, изберете $\widehat{A_0A}$, както е показано на фиг. 50. Ако този контур не лежи изцяло в D, използвайте, че D е отворено множество и че изборът на A_0 определя u с точност до адитивна константа.

Множеството D наричаме *едносвързано* или *просто свързано*, ако вътрешността на всяка затворена крива, лежаща в D, също принадлежи на D.

Теорема 1. Необходимо и достатъчно условие гладкото векторно поле $A(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, дефинирано в едносвързаната област D, да има потенциал е $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в D.

Докажете самостоятелно тази теорема, като за достатъчността използвате теоремата на Грин (вж. § 3) и зад. 1.19.

2.12. Пресметнете:

а) $\displaystyle\int\limits_{\widehat{(-1,2)(2,3)}} y\,dx + x\,dy$; б) $\displaystyle\oint\limits_L \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$;

в) $\displaystyle\oint\limits_L [f(x+y) + f(x-y)]\,dx + [f(x+y) - f(x-y)]\,dy$;

г) $\displaystyle\int\limits_{\widehat{(0,0)(a,b)}} f(x+y)(dx+dy)$.

Разглежданите функции са гладки.

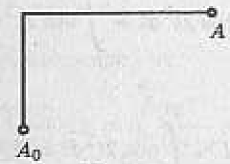
Решение. а) $u(x, y) = xy$ представлява потенциал за (y, x). Следователно

$$\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} y\,dx + x\,dy = u(2,3) - u(-1,2) = 8.$$

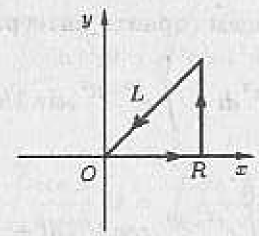
2.13. Да разгледаме функцията $f(x, y)$, която приема комплексни стойности. Като отделим реалната от имагинерната част на $f(x, y)$, получаваме двете реални функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$: $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Дефинираме

$$\int\limits_L f(x, y)\,dx = \int\limits_L u(x, y)\,dx + i\int\limits_L v(x, y)\,dx,$$

$$\int\limits_L f(x, y)\,dy = \int\limits_L u(x, y)\,dy + i\int\limits_L v(x, y)\,dy,$$



Фиг. 50



Фиг. 51

$$\int\limits_L f(z)\,dz = \int\limits_L f(x, y)\,dx + i\int\limits_L f(x, y)\,dy, \quad z = x + iy.$$

Нека f удовлетворява уравненията на Коши — Риман в $\mathbb{R}^2$:

$$u'_x(x, y) = v'_y(x, y), \quad u'_y(x, y) = -v'_x(x, y).$$

Докажете, че ако L е затворена крива, то

$$\int\limits_L f(z)\,dz = 0$$

(теорема на Коши).

2.14. Пресметнете интегралите на Френел

$$\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx, \quad \int\limits_0^\infty \cos x^2 dx,$$

като използвате теорема 1.

Решение. Да разгледаме функциите

$$u(x, y) = e^{y^2-x^2}.\cos 2xy, \quad v(x, y) = -e^{y^2-x^2}.\sin 2xy.$$

Те удовлетворяват уравненията на Коши — Риман (вж. предишната задача). Следователно

$$\oint\limits_L u(x, y)\,dx - v(x, y)\,dy = 0, \quad \oint\limits_L v(x, y)\,dx + u(x, y)\,dy = 0.$$

Нека частично гладкият контур L (фиг. 51) се състои от отсечките

$$L_1 : x = t,\ y = 0,\ 0 \leqq t \leqq R; \quad L_2 : x = R,\ y = t,\ 0 \leqq t \leqq R;$$
$$L_3 : x = R - t,\ y = R - t,\ 0 \leqq t \leqq R.$$

Като напишем горните интеграли подробно, получаваме

$$(2)\qquad \int_0^R e^{-t^2}dt - \int_0^R e^{t^2-R^2}.\sin 2Rt\,dt - \int_0^R \cos 2t^2 dt - \int_0^R \sin 2t^2 dt = 0,$$

$$(3)\qquad \int_0^R e^{t^2-R^2}.\cos 2Rt\,dt + \int_0^R \sin 2t^2 dt - \int_0^R \cos 2t^2 dt = 0,$$

$\lim\limits_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t^2}dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ — интеграл на Поасон (вж. зад. 3.11, гл. 5).

Тогава

$$\left|\int_0^R e^{t^2-R^2}\sin 2Rt\,dt\right| \leqq \frac{\int_0^R e^{t^2}dt}{e^{R^2}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

тъй като

$$\frac{\left(\int_0^R e^{t^2}dt\right)'}{(e^{R^2})'} = \frac{e^{R^2}}{2Re^{R^2}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Следователно

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{t^2-R^2}\cos 2Rt\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{t^2-R^2}\sin 2Rt\,dt = 0.$$

Като извършим в (2) и (3) граничен преход при $R\to\infty$, получаваме, че

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R \sin 2t^2\,dt \quad \text{и} \quad \lim_{R\to\infty}\int_0^R \cos 2t^2 dt$$

съществуват и удовлетворяват уравненията

$$\int_0^\infty \sin 2t^2 dt + \int_0^\infty \cos 2t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_0^\infty \sin 2t^2 dt = \int_0^\infty \cos 2t^2 dt,$$

$$\int_0^\infty \sin 2t^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \quad \int_0^\infty \sin t^2 dt = \int_0^\infty \cos t^2 dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

2.15. Докажете, че:

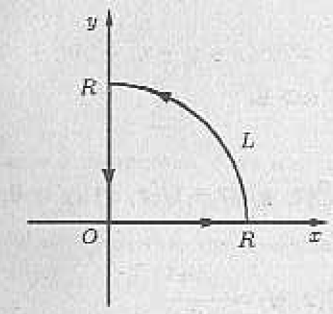
а) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+1}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+x^2}dx$; б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x+1}dx = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1+x^2}dx$.

Упътване. Разгледайте функциите

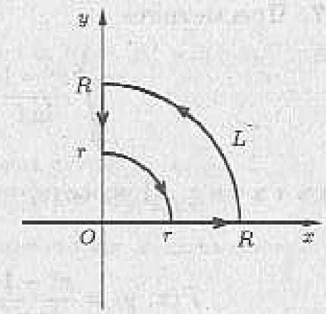
$$P(x,y)=e^{-y}\frac{(x+1)\sin x - y\cos x}{(x+1)^2+y^2}, \quad Q(x,y)=e^{-y}\frac{y\sin x+(x+1)\cos x}{(x+1)^2+y^2}.$$

а) Пресметнете $\oint\limits_L P dx + Q dy$; б) Пресметнете $\oint\limits_L (-Q)\,dx + P dy$

(за L вж. фиг. 52).



Фиг. 52



Фиг. 53

2.16. Пресметнете

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}-\cos x}{x}dx.$$

Упътване. Разгледайте

$$P(x,y)=\frac{e^{-x}(x\cos y - y\sin y)-x}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y)=\frac{e^{-x}(y\cos y + x\sin y)-y}{x^2+y^2}.$$

Покажете, че за L (фиг. 53) се получава

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_r^R \frac{e^{-x}-1}{x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cos t}\sin(R\sin t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\cos t}\sin(r\sin t)\,dt = 0.$$

За да намерите

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cos t}\sin(R\sin t)\,dt,$$

изберете $\varepsilon > 0$ и разгледайте

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} e^{-R\cos t}\sin(R\sin t)\,dt \quad \text{и} \quad \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\cos t}\sin(R\sin t)\,dt.$$

2.17. Пресметнете

$$\int_0^1 \frac{t^a-1}{\ln t}\,dt, \quad a > 0.$$

Упътване. Покажете, че $\oint\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, където

$$P(x, y) = \frac{x^y-1}{\ln x}, \quad Q(x, y) = \frac{x^{y+1}}{y+1},$$

а L контурът на правоъгълника $\{p \leqq x \leqq q,\ 0 \leqq y \leqq a\}$, $0 < p < q < 1$. В полученото равенство

$$\int_p^q \frac{x^a-1}{\ln x}\,dx = \int_0^a \frac{q^{y+1}}{y+1}\,dy - \int_0^a \frac{p^{y+1}}{y+1}\,dy$$

извършете граничен преход при $p \to 0$ и $q \to 1$, като покажете, че

$$\frac{q^{y+1}}{y+1} \underset{q\to 1}{\rightrightarrows} \frac{1}{y+1} \quad \text{и} \quad \frac{p^{y+1}}{y+1} \underset{p\to 0}{\rightrightarrows} 0.$$

2.18. Нека

$$\operatorname{grad} u(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)).$$

Докажете, че кривите с уравнение $u(x, y) = c$, където c е константа, са интегрални криви за диференциалното уравнение

$$P(x, y) + Q(x, y).y'(x) = 0.$$

2.19. Пресметнете следните криволинейни интеграли от втори род в $\mathbb{R}^3$:

а) $\int\limits_L x\,dx + y\,dy + (x+y-1)dz$, където L е правата, свързваща точките $(1, 1, 1)$ и $(2, 3, 4)$;

б) $\int\limits_L yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, $L: x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \dfrac{6t}{2\pi}$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$.

Решение. а) $L: x = 1+t$, $y = 1+2t$, $z = 1+3t$, $0 \leqq t \leqq 1$;

$$\int_L xdx + ydy + (x+y-1)\,dz = \int_0^1 (1+t+2(1+2t)+3(1+3t))\,dt = 13.$$

Както в двумерния, така и в тримерния случай казваме, че

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

е пълен диференциал, ако съществува функция $u(x, y, z)$, за която

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R.$$

Функцията u се нарича *потенциал на векторното поле* (P, Q, R), а векторното поле (u'_x, u'_y, u'_z) се нарича *градиент на скаларната функция* u.

2.20. Нека $\operatorname{grad} u(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Докажете, че:

а) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy+Rdz = u(B)-u(A)$; б) $\oint\limits_L Pdx+Qdy+Rdz = 0$.

2.21. Докажете, че ако в свързаната област D имаме

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

за всяка затворена крива L в D, то съществува функция $u(x, y, z)$, такава че $\operatorname{grad} u = (P, Q, R)$.

2.22. Пресметнете интегралите:

а) $\int\limits_L 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy$, $L: x = e^{\sqrt{t}}$, $y = \sin^3\frac{\pi t}{2}$, $z = \ln(1+t)$, $0 \leqq t \leqq 1$;

б) $\oint\limits_L (3x^2y^2z + 3x^2)\,dx + 2x^3yz\,dy + (x^3y^2 + 3z^2)\,dz$;

в) $\oint\limits_L (3x^2 + 2xy)\,dz + (x^2 + 2y + z)\,dy + (y + 3z^2)\,dz$;

г) $\int\limits_L \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $L: x = t,\ y = 2t,\ z = t,\ 1 \leqq t \leqq 2$;

д) $\int\limits_L \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$, $L: x = e^t,\ y = t,\ z = e^t,\ 0 \leqq t \leqq 1$;

е) $\int\limits_L \frac{yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz}{1 + x^2y^2z^2}$, $L: x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t,\ 0 \leqq t \leqq 2\pi$;

ж) $\int\limits_L e^{\frac{y}{z}}\,dx + \left(\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z} + ze^{yz}\right)dy + \left(-\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z}\right)dz$,

$L: x = 2t,\ y = t,\ z = t,\ 1 \leqq t \leqq 2$.

Решение. а) Лесно се вижда, че $u(x, y, z) = x^3y^2$ е потенциална функция. Следователно

$$\int\limits_L 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy = u(e, 1, \ln 2) - u(1, 0, 0).$$

2.23. Нека $P(x, y) = cxy$ и $Q(x, y) = x^6y^2$, където c е положителна константа, и нека a и b са положителни числа. За коя стойност на a (зависеща от c) интегралът $\int\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, където $L: y = ax^b$, $0 \leqq x \leqq 1$, не зависи от b.

2.24. Нека $AB > H^2$, $L: x^2 + y^2 = a^2$ и S е лицето на елипсата с уравнение $Ax^2 + 2Hxy + By^2 = 1\ (A > 0)$. Покажете, че

$$\int\limits_L \frac{x\,dy - y\,dx}{Ax^2 + 2Hxy + By^2} = 2S.$$

§ 3. Формула на Грин и приложения

Да си припомним теоремата на Лайбниц — Нютон, която играе централна роля в диференциалното и интегрално смятане:

$$\int\limits_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Формулата на Грин представлява двумерен вариант на тази теорема.

Теорема (Грин): Нека L е частично гладка затворена крива без особени точки, която загражда отвореното множество D. Нека P и Q са диференцуеми в D и са непрекъснато диференцуеми по всяко направление в $D \cup L$. Тогава

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy. \tag{1}$$

3.1. Нека P и Q са дефинирани и имат непрекъснати производни в просто свързаната област D и $P'_y = Q'_x$ в D. Покажете, че $\int\limits_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не зависи от частично гладката крива, която свързва A и B в D.

3.2. Като пресметнете поотделно

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \quad \text{и} \quad \oint\limits_L P\,dx + Q\,dy,$$

покажете, че те са равни, където:

а) $D: x^2 + y^2 < 1$; $P = Q = 1$;

б) $D: 0 < x < 1,\ 0 < y < x^2$; $P = x\sqrt[3]{y}$, $Q = \sqrt{x} + \sqrt{y}$;

в) $D: 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$; $P = x^3y$, $Q = x - y^2$;

г) $D: 1 < x^2+y^2 < 2$; $P = Q = xy$.

Решение. б) Нека

$$L_1: x=t,\ y=0,\ 0 \leqq t \leqq 1; \quad L_2: x=1,\ y=t,\ 0 \leqq t \leqq 1;$$
$$L_3: x=t,\ y=t^2,\ 0 \leqq t \leqq 1.$$

Тогава

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \left(\int\limits_{L_1} + \int\limits_{L_2} - \int\limits_{L_3}\right)(P\,dx + Q\,dy)$$

$$= \int\limits_0^1 (1+\sqrt{t})\,dt - \int\limits_0^1 (t.t^{\frac{2}{3}} + (\sqrt{t}+t)2t)\,dt = -\frac{7}{40}.$$

За двойния интеграл получаваме

$$\iint\limits_D \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - x\frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}\right) dxdy = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{x^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - x\frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}\right) dy\right] dx$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2\sqrt{x}} - x.x^{\frac{2}{3}}\right) dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{5}{3}}\right] dx = -\frac{7}{40}.$$

Забележка. Обърнете внимание, че към б) не може да се приложи теоремата, но (1) е вярно и при по-общи предположения.

3.3. Докажете, че

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx,$$

където D и L са същите както в теоремата на Грин.

Упътване. Приложете (1) за $P=-y$, $Q=x$. Сравнете със зад. 2.7 в). Там е получена същата формула, но при по-ограничителни предположения за D.

3.4. Нека D е следният сектор, зададен в полярни координати: $\{\alpha \leqq \varphi \leqq \beta,\ 0 \leqq r \leqq f(\varphi)\}$. Докажете, че

$$S_D = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Решение. Съгласно зад. 3.3 имаме $S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L x\,dy - y\,dx$, като

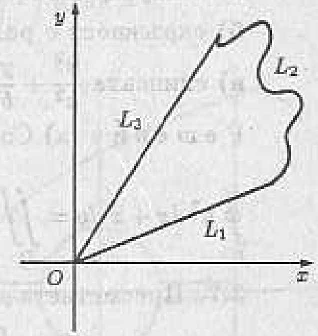
$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3,$$

$$L_1: \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha,\ L_3: \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\beta,$$

$$L_2: x = f(\varphi)\cos\varphi,\ y = f(\varphi)\sin\varphi,$$

$$\alpha \leqq \varphi \leqq \beta$$

(вж. фиг. 54).



Фиг. 54

Ако α или β е $\frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, то съответното уравнение за L_1 е $x = 0$.

Съгласно формулата

$$S_D = \frac{1}{2}\left(\int\limits_{L_1} x\,dy - y\,dx + \int\limits_{L_2} x\,dy - y\,dx + \int\limits_{L_3} x\,dy - y\,dx\right).$$

Проверете, че

$$\int\limits_{L_1} x\,dy - y\,dx = \int\limits_{L_3} x\,dy - y\,dx = 0.$$

Следователно

$$S_D = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \Big[f(\varphi)\cos\varphi(f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi) - f(\varphi)\sin\varphi(f'(\varphi)\cos\varphi$$
$$-f(\varphi)\sin\varphi)\Big]\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2(\varphi)\,d\varphi.$$

3.5. Покажете, че интегралът

$$\oint\limits_L x(x^2+y^2)\,dx + (2x + x^2y + y^3)\,dy$$

е пропорционален на S_D, където D е областта, която частично гладката крива L загражда.

3.6. Пресметнете $\oint\limits_L y^2\,dx + x\,dy$, където L е:

а) контурът на квадрат с върхове $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$;

б) окръжност с радиус 1 и център в началото;

в) елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Р е ш е н и е. а) Съгласно (1)

$$\oint\limits_L y^2\,dx + x\,dy = \iint\limits_D (1-2y)\,dxdy = \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^2 (1-2y)\,dy\right] dx = -4.$$

3.7. Пресметнете

$$\oint\limits_L \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy,$$

където:

а) $L:(x-2)^2+y^2=1$; б) $L: x^2+y^2=r^2$;

в) L загражда област, несъдържаща началото;

г) $L = L_1 \cup L_2$, $L_1: y^2 = 2(x+2)$, $-2 \leqq x \leqq 2$,
$L_2: x = 2$, $-\sqrt{8} \leqq y \leqq \sqrt{8}$;

д) L загражда област, съдържаща началото.

Р е ш е н и е. б) Тъй като

$$L: x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,$$

то

$$\oint\limits_L \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int\limits_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = 2\pi.$$

Формулата на Грин не може да се приложи в този случай;

в) Нека

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

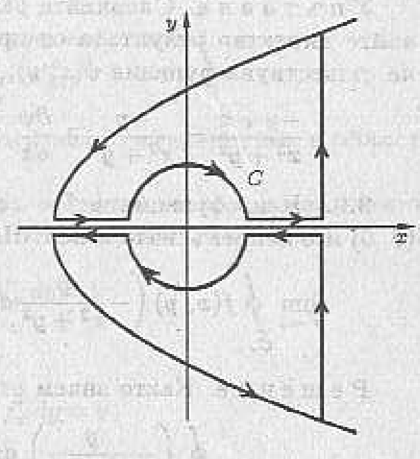
Тогава

$$P'_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = Q'_x.$$

Тъй като L загражда област D, несъдържаща началото, и P и Q са непрекъснати в D заедно с производните си, то

$$\oint\limits_L P dx + Q dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0;$$

г) Да разгледаме областта D, която се получава, като от заградената с L област изваждим кръг с център в точката $(0, 0)$ и с достатъчно малък радиус r, така че да лежи изцяло във вътрешността на параболата. В получената област D функциите P и Q са непрекъснати заедно с производните си и $P'_y = Q'_x$.



Фиг. 55

За да се убедим, че можем да приложим формулата на Грин към областта D, да я разделим на две части (фиг. 55). Към всяка от частите можем да приложим (1). Интегралите върху отсечките по оста Ox взаимно се унищожават. Получаваме

$$\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy - \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy = 0,$$

$$C: x^2+y^2=r^2.$$

От подусловие б) знаем, че $\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = 2\pi$. Следователно

$$\oint\limits_L -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi.$$

(Обърнете внимание, че конкретният вид на кривата L не играе съществена роля в нашите разсъждения.)

3.8. Пресметнете

$$\oint_L \frac{-y+x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dy,$$

където L са съответно кривите от предишната задача.

Упътване. Следвайте разсъжденията от зад. 3.7. Използвайте директно резултата от предишната задача, като покажете, че съществува функция $\psi(x, y)$, за която

$$\frac{-y+x}{x^2+y^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

3.9. Нека функцията f е дефинирана в околност на точката $(0, 0)$ и е непрекъсната в нея. Нека $C_r : x^2+y^2=r^2$. Докажете, че

$$\lim_{r\to 0} \oint_{C_r} f(x, y)\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right) = 2\pi f(0, 0).$$

Решение. Както знаем от зад. 3.7 б),

$$\oint_{C_r} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi.$$

Тогава

$$\left|\oint_{C_r} f(x, y)\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right) - 2\pi f(0, 0)\right|$$

$$= \left|\oint_{C_r} (f(x, y) - f(0, 0))\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right)\right|$$

$$= \left|\int_0^{2\pi} (f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0, 0))\,d\varphi\right|$$

$$\leqq \sup_{(x,y)\in C_r} |f(x, y) - f(0, 0)|2\pi \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Последната граница е нула поради непрекъснатостта на f в $(0, 0)$.

3.10. Нека P, Q, L и D удовлетворяват условията на теоремата на Грин. Докажете, че

$$\iint_D Q\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L PQ(dx+dy) - \iint_D P\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy.$$

Ще припомним, че с Δ означаваме оператора на Лаплас, т. е.

$$\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy}.$$

3.11. Нека f е два пъти непрекъснато диференцуема в област D. Докажете:

а) ако $\Delta f = 0$ и L е затворена, частично гладка крива, която лежи в D заедно със заградената от нея област, то

$$\oint_L f'_y\,dx - f'_x\,dy = 0;$$

б) ако

$$\oint_L f'_y\,dx - f'_x\,dy = 0$$

за всяка затворена, частично гладка крива в D, то $\Delta f = 0$.

Решение. б) Съгласно (1)

$$\oint_L \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = \iint_G \Delta f\,dxdy = 0.$$

Да допуснем, че $\Delta f(x_0, y_0) \neq 0$. Нека за определеност $\Delta f(x_0, y_0) > 0$. От непрекъснатостта на f следва, че съществува околност $O_{(x_0,y_0)}$, в която $\Delta f(x, y) > 0$. Да изберем $C_r : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$. За достатъчно малко r кръгът C_r лежи изцяло в $O_{(x_0,y_0)}$ и $\iint_{G_r} \Delta f\,dxdy > 0$, което противоречи на горното равенство. Следователно $\Delta f = 0$.

3.12. Нека L е затворена, частично гладка крива без самопресичане. Нека (x_0, y_0) не принадлежи на графиката на L и $r(x, y) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. Докажете, че

$$I(x_0, y_0) = \oint_L \frac{y_0 - y}{r^2}\,dx + \frac{x - x_0}{r^2}\,dy$$

приема стойност 2π или 0.

Упътване. Вж. зад. 3.7.

От зад. 3.12 следва, че точките, които не лежат на L, се разделят на два класа според стойността на $I(x, y)$. Как ще определите геометрически тези точки, за които $I(x, y) = 2\pi$? А тези, за които $I(x, y) = 0$?

3.13 (*връзка между двата вида криволинейни интеграли*). Нека $L : x = x(t),\ y = y(t),\ a \leqq t \leqq b$, е гладка крива без особени точки, $A(x, y) = (P(x, y),\ Q(x, y))$ — непрекъснато векторно поле,

$$\tau = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},\ \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right)$$

е допирателен вектор към L. Докажете, че

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \oint_L (A, \tau)\,dl.$$

Решение.

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \big(P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big)\,dt$$

$$= \int_a^b \left(P(x(t), y(t)) \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \right.$$

$$\left. + Q(x(t), y(t)) \cdot \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \right) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

$$= \int_a^b \Big(A(x(t), y(t)),\ \tau(t) \Big) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$$

$$= \int_L \Big(A, \tau \Big)\,dl = \int_L (P.\cos\alpha + Q.\sin\alpha)\,dl,$$

където

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

3.14. Нека $L : x = x(t),\ y = y(t),\ a \leqq t \leqq b$ е гладка затворена крива без особени точки, която се описва в положителна посока при t, менящо се от a към b. Нека

$$\tau = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},\ \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right) = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)$$

е допирателният вектор към кривата. Докажете, че нормалният вектор $n = \left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ е насочен към външната страна на кривата.

3.15. Нека L е затворена частично гладка крива без самопресичане и n е нормалният вектор, насочен към външната страна на кривата. Докажете, че:

а) $\displaystyle\oint_L \frac{\partial f}{\partial x}\,dy - \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = \oint_L \frac{\partial f}{\partial n}\,dl;$

б) $\displaystyle\oint_L \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = \oint_L \frac{\partial g}{\partial n}\,dl = \oint_L \frac{\cos(\tau, n)}{r}\,dl,$

$$g(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2},\ \ r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ \tau(x, y) = (x, y);$$

в) $\displaystyle I(x_0; y_0) = \oint_L \frac{\partial g}{\partial n}\,dl = \oint_L \frac{\cos(\tau, n)}{r}\,dl,$

$$g(x, y) = \ln\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},\ r(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$
$$\tau(x, y) = (x - x_0,\ y - y_0).$$

Решение. а) Съгласно зад. 3.13 и 3.14

$$\oint_L \frac{\partial f}{\partial x}\,dy - \frac{\partial f}{\partial y}\,dx = \oint_L \left(\frac{\partial f}{\partial x}\sin\alpha - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos\alpha \right) dl$$

$$= \oint_L \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right) dl = \oint_L \frac{\partial f}{\partial n}\,dl;$$

б) Първото равенство следва от а) при $f = g$. От друга страна,

$$\cos(\tau, n) = \frac{(\tau, n)}{r} = \frac{1}{r}\left(x\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + y\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

от което се получава и второто равенство.

Използвайки новите означения, твърдението в зад. 3.9 може да се запише:

$$\lim_{r\to 0} \oint_{C_r} f(x,\, y)\frac{\partial g}{\partial n}\, dl = 2\pi f(0,\, 0).$$

3.16. Докажете следните формули на Грин:

а)

$$\iint_D u.\Delta v dx dy = \oint_L u\frac{\partial v}{\partial x}\, dy - u\frac{\partial v}{\partial y}\, dx - \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx dy;$$

б) $$\iint_D (u\Delta v - v\Delta u)\, dx dy = \oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy - \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx.$$

3.17. Нека u има непрекъснати производни до втори ред върху затворената крива L и в областта D, която тя загражда. Нека $\Delta u = 0$ в D и $u|_L = 0$. Докажете, че $u \equiv 0$.

Р е ш е н и е. Да приложим зад. 3.16 а) за $u = v$. Получаваме

$$\iint_D \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right) dx dy = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Следователно $u = \text{const} = 0$.

Функция, за която $\Delta u = 0$, се нарича *хармонична*. От зад. 3.17 се вижда, че стойностите на хармоничната функция в областта D се определят от стойностите, които тя приема по контура на областта. В следващите две задачи ще уточним този факт.

3.18. Нека $\Delta f = 0$ в $D : x^2 + y^2 \leqq 1$. Докажете, че

$$f(0,\, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Р е ш е н и е. Нека

$$\Phi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Тогава

$$\Phi'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'_x(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'_y(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} f'_x dy - f'_y dx,$$

$$C_r : x^2 + y^2 = r^2.$$

Прилагаме (1) и получаваме

$$\Phi'(r) = \frac{1}{2\pi r}\iint_{D_r} (f''_{xx} + f''_{yy})\, dx dy = 0, \ \varphi(r) = \text{const},$$

$$\Phi(0) = f(0,\, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\, d\varphi.$$

3.19. Нека $f \in C^1(D\cup L)$, $\Delta f = 0$ в D, където D е едносвързана област, заградена от частично гладката крива L без особени точки. Нека $g(x,y) = \ln\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ и $(x_0, y_0) \in D$. Докажете, че

$$f(x_0,\, y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_L \left(f(x,\, y)\frac{\partial g}{\partial n} - g(x,\, y)\frac{\partial f}{\partial n}\right) dl.$$

У п ъ т в а н е. Нека $C_r : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ и r е толкова малко, че C_r лежи изцяло в D. Прилагаме зад. 3.16 б) за f и g. Като имаме предвид зад. 3.15 а), получаваме

$$\oint_L \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dl = \oint_{C_r} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dl.$$

Тъй като лявата страна не зависи от r, то

$$\oint_L \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dl = \lim_{r\to 0}\oint_{C_r} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dl.$$

Имаме

$$\lim_{r\to 0}\oint_{C_r} f\frac{\partial g}{\partial n}\, dl = 2\pi f(x_0,\, y_0)$$

(вж. зад. 2.9.) и

$$\oint_{C_r} \frac{\partial f}{\partial n}\, dl = 0$$

(вж. зад. 3.11).

3.20. Нека f е хармонична функция, удовлетворяваща условията от зад. 3.19. Докажете, че f достига максималната (минималната) си стойност върху L.

3.21 (теорема на Брауер за неподвижната точка). Нека $K : x^2 + y^2 \leqq 1$ е единичният кръг в $\mathbb{R}^2$ и f е двукратно гладко изображение от K в K. Докажете, че съществува точка A, за която $f(A) = A$.

Упътване. Да допуснем, че такава точка не съществува, т. е. $f(A) \neq A$ за всяка точка $A \in K$. Тогава лъчът $\overrightarrow{f(A)A}$ пресича окръжността $S : x^2 + y^2 = 1$ в точка, която ще означим с $\Phi(A)$. Изображението Φ е също двукратно гладко, както можем да се убедим, използвайки аналитичната геометрия. Проверете, че

$$\Phi(A) = A + \alpha(A)(A - f(A)),$$

където

$$\alpha(A) = \frac{-(A,\, A - f(A)) + \sqrt{(A,\, A - f(A))^2 + \|A - f(A)\|^2(1 - \|A\|^2)}}{\|A - f(A)\|^2},$$

$(A,\, A - f(A))$ е стандартното скаларно произведение в $\mathbb{R}^2$ и $\|A - f(A)\| = \sqrt{(A - f(A),\, A - f(A))}$. От дефиницията на Φ следва, че $\Phi : K \to S$ и $\Phi(A) = A$ за $A \in S$.

Лема. Нека $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ са двукратно гладки функции и $P'_y = Q'_x$. Тогава за функциите

$$P^*(u, v) = P(\varphi(u, v),\ \psi(u, v))\varphi'_u(u, v) + Q(\varphi(u, v),\ \psi(u, v))\psi'_u(u, v),$$

$$Q^*(u, v) = P(\varphi(u, v),\ \psi(u, v))\varphi'_v(u, v) + Q(\varphi(u, v),\ \psi(u, v))\psi'_v(u, v)$$

е изпълнено ${P^*_v}' = {Q^*_u}'$.

Функциите P^* и Q^* се получават след смяна на променливите $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, в диференциалния израз $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ като коефициенти пред du и dv.

Нека сега

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Както знаем от зад. 3.7, $P'_y = Q'_x$ за $x^2 + y^2 \neq 0$ и

$$\oint_S P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 2\pi.$$

Да извършим в подинтегралната функция смяна на променливите чрез изображението Φ. Получаваме: $\oint_S P^*(u,v)du + Q^*(u,v)dv$.

Тъй като $\Phi : K \to S$, а P и Q са дефинирани и гладки върху S, то P^* и Q^* са съответно дефинирани и гладки върху K и съгласно лемата ${P^*_v}' = {Q^*_u}'$. Чрез теоремата на Грин получаваме

$$\oint_S P^*(u, v)\, du + Q^*(u, v)\, dv = \iint_K \left({Q^*_u}' - {P^*_v}'\right) du dv = 0.$$

От друга страна,

$$\oint_S P^*(u, v)\, du + Q^*(u, v)\, dv = \oint_S P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 2\pi,$$

тъй като $\Phi(A) = A$ за $A \in S$. Полученото противоречие доказва съществуването на неподвижна точка.

Забележка. 1. Предположението за гладкост лесно може да се замени само с непрекъснатост, като се използва теоремата на Вайерщрас за приближаване на непрекъснати функции върху компактно множество чрез полиноми.

2. Изображението Φ може да се конструира аналогично за $K : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq 1$, $K \subset \mathbb{R}^n$.

3.22. Пресметнете следните интеграли, като използвате теоремата на Грин. Тук C_1 е единичният кръг, C_2 — единичният квадрат с върхове в точките $(0, 0)$ и $(1, 1)$, C_3 — триъгълникът с върхове в точките $(0, 0)$, $(1, 1)$ и $(2, 0)$. Във всеки от случаите определете дали полученият отговор е верен и за по-общ контур:

а) $\oint_{C_1} y\, dx + x\, dy$; б) $\oint_{C_2} 2y\, dx + x\, dy$;

в) $\oint_{C_3} 2xy\, dx + x^2\, dy$; г) $\oint_{C_1} (y^2 + 1)\, dx + 2x(y + 1)\, dy$;

д) $\oint\limits_{C_2} e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy$; е) $\oint\limits_{C_1} y \operatorname{tg}^2 x\,dx + \operatorname{tg} x\,dy$;

ж) $\oint\limits_{C_1} \operatorname{arctg} y\,dx - \dfrac{xy^2}{1+y^2}\,dy$; з) $\oint\limits_{C_2} \cos x \sin y\,dx + \sin x \cos y\,dy$;

и) $\oint\limits_{C_3} \dfrac{xy\,dx}{1+x} - \ln(1+x)\,dy$; к) $\oint\limits_{C_1} 2(2+x)y\,dx + (2x+x^2)\,dy$.

§ 4. Повърхнинни интеграли

Нека Φ е гладка, двустранна, пълна и ограничена повърхнина без особени точки, която се задава с параметричните уравнения

(1) $$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in G,$$

Ще използваме също и по-краткото векторно записване

$$r = r(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)).$$

Нормалния вектор на Φ ще означаваме с n:

(2) $$n = \frac{\left[\dfrac{\partial r}{\partial u}, \dfrac{\partial r}{\partial v}\right]}{\left\|\left[\dfrac{\partial r}{\partial u}, \dfrac{\partial r}{\partial v}\right]\right\|} = \frac{1}{\left\|\left[\dfrac{\partial r}{\partial u}, \dfrac{\partial r}{\partial v}\right]\right\|}(A, B, C),$$

(3) $$A = y'_u z'_v - z'_u y'_v, \quad B = z'_u x'_v - z'_v x'_u, \quad C = x'_u y'_v - y'_u x'_v,$$

(4) $$n = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A, B, C) = (\cos X, \cos Y, \cos Z),$$

(5) $$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \quad F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v,$$
$$D = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2.$$

4.1. Докажете, че $ED - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$.

Ако повърхнината се задава с явното уравнение

(6) $$z = f(x, y),$$

то

$$ED - F^2 = (f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1$$

и

$$n = \left(-\frac{f'_x}{\sqrt{(f'_x)^2+(f'_y)^2+1}}, -\frac{f'_y}{\sqrt{(f'_x)^2+(f'_y)^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{(f'_x)^2+(f'_y)^2+1}}\right).$$

Както и при криволинейните интеграли имаме два вида повърхнинни интеграли — от първи и от втори род. Нека f, P, Q и R са дефинирани и непрекъснати върху графиката на Φ. Повърхнинен интеграл от първи род дефинираме чрез двойния интеграл

(7) $$\iint\limits_{\Phi} f(M)\,d\sigma = \iint\limits_{G} f(x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v))\sqrt{ED - F^2}\,du\,dv,$$

където с M означаваме за по-кратко точката (x, y, z).

Повърхнинният интеграл от първи род не зависи от конкретното параметрично представяне на Φ, нито от посоката, която е избрана за нормалния вектор.

Повърхнинен интеграл от втори род дефинираме чрез интеграла

(8) $$\iint\limits_{\Phi} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_{\Phi} (P\cos X + Q\cos Y + R\cos Z)\,d\sigma.$$

Той зависи от посоката на нормалния вектор и тъй като предполагаме, че повърхнината е двустранна, то имаме две възможни стойности за (8), които се различават по знак. Ако означим векторното поле (P, Q, R) с F, (8) придобива следното удобно векторно записване:

(9) $$\iint\limits_{\Phi} (F, n)\,d\sigma.$$

От (7) при $f = 1$ получаваме лицето на повърхнината S_Φ.

4.2. Пресметнете интегралите:

а) $\displaystyle\iint\limits_{\Phi} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) d\sigma$, $\Phi : \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{4} = 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$;

б) $\displaystyle\iint\limits_{\Phi} xy\,d\sigma$, $\Phi : x = u \operatorname{ch} v$, $y = u \operatorname{sh} v$, $z = \dfrac{1}{2}(1-u^2)$, $0 \leqq u \leqq 1$, $0 \leqq v \leqq 1$;

в) $\displaystyle\iint\limits_{\Phi} (x^2+y^2)\,d\sigma$, Φ — границата на тялото $T : \sqrt{x^2+y^2} \leqq z \leqq 1$.

Р е ш е н и е. а) Повърхнината се задава с явното уравнение

$$z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y,\ G : x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 4 - 2x - \frac{4}{3}y \geqq 0,$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = \frac{61}{9},$$

$$\iint_{\Phi} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) d\sigma = \frac{\sqrt{61}}{3}\int_0^2 \left[\int_0^{\frac{3(2-x)}{2}} 4dy\right] dx = 4\sqrt{61};$$

б) $x'_u = \operatorname{ch} v$, $y'_u = \operatorname{sh} v$, $z'_u = -u$, $x'_v = u \operatorname{sh} v$, $y'_v = u \operatorname{ch} v$, $z'_v = 0$,
$E = \operatorname{ch}^2 v + \operatorname{sh}^2 v + u^2$, $\quad D = u^2(\operatorname{sh}^2 v + \operatorname{ch}^2 v)$, $\quad F = 2u \operatorname{ch} v . \operatorname{sh} v$,

$$ED - F^2 = u^2 + u^4(\operatorname{sh}^2 v + \operatorname{ch}^2 v),$$

$$\iint_{\Phi} xy\, d\sigma = \int_0^1 \left[\int_0^1 u^3 \operatorname{ch} v . \operatorname{sh} v \sqrt{1 + u^2(\operatorname{sh}^2 v + \operatorname{ch}^2 v)}\, dv\right] du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[u^3 \int_0^1 \sqrt{1 + u^2(1 + 2\operatorname{sh}^2 v)} d \operatorname{sh}^2 v\right] du$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 u \left[\int_0^1 \sqrt{1 + u^2 + 2u^2 \operatorname{sh}^2 v} d 2u^2 \operatorname{sh}^2 v\right] du$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 u \left[\left(1 + \left(1 + 2\operatorname{sh}^2 1\right) u^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] du$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 \left[\left(1 + \operatorname{ch} 2u^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + u^2\right)^{\frac{3}{2}}\right] du^2$$

$$= \frac{1}{30 \operatorname{ch} 2}\left[(1 + \operatorname{ch} 2)^{\frac{5}{2}} - 1\right] - \frac{1}{30}2^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{30}$$

$$= \frac{1}{15 \operatorname{ch} 2}\left[2\sqrt{2}(\operatorname{ch}^5 1 - \operatorname{ch} 2) + \operatorname{sh}^2 1\right];$$

в) Φ се състои от две части:

$$\Phi_1 : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \leqq 1 \quad \text{и} \quad \Phi_2 : z = 1,\ x^2 + y^2 \leqq 1,$$

като по този начин интегралът върху Φ се представя като сбор от два интеграла, съответно върху Φ_1 и Φ_2. Изразът $A^2 + B^2 + C^2$ за Φ_1 е

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1 = 2.$$

Тогава

$$\iint_{\Phi_1} (x^2 + y^2)\, d\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leqq 1} (x^2 + y^2)\sqrt{2}\, dx dy = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

За Φ_2 имаме $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ и $\displaystyle\iint_{\Phi_2} (x^2 + y^2)\, d\sigma = \frac{\pi}{2}\cdot$ Следователно

$$\iint_{\Phi} (x^2 + y^2)\, d\sigma = \frac{\pi}{2}(1 + \sqrt{2}).$$

4.3. Да се намери лицето на частта от полусферата Φ: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geqq 0$, чиято проекция върху равнината Oxy е ограничена от кривата $r = 2\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, и оста Oy.

Р е ш е н и е. Нека $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тогава повърхнината Φ : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = \sqrt{16 - r^2}$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq r \leqq \min(2\varphi, 4)$ е търсената. Но $\pi < 4$, следователно $0 \leqq r \leqq 2\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}\cdot$ Имаме

$$x'_r = \cos\varphi, \quad y'_r = \sin\varphi, \quad z'_r = -\frac{r}{\sqrt{16 - r^2}},$$

$$x'_\varphi = -r\sin\varphi, \quad y'_\varphi = r\cos\varphi, \quad z'_\varphi = 0.$$

$$E = 1 + \frac{r^2}{16 - r^2} = \frac{16}{16 - r^2}, \quad D = r^2, \quad F = 0,$$

$$S_\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\varphi} \frac{4r}{\sqrt{16 - r^2}} dr\right] d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(16 - 4\sqrt{16 - 4\varphi^2}\right) d\varphi$$

$$= 8\pi - 8 \int_0^{\arcsin\frac{\pi}{4}} 4\cos^2 t\, dt = 8\pi - 16 \arcsin\frac{\pi}{4} - 16 \int_0^{\arcsin\frac{\pi}{4}} \cos 2t\, dt$$

$$= 8\left[\pi - 2\arcsin\frac{\pi}{4}\right] - \pi\sqrt{16-\pi^2}.$$

4.4. Пресметнете интегралите:

а) $\displaystyle\iint_{\Phi} z\,d\sigma$ върху частта от хеликоида

$\Phi: x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = v,\quad 0 \leqq u \leqq a,\quad 0 \leqq v \leqq 2\pi;$

б) $\displaystyle\iint_{\Phi}(xy + yz + zx)\,d\sigma$, където Φ е частта от повърхнината $z = \sqrt{x^2+y^2}$, изрязана от цилиндъра $x^2+y^2 = 2ax$;

в) $\displaystyle\iint_{\Phi}\frac{d\sigma}{r}$, където Φ е частта от повърхнината на хиперболичния параболоид $z = xy$, отрязана от цилиндъра $x^2+y^2 = R^2$, а r е разстоянието до оста Oz.

Решение. в) Имаме $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и

$$\iint_{\Phi}\frac{d\sigma}{r} = \iint_{x^2+y^2\leqq R^2}\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R\sqrt{r^2+1}\,dr\right]d\varphi$$

$$= \pi(R\sqrt{R^2+1} + \ln(R+\sqrt{R^2+1})).$$

4.5. Намерете лицето на:

а) частта от елиптичния параболоид $z = \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{y^2}{2b}$, изрязана от цилиндъра $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = c^2$;

б) частта от хиперболичния параболоид $xy = az$, изрязана от цилиндъра $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$;

в) частта от сферата $x^2+y^2+z^2 = R^2$, изрязана от цилиндъра $x^2+y^2 = Rx$. Тялото, което тези повърхнини заграждат, се нарича тяло на Вивиани;

г) частта от повърхнината на цилиндъра $x^2+y^2 = Rx$, отрязана от сферата $x^2+y^2+z^2 = R^2$ (околна повърхнина на тялото на Вивиани);

д) повърхнината, заграждаща тялото

$$T: x^2+z^2 \leqq a^2,\quad y^2+z^2 \leqq a^2;$$

е) повърхнината на тора

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi,\quad y = (b+a\cos\psi)\sin\varphi,\quad z = a\sin\psi,$$

$$0 < a < b,\quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\quad 0 \leqq \psi \leqq 2\pi;$$

ж) частта от конуса $z^2 = x^2+y^2$, която е в цилиндъра $x^2+y^2 = 2x$;

з) частта от хиперболичния параболоид $z^2 = 2xy$, която е в сферата $x^2+y^2+z^2 = a^2$;

и) частта от параболоида $x^2+y^2 = 2z$, която е в цилиндъра $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$.

Решение. д) Разглежданата повърхнина се състои от две равнолицеви части. Ще намерим лицето на едната от тях. Нека $\Phi: x^2+z^2 = a^2$, $y^2+z^2 \leqq a^2$. Имаме $\Phi: x = a\cos\varphi$, $y = u$, $z = a\sin\varphi$ и

$$S_\Phi = \iint_R\sqrt{ED-F^2}\,du\,d\varphi,$$

където

$$E = a^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi = a^2,\quad D = 1,\quad F = 0,$$

$$R: -a|\cos\varphi| \leqq u \leqq a|\cos\varphi|,\ \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{5\pi}{2}.$$

Тогава

$$S_\Phi = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\left[\int_{-a|\cos\varphi|}^{a|\cos\varphi|} a\,du\right]d\varphi = 2a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}|\cos\varphi|\,d\varphi$$

$$= -2a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi + 2a^2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi = 8a^2.$$

Търсеното лице е $16a^2$.

4.6. Докажете формулата на Поасон

$$\iint_\Phi f(ax+by+cz)\,d\sigma = 2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,du,$$

където $\Phi: x^2+y^2+z^2 = 1$.

31

4.7. Пресметнете следните повърхнини интеграли от втори род:

а) $\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$,

където S е външната част (това означава, че нормалата е насочена навън) на повърхнината на куба, заграден от равнините $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$;

б) $\iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$,

където S е външната част на сферата

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Решение. а) Поради симетричността на интеграла относно x, y, z достатъчно е да направим пресмятанията за едната двойка стени, например $x = 0$ и $x = 1$. Нека

$$S_1 : x = 0, \quad y = v, \quad z = u, \quad 0 \leqq u \leqq 1, \quad 0 \leqq v \leqq 1.$$

За A, B, C получаваме $A = -1$, $B = 0$, $C = 0$, т. е. нормалата е подходящо насочена. В противен случай ще трябва да сменим ролите на u и v, за да получим желаната посока на нормалата. Имаме

$$\iint\limits_{S_1} xdydz + ydxdz + zdxdy = 0.$$

За

$$S_2 : x = 1, \quad y = u, \quad z = v, \quad 0 \leqq u \leqq 1, \quad 0 \leqq v \leqq 1$$

получаваме

$$\iint\limits_{S_2} xdydz + ydxdz + zdxdy = 1.$$

Следователно

$$\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy = 3;$$

б) Ще пресметнем $\iint\limits_S z^2 dxdy$. Тъй като $z^2 = (z-c)^2 - c^2 + 2c(z-c)$, то

$$\iint\limits_S z^2\,dxdy = \iint\limits_S ((z-c)^2 - c^2 + 2c(z-c))\,dxdy.$$

Проверете, че

$$\iint\limits_S ((z-c)^2 - c^2)\,dxdy = 0$$

и тогава

$$\iint\limits_S z^2\,dxdy = 2c\iint\limits_S (z-c)\,dxdy$$

$$= 4c \iint\limits_{(x-a)^2+(y-b)^2 \leqq R^2} \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}\,dxdy.$$

След смяната $x = a + r\cos\varphi$, $y = b + r\sin\varphi$ получаваме

$$4c\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}dr\right]d\varphi = \frac{8}{3}\pi c R^3.$$

След аналогични пресмятания окончателно получаваме, че стойността на интеграла е $\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$.

4.8. Покажете, че:

а) $\iint\limits_S d\sigma = c^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^4 t}\,dt$, където $S : x^2 + y^2 - xz = 0$, $0 \leqq z \leqq c$;

б) $\iint\limits_S (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)\,d\sigma = \pi a^6(80k^2+7)\sqrt{(k^2+1)/24}$,

където S е горната част от конуса $z^2 = k^2(x^2+y^2)$, изрязана от цилиндъра $x^2 + y^2 - 2ax = 0$.

4.9. Пресметнете интегралите:

а) $\iint\limits_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y\,dydz - y\,dzdx + dxdy)$, $S : z = 1 - x^2 - y^2$, $0 \leqq z \leqq 1$;

б) $\iint\limits_S y\,dydz - x\,dzdx + dxdy$, $S : x = t\cos\theta$, $y = t\sin\theta$, $z = 0$, $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$;

в) $\iint\limits_S x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy,\ S: x = t+u,\ y = t-u,\ z = t,$
$0 \leqq t \leqq 2,\ 1 \leqq u \leqq 3;$

г) $\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy,\ S: x^2+y^2+z^2 = 1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq z \leqq \frac{1}{\sqrt{2}};$

д) $\iint\limits_S x\,dydz,\ S: x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2 \leqq z^2;$

е) $\iint\limits_S x\,dydz + y^2\,dzdx + z\,dxdy,\ S: x+y+z = 1,\ 0 \leqq x,\ 0 \leqq y,$
$0 \leqq z;$

ж) $\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z^2\,dxdy$, където S е околната повърхнина на цилиндъра $x^2+y^2 = a^2,\ 0 \leqq z \leqq 1;$

з) интеграла от ж) върху целия цилиндър;

и) $\iint\limits_S xy\,dydz + y^2\,dzdx + y^3\,dxdy$, където S е повърхнината на единичния куб: $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1;$

к) $\iint\limits_S xz\,dydz + dxdy,\ S: x^2+y^2+z^2 = 1,\ 0 \leqq z.$

4.10. Като използвате повърхнинни интеграли от първи род, докажете формулата

$$S = 2\pi\int\limits_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

за лицето на ротационната повърхнина S, получена от въртенето на кривата $x = x(t),\ y = y(t),\ a \leqq t \leqq b$ около оста Ox.

Упътване. Повърхнината S се задава с уравненията

$x = x(t),\ y = y(t)\cos u,\ z = z(t)\sin u, \quad a \leqq t \leqq b,\ 0 \leqq u \leqq 2\pi.$

§ 5. Формули на Стокс и Гаус

Теорема на Стокс. Нека L е частично гладка крива и S е гладка двустранна повърхнина с контур L, така че посоката на L да е съгласувана с посоката на нормалата на S. За гладките функции P, Q, R е в сила формулата

(1) $$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Ако S е подмножество на равнината Oxy, то от (1) се получава формула (1) от § 3.

Теорема на Остроградски — Гаус. Нека S е затворена, частично гладка и ограничена повърхнина, а G е тялото, което тя загражда. За гладките функции P, Q, R е в сила формулата

(2) $$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$$

Повърхнинният интеграл се разглежда върху външната част на S.

Ще припомним някои означения от векторния анализ, чрез които (1) и (2) се записват по-кратко. Нека

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

е гладко векторно поле, като $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ са единичните вектори съответно на Ox, Oy, Oz. Тогава

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Ако означим формално (dx, dy, dz) с dr, то (1) и (2) можем да запишем още

(1′) $$\iint\limits_S (\operatorname{rot} F, n)\,d\sigma = \int\limits_L (F, dr),$$

(2′) $$\iiint\limits_V \operatorname{div} F\,dxdydz = \iint\limits_S (F, n)\,d\sigma.$$

5.1. Пресметнете:

а) $\oint\limits_L ye^z dx + xe^z dy + xye^z dz$;

б) $\oint\limits_L x^2 dx + y^2 dy - z dz$, където L е контурът на триъгълник с върхове $(0, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$;

в) $\oint\limits_L z dx + x dy + y dz$, $L: x^2+y^2=4$, $z=1$;

г) $\oint\limits_L (x^2+y)\,dx + yz dy + (x-z^2)\,dz$, където L е контурът на триъгълника $2x+y+2z=2$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$;

д) $\oint\limits_L y dx + z dy + x dz$, където L е пресечницата на повърхнините $x^2+y^2+z^2=a^2$ и $x+z=a$.

Упътване. Приложете формула (1).

5.2. Пресметнете $\iint\limits_S (\operatorname{rot} F, n)\,d\sigma$, ако:

а) $F=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$, $S: x^2+y^2+z^2=1$, $x+y+z \geqq 1$;

б) $F = yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$, S е кубът с център в началото и ръб 2;

в) $F=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$, S е повърхнината от б);

г) $F=(x-y)\mathbf{i}+(y-z)\mathbf{j}+(x-y)\mathbf{k}$, S е повърхнината от б);

д) $F=(x+y)\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(x+z)\mathbf{k}$, S е повърхнината, заградена от параболоида $z=4-x^2-y^2$ и от диск с център O и радиус 2, лежащ в равнината Oxy;

е) $F=2x\mathbf{i}+3y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, S е повърхнината на тялото, заградено от цилиндъра $x^2+y^2=4$ и равнините $z=1$ и $z=3$;

ж) $F=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, S е повърхнината на тялото, заградено от параболоида $z=x^2+y^2$, цилиндъра $x^2+y^2=9$ и равнината $z=0$;

з) $F=(x+y)\mathbf{i}+(y+z)\mathbf{j}+(x+z)\mathbf{k}$, S е повърхнината на тялото, определено от неравенствата $0 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$ и $0 \leqq z \leqq 5$.

Решение. а) Съгласно (1′)

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot} F, n)\,d\sigma = \int\limits_L (F, dr) = \iint\limits_{S_1} (\operatorname{rot} F, n)\,d\sigma,$$

където S_1 може да бъде коя да е друга повърхнина с контура на S. Да изберем

$$S_1: x+y+z=1, \quad x^2+y^2+z^2 \leqq 1.$$

Тогава

$$n=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}), \quad \operatorname{rot} F = (-2)(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}),$$

$$(\operatorname{rot} F, n) = -\frac{6}{\sqrt{3}}, \quad \iint\limits_S (\operatorname{rot} F, n)\,d\sigma = -\frac{6}{\sqrt{3}}\iint\limits_{S_1} d\sigma.$$

Повърхнината S_1 е кръг. Точките $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ лежат на контура му. Центърът на кръга е център на тежестта на тези точки, т. е. той е в точката $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, а радиусът му е $\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Получаваме

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot} F, n)\,d\sigma = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

5.3 (закон на Фарадей). Нека $E(t, x, y, z)$ и $H(t, x, y, z)$ са векторни полета в $\mathbb{R}^3$, зависещи още от времето t. Първото от тях ще считаме за електрическо, а второто за магнитно поле. Съгласно едно от уравненията на Максуел имаме

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Нека S е повърхнина с граница L. Докажете, че

$$\int\limits_L (E, dr) = -\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_S (H, n)\,d\sigma.$$

5.4. Докажете равенството

$$\iint\limits_S (\operatorname{div} f \times \operatorname{div} g,\, n)\, d\sigma = \int\limits_L (f \operatorname{div} g,\, dr),$$

където f и g са гладки функции, а L е контурът на S.

5.5 (закон на Ампер). Докажете, че от уравнението на Максуел $\operatorname{rot} H = J$, където H е магнитно поле, индуцирано от зададен чрез полето J електрически ток, следва, че циркулацията на H по границата L на повърхнината S се определя от потока на електрическото поле през S, т. е.

$$\iint\limits_S (J,\, n)\, d\sigma = \int\limits_L (H,\, dr).$$

5.6. Докажете следващите две формули, които показват, че дивергенцията и ротацията на векторното поле не зависят от координатната система:

а) $\operatorname{div} F(u) = \lim\limits_{dD\to 0} \dfrac{\iint\limits_K (F,\, n)\, d\sigma}{V_D}$,

където D е тяло, заградено от повърхнината K и съдържащо точката u, dD е диаметърът на D;

б) $\operatorname{rot} F(u) = \lim\limits_{dS\to 0} \dfrac{\int\limits_L (F,\, dr)}{S_S}$,

където S е повърхнина с контур L и $S_S = \iint\limits_S d\sigma$.

5.7. Пресметнете:

а) $\iint\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

б) $\iint\limits_S xy^2\, dydz + x^2 y\, dzdx + y\, dxdy$, където S е повърхнината на цилиндъра $T : x^2 + y^2 \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1$;

в) $\iint\limits_S x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy$, S с контурът на единичния куб $K : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$.

5.8. Докажете, че обемът на тялото T може да се пресметне по формулата

$$V_T = \frac{1}{3} \iint\limits_S x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy.$$

5.9. Нека u и v са двукратно гладки функции, а G и S са както в теоремата на Гаус. Докажете, че:

а) $\iiint\limits_G v \Delta u\, dxdydz = \iint\limits_S v \dfrac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma - \iiint\limits_G (\operatorname{div} u,\, \operatorname{div} v)\, dxdydz$;

б) $\iiint\limits_G (v\Delta u - u\Delta v)\, dxdydz = \iint\limits_S \left(v\dfrac{\partial u}{\partial n} - u\dfrac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma$,

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}.$$

5.10. Нека $f \in C^2(G)$, $\Delta f = 0$ и $f\big|_L = 0$, където затворената крива L лежи изцяло в G заедно с вътрешността си. Докажете, че $f = 0$ за вътрешността на L.

5.11. Пресметнете интеграла на Гаус

$$\iint\limits_S \frac{(x-x_0)dydz + (y-y_0)dzdx + (z-z_0)dxdy}{\sqrt{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^3}}$$

за затворената повърхнина S, в случай че:

а) $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ лежи в областта, заградена от S;

б) $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ е външна за областта, заградена от S.

5.12. Като използвате зад. 5.11 и следвате пътя, очертан в зад. 3.21, докажете теоремата на Брауер за $\mathbb{R}^3$.

Глава 8

Редове на Фурие. Трансформация на Фурие

§ 1. Редове на Фурие

Нека $f(x)$ е абсолютно интегруема функция в интервала $[-\pi, \pi]$. Определяме

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Редът

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

се нарича *тригонометричен ред на Фурие* за функцията $f(x)$.

Ако $f(x)$ е четна функция, то

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

и следователно редът на Фурие за $f(x)$ има вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Ако $f(x)$ е нечетна, то съответно

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad a_n = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и редът на Фурие за $f(x)$ има вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Ако вместо интервала $[-\pi, \pi]$ разглеждаме интервала $[-l, l]$, тогава ред на Фурие се нарича редът

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

където

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Редът

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-inx}$$

се нарича *ред на Фурие в комплексна форма*. Тук

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ясно е, че

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n).$$

Когато $f(x)$ е реална, то $c_{-n} = \bar{c}_n$.

За абсолютно интегруема функция коефициентите на Фурие a_n и b_n клонят към нула при $n \to \infty$.

Ако $f^2(x)$ е интегруема в интервала $[-\pi, \pi]$, то в сила е равенството на Парсевал

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx.$$

Ще припомним, че една функция се нарича частично непрекъсната в интервала $[-\pi, \pi]$, ако тя е непрекъсната във всяка точка на $[-\pi, \pi]$ освен може би в краен брой точки, в които тя има прекъсване от първи род. Ако $f(x)$ и $f'(x)$ са частично непрекъснати, казваме, че $f(x)$ е частично гладка.

Нека частично гладката в $[-\pi, \pi]$ функция е продължена периодично върху цялата права. Тогава тригонометричният ред на Фурие за $f(x)$ е сходящ във всяка точка $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ и има за сума величината $\dfrac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$ (при това сходимостта е равномерна във всяка отсечка, лежаща вътре в участък на гладкост на $f(x)$).

Нека $f(x)$ е непрекъсната в интервала $[-\pi, \pi]$, частично гладка в него и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогава редът на Фурие за $f(x)$ е *равномерно сходящ* в $[-\pi, \pi]$ и има за сума $f(x)$.

Нека $f(x)$ е непрекъсната, нека е непрекъсната и $f'(x)$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогава редът на Фурие за производната $f'(x)$ се получава от реда на Фурие за функцията $f(x)$ чрез почленно диференциране.

Ще отбележим също, че редът на Фурие за абсолютно интегруема в интервала $[-\pi, \pi]$ функция може да се интегрира почленно в този интервал.

1.1. Развийте в ред на Фурие в интервала $(-\pi, \pi)$ следните функции:

а) $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$;

б) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & -\pi \leqq x < 0 \\ \dfrac{\pi}{4}, & 0 \leqq x \leqq \pi. \end{cases}$

Р е ш е н и е. И двете функции са частично гладки в интервала $[-\pi, \pi]$, затова могат да бъдат развити в ред на Фурие в този интервал. Сумата на реда на Фурие във всяка точка x от отворения интервал $(-\pi, \pi)$ е равна на $f(x)$ с изключение на точката $x = 0$ в подусловие б), където сумата на реда на Фурие има стойност $0 = \dfrac{\frac{\pi}{4} + (-\frac{\pi}{4})}{2}$, а не $\dfrac{\pi}{4}$. В краищата на интервала $x = \pm\pi$ и при двете функции сумата на реда на Фурие не съвпада със стойностите на функцията в тези точки.

Тук ще дадем развитието на e^{ax}. По формулите за коефициентите a_0, a_n, b_n получаваме

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\, dx = \frac{e^{a\pi} - e^{-a\pi}}{a\pi} = \frac{2 \operatorname{sh} a\pi}{a\pi},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{a \cos nx + n \sin nx}{a^2 + n^2} e^{ax} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{1}{\pi} \frac{2a}{a^2 + n^2} \operatorname{sh} a\pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \sin nx\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{a \sin nx - n \cos nx}{a^2 + n^2} e^{ax} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\pi} \frac{2n}{a^2 + n^2} \operatorname{sh} a\pi.$$

Следователно за $x \in (-\pi, \pi)$ имаме

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi} \operatorname{sh} a\pi \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} \left[a \cos nx - n \sin nx \right] \right\}.$$

1.2. Развийте в тригонометричен ред следните периодични функции:

а) $f(x) = |\sin 2x|$; б) $f(x) = |\cos x|$.

Р е ш е н и е. а) Функцията $f(x) = |\sin 2x|$ е периодична с период $\dfrac{\pi}{2}$, непрекъсната във всяко $x \in (-\infty, +\infty)$, производната ѝ е определена и непрекъсната навсякъде с изключение на точките $x = \dfrac{\pi}{2} k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Следователно нейният ред на Фурие е сходящ във всяка точка $x \in (-\infty, +\infty)$ и има за сума самата функция.

От четността на $f(x)$ имаме

$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x\, dx = -\frac{4}{\pi} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}, \; b_n = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \cos 4nx\, dx = \frac{8}{\pi} \left(\frac{-\cos(2-4n)x}{2(2-4n)} - \frac{\cos(2+4n)x}{2(2+4n)} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{2(2-4n)} + \frac{1}{2(2+4n)} \right) = \frac{4}{\pi(1-4n^2)}.$$

Следователно за всяко x

$$|\sin 2x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4nx}{(1-4n^2)}.$$

1.3. Нека функцията

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{за } -\pi \leqq x \leqq 0 \\ \dfrac{x^2}{\pi} & \text{за } 0 < x \leqq \pi \end{cases}$$

е продължена периодично върху $(-\infty, +\infty)$. Развийте $f(x)$ в ред на Фурие в интервала $[-\pi, \pi]$.

Р е ш е н и е. Продължената функция е непрекъсната за всяко x, а производната ѝ е определена и непрекъсната освен в точките $x = \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Следователно редът на Фурие за $f(x)$ е сходящ за всяко x и има за сума периодичното продължение на $f(x)$. За коефициентите a_0, a_n, b_n имаме

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\,dx = \frac{5}{6}\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-x\cos nx)\,dx + \int_{0}^{\pi}\frac{x^2}{\pi}\cos nx\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(x + \frac{x^2}{\pi}\right)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\sin nx\left(x + \frac{x^2}{\pi}\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{0}^{\pi}\left(1 + \frac{2x}{\pi}\right)\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left[\left(1 + \frac{2x}{\pi}\right)\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\left[\left(1 + \frac{2\pi}{\pi}\right)(-1)^n - 1\right] - \frac{2}{\pi}\cdot 0 = \frac{3(-1)^n - 1}{n^2\pi} \quad \text{при } n \neq 0,$$

$$b_n = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi^2 n^3}, \quad \text{т. е.} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{при четно } n \\ -\dfrac{4}{\pi^2 n^3} & \text{при нечетно } n. \end{cases}$$

Тогава

$$f(x) = \frac{5}{12}\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx - \frac{4}{\pi^2(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\right].$$

Заместваме $x = \pi$ и получаваме равенството

$$\frac{7}{12}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3 - (-1)^n}{n^2}.$$

1.4. Развийте функциите:

а) $\cos ax$ по косинуси в интервала $[-\pi, \pi]$;

б) $\sin ax$ по синуси в интервала $(-\pi, \pi)$.

(Тук a не е цяло число.)

Р е ш е н и е. а) Функцията $\cos ax$ е четна, така че $b_n = 0$. Имаме

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos ax\,dx = \frac{\sin a\pi}{a\pi}.$$

Нека $n \neq 0$. Тогава

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\cos(a+n)x + \cos(a-n)x]\,dx = \frac{(-1)^n 2a}{a^2 - n^2}\,\frac{\sin a\pi}{\pi}.$$

Оттук за $x \in [-\pi, \pi]$ имаме

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{\cos ax}{\sin a\pi} = \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2 - n^2}.$$

От последното равенство можем да получим развитието на $\sin x$ във вид на безкрайно произведение, например по следния начин. Полагаме $x = \pi$ и получаваме

$$\operatorname{cotg} a\pi = \frac{1}{a\pi} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n a.(-1)^n}{a^2 - n^2}$$

или

$$\operatorname{cotg}\pi t - \frac{1}{\pi t} = -2t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 - t^2}.$$

Този ред може да бъде интегриран почленно. Действително, той е равномерно сходящ във всеки интервал $[0, q]$, където $q \in (0, 1)$, съгласно критерия на Вайерщрас $\left(\dfrac{1}{|n^2 - t^2|} \leq \dfrac{1}{n^2 - q^2}\right)$. Тогава за $x \in (0, 1)$ в лявата страна на интегрираното равенство имаме

$$\int_{0}^{x}(\operatorname{cotg}\pi t - \pi t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x} - \lim_{\varepsilon\to 0}\ln\frac{\sin\pi\varepsilon}{\pi\varepsilon}\right] = \frac{1}{\pi}\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

В дясната страна на равенството получаваме

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ln(n^2-t^2)\Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

От равенството

$$\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$$

и от непрекъснатостта на експонентата получаваме представянето на $\frac{\sin\pi x}{\pi x}$ във вид на безкрайно произведение при $x\in(0, 1)$, а именно:

$$\frac{\sin\pi x}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Ако $x\in(0, \pi)$, имаме равенството

$$\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

То се получава автоматично за $x=0$ и за $x=\pm\pi$, т. е. е в сила за всички $x\in[-\pi, \pi]$. Като заместим $x=\frac{\pi}{2}$, стигаме до равенството

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right),$$

откъдето можем да получим и формулата на Уолис. Това равенство е установено още от Ойлер.

1.5. Развийте в тригонометричен ред функцията $f(x)=x$:

а) по синуси; **б)** по косинуси;

в) по синуси и косинуси; **г)** в интервала $[0, 2\pi]$.

Напишете формулата на Парсевал за функцията $f(x)$.

Решение. а) Разглеждаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{за } x\in(-\pi, \pi) \\ 0 & \text{за } x=\pm\pi \end{cases}$$

и я продължаваме до периодичната функция $f_1(x)$ върху правата $(-\infty, \infty)$. Получената функция е частично гладка в интервала

$[-\pi, \pi]$, съвпада с x в интервала $(-\pi, \pi)$. От нечетността на $f(x)$ следва, че $a_n=0$ за $n=0, 1, 2, \ldots$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{2}{n\pi}[-x\cos nx]\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx$$

$$= \frac{-\pi 2\cos n\pi}{n\pi} = \frac{2(-1)^{n+1}}{n},$$

т. е.

$$f_1(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n} \quad \text{за всяко } x\in(-\infty, +\infty).$$

Когато $x\in(-\pi, \pi)$, имаме равенството

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}.$$

Заместваме в него x с $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

Като напишем равенството на Парсевал за функцията $f_1(x)$, получаваме

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

т. е.

$$\frac{2}{3}\pi^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}, \quad \text{или} \quad \frac{\pi^2}{6} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots;$$

б) За да получим развитието на функцията x по косинуси (в интервала $[0, \pi]$), ще трябва най-напред да продължим $f(x)$ до четна функция, т. е. $f(x)=|x|$ за $x\in[-\pi, \pi]$. След това можем да продължим $f(x)$ периодично до $f_1(x)$, тъй като $f(-\pi)=f(\pi)=1$. Функцията $f_1(x)$ е непрекъсната навсякъде и е частично гладка в интервала $[-\pi, \pi]$. Следователно редът на Фурие за тази функция е сходящ навсякъде и има за сума $f_1(x)$. Очевидно

$$b_n=0, \; a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi,$$

32

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\,[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{за нечетно } n \\ \dfrac{-4}{n^2\pi} & \text{за четно } n. \end{cases}$$

Тогава за $x \in [0, \pi]$ получаваме равенството

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Като заместим x с 0, стигаме до равенството

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \quad \text{или} \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2},$$

т. е.

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots$$

В този случай от равенството на Парсевал имаме

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2 = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4},$$

откъдето

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots;$$

в) В този случай при $x \in [-\pi, \pi]$ ще разгледаме функцията

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{за } x \in [0, \pi) \\ 0 & \text{за } x \in (-\pi, 0) \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{за } x = \pm\pi. \end{cases}$$

Продължаваме я периодично до $f_1(x)$ върху правата $(-\infty, \infty)$. За коефициентите на Фурие получаваме

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi n^2}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0 & \text{за нечетно } n \\ \dfrac{-2}{\pi n^2} & \text{за четно } n, \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Тогава за $x \in (-\infty, \infty)$:

$$f_1(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},$$

откъдето при $x \in (0, \pi)$ получаваме

$$x = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Всъщност за $x \in (-\pi, \pi)$ имаме $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$, така че полученото развитие може да се разглежда и като следствие на подусловия а) и б). Същото се отнася и за равенството на Парсевал.

За да получим конкретното развитие на $f(x)$ в съответния интервал в подусловия а) — в), не е задължително да разглеждаме периодичното продължение $f_1(x)$ на функцията $f(x)$, достатъчно е да разгледаме функцията $f(x)$ в интервала $[-\pi, \pi]$;

г) За $x \in [0, 2\pi]$ дефинираме функцията

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{за } x \in [0, 2\pi) \\ 0 & \text{за } x = 2\pi \end{cases}$$

и я продължаваме периодично до функцията $f_1(x)$ върху правата $(-\infty, +\infty)$. Получената функция е частично гладка в интервала $[-\pi, \pi]$ и съвпада с x в интервала $[0, 2\pi)$. Тъй като интегралът от периодична функция с период 2π е един и същ върху произволен интервал с дължина 2π, то

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\,x\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{-x\cos nx}{n\pi}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos nx\,dx = \frac{-2}{n}$$

или за $x \in [0, 2\pi)$ имаме

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Равенството на Парсевал в този случай има вида

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^2(x)\,dx = 2\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

където

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_1^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{x^3}{3\pi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

т. е. отново получаваме

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

1.6. Развийте в тригонометричен ред функцията x^2:

а) по синуси; б) по косинуси;

в) по синуси и косинуси; г) в интервала $[0, 2\pi)$.

Решение. б) Разглеждаме функцията $f(x) = x^2$ в интервала $[-\pi, \pi]$. Тя е непрекъсната и частично гладка и следователно нейният ред на Фурие е сходящ и има за сума x^2 при $x \in [-\pi, \pi]$. От четността на функцията имаме

$$b_n = 0,\ a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2,\ a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx = \frac{4(-1)^n}{n^2}\ (n \neq 0).$$

Следователно за $x \in [-\pi, \pi]$

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos nx.$$

Заместваме $x = 0$ и получаваме

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots,$$

а за $x = \pi$:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots,$$

което вече получихме в предишната задача.

Равенството на Парсевал ни дава

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^4\,dx = \frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

т. е.

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{n^4} + \cdots$$

1.7. Развийте в ред на Фурие функцията $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$.

1.8. Развийте в ред на Фурие в интервала $(0,2\pi)$ функцията $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

1.9. Нека $f(x)$ е периодична с период 2π и абсолютно интегруема функция. Нека тя се развива в равномерно сходящ в интервала $[-\pi, \pi]$ тригонометричен ред

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

Докажете, че този ред е задължително нейният ред на Фурие.

Решение. В равенството

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

интегрираме почленно равномерно сходящия ред. Като вземем предвид, че

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = 0, \quad \int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = 0,$$

получаваме

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0\pi.$$

Умножаваме двете страни на равенството с $\cos mx$. Редът

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\cos mx = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos mx + b_n\sin nx\cos mx)$$

е равномерно сходящ в $[-\pi, \pi]$ съгласно критерия на Абел, тъй като $\sum u_n(x)$ е равномерно сходящ в $[-\pi, \pi]$, а редицата $v_n(x) = \cos mx$ е монотонна (постоянна) при всяко фиксирано x и равномерно ограничена: $|v_n(x)| \le 1$.

Интегрираме почленно този равномерно сходящ ред и получаваме

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right).$$

Тъй като

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx = 0,$$

а при $m \ne n$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx = 0,$$

то всички интеграли под знака на сумата с изключение на

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2mx}{2}\,dx = \pi$$

са нула и получаваме

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx.$$

Аналогично

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx,$$

т. е. даденият тригонометричен ред е действително редът на Фурие за $f(x)$.

В някои случаи, като се изследват коефициентите на редовете

$$\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n\cos nx \quad \text{и} \quad \sum q_n\sin nx,$$

може да се установи, че те са сходящи в $[-\pi, \pi]$ (с изключение може би на отделни точки от $[-\pi, \pi]$) и се явяват редове на Фурие за своите суми $f(x)$ и $g(x)$. Тогава възниква естествено въпросът, как да се намери тяхната сума. За момент няма да се интересуваме дали се получават именно редовете на Фурие, а ще се опитаме да сведем тригонометричните редове до степенни, чиято сума може да се пресметне. Там, където са сходящи споменатите два реда, е сходящ и редът

$$\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n z^n = \frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n\cos nx + i\sum_{n=1}^{\infty} q_n\sin nx = f(x)+ig(x)$$

$$(z = e^{ix}).$$

Последният ред е сходящ в точки от единичната окръжност, следователно той е сходящ в отворения кръг $|z| < 1$ и в него е определена сумата му

$$\varphi(z) = \varphi(re^{ix}) = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n r^n e^{inx}.$$

Според теоремата на Абел в точките $x \in [-\pi, \pi]$, за които са сходящи редовете

$$\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n\cos nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n\sin nx,$$

имаме

$$f(x)+ig(x) = \lim_{r\to 1}\varphi(re^{ix}).$$

Обикновено тази граница е просто $\varphi(e^{ix})$, което ни позволява да намерим $f(x)$ и $g(x)$ като реална и имагинерна част на $\varphi(e^{ix})$.

1.10. Намерете сумите на следните тригонометрични редове:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n!}$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n!}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)x}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)x}{2n-1}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)x}{(2n-1)2n}$.

Р е ш е н и е. а) Тук

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = \varphi(e^{ix}),$$

където

$$\varphi(z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Имаме

$$\varphi(e^{ix}) = e^{\cos x + i\sin x} = e^{\cos x}[\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)],$$

т. е.

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x}\cos(\sin x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} = e^{\cos x}\sin(\sin x);$$

б) Нека $x \in [0, \pi]$. Да означим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(2n-1)x}{n}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)x}{n}.$$

Тогава

$$f(x)+ig(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}e^{ix(2n-1)}}{n} = \frac{1}{e^{ix}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(e^{2ix})^n}{n}.$$

Оттук

$$\varphi(z) = \frac{1}{z}\ln(1+z^2).$$

Нека $x \neq \frac{\pi}{2}$, $z \neq i$. Ако $z = e^{ix}$, то

$$1+z^2 = 1+\cos 2x + i\sin 2x = 2\cos x(\cos x + i\sin x);$$

ако $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $|1+z^2| = 2\cos x$; ако $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, то $|1+z^2| = -2\cos x$. За $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ имаме $\arg(1+z^2) = x$, а тъй като

$$1+z^2 = -2\cos x[\cos(x-\pi) + i\sin(x-\pi)],$$

то за $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ имаме $\arg(1+z^2) = x-\pi$.

Следователно за $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$f(x) = \mathrm{Re}\varphi(e^{ix}) = \mathrm{Re}\bar{z}\ln(1+z^2) = \mathrm{Re}\{\bar{z}\ln|1+z^2| + i\arg z\}$$

$$= \mathrm{Re}[(\cos x + i\sin x)[\ln(2(\cos x) + ix)] = \cos x.\ln(2\cos x) + x\sin x,$$

а за $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ съответно

$$f(x) = \cos x.\ln(2|\cos x|) + (x-\pi).\sin x.$$

В тази задача развивахме в тригонометричен ред, без да се интересуваме от въпроса, дали това са редове на Фурие. Следващите задачи хвърлят светлина в тази насока.

1.11. Следните тригонометрични редове ще бъдат ли редове на Фурие за своите суми:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$, $0<\alpha<1$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$?

Р е ш е н и е. В случаите а) и б) отговорът е положителен. Редовете са равномерно сходящи в $[-\pi, \pi]$ (зад. 1.9). В случай в) няма да бъде ред на Фурие, тъй като би трябвало $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$ при $n \to \infty$, а коефициентите пред $\sin nx$ са равни на 1.

Изобщо, ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ ($q_n \geq 0$) е сходящ, то редовете

$$\frac{q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx$$

са равномерно сходящи в $[-\pi, \pi]$ и според зад. 1.9 са редове на Фурие за своите суми $f(x)$ и $g(x)$.

1.12. Нека $q_n \geq 0$, редицата $\{q_n\}$ е монотонна и клони към нула. Докажете, че ако функцията

$$f(x) = \frac{q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx \ (\text{съответно } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx)$$

е абсолютно интегруема, то редът

$$\frac{q_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx \ (\text{съответно } \sum_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx)$$

представлява нейния ред на Фурие.

Ще отбележим, че това е частен случай на теоремата на Дю Боа — Раймонд.

Р е ш е н и е. Да умножим равенството за сумата с $(1-\cos mx)$. Получаваме

$$f(x)(1-\cos mx)=\frac{q_0}{2}(1-\cos mx)+\sum_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx(1-\cos mx).$$

Редът вдясно е равномерно сходящ в $[0,\pi]$ съгласно критерия на Дирихле. Наистина $q_n \to 0$ при $n\to\infty$ монотонно намалявайки, а от равенството

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{k}\cos nx=\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

и от неравенствата

$$\sin\alpha>\frac{2}{\pi}\alpha\ \left(\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\right),\quad 1-\cos\alpha<\frac{\alpha^2}{2}$$

следва

$$\left|\frac{1}{2}(1-\cos mx)+\sum_{n=1}^{k}\cos nx(1-\cos mx)\right|$$

$$\leqq \frac{1-\cos mx}{2\sin\frac{x}{2}}\leqq\frac{\frac{1}{2}m^2x^2}{2\frac{x}{\pi}}=\frac{m^2\pi x}{4}\leqq\frac{1}{4}m^2\pi^2.$$

Интегрираме почленно този равномерно сходящ ред от 0 до π:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=q_0-q_m.$$

Нека сега $m\to\infty$. Тогава по условие $q_m\to 0$. Тъй като $f(x)$ е четна и абсолютно интегруема, то коефициентите на Фурие, а именно:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos mx\,dx,$$

клонят към нула. Така получихме

$$q_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx.$$

От последното равенство следва, че и

$$q_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos mx\,dx=a_m.$$

От четността на $f(x)$ получаваме, че

$$b_m=0,\quad \text{т. е.}\quad \frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n\cos nx$$

е действително ред на Фурие за $f(x)$.

Аналогично се постъпва с $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n\sin nx$, като в този случай се умножава със $\sin mx$ и нужният резултат се получава дори по-лесно от първия.

Ще отбележим, че в зад. 1.10 за всички подусловия $f(x)$ и $g(x)$ се оказват абсолютно интегруеми. Затова според зад. 1.12 съответните редове

$$\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n\cos nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n\sin nx$$

са всъщност редове на Фурие за техните суми. Разбира се, в случаите, когато редът е равномерно сходящ, това е ясно от зад. 1.9.

Вярно е и следващото твърдение, чието доказателство се опира главно на преобразуването на Абел:

Ако редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{q_n}{n}$ е сходящ, то редовете

$$\frac{q_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} q_n\cos nx \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} q_n\sin nx$$

имат за сума абсолютно интегруеми функции (и следователно те се явяват техни редове на Фурие).

Ще отбележим още, че докато сходимостта на реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ е необходима, за да бъде редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n \sin nx$ ред на Фурие за своята сума, то тя не е необходима за реда $q_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n \cos nx$, за да бъде той ред на Фурие за своята сума.

1.13. Развийте интегруемата в несобствен смисъл функция $f(x) = \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right)$ в интервала $(-\pi, \pi)$ в ред на Фурие.

Решение. Това е четна функция, която в краищата на интервала $(-\pi, \pi)$ е неограничена, но въпреки това е абсолютно интегруема. Тогава

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) dx = \ln 2 + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t \, dt = 0$$

(пж. зад. 1.33, гл. 2). Ако $n > 0$, то

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) \frac{\sin nx}{n} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx . \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin nx . \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx.$$

(В последния интеграл е направена смяна на x с $\pi - x$.)
Знаем, че

$$\frac{\sin nx \cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} + \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx + \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx.$$

Тъй като $\int_0^{\pi} \cos kx \, dx = 0$, то $a_n = \frac{(-1)^{n-1}\pi}{n\pi} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ и тогава

$$\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}.$$

Ако заместим в последното равенство x с $\pi - x$, получаваме друго развитие

$$-\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

1.14. Да се напише комплексната форма на реда на Фурие за 2π-периодичната функция $f(x)$, зададена в $[-\pi, \pi]$ по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in (-\pi, \pi) \\ \operatorname{ch}\pi, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

Решение. Намираме коефициентите на Фурие

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{(in+1)\pi} - e^{-(in+1)\pi}}{in+1}$$

$$= \frac{(-1)^n e^{\pi} - (-1)^n e^{-\pi}}{2\pi(in+1)} = \frac{(-1)^n \operatorname{sh}\pi}{\pi(in+1)},$$

откъдето

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{in+1}e^{-inx} \text{ за всяко } x.$$

Като използваме получените коефициенти c_n, можем да намерим и коефициентите a_n и b_n от реалната форма на реда на Фурие.
Имаме

$$a_n = c_n + c_{-n} = \left[\frac{(-1)^n}{in+1} + \frac{(-1)^n}{-in+1}\right]\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} = \frac{(-1)^n 2\operatorname{sh}\pi}{(1+n^2)\pi}, \quad n \neq 0,$$

$$a_0 = 2c_0 = 2\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}, \quad b_n = \frac{c_n - c_{-n}}{i} = \frac{(-1)^n 2n\operatorname{sh}\pi}{(1+n^2)\pi}$$

или за $x \in (-\pi, \pi)$ получаваме

$$e^x = \frac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\right]$$

(срв. със зад. 1.1а)).

Ще отбележим, че ако са изпълнени някакви достатъчни условия за сходимост на реда на Фурие

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

и той има за сума $f(x)$, то редът $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx}$ е сходящ и има същата сума (което следва от начина на получаване на $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-inx}$), ако процесът на сумиране се разбира като търсене на граница при $k\to\infty$ на симетричната сума $\sum\limits_{n=-k}^{k} c_n e^{-inx}$.

Впрочем, ако са сходящи поотделно редовете

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-inx} \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n e^{-inx}=\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{inx},$$

то сумата на реда $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-inx}$ се получава, като се съберат сумите на двата реда.

1.15. Намерете комплексната форма на реда на Фурие за π-периодичната функция $f(x)$, зададена върху $(0,\pi]$ по следния начин:

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq \pi.\end{cases}$$

Намерете сумата на реда при $x=\pi$.

Р е ш е н и е. Лесно се намират коефициентите на Фурие

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x e^{+2nxi}\,dx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n-2ni}{(1-4n^2)},$$

като използваме формулата

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{+\frac{n\pi xi}{l}}\,dx$$

и полагаме $2l=\pi$.

Редът на Фурие има вида

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n-2ni}{1-4n^2}e^{-2nix}.$$

Неговата сума е равна на $f(x)$ в $(0,\pi)$, а при $x=\pi$ тя е

$$\frac{f(+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

т. е.

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n-2ni}{1-4n^2}e^{-2ni\pi}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n-2ni}{1-4n^2}.$$

Оттук за реалната част имаме

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2},$$

откъдето

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{15}+\frac{1}{35}-\frac{1}{63}+\dots$$

1.16. Като използвате развитието на x в ред на Фурие, докажете, че за $x\in[-\pi,\pi]$ е вярно равенството

$$x\sin x=1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-1}.$$

Р е ш е н и е. От зад. 1.5а) имаме

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$$

в интервала $(-\pi,\pi)$. Тогава

$$x\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\sin nx.\sin x}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(n-1)x - \cos(n+1)x}{n}$$

$$= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(n-1)x}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos(n+1)x}{n}.$$

Последните два реда са сходящи съгласно критерия на Дирихле, тъй като $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ монотонно, а например

$$\sum_{n=1}^{k} (-1)^{n-1}\cos(n-1)x = \frac{\sin\frac{2k-1}{2}x.\sin kx}{\cos\frac{x}{2}}$$

е ограничен, тъй като $\frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. След преномерупане получаваме

$$x\sin x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}\cos nx}{n-1}$$

$$= 1 - \cos\frac{x}{2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n^2-1}.$$

Редът в дясната страна на равенството е равномерно сходящ в $[-\pi, \pi]$ и следователно е непрекъсната функция в точките $x = \pm\pi$. С граничен преход при $x \to \pm\pi$ в равенството получаваме, че то е вярно и за точките $x = \pm\pi$. (От зад. 1.9 следва, че този ред е задължително ред на Фурие за функцията $x\sin x$.)

1.17. Като използвате развитието на x в интервала $(-\pi, \pi)$, получете чрез почленно интегриране развитието в тригонометричен ред за функциите x^2 и x^3.

Р е ш е н и е. Нека $x \in (0, \pi)$. Знаем, че

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}\sin nx}{n}.$$

Тогава

$$\frac{x^2}{2} = \int_0^x t\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt\Big|_0^x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(\cos nx - 1)}{n^2}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} + 2\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\cos nx}{n^2} + 2\cdot\frac{\pi^2}{12}.$$

Следователно

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n\cos nx}{n^2}.$$

От четността на двете страни следва, че равенството е вярно за $x \in (-\pi, \pi)$ (срв. със зад. 1.6б)).

Аналогично за $x \in (-\pi, \pi)$ получаваме

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}x + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

или

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2.2(-1)^{n+1}\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n\sin nx}{n^3}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{[6 - n^2\pi^2]\sin nx}{n^3}.$$

1.18. Без да изчислявате коефициентите на реда на Фурие за функцията $f(x) = \pi x - x|x|$ в отсечката $[-\pi, \pi]$, изяснете дали този ред е равномерно сходящ в $[-\pi, \pi]$. Как изглежда графиката на сумата на диференцирания ред?

Р е ш е н и е. Функцията е непрекъсната в $[-\pi, \pi]$, частично гладка и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогава очевидно редът на Фурие е равномерно сходящ в $[-\pi, \pi]$.

Както знаем, за непрекъснатата функция $f(x)$, за която $f(-\pi) = f(\pi)$ и която има частично непрекъсната производна, редът на Фурие за производната ѝ $f'(x)$ се получава от реда на Фурие за $f(x)$ чрез почленно диференциране.

В случая $f(x)$ е непрекъсната и

$$f'(x) = \begin{cases} \pi + 2x, & x < 0 \\ \pi - 2x, & x \geqq 0. \end{cases}$$

Тъй като $f(x)$ е нечетна функция, то $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, а редът на Фурие за $f'(x)$ е $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n\cos nx$.

33

Функцията $f'(x)$ е непрекъсната в $[-\pi, \pi]$, частично гладка и $f'(-\pi) = f'(\pi)$, следователно редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx$ има действително за сума $f'(x)$, така че графиката на диференцирания ред на Фурие съвпада с графиката на функцията

$$g(x) = \begin{cases} \pi + 2x, & x < 0 \\ \pi - 2x, & x \geqq 0, \end{cases}$$

продължена периодично върху $(-\infty, +\infty)$.

1.19. (В. А. Стеклов) Нека $f(x)$ е непрекъсната и частично гладка функция. Тогава, ако е изпълнено едно от условията:

а) $\int\limits_0^{\pi} f(x)\, dx = 0$;

б) $f(0) = f(\pi) = 0$, то е вярно неравенството

$$\int\limits_0^{\pi} f'^2(x)\, dx \geqq \int\limits_0^{\pi} f^2(x)\, dx,$$

като равенството се получава в случай а) само за функции от вида $f(x) = A\cos x$, а в случай б) — само за функции от вида $f(x) = B\sin x$.

Решение. б) Ще продължим $f(x)$ върху $[-\pi, 0)$ до нечетна функция. Тогава редът на Фурие за $f(x)$ има вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Тъй като $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ и $f(x)$ е непрекъсната функция, то редът на Фурие, отговарящ на производната $f'(x)$ в интервала $[-\pi, \pi]$, се получава от реда за $f(x)$ с почленно диференциране: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nx$. От равенството на Парсевал имаме

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f^2(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$

а

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f'^2(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2.$$

Оттук следва неравенството

$$\int\limits_0^{\pi} f'^2(x)\, dx \geqq \int\limits_0^{\pi} f^2(x)\, dx,$$

като равенство може да има само когато $b_n = 0$ за $n \geqq 2$, т. е. само ако $f(x) = b_1 \cos x$.

Доказателството на а) се провежда аналогично: $f(x)$ се продължава до четна функция върху $(-\infty, +\infty)$, като условието от а) ни дава $a_0 = 0$.

Скаларно произведение на две частично непрекъснати в $[a, b]$ функции се нарича интегралът

$$(f, \varphi) = \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\, dx.$$

Това произведение очевидно има следните свойства:

1) $(f, \varphi) = (\varphi, f)$;

2) $(f, f) \geqq 0$, като от равенството $(f, f) = 0$ следва, че $f(x) = 0$ в $[a, b]$ с изключение може би на краен брой точки;

3) $(\alpha f + \beta\varphi, \psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(\varphi, \psi)$, α, β — константи.

С $L_2'[a, b]$ се означава множеството от всички частично непрекъснати в $[a, b]$ функции, за които е въведено скаларно произведение по горната формула.

Пространство $L_2 = L_2[a, b]$ се нарича множеството от функциите $f(x)$, чийто квадрат е сумируема в $[a, b]$ функция, притежаващо същото скаларно произведение. Очевидно L_2' е част от L_2.

Норма на функцията $f(x)$ се нарича

$$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_a^b f^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

С така въведената норма пространството L^2 е *хилбертово*.

Системата от функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ се нарича *ортонормирана* (ортогонална и нормирана), ако

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0 & \text{за } k \neq l \text{ (ортогоналност)} \\ 1 & \text{за } k = l \text{ (нормираност)}. \end{cases}$$

Една ортогонална система $\{\varphi_k\}$ се нарича *пълна система* в дадено пространство H, ако в H не съществува елемент ψ, ортогонален към всички φ_k, т. е. $(\psi, \varphi_k) = 0$, и различен от нула.

Ако $f \in L_2$, то числото $\frac{1}{\|\varphi_k\|^2}(f, \varphi_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, се нарича *коефициент на Фурие* на функцията f относно функцията φ_k от ортогоналната система.

Редът

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|\varphi_k\|^2}(f, \varphi_k),$$

породен от функцията f, се нарича *ред на Фурие* на функцията f по ортогоналната система. Ако системата е ортонормирана, коефициентите в реда на Фурие са (f, φ_k), а

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k(x)$$

е n-тата парциална сума на реда на Фурие.

Оказва се, че една система $\{\varphi_k\}$ е пълна в L_2', когато за всяко f редът на Фурие е сходящ и парциалните му суми клонят към f в смисъл на средно-квадратичната сходимост, т. е.

$$\|f - S_n\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)^2.$$

Очевидно това означава, че за всяко f е в сила равенството на Парсевал. Ако $\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)^2 = (f, f)$, т. е. ако $c_k = (f, \varphi_k)$, то

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Това е вярно и за функциите от L_2, но интегралите са лебегови. В пространството L_2 е вярно и обратното твърдение, т. е. ако c_k са такива, че $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty$, то съществува $f(x) \in L_2[a, b]$, за която

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

В пространството L_2' такава функция може и да не съществува.

Тригонометричната система

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$$

е пълна в пространството $L_2[-\pi, \pi]$. Тя се нормира по следния начин:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

В пространството $L_2[-1, 1]$ системата от полиноми на Льожандър е пълна ортонормирана система:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k].$$

Друг пример за ортогонална система в $L_2[a, b]$ е т. нар. *система на Радемахер*, състояща се от функциите

$$\varphi_k(x) = (-1)^n$$

за

$$\frac{n}{2^k}(b-a) < x - a < \frac{n+1}{2^k}(b-a); \quad n = 0, 1, \ldots, 2^k - 1; \quad k = 0, 1, \ldots$$

и

$$\varphi_k(x) = 0$$

за

$$x = \frac{n}{2^k}, \quad n = 0, 1, \ldots, 2^k.$$

1.20. Докажете, че системата на Радемахер не е пълна в пространството $L_2[a, b]$.

Упътване. Разгледайте функцията

$$\psi(x) = (x-a)(x-b) + \frac{(b-a)^2}{6}$$

и покажете, че тя е ортогонална към всички функции от системата.

1.21. Докажете, че за произволна ортонормирана система $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots$ и за всяка функция $f \in L_2$, измежду всички възможни системи от числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ нормата $\|f - \sum_1^n \alpha_k\varphi_k\|$ достига своя минимум за единствената система от числа, определена от равенствата

$$\alpha_k = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. за коефициентите на Фурие.

Решение. Имаме

$$\|f - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\|^2 = (f - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k, \quad f - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i)$$

$$= (f, f) - 2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(f, \varphi_k) + \sum_{n=1}^{n}\alpha_k^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[(f, \varphi_k)^2 - 2\alpha_k(f, \varphi_k) + \alpha_k^2] + (f, f) - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[(f, \varphi_k) - \alpha_k]^2 + (f, f) - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)^2 \geqq (f, f) - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)^2.$$

Очевидно последното неравенство преминава в равенство точно тогава, когато $\alpha_k = (f, \varphi_k)$. По този начин доказахме, че

$$\min_{\alpha_k}\|f - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\| = \|f - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)\varphi_k\| = (f, f) - \sum_{k=1}^{n}(f, \varphi_k)^2.$$

Тази задача може да се разглежда като задача за най-добра апроксимация в хилбертовото пространство L_2 относно пространството, състоящо се от всички тригонометрични полиноми от степен, не по-висока от n. Получихме, че за всяко $f \in L_2$, най-малкото средно-квадратично отклонение дава този полином, който съвпада с парциалната сума $S_n(x)$ на реда на Фурие за този елемент f.

Аналогични резултати може да се установят и за разлагането по полиномите на Льожандър.

1.22. Докажете, че всяка частично непрекъсната в $[0, \pi]$ функция може да се развие в ред на Фурие по косинуси:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\, dt,$$

като редът е сходящ и редицата от парциалните му суми клони към f в смисъл на средно-квадратичната сходимост.

Решение. Продължаваме $f(x)$ в $[-\pi, \pi]$ до четна функция. Получава се функция $f \in L_2'[-\pi, \pi]$. Нейният ред на Фурие по системата

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

има вида, даден в условието на задачата (поради четността на функцията). Тъй като тази система е пълна в пространството $L_2'[-\pi, \pi]$, то парциалните суми на реда на Фурие клонят към f в смисъл на средно-квадратичната сходимост, т. е.

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

от което следва

$$\int_0^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Изказаното твърдение може да се изрази и по следния начин: Системата от функции

$$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos kx, \ldots$$

е ортогонална и пълна в пространството $L_2'[0, \pi]$.

Подобно твърдение може да се изкаже за функции от пространството $L_2[0, \pi]$.

Разбира се, развитието по косинуси може да се замени с развитие по синуси:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\, dt,$$

и аналогичното твърдение ще бъде вярно.

§ 2. Трансформация на Фурие

В този параграф ще искаме функцията $f(x)$ да бъде дефинирана върху правата $(-\infty, +\infty)$ и да принадлежи на $L_1(-\infty, +\infty)$. Това означава, че $f(x)$ е интегруема в риманов смисъл във всеки интервал и интегралът $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ е сходящ.

При тези условия съществува трансформацията на Фурие

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\lambda x}\, dx. \tag{1}$$

Понякога се среща означението $F(f) = g(\lambda)$, което показва, че към функцията f е приложен операторът на Фурие.

Нека $f(x)$ е частично гладка функция във всеки краен интервал. Тогава в сила е равенството

$$\lim \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} g(\lambda)e^{-i\lambda x}\, dx = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Другояче казано, във всяка точка x, в която имаме равенството $f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, функцията $f(x)$ се разлага в интеграл на Фурие, т. е.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x}\, d\lambda. \tag{2}$$

Тази формула се нарича *формула за обръщането*, а дясната ѝ страна — *обратна трансформация на Фурие*. Може да се запише и така:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} F^{-1}(g),$$

където F^{-1} е обратният оператор на Фурие, приложен към функцията g, т. е. към $F(f)$.

Макар формулите за $g(\lambda)$ и $f(x)$ да изглеждат близки, те се различават не само по главната стойност, която се появява пред интеграла в (2), но и по това, че първата е дефиниция на $g(\lambda)$, а втората — твърдение.

Ако функцията $f(x)$ е четна, то

$$g(\lambda) = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos\lambda x\, dx,$$

което се нарича *косинус-преобразуване* и се означава с $g_c(\lambda)$ или $F_c(f)$. Тогава формулата за обръщането (2) преминава във формулата

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} g_c(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda.$$

Дясната ѝ страна наричаме *обратна косинус-трансформация на Фурие*.

Ако $f(x)$ е нечетна функция, получаваме *права синус-трансформация на Фурие*

$$g_s(\lambda) = 2\int_0^{\infty} f(x)\sin\lambda x\, dx$$

$(F_s(f))$ и *обратна синус-трансформация на Фурие*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} g_s(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda.$$

2.1. Намерете трансформацията на Фурие за функцията $f(x) = e^{-|x|}$.

Решение. По дефиниция

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} e^{i\lambda x}\, dx = \int_0^{\infty} e^{x+i\lambda x}\, dx + \int_0^{\infty} e^{-x+i\lambda x}\, dx$$

$$= \frac{1}{1+i\lambda} e^{(i\lambda+1)x}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-1+i\lambda} e^{(i\lambda-1)x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+i\lambda} + \frac{1}{1-i\lambda} = \frac{2}{1+\lambda^2}.$$

Ако използваме, че функцията $g(x)$ е четна, получаваме

$$g(x) = 2\int_0^{\infty} e^{-x}\cos\lambda x\, dx = \frac{2}{1+\lambda^2},$$

като приложим формулата за интегриране по части два пъти.

Забележка. Всяка функция $f(x)$ можем да представим като сума на две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, първата от които четна, а втората — нечетна. Тогава $F(f) = F(\varphi) + F(\psi)$. От друга страна, $F(\varphi) = F_c(\varphi)$ и $F(\psi) = iF_s(\psi)$, т. е. получаваме

$$F(f) = F_c(\varphi) + iF_s(\psi).$$

Както видяхме,

$$F(f) = F_c(f) = \frac{2}{1+\lambda^2}.$$

2.2. Намерете трансформацията на Фурие за функцията $f(x) = xe^{|-x|}$.

Решение. Тук функцията е нечетна и затова

$$F(f) = iF_s(f) = 2i\int_0^{\infty} xe^{-x}\sin\lambda x\, dx = 4i\,\frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^2}.$$

2.3. Като използвате резултата на зад. 3.17 от гл. 5, докажете, че трансформацията на Фурие (или което е същото, косинус-трансформацията на Фурие) за функцията $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ съвпада със самата функция, умножена с числото $\sqrt{2\pi}$.

2.4. Представете посредством интеграл на Фурие функцията

$$f(x)\begin{cases}1 & \text{за } |x|<1\\ \dfrac{1}{2} & \text{за } |x|=1\\ 0 & \text{за } |x|>1.\end{cases}$$

Решение. Дадената функция е четна, частично гладка, като във всяка точка от правата $(-\infty, +\infty)$ е изпълнено равенството $f(x) = \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. Следователно от формулата за обръщане получаваме

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g_c(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda,$$

където

$$g_c(\lambda) = 2\int_0^1 \cos\lambda x\, dx = \frac{2\sin\lambda}{\lambda}.$$

Оттук следва, че

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{\lambda}\cos\lambda x\, d\lambda.$$

По такъв начин получихме стойност на интеграл, зависещ от параметъра x. Този интеграл се нарича *прекъснат множител на Дирихле.*

Тук трансформацията на Фурие $g(\lambda) = g_c(\lambda)$ е функция, която не принадлежи на $L_1(-\infty, +\infty)$.

2.5. Нека при $x>0$, $a>0$ имаме $f(x) = e^{-ax}$. Представете функцията $f(x)$ посредством интеграл на Фурие, като тя се продължи: **а)** до четна функция; **б)** до нечетна функция.

Решение. а) Когато $f(x)$ е продължена до четна функция, имаме

$$g_c(\lambda) = 2\int_0^\infty e^{-ax}\cos\lambda x\, dx.$$

Тогава за $x>0$ е в сила равенството

$$e^{-ax} = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{a^2+\lambda^2}\, d\lambda;$$

б) Когато $f(x)$ е продължена до нечетна функция, имаме

$$g_s(\lambda) = 2\int_0^\infty e^{-ax}\sin\lambda x\, dx.$$

Тогава за $x>0$ е вярно равенството

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda\sin\lambda x}{a^2+\lambda^2}\, d\lambda.$$

Получените равенства ни дават отново резултатите за интегралите на Лаплас, получени в зад. 3.10, гл. 5.

2.6. Докажете формулите:

а) $\displaystyle \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \ln\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}\cos\lambda x\, d\lambda = \frac{1-e^{-x}}{x}, \quad x>0;$

б) $\displaystyle \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2\lambda}{\lambda^2}\cos 2\lambda x\, dx = \begin{cases}1-x & \text{за } x\in[0,1]\\ 0 & \text{за } x \geqq 1.\end{cases}$

Решение. Пресмятаме косинус-трансформацията на Фурие за функцията

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}.$$

Имаме

$$g_c(\lambda) = 2\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x}\cos\lambda x\, dx = 2\ln\frac{\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}.$$

(Тук използваме резултата от зад. 3.6, гл. 5.)

По такъв начин от формулата

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty g_c(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda$$

получаваме, че за $x \geqq 0$ е в сила равенството

$$\frac{1-e^{-x}}{x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda}\cos\lambda x\,d\lambda.$$

2.7. Проверете формулата за обръщане

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}F^{-1}(g)$$

за функциите:

а) $\cos\frac{x^2}{2}$; б) $\sin\frac{x^2}{2}$.

Р е ш е н и е. Функцията

$$f(x) = \cos\frac{x^2}{2} \qquad \left(f(x) = \sin\frac{x^2}{2}\right)$$

не принадлежи на $L_1(-\infty, +\infty)$, тъй като

$$\int_0^\infty \left|\cos\frac{x^2}{2}\right| dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{|\cos t|}{\sqrt{t}}\,dt,$$

а

$$\frac{|\cos t|}{\sqrt{t}} \geqq \frac{\cos^2 t}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{\cos 2t}{2\sqrt{t}}.$$

Интегралът от второто събираемо е сходящ съгласно критерия на Дирихле, а интегралът от първото е очевидно разходящ. Затова не можем да напишем директно формулата за обръщане, а се налага да я проверяваме:

$$g(\lambda) = 2\int_0^\infty \cos\frac{x^2}{2}\cos\lambda x\,dx$$

$$= \int_0^\infty \cos\left(\frac{x^2}{2} - \lambda x\right)dx + \int_0^\infty \cos\left(\frac{x^2}{2} + \lambda x\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{x^2}{2} - \lambda x\right)dx.$$

Като положим $u = x - \lambda$, получаваме

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\frac{u^2-\lambda^2}{2}\,du = \frac{1}{2}\cos\frac{\lambda^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{u^2}{2}\,du + \frac{1}{2}\sin\frac{\lambda^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\frac{u^2}{2}\,du.$$

Но от зад. 3.12, гл. 5, знаем стойностите на интегралите на Френел:

$$\int_0^\infty \cos\frac{u^2}{2}\,du = \int_0^\infty \sin\frac{u^2}{2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

Тогава

$$g(\lambda) = \sqrt{\pi}\left(\cos\frac{\lambda^2}{2} + \sin\frac{\lambda^2}{2}\right),$$

аналогично

$$g'(\lambda) = 2\int_0^\infty \sin\frac{x^2}{2}\cdot\cos\lambda x\,dx = \sqrt{\pi}\left(\cos\frac{\lambda^2}{2} - \sin\frac{\lambda^2}{2}\right).$$

Проверяваме формулата за обръщане, когато $f(x) = \cos\frac{x^2}{2}$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty g(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\int_0^\infty \cos\frac{\lambda^2}{2}\cos\lambda x\,d\lambda + \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\int_0^\infty \sin\frac{\lambda^2}{2}\cos\lambda x\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\cos\frac{x^2}{2} + \sin\frac{x^2}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\cos\frac{x^2}{2} - \sin\frac{x^2}{2}\right)\right] = \cos\frac{x^2}{2}.$$

Както виждаме, формулата е вярна. Аналогично се проверява в случая, когато $f(x) = \sin\frac{x^2}{2}$.

2.8. Решете интегралното уравнение

$$\int_0^\infty g(\lambda)\sin\lambda x\,dx = f(x),$$

когато:

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin x & \text{за } 0 \leqq x \leqq \pi \\ 0 & \text{за } x \geqq \pi; \end{cases}$ б) $f(x) = e^{-x}$ за $x > 0$.

Р е ш е н и е. б) Решение на уравнението ще бъде синус-трансформацията за функцията $\frac{f(x)}{\pi}$, а именно:

$$g(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x)}{\pi}\sin\lambda x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\sin\lambda x\,dx = \frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}.$$

Отговори

Глава 1. Редици и редове, чиито членове са функции

1.1. д) $x \neq 0$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$; е) $(0, +\infty)$, $f(x) = 0$ за $0 < x < 1$ и $f(x) = \frac{\pi}{2}(x-1)$ за $x \geqq 1$; ж) $(-\infty, +\infty)$, $f(x) \equiv 0$. **1.2.** в) абсолютно сходящ при $x \neq \pm 1$; д) условно сходящ при $x \neq 2k\pi$; е) абсолютно сходящ при $x < 1$ и условно сходящ при $1 \leqq x \leqq 2$. **1.3.** г) равномерно сходяща; д) не е равномерно сходяща; е) не е равномерно сходяща. **1.5.** г) не е равномерно сходяща към $f(x) \equiv 0$; д) равномерно сходяща към $f(x) \equiv 0$; е) не е равномерно сходяща към $\frac{\pi}{2}$; ж) равномерно сходяща към $\frac{\pi}{2}x$; **1.6.** в) не е равномерно сходящ в $(0, +\infty)$; г) равномерно сходящ в $(-\infty, +\infty)$

3.19. $R = 1$, в $x = 1$ разходящ, в $x = -1$ — сходящ. **3.20.** $R = \frac{1}{e^2}$, в $x = \frac{1}{e^2}$ — разходящ, в $x = -\frac{1}{e^2}$ — сходящ. **3.21.** $R = \frac{1}{7}$, в $x = \frac{1}{7}$ — сходящ, в $x = -\frac{1}{7}$ — разходящ. **3.22.** $R = 1$, в $x = 0$, $x = 2$ — абсолютно сходящ. **3.23.** $R = 1$, в $x = -4$, $x = -2$ — абсолютно сходящ. **3.24.** $R = 2$, в $x = \pm 2$ — разходящ. **3.25.** $R = 4$. **3.26.** $R = \sqrt[5]{8}$. **3.27.** $R = 1$. **3.28.** $R = \sqrt{10}$.

4.3. б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$, $|x| < 1$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(1 - 4n)x^{n-1}$, $|x| < 1$. **4.4.** в) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(2^{2n} - 8^{2n}\right)}{(2n)!} x^{2n}$, за всяко x.

4.5. в) $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{3.18^n n!}(x-3)^{2n}$, $x \in [0, 6]$; г) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(n+1)}{(\sin\alpha)^{n+1}} \times$ $\times (x - \cos\alpha)^{n+1}$, $\cos\alpha - \sin\alpha < x < \cos\alpha + \sin\alpha$. **4.6.** б) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) x^n$, $x \in [-2, 2]$; г) $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[n + \frac{1-(-1)^n}{2}\right] x^n$, $|x| < 1$. **4.8.** б) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in [-1, 1]$; в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in [-1, 1]$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}[1 + (-1)^n]\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$, $x \in [-1, 1]$. **4.9.** б) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n}x^{3n}$, $a_{3n} = \frac{(-1)^n}{(2.3)(5.6)\cdots[(3n-1)(3n)]}$; в) $y = \sin\lambda x$, за всяко x.

5.1. б) $f^{(2k-1)}(0) = 0$, $f^{(2k)}(0) = (-1)^{k-1}(2k-1)!2\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1}\right)$.

5.3. б) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^{11}}{5!11} - \frac{x^{15}}{7!15} + \cdots$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{\frac{2n+3}{2}}}{n!(2n+3)}$. **5.4.** б) 0,7635; в) 0,1211.

5.5. б) 0,0953. **5.6.** б) $1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$, $|x| \leqq 1$; д) $(1 + 3x^3)e^{x^3}$, за всяко x.

5.7. б) $\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$; в) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - 2\ln 2$.

Глава 2. Несобствени интеграли

1.2. б) сходящ. **1.3.** в) разходящ. **1.6.** б) сходящ при $p > -2$ и $q - p > 1$. **1.10.** б) сходящ при $p > 1$, q — произволно, $r < 1$ или при $p = 1$, $q > 1$, $r < 1$; г) сходящ при $p < 1$, $q < 1$. **1.28.** в) сходящ при $\gamma - 3\alpha - \beta < 1$. **1.29.** б) сходящ при $\alpha < \frac{2}{5}$. **1.30.** а) сходящ. **1.31.** б) условно сходящ; в) разходящ. **1.32.** б) -4. **1.34.** в) $\frac{\pi}{2} - 1$; г) $-\frac{1}{8}$. **1.35.** б) π; в) $\frac{1}{5}\ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. **1.38.** б) $-\ln\sqrt{3}$.

Глава 3. Граници и непрекъснатост на функции на няколко променливи

1.3. $P(a)$. **1.4.** $R(a)$. **1.6.** б) $\frac{1}{2}$; в) e; г) 1; д) 0; е) e; ж) $-\frac{1}{2}$. **1.7.** б) 0,0; в) 0, не съществува; г) безкрайно голяма, 0; д) не съществува, 1. **1.10.** б) $\frac{1}{2}\sin 2\varphi$; в) 0 (върху Oy функцията не е дефинирана); г) $\operatorname{cotg}\varphi$ при $\varphi \neq 0$, при $\varphi = 0$ — неограничена. **1.11.** а), б), г) не съществува; в) 0. **1.13.** в) 0; г) 0. **1.14.** а) 0; б) 0; в) 1. **1.17.** а) — в), е) — и) няма; г) ∞; д) 0; к) 1. **1.19.** а) 0; б) 0; в) $-\infty$; г) не съществува; д) 0; е) 0; ж) e; з) 0.

2.6. а) прекъсната в $(0, 0)$; б) прекъсната в точките x, y, за които $xy = 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$; в), д), е) непрекъснати. **2.7.** $\frac{y^3}{3}$. **2.8.** $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, $f(0, 0) = 0$.

2.9. $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{за } x > 0,\ 0 < y < x^4 \\ 0 & \text{за останалите } (x, y). \end{cases}$

3.20. не (Например $f(x) = x$ е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$, но x^2 не е равномерно непрекъсната в $\mathbb{R}$). **3.23.** б) не е равномерно непрекъсната. **3.32.** $f_i\left(x^1, \cdots, x^{m+1}\right) = \dfrac{x^i}{1 - x_{m+1}}$, $i = 1, \cdots, m$.

Глава 4. Частни производни

1.1. $f''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$, $f''_{xy} = f''_{yx} = x^{y-1}(1 + y\ln x)$, $f''_{yy} = x^y(\ln x)^2$.

1.2. а) $\dfrac{\partial x_i}{\partial a} = \dfrac{1}{2a^2}\left(b - \varepsilon_i\dfrac{b^2 - 2ac}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)$, $\dfrac{\partial x_i}{\partial b} = \dfrac{1}{2a}\left(-1 + \dfrac{\varepsilon_i b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)$, $\dfrac{\partial x_i}{\partial c} = \dfrac{-\varepsilon_1}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$; б) $\dfrac{\partial a}{\partial b} = \dfrac{b - c\cos\alpha}{a} = \cos\gamma$, $\dfrac{\partial a}{\partial c} = \dfrac{c - b\cos\alpha}{a} = \cos\beta$, $\dfrac{\partial a}{\partial \alpha} = \dfrac{bc\sin\alpha}{a} = h_a$, β и γ — ъгли съответно срещу b и c, h_a — височина към a. **1.5.** а) $\dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Производната $f''_{yx}(x, y)$ не съществува, ако не съществува $\varphi'(y)$. **1.6.)** f е непрекъсната при $xy \neq 0$; f'_x съществува при $x \neq 0$ и в точката $(0, 0)$, f'_y — при $y \neq 0$ и в $(0, 0)$; в $(0, 0)$ съществуват и двете частни производни, а f има прекъсване. **1.7.** б) съществуват още $f'_2(x, y) = -f'_1(y, x)$, $f''_{22}(x, y) = -f''_{11}(y, x)$, $f''_{21}(x, y) = -f''_{12}(y, x)$. **1.8.)** $f'_y(x, y) = \dfrac{x\left(x^2 - y^2\right)}{(x^2 + y^2)^2}$, $f''_{xx}(x, y) = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^3}\left(x^2 - 3y^2\right)$, $f''_{yy}(x, y) = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^3}\left(y^2 - 3x^2\right)$, $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = \dfrac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)^3}$, $(x, y) \neq (0, 0)$. **1.11.** r; $r^2\sin\theta$. **1.13.** В доказателството използваме свойството на F само за правоъгълници със страни, успоредни на координатните оси, и за получените от тях при завъртане на $\dfrac{\pi}{4}$. **1.15.** Заедно с всеки две точки с равни абсциси U съдържа и съединителната им отсечка. Можем да разгледаме околност — кръг, който се съдържа в U. **1.16.** Константите. **1.18.** б) $xz'_x = yz'_y$; в) $xz'_x = yz'_y = 0$; г) $zz''_{xy} = z'_x z'_y$; д) $by^{b-1}z'_x = ax^{a-1}z'_y$; ж) $z'_x z'_y\left(z'_y z'''_{xxy} - z'_x z'''_{xyy}\right) = z''_{xy}\left(z'^2_y z''_{xx} - z'^2_x z''_{yy}\right)$; з) $yz''_{xx} + xz''_{yy} = (x+y)\left(z''_{xy} + \dfrac{z'_x - z'_y}{x - y}\right)$; й) $xz'_x - yz'_y = x$.

1.20. а) $\Delta u(x_1, \cdots, x_m) = f''(r) + \dfrac{m-1}{r}f'(r)$; б) От $y' + \dfrac{m-1}{r}y = 0$ имаме $y = \dfrac{A}{r^{m-1}}$, тогава $f = \dfrac{-A}{(m-2)r^{m-2}} + B$ при $m > 2$, $f = A\ln r + B$ при $m = 2$, $f = Ar + B$ при $m = 1$; срв. със зад. 1.10 з) и и); в) $\Delta(\Delta u) = f^{IV}(r) + \dfrac{2}{r}f'''(r) - \dfrac{1}{r^2}f''(r) + \dfrac{1}{r^3}f'(r)$; г) $g''_{tt} = a^2\left(g''_{rr} + \dfrac{m-1}{r}g'_r\right)$; д) $h''_{tt} = a^2h''_{rr}$. **1.21.** б) $w''_{tt} = a^2w''_{xx}$. **1.23.** б) $X_k(x) = B\sin k\pi x$, $T_k(t) = Ae^{-(ak\pi)^2t}$, $u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t)$, k — цяло число.

2.2. а) $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{15}}, \dfrac{-3}{\sqrt{15}}\right) = f\left(\dfrac{-1}{\sqrt{15}}, \dfrac{3}{\sqrt{15}}\right) = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$ — макс., $f(x, y) = 0$ при $x^2 + y^2 = 1$ — мин.; в) $f(0, 0, 0) = 0$ — мин., $f(0, 0, \pm r) = \dfrac{r^2}{c^2}$ — макс.; г) $f(\pm a, 0, 0) = a^2$ — макс., $f(0, 0, \pm c) = c^2$ — мин.; д) $f\left(\dfrac{ar}{R}, \dfrac{br}{R}, \dfrac{cr}{R}\right) = Rr$ — макс., $f\left(-\dfrac{ar}{R}, -\dfrac{br}{R}, -\dfrac{cr}{R}\right) = -Rr$ — мин., $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; е) $f\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$ — мин., $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) = 1 + \sqrt{2}$ — макс.; ж) $f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$ — макс., $f(x, y) = 0$ при $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ — мин.; з) $f\left(\dfrac{3a}{4}, \pm\dfrac{\sqrt{3}a}{4}, \dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{5a}{4}$ — макс., $f(0, 0, -a) = -a$ — мин.; и) $f(0, 0) = 2$ — макс., $f(0, \pm 1) = 1$ — мин.; й) $f(0, 0, \pm 1) = c - c^2$ — макс., $f(\pm 1, 0, 0) = a^2 - a$ — мин.; к) $f\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{2\pi}{3} + 2l\pi\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ — макс., $f\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{4\pi}{3} + 2l\pi\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ — мин.; л) $f\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{-\pi}{6} + 2l\pi\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ — макс., $f\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, -\dfrac{5\pi}{6} + 2l\pi\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ — мин.; м) $f\left(\dfrac{a}{n}, \cdots, \dfrac{a}{n}\right)\dfrac{a^n}{n^n}$ — макс., $f = 0$, ако някое $x_i = 0$ — мин.; н) $f(\pm 1, 0, 0) = f(0, \pm 1, 0) = f(0, 0, \pm 1) = 1$ — макс., $f\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{9}$ — мин. (в 8 точки); о) $f(k\pi, l\pi, m\pi) = -1$ — мин. $(k + l + m = 1)$, $f(x, y, z) = \dfrac{1}{8}$ — макс., като $x = \dfrac{k\pi}{3}$, $y = \pi l - 2x$, $z = \pi - x - y$, $\dfrac{k}{3}$ не е цяло; п) $f\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 2k\pi\right) = \dfrac{5}{4}$ — макс., $f(0, (2k+1)\pi) = -1$ — мин.; р) $f(1, 1) = e$ — макс., $f\left(1, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -e\sqrt{2}$ — мин.; с) $f(2, 2) = 2^7$ — макс., $f(1, 0) = -2$ — мин.; т) $f(1, 2, 3) = 108$ — макс., $f(x, y, z) = 0$ — мин., ако x, y или $z = 0$; у) $f\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + l\pi, \dfrac{\pi}{2} + m\pi\right) = -1$ — мин. $(k + l + m + 1 = 0)$, $f\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi, \dfrac{\pi}{6} + l\pi, \dfrac{\pi}{6} + m\pi\right) = \dfrac{1}{8}$ — макс. $(k + l + m = 0)$ или $f\left(-\dfrac{\pi}{6} + k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + l\pi, -\dfrac{\pi}{6} + m\pi\right) = \dfrac{1}{8}$ — макс. $(k + l + m = 1)$; ф) $f(0, 0, 0) = 0$ — мин., $f(0, 0, \pm 1) = 2$ — макс. **2.3.** а) $\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2 + c^2}, \dfrac{b}{a^2 + b^2 + c^2}, \dfrac{c}{a^2 + b^2 + c^2}\right)$.

2.4. б) $f(1, 1) = 0$ — мин., няма макс.; в) $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}$ — мин., няма макс.;

34

г) $f\left(\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3}\right) = \frac{11}{\sqrt[3]{3}}$ — мин., няма макс.; д) $f(0,0) = 0$ — мин., $f(0, \pm 1) = \frac{2}{e}$ — макс.; е) $f(0,0,0) = 0$ — мин., $f(1,0,0) = \frac{1}{e}$ — макс.; ж) $f(2,1) = \frac{2}{5}e^3$ — макс., $f(x,0) = f(0,y) = 0$ — мин.; з) $f(1,\cdots,1) = n$ — мин., няма макс.; и) $f\left(\frac{bc}{a+b}, \frac{ac}{a+b}\right) = \frac{abc^2}{a+b}$ — мин., ако $a > 0$ и $b > 0$ (и тогава няма макс.); макс., ако $a < 0$ и $b < 0$ (тогава няма мин.). В други случаи за a и b не се достига нито мин., нито макс., освен при $(a, b) = (0, 0)$; й) $f(0,0) = 0$ — мин., $f\left(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{4}$ — макс. **2.5.** а) всяка точка от съединителната отсечка на двете дадени точки; б) Ако в триъгълника има ъгъл, по-голям или равен на 120°, търсената точка е върхът при този ъгъл. В противен случай това е точката, от която трите му страни се виждат под ъгъл 120°; в) Ако са дадени $x_i \in \mathbb{R}^m$, то $x = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$. **2.6.** $\frac{1}{\pi^3}(96 - 24\pi)x + \frac{8\pi - 24}{\pi^2} = 0{,}66444x + 0{,}11477$. **2.7.** $a = \frac{1}{3}$. **2.8.** $d = \frac{|(r_2 - r_1, a_2, a_2)|}{|a_1 \times a_2|}$, $r_i = (x_i, y_i, z_i)$, $a = (l_i, m_i, n_i)$, $i = 1, 2$ (ако $a_1 \not\parallel a_2$). **2.9.** връх в първи октант $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$. **2.10.** не. **2.14.** а) $A \approx -0{,}354$, $B \approx -0{,}857$, $f_{\min} \approx 0{,}3465$; б) $A = u(0,0) = -\frac{5}{6} \approx -0{,}556$; в) $B = u(0,0) = -\frac{32}{\pi^4} \approx -0{,}331$, $\tau \approx -0{,}537$. **2.15.** $V_{\max} = 15{,}75$ дм^2.

3.7. $\Delta(\Delta v) = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + 2\left(\frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial x^2}\right) = 0$.

4.3. $f(x, y) = ax + by$. **4.5.** в) допирателна: $x + y - 2z = 0$, нормала: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(f'_x + f'_y\right)$. **4.9.** а) $\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ e^x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **4.10.** а) r; б) r; в) $r^2 \sin\theta$; г) $r^{m-1}\sin^{m-2}\varphi_1 \cdots \sin\varphi_{m-2}$. **4.11.** Това е детерминантата на Вандермонд $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$. **4.14.** $\operatorname{div} F = P'_x + Q'_y + R'_z$, $\operatorname{rot} F = \left(R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y\right)$.

5.1. б) $G''_{vv} = g''_{xx}{x'_v}^2 + 2g''_{xy}x'_v y'_v + g''_{yy}{y'_v}^2 + g'_x x''_{vv} + g'_y y''_{vv}$

$$= \left(x'_v \frac{\partial}{\partial x} + y'_v \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 g + x''_{vv}\frac{\partial g}{\partial x} + y''_{vv}\frac{\partial g}{\partial y},$$

$$G''_{uv} = G''_{vu} = g''_{xx}x'_u x'_v + g''_{xy}\left(x'_u y'_v + x'_v y'_u\right) + g''_{yy}y'_u y'_v + g'_x x''_{uv} + g'_y y''_{uv}$$

$$= \left(x'_u \frac{\partial}{\partial x} + y'_u \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(x'_v \frac{\partial}{\partial x} + y'_v \frac{\partial}{\partial y}\right) g + x''_{uv}\frac{\partial g}{\partial x} + y''_{uv}\frac{\partial g}{\partial y}.$$

5.3. а) xyz; ж) $u'_x + u'_y + u'_z = 0$. **5.8.** В решението на зад. 5.7. ограниченията не могат да се намалят по същия начин. **5.14.** $\frac{\dot{y}z'_x - \dot{x}z'_y}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$.

6.1. а) $df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$; б) $dF = \left(f'_x + f'_z z'_x\right)dx + \left(f'_y + f'_z z'_y\right)dy$; в) $d\Phi = \left(f'_x + f'_y y' + f'_z z'\right)dx$. **6.2.** а) $yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$, $x > 0$; б) $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, $x \neq 0$; в) $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$; д) $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; е) $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, $x \neq y$; ж) $\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$; $x^2 + y^2 < 1$, ако $xy > 0$; з) $\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2}$; и) $-\left(\frac{dx + dy}{x + y}\right)^2$, $x + y \neq 0$; й) $6dxdydz$; к) $-\frac{6}{x^4}(ydx - xdy)(dx)^2$; л) $e^{x+y}(dx + dy)^n$; м) $\frac{2xydx^2 + \left(y^2 + x^2\right)dxdy - 2xydy^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

6.4.* б) $\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} + xy + yz + zx + c$; в) $\frac{\left(x^2 + y^2\right)^2}{xy} + c$, c — константа.

6.6. б) 2,95. **6.7.** б) Обемът $V = \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| dudvdw$.

7.1. а) $1 + ax + by + o(r)$; б) $1 + 2x + \frac{y}{3} - \frac{z}{4} + o(r)$; в) $3 + \frac{x-1}{2} + 2(y-2) + o(r)$; д) $1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + o(r^2)$; е) $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + o(r^2)$; ж) $xy + yz + zx + o(r^2)$; з) $\frac{\pi}{4} + x - xy + o(r^2)$. **7.4.** г) $B = \alpha \neq 0$, $A = 1 - \alpha$, $C = D = \frac{1}{2\alpha}$. При $\alpha = \frac{1}{2}$ — т. нар. „поправен“метод на Ойлер, а при $\alpha = 1$ — „модифициран“метод на Ойлер; д) $A = 0$, $B = 1$, $C = 2$; е) $A = 1$, $B = \frac{3}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$; ж) $A = -9$, $B = 9$, $C = 1$, $D = E = 6$; з) $A = -8$, $B = 9$, $C = \frac{17}{3}$, $D = \frac{14}{3}$, $E = -\frac{1}{3}$; и) $A = 1$, $B = C = \frac{1}{2}$, й) $A = 0$, $B = 1$, $C = E = \frac{1}{3}$, $D = \frac{4}{3}$. **7.7.** Като вземем вместо p_i и q_i точките x_i и y_i, имаме: а) $\delta \leqq \frac{(b-a)^2}{2n}M_1$, ако $|f'| \leqq M_1$; б) $\delta \leqq \frac{M_1}{2n}(b-a)(d-c)[(b-a) + (d-c)]$, ако $|f'_x| \leqq M_1$ и $|f'_y| \leqq M_1$.

8.1. в) в $(0, 0)$ — лок. мин; г) $(0, 0)$ — седловидна точка; з) в $(2, -2)$ и $(-2, 2)$ — лок. мин., в $(0, 0)$ няма лок. екстр.; й) виж. зад. 2.16; к) в $(1, -1)$ — лок. мин., в $(-1, 1)$ — лок. макс.; л) в $(\pm 1, 0)$ — мин., в $(0, 0)$ няма лок. екстр.; н) в $(1, 1, 1)$ — лок. макс., в точките $x = 0$, $2y + 3z = 7$ няма лок. екстр., в $(x, 0, z)$ има нестрог лок. екстр. при $x \neq 0$, $z \neq 0$, $7 - x - 3z \neq 0$, в противен случай няма лок. екстр., в $(x, y, 0)$ няма лок. екстр.; о) $(1, -2)$ — седловидна; п) $(1, -2)$ — седловидна; р) в $(0, \pm 1)$ и $(\pm 1, 0)$ няма лок. екстр., в $\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2e}}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2e}}\right)$ — лок. мин., в $\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2e}}, \frac{-\varepsilon}{\sqrt{2e}}\right)$ — лок. макс., $\varepsilon = \pm 1$; с) $x = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{12} + (m + n)\frac{\pi}{2}$, $y = x - n\pi$; при четно $m + n$ — седловидна точка; при нечетно $m + n$ — лок. мин., ако m е четно, лок. макс., ако m е нечетно; т) в $(2k\pi, (2l+1)\pi)$ няма лок. екстр.; у) $(1,1)$ и (e, e) — седловидни точки, в $(1, e)$ — лок. мин., в $(e, 1)$ — лок. макс.; ф) в (a, a) — лок. мин. при $a > 0$ и лок. макс. при $a < 0$; $(0, 0)$, $(0, 3a)$ и $(3a, 0)$ — седловидни точки при $a \neq 0$; в $(0, 0)$ няма лок. екстр.; х) $(0, 0)$ седловидна точка, в $\left(\frac{\varepsilon a}{\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon b}{\sqrt{3}}\right)$ — лок. макс., в $\left(\frac{\varepsilon a}{\sqrt{3}}, -\frac{\varepsilon b}{\sqrt{3}}\right)$ — лок. мин., $\varepsilon = \pm 1$; ц) в $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ — лок. макс., в $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ — лок. мин.; ч) в $(2k\pi, 0)$ — лок. макс., в $((2k-1)\pi, -2)$ няма лок. екстр.; ш) в $(1, 3)$ — лок. макс., в $\left(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26}\right)$ — лок. мин.; щ) в $(0, 0)$ — лок. мин., $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ — седловидна; ъ) в $\left(\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}, \sqrt[3]{\frac{b^2}{a}}\right)$ — мин. при $ab > 0$, макс. при $ab < 0$. **8.2.** б) в $(1, 2, 3)$ — лок. макс., в $(6-z, 0, z)$ при $0 < z < 6$ — нестрог лок. мин., при $z < 0$ или $z > 6$ — нестрог лок. макс. **8.3.** в $(0, 0)$ — лок. мин.

9.1. б) ако $f(t) \neq t$ и $x \neq 0$: $\dfrac{dz}{f(z) - z} = \dfrac{dx}{x}$. **9.2.** б) $u'' + a^2 u = 0$; $u'' - a^2 u = 0$; в) $u'' + u = 0$; г) $u'' + u = 0$. **9.4.** Ако $B^2 - 4AC < 0$, то $C \neq 0$. Намираме λ и μ от уравненията: $\lambda + \mu = -\dfrac{B}{C}$, $\lambda\mu = \dfrac{B^2 - 2AC}{2C^2}$. **9.5.** б) $w''_{rr} + \frac{1}{r}w'_r + \frac{1}{r^2}w''_{\varphi\varphi}$. **9.6.** Ако $w(r, \theta, \varphi) = u(r\sin\theta\cos\theta, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$, то: а) $w_r'^2 + \frac{1}{r^2}w_\theta'^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}w_\varphi'^2$; б) $\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 w'_r) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta w'_\theta) + \frac{1}{\sin^2\theta}w''_{\varphi\varphi}\right]$. **9.7.** Нека за б) — л) и р) новата функция е $w(u, v)$, а за м) — п) и с) е $q(u, v, w)$: б) $w'_u = 0$; в) $w'_u = 0$; г) $uw'_u = w$; д) $w'_u = w'_v$; е) $\dfrac{w_u'^2 + w_v'^2}{u^2 + v^2}$, $(u, v) \neq (0, 0)$; ж) $w''_{uv} = 0$; з) $w''_{uv} = \sin w$; и) $w''_{uu} - w'_u = 0$; й) $w''_{uu} = 0$; к) $w''_{uu} + w''_{vv} = 0$; л) $w''_{uv} = 0$; м) $q''_{uu} + q''_{vv} + q''_{ww} = 0$; н) $uq'_u + vq'_v + wq'_w = 0$; о) $u^2 q''_{uu} + v^2 q''_{vv} + w^2 q''_{ww} = 0$; п) $q''_{ww} = 0$; р) $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(u\dfrac{\partial w}{\partial v}\right) = 0$; с) $q'_u = 0$.

10.1. а) безброй много; 4; 2; б) При $x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ — едно решение, при $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ — две, при $x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ — три. Уравнението се удовлетворява от една непрекъсната функция, дефинирана в $\mathbb{R}$, и от две, дефинирани в $\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}, \infty\right)$. **10.2.** б) $z'_x = 1$, $z'_y = \dfrac{z - x}{(z-x)^2 + y^2 + y}$, напр. около $\left(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$; в) $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$, $y'' = 2\dfrac{x^2 + y^2}{(x-y)^2}$, напр. около $(1, 0)$; г) $dz = \dfrac{z(ydx + zdy)}{y(x+z)}$, $d^2 z = -\dfrac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x+z)^3}$, напр. около $(1,1,1)$; д) $dz = \dfrac{(x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy}{-(z^2 - xy)}$, напр. около $(1, 1, -2)$. **10.3.** б) $y(-1) = 2$ — лок. макс., $y(1) = -2$ — лок. мин.; в) $y(\sqrt[8]{3}) = \sqrt[8]{27}$ — лок. макс., $y(-\sqrt[8]{3}) = -\sqrt[8]{27}$ — лок. мин.; г) $y\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{9}{4}$ — лок. макс.; д) $z(0, 0) = 2\sqrt[3]{2}$ — лок. макс.; е) Няма лок. екстр. в точките, в които съществуват z'_x и z'_y. **10.4.** г) $z(x, y) = 1 + 2dx - dy - 8(dx)^2 + 10dxdy - 3(dy)^2 + o(r^2)$ при $(x, y) \to (1, 1)$. Тук $dx = x - 1$, $dy = y - 1$, $r = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

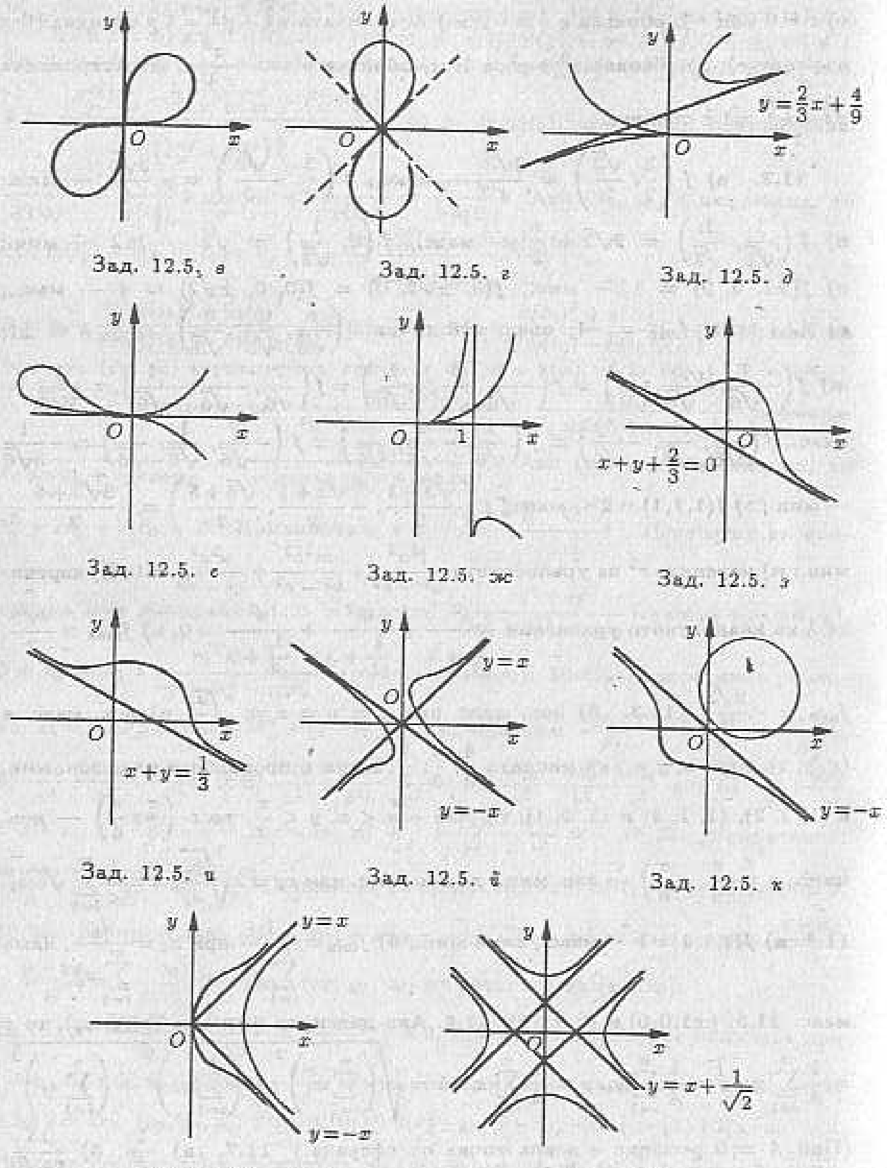
10.6. а) $y' = -\dfrac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}$, $y'' = -\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}\dfrac{1}{(Bx + Cy + E)^3}$. **10.8.** Нека $f, g, \varphi \in C^p(\mathbb{R})$, $h \in C^p(\mathbb{R})$; съществува точка (x_0, y_0, z_0), в която даденото равенство е изпълнено и освен това: б) $h'_1(z_0, x_0 z_0 - y_0) + x_0 h'_2(z_0, x_0 z_0 - y_0) \neq 0$, $p = 1$; в) $bf'(y_0 - bz_0) \neq a$, $p = 1$; г) $y_0 \neq 0$, $\frac{x_0}{y_0}f'\left(\frac{z_0}{y_0}\right) \neq 1$, $p = 1$; д) $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$, $\frac{1}{y_0}h'_1\left(x_0 + \frac{z_0}{y_0}, y_0 + \frac{z_0}{x_0}\right) + \frac{1}{x_0}h'_2\left(x_0 + \frac{z_0}{y_0}, y_0 + \frac{z_0}{x_0}\right) \neq 0$, $p = 1$; е) $2z_0 f'(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) \neq c$, $p = 1$; ж) $ah'_2(x_0 y_0, az_0) \neq 1$, $p = 2$; з) $f'(by_0 + z_0) \neq 1$, $p = 2$; и) $f'(y_0 + z_0) \neq 1$, $p = u$; й) $z_0 \neq 0$, $f'(z_0^2 e^{x_0 + y_0}) \neq 0$, $p = u$; к) $f'(x_0 + z_0) \neq 1$, $p = 3$; л) $x_0 \neq 0$, $h'_1\left(x_0^2 - 4z_0, \frac{(x_0 + y_0)^2}{x_0}\right) \neq 0$, $p = 2$; м) $x_0 f'(z_0) + g'(z_0) \neq 0$, $p = 2$; н) $f'(z_0 - x_0) \neq g(y_0)$, $p = 2$. **10.9.** а) $x^2 z''_{xx} + 2xz'_x = y^2 z''_{yy} + 2yz'_y$; б) $y^2 z''_{xx} + xz'_x = x^2 z''_{yy} + yz'_y$; в) $\left(x + z'_y\right)^2 z''_{xx} = (y + z'_x)^2 z''_{yy}$; г) $(xz''_{xx} - z'_x)(yz''_{yy} - z'_y) = xyz''^2_{xy}$; д) $(y - z)z''_{xx} = z''_{xy} + z'^2_x$. **10.10.** а) $y'' = 2$, $z'' = 6x$, $t \neq \pm 1$; в) $y' = -\dfrac{(z-x)(u-x)}{(z-y)(u-y)}$, $z' = -\dfrac{(y-x)(u-x)}{(y-z)(u-z)}$, $u' = -\dfrac{(y-x)(z-x)}{(y-u)(z-u)}$, $(z-y)(u-y)(u-z) \neq 0$; г) $\dfrac{\partial x_1}{\partial a} = -\dfrac{bx_1 + c}{a^2(x_2 - x_1)}$, $\dfrac{\partial x_1}{\partial b} = \dfrac{x_1}{a(x_2 - x_1)}$, $\dfrac{\partial x_1}{\partial c} = \dfrac{1}{a(x_2 - x_1)}$, $\dfrac{\partial x_2}{\partial a} = \dfrac{bx_2 + c}{a^2(x_2 - x_1)}$, $\dfrac{\partial x_2}{\partial b} = -\dfrac{x_2}{a(x_2 - x_1)}$, $\dfrac{\partial x_2}{\partial c} = \dfrac{-1}{a(x_2 - x_1)}$; срв. със зад. 1.2.а. **10.12.** За точката $(1, -1, -2, -2)$: $u''_{xx}(1, -1) = -\dfrac{55}{32}$, $v''_{xy}(1, -1) = -\dfrac{25}{32}$. Ако $xy \neq 0$, то $-5 \leqq xy < 0$, $u = \varepsilon\sqrt{-y^2 - 5\frac{y}{x}}$, $v = \varepsilon\sqrt{-x^2 - 5\frac{x}{y}}$, $\varepsilon = \pm 1$. **10.13.** Нека $f, g \in C^2(\mathbb{R})$; има точка (x_0, y_0, z_0, u_0), която удовлетворява дадената система и освен това: а) $f'(u_0) \neq 0$, $(x_0 + u_0)f''(u_0) + 2f'(u_0) \neq 0$; б) $f'(z_0) + x_0 \neq 0$. **10.14.** Нека $f, g \in C^p(\mathbb{R})$, $h \in C^p(\mathbb{R}^2)$ и дадената система има решение (x_0, y_0, z_0, u_0), за което: а) $z_0 > 0$, $f''(u_0) + x_0\cos u_0 + y_0\sin u_0 \neq 0$, $p = 2$; б) $z_0 \neq f(u_0)$, $x_0^2 + f'^2(u_0) - (z_0 - f(u_0))f''(u_0) \neq 0$, $p = 2$; в) $y_0 f''(u_0) + g''(u_0) \neq 0$, $p = 3$; г) $x_0 \neq 0$, $h''_{11}(x_0 u_0, y_0 z_0) \neq 0$, $y_0 h'_2(x_0 u_0, y_0 z_0) - x_0 \neq 0$, $p = 3$; д) $x_0 h'_1(x_0 z_0 + y_0, x_0 + u_0) - 1 \neq 0$,

$h''_{22}(x_0z_0+y_0, x_0+u_0) \neq 0$, $p=3$; е) $h'_2(u_0, x_0y_0+z_0)-1 \neq 0$, $h''_{11}(u_0, x_0y_0+z_0) \neq 0$, $p=3$; **10.17.** б) $g \in C^1(\mathbb{R})$, $z_0 = g(f(x_0, y_0, z_0))$, $g'(f(x_0, y_0, z_0))f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 1$. **10.21.** а) Ако (x_0, y_0) е инфлексна точка, то в нея $F''_{xx}F'^2_y - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}F'^2_x = 0$, $k = \dfrac{\left|F'^2_yF''_{xx} - 2F'_xF'_yF''_{xy} + F'^2_xF''_{yy}\right|}{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{\frac{3}{2}}}$; б) $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$; допирателна: $\dfrac{x-x_0}{\dot{x}(t_0)} = \dfrac{y-y_0}{\dot{y}(t_0)}$; нормала: $\dfrac{x-x_0}{\dot{y}(t_0)} = \dfrac{y-y_0}{-\dot{x}(t_0)}$. Ако (x_0, y_0) е инфлексна, то $\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0) = 0$, $\quad k = \dfrac{|\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0)|}{(\dot{x}(t_0)^2 + \dot{y}(t_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$\alpha = x_0 - \dfrac{\dot{x}(t_0)^2 + \dot{y}(t_0)^2}{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0)}\dot{y}(t_0)$, $\beta = y_0 + \dfrac{\dot{x}(t_0)^2 + \dot{y}(t_0)^2}{\dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0) - \ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0)}\dot{x}(t_0)$; г) Нека точката (x_0, y_0) се получава при $\varphi = \varphi_0$, $r = r(\varphi)$, $r_0 = r(\varphi_0)$, $\dot{r}_0 = \dot{r}(\varphi_0)$, $\ddot{r}_0 = \ddot{r}(\varphi_0)$; допирателна: $\dfrac{x-x_0}{\dot{r}_0\cos\varphi_0 - r_0\sin\varphi_0} = \dfrac{y-y_0}{\dot{r}_0\sin\varphi_0 + r_0\cos\varphi_0}$; нормала: $\dfrac{x-x_0}{\dot{r}_0\sin\varphi_0 + r_0\cos\varphi_0} = \dfrac{y-y_0}{-(\dot{r}_0\cos\varphi_0 - r_0\sin\varphi_0)}$. Ако (x_0, y_0) е инфлексна, то $r_0^2 + 2\dot{r}_0^2 - r_0\ddot{r}_0 = 0$. Кривината е $k = \dfrac{\left|r_0^2 + 2\dot{r}_0^2 - r_0\ddot{r}_0\right|}{\left(r_0^2 + \dot{r}_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Центърът на кривината има координати: $\alpha = r_0\cos\varphi_0 - \dfrac{{r_0}^2 + \dot{r}_0^2}{r_0^2 + 2\dot{r}_0^2 - r_0\ddot{r}_0}(\dot{r}_0\sin\varphi_0 + r_0\cos\varphi_0)$, $\beta = r_0\sin\varphi_0 + \dfrac{{r_0}^2 + \dot{r}_0^2}{r_0^2 + 2\dot{r}_0^2 - r_0\ddot{r}_0}(\dot{r}_0\cos\varphi_0 - r_0\sin\varphi_0)$. **10.22.** допирателна равнина: $(x-x_0)F'_x + (y-y_0)F'_y + (z-z_0)F'_z = 0$; нормала: $\dfrac{x-x_0}{F'_x} = \dfrac{y-y_0}{F'_y} = \dfrac{z-z_0}{F'_z}$; а) $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 0$; б) $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} - \dfrac{zz_0}{c^2} = 0$ и $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} - \dfrac{zz_0}{c^2} = 0$; в) $\dfrac{xx_0}{p} + \dfrac{yy_0}{q} = z + z_0$; г) $\dfrac{xx_0}{p} - \dfrac{yy_0}{q} = z + z_0$; д) $\dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} - \dfrac{zz_0}{c^2} = 0$. **10.23.** допирателна: $\dfrac{x-x_0}{A} = \dfrac{y-y_0}{B} = \dfrac{z-z_0}{C}$; нормална равнина: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$. **10.24.** допирателна: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$; нормала: $\dfrac{x-x_0}{A} = \dfrac{y-y_0}{B} = \dfrac{z-z_0}{C}$. Точката (x_0, y_0, z_0) е съответна на (u_0, v_0). **10.26.** а) $\dfrac{x-x_0}{-y_0} = \dfrac{y-y_0}{x_0} = \dfrac{z-z_0}{c}$, $c \neq 0$, точката (x_0, y_0, z_0) се получава при $t = t_0$; б) $x\sin v_0 - y\cos v_0 + \dfrac{u_0}{c}z = u_0v_0$, $c \neq 0$; в) $xx_0 + yy_0 + zz_0 = a^2$, $(2x_0 - a)x + 2y_0y = ax_0$, $(x_0, y_0, z_0) \neq (a, 0, 0)$; г) $3(x_0^2 - y_0)(x-x_0) - 3x_0(y-y_0) + 2(z-z_0) = 0$, точката (x_0, y_0, z_0) е съответна на (u_0, v_0), $u_0 \neq v_0$; д) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$. **10.27.** а) обвивка $y^2 = x$; б) — г) обвивка $y = 0$; д) $y = 0$ не е обвивка;

е) $x = 0$ или -1; обвивка е $x = -1$; ж) Астроидата $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ е обвивка (без върховете); з) обвивка $x^2 + y^2 = 1$; и) обвивка $y^2 = -\dfrac{x^3}{x+1}$; й) Астроидата $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ е обвивка.

11.2. а) $f\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ — макс., $f\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ — мин.; в) $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2} + \dfrac{\pi}{2}$ — макс., $f\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2$ — мин.; г) $f(\pm 1, 0, 0) = 1$ — мин., $f(0, \pm\sqrt{2}, 0) = f(0, 0, \pm\sqrt{2}) = 4$ — макс.; е) $f_{\max} = 1$, $f_{\min} = -1$; общо в 8 точки: $\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \dfrac{\xi}{\sqrt{3}}, \dfrac{\eta}{\sqrt{3}}\right)$, $\varepsilon, \xi, \eta = \pm 1$; ж) $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) = f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ — макс., $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = f\left(-\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ — мин.; з) $f(1,1,1) = 2$ — макс., $f\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+5}{2}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}+5}{2}$ — мин.; и) корените r^2 на уравнението $\dfrac{l^2a^2}{a^2-r^2} + \dfrac{m^2b^2}{b^2-r^2} + \dfrac{u^2c^2}{c^2-r^2} = 0$; й) корените λ на квадратното уравнение $\dfrac{l^2}{\frac{1}{a^2}+\lambda} + \dfrac{m^2}{\frac{1}{b^2}+\lambda} + \dfrac{u^2}{\frac{1}{c^2}+\lambda} = 0$; к) $f_{\max} = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$, $f_{\min} = -\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **11.3.** б) лок. макс. при $x = y = z = \sqrt{\dfrac{a}{3}}$; в) лок. макс. в (x, y, z), като x, y и z са числата $\dfrac{4}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{7}{3}$, взети в произволен ред; лок. мин. в $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ и $(2, 2, 1)$; г) Ако $-\dfrac{\pi}{2} < x, y < \dfrac{\pi}{2}$, то в $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}\right)$ — лок. макс., в $\left(-\dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{6}\right)$ — лок. мин.; д) лок. мин. при $x_i = \lambda\sqrt{\dfrac{b_i}{a_i}}$, $\lambda = \dfrac{1}{c}\sum\limits_{i=1}^{m}\sqrt{a_ib_i}$. **11.4.** а) $f(1,1,1) = 1$ — макс., няма мин.; б) $f_{\min} = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m}a_i^2}$ при $x_k = \dfrac{a_k}{\sum\limits_{i=1}^{m}a_i^2}$, няма макс. **11.5.** $(\pm 1, 0, 0)$ и $(0, \pm 1, 0)$. **11.6.** Ако дадените точки са (x_i, y_i, z_i), то $x = \dfrac{1}{A}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, $y = \dfrac{1}{A}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$, $z = \dfrac{1}{A}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i$, $A = \sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\right)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n}z_i\right)^2}$. (При $A = 0$ решение е всяка точка от сферата.) **11.7.** а) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\dfrac{15}{26\sqrt{2}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **11.11.** Образуващата на конуса сключва с основата му ъгъл $\arcsin\dfrac{2}{3}$.



Зад. 12.5. в   Зад. 12.5. г   Зад. 12.5. д

Зад. 12.5. е   Зад. 12.5. ж   Зад. 12.5. з

Зад. 12.5. и   Зад. 12.5. й   Зад. 12.5. к

Зад. 12.5. л   Зад. 12.5. м

Фиг. 56

12.5. в) — м) на фиг. 56.

13.1. б) $u''=0$; в) $u''+\left[q(x)-\frac{1}{4}p^2(x)-\frac{1}{2}p'(x)\right]u=0$; г) $u''+u=e^t$; д) $u'''=0$; е) $u''-u'=\frac{u}{(a-b)^2}$; ж) $-\frac{1}{u'^2}S(u)$; и) $\frac{\left|r^2+2\dot{r}^2-r\ddot{r}\right|}{(\dot{r}^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$; й) $r=\dot{r}$; к) $u''+(3+u)u'+2u=0$; л) $u''+8uu'^3$; м) $r'=ar^3$, $\varphi'=-1$. **13.2.** а) $w'_u=\frac{1}{a}$; б) $w'_u=0$; в) $w'_v=0$; г) $w'_v=0$; д) $\xi q=\xi\eta$; е) $w'_u=f(v)$; ж) $w'_u=0$; и) $w''_{uu}=w'_v$; й) $w''_{uu}=0$; к) $w''_{uu}=0$; л) $w\left(w''_{uu}+w''_{vv}\right)=w'^2_u+w'^2_v$; м) $w''_{uu}+w''_{vv}+w'^2_u+w'^2_v=0$; о) $w'_v w''_{uu}-w'_u w''_{uv}=0$; п) $r'_\varphi=0$. **13.3.** а) $u'=x$, $u''=\frac{1}{y''}$, $u'''=-\frac{y'''}{(y'')^3}$; б) $f(p,q)w''_{qq}-2g(p,q)w''_{pq}+h(p,q)w''_{pp}=0$.

14.1. $x=1,363$, $y=2,239$. **14.2.** $0,3181316+i1,3372356$. **14.3.** $a\approx 0,6914$, $b\approx 0,6167$, максималната грешка е $\delta\approx 0,027$. (В същото време дори за формулата $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ грешката в $[0,1]$ може да надмине 0,05, а едва за $e^x\approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$ грешката в $[0,1]$ е по-малка от 0,01.) $\alpha\approx\frac{1}{4,68}$, $\delta\approx 0,0046$. **14.4.** а) $f_{\min}=f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\sqrt[3]{4}\right)=3\sqrt[3]{2}=3,77976$; б) 0,728; в) 0; г) $x=y=\pm\sqrt{2}\approx\pm 1,414$. **14.5.** а) $\ln 2\approx 0,693147$; б) 1,3179; в) $G\approx 0,916$. **14.6.** б) 0,35. **14.7.** б) 1,56. **14.10.** $f(1,\infty)=3$, $f(2,\infty)=4$, $f(3,\infty)=5$. Така се получава и при $k=\frac{1}{2}$, но при $k=1$ или $k=\frac{2}{3}$ няма стабилизиране при $y\to\infty$. **14.11.** При $k=\frac{1}{2};\ \frac{1}{5}$ съответно $f(1,1)\approx 1;\ 1,4$, $f(2,1)\approx 2;\ 2,1$, $f(3,1)\approx 4;\ 4$.

Глава 5. Интеграли, зависещи от параметър

1.20. $\pi\arcsin\frac{1}{a}$. **1.21.** $\pi\arcsin a$. **1.28.** а) $2\alpha e^{-\alpha^5}-e^{-\alpha^3}-\int\limits_{\alpha}^{\alpha^2}x^2e^{-\alpha x^2}dx$; б) $-\left(e^{\alpha|\sin\alpha|}\sin\alpha+e^{\alpha|\cos\alpha|}\cos\alpha\right)+\int\limits_{\sin\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}e^{\alpha\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{b+\alpha}\right)\times$ $\times\sin(b+\alpha)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{a+\alpha}\right)\sin\alpha(a+\alpha)$; г) $\frac{2}{\alpha}\ln\left(1+\alpha^2\right)$; д) $f(\alpha,-\alpha)+2\int\limits_0^\alpha f'_u(u,v)dx$, където $u=x+\alpha$, $v=x-\alpha$; е) $2\alpha\int\limits_{\alpha^2-\alpha}^{\alpha^2+\alpha}\sin\left(y^2+\alpha^4-\alpha^2\right)dy+2\int\limits_0^\alpha\sin 2x^2\cos 2\alpha x\,dx$

$-2\alpha\int\limits_0^{\alpha^2}\left[\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\cos\left(x^2+y^2-\alpha^2\right)dy\right]dx$. **1.29.** $3f(\alpha)+2\alpha f'(\alpha)$. **1.34.** $\pi\arcsin\alpha$.

1.36. а) $\operatorname{arctg}\dfrac{b-a}{1+(a+b)(b+1)}$; б) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$. **1.39.** $E'(k)=\dfrac{1}{k}[E(k)$ $-F(k)]$; $F'(k)=\dfrac{1}{k(1-k^2)}E(k)-\dfrac{1}{k}F(k)$.

2.21. Не е равномерно сходящ. **2.22.** и **2.23.** Те са равномерно сходящи относно y (при $x=0$) в областта $y\geqq y_0>0$ и не са равномерно сходящи в областта $y>0$. **2.24.** а) равномерно сходящ; б) Не е равномерно сходящ. **2.25.** Не е равномерно сходящ. **2.26.** Не е равномерно сходящ. **2.27.** а) равномерно сходящ; б) Не е равномерно сходящ. **2.28.** равномерно сходящ. **2.29.** равномерно сходящ.

3.17. $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}l^{-a^2}$. **3.18.** $\dfrac{\pi}{4}[\operatorname{sign}(1+a)+\operatorname{sign}(1-a)]$. **3.19.** $\ln\dfrac{(2\alpha)^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}{(\alpha+\beta)^{2(\alpha+\beta)}}$.

3.20. $\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{m}$. **3.21.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-2\sqrt{a}}$. **3.22.** $\sqrt{\pi}(b-a)$. **3.23.** $\dfrac{1}{4}\ln\left(1+\dfrac{4b^2}{a^2}\right)$.

3.24. $b\operatorname{arctg}\dfrac{2b}{a}-\dfrac{a}{4}\ln\left(1+\dfrac{4b^2}{a^2}\right)$. **3.25.** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2a^3}be^{-\frac{b^2}{a^2}}$. **3.26.** $(-1)^n\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}}\dfrac{d^{2n}e^{-\beta^2}}{d\beta^{2n}}$.

3.27. $\pi\left(\dfrac{b}{2}-\sqrt{a}\right)$. **3.28.** $\dfrac{\pi}{b}\ln(a+b)$. **3.29.** $\pi\left(\sqrt{1-a^2}-1\right)$. **3.30.** $\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-a}}{2}$.

3.31. $-(\arcsin\alpha)^2$. **3.32.** $\dfrac{\pi}{2}\ln\left(1+\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$. **3.33.** $\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^\alpha\beta^\beta}$. **3.34.** $\dfrac{\pi}{2}\times$ $\times\left[(\alpha^2-\beta^2)\ln(\alpha+\beta)-\alpha^2\ln\alpha+\beta^2\ln\beta+\alpha\beta\right]$. **3.35.** $2\pi[(a+b)\ln(a+b)-a\ln a-b\ln b]$, ако $a>0$, $b>0$. **3.36.** $-\dfrac{\pi}{2}(a+b)$ при $a>0$, $b>0$.

4.28. $\dfrac{1}{m}B\left(\dfrac{p}{m},q\right)=\dfrac{1}{m}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{p}{m}\right)+\Gamma(q)}{\Gamma\left(\dfrac{p}{m}+q\right)}$. **4.29.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **4.30.** $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{\pi}{n}}$.

4.31. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\dfrac{1}{na^p}B\left(\dfrac{m+1}{n},p-\dfrac{m+1}{n}\right)$. Интегралът е сходящ при $0<\dfrac{m+1}{n}<p$. **4.32.** $\dfrac{1}{2}B\left(\dfrac{m+1}{2},\dfrac{n+1}{2}\right)$. Интегралът е сходящ, ако $m>-1$, $n>-1$. **4.33.** $\dfrac{\pi}{2\cos\dfrac{n\pi}{2}}$. Интегралът е сходящ при $|n|<1$.

4.34. $\dfrac{1}{|n|}\Gamma\left(\dfrac{m+1}{n}\right)$, $\dfrac{m+1}{n}>0$. **4.35.** $\Gamma(p+1)$, $p>-1$.

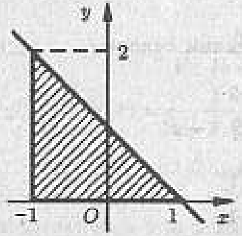
Глава 6. Многократни интеграли

1.5. На фиг. 57.

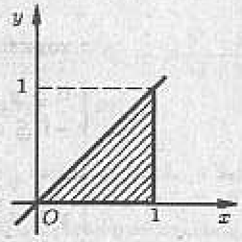
с вертикални основи	с хоризонтални основи
а) $\left\lvert\begin{array}{l}-1\leqq x\leqq 1\\ 0\leqq y\leqq 1-x\end{array}\right.$	$\left\lvert\begin{array}{l}0\leqq y\leqq 2\\ -1\leqq x\leqq 1-x;\end{array}\right.$
б) $\left\lvert\begin{array}{l}0\leqq x\leqq 1\\ 0\leqq y\leqq x\end{array}\right.$	$\left\lvert\begin{array}{l}0\leqq y\leqq 1\\ y\leqq x\leqq 1;\end{array}\right.$
в) $\left\{\begin{array}{l}\left\lvert\begin{array}{l}0\leqq x\leqq 1\\ 0\leqq y\leqq\sqrt{2x-x^2}\end{array}\right.\\ \text{и}\\ \left\lvert\begin{array}{l}1\leqq x\leqq 2\\ 0\leqq y\leqq 2-x\end{array}\right.\end{array}\right.$	$\left\lvert\begin{array}{l}0\leqq y\leqq 1\\ 1-\sqrt{1-y^2}\leqq x\leqq 2-y;\end{array}\right.$
г) $\left\{\begin{array}{l}\left\lvert\begin{array}{l}0\leqq x\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq 1+\sqrt{1-x^2}\end{array}\right.\\ \text{и}\\ \left\lvert\begin{array}{l}\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq x\leqq 1\\ 1-\sqrt{1-x^2}\leqq y\leqq 1+\sqrt{1-x^2}\end{array}\right.\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}\left\lvert\begin{array}{l}\frac{1}{2}\leqq y\leqq 1\\ \sqrt{1-y^2}\leqq x\leqq\sqrt{2y-y^2}\end{array}\right.\\ \text{и}\\ \left\lvert\begin{array}{l}1\leqq y\leqq 2\\ 0\leqq x\leqq\sqrt{2y-y^2};\end{array}\right.\end{array}\right.$
д) $\left\{\begin{array}{l}\left\lvert\begin{array}{l}0\leqq x\leqq 2\\ 2x\leqq y\leqq 8x\end{array}\right.\\ \text{и}\\ \left\lvert\begin{array}{l}2\leqq x\leqq 4\\ 2x\leqq y\leqq 24-4x\end{array}\right.\end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l}\left\lvert\begin{array}{l}0\leqq y\leqq 8\\ \frac{y}{8}\leqq x\leqq\frac{y}{2}\end{array}\right.\\ \text{и}\\ \left\lvert\begin{array}{l}8\leqq y\leqq 16\\ \frac{y}{8}\leqq x\leqq\frac{24-y}{4};\end{array}\right.\end{array}\right.$
е) $\left\lvert\begin{array}{l}0\leqq x\leqq 1\\ -\arccos x\leqq y\leqq\arccos x\end{array}\right.$	$\left\lvert\begin{array}{l}-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}\\ 0\leqq x\leqq\cos y.\end{array}\right.$

1.13. На фиг. 58, а) $\dfrac{4}{3}$; б) $-\dfrac{1}{6}$; в) $\dfrac{64}{3465}$; г) $\dfrac{165}{128}-\ln 2$; д) $\dfrac{3025}{648}$; е) $\dfrac{2}{5}$; ж) $\dfrac{32}{45}a^2$; з) $\dfrac{1}{84}$; и) $\dfrac{1}{3}$; к) -2; л) $\dfrac{9\sqrt{3}-16}{8}$; м) $\dfrac{1}{2}$; н) $\dfrac{9}{4}$. **1.16.** На фиг. 59, а) $1-\dfrac{\pi}{4}$; б) $1-\dfrac{\pi}{4}$. **1.26.** $a+\ln(1-a)$. **1.27.** $\ln 2.\ln\dfrac{5}{3}$. **1.28.** $\dfrac{\pi^2}{4}$. **1.29.** $-\dfrac{\ln 2}{2}$. **1.30.** $\dfrac{\pi^2}{4}$.

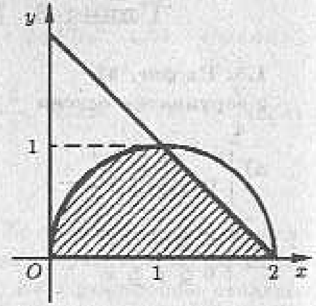
2.8. а) $\dfrac{3\pi}{2048}$; б) $\dfrac{1}{32}\left(4\sqrt{17}-7\sqrt{2}+\ln\dfrac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}}\right)$;



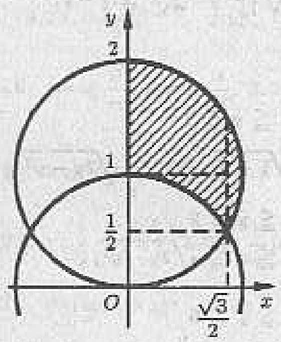
Зад. 1.5. а



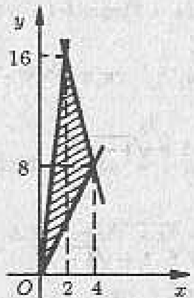
Зад. 1.5. б



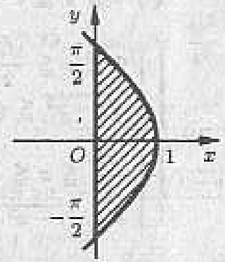
Зад. 1.5. в



Зад. 1.5. г

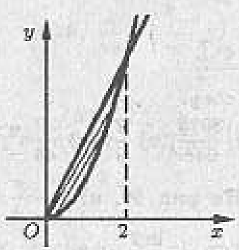


Зад. 1.5. д

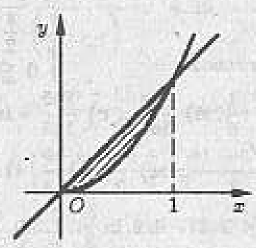


Зад. 1.5. е

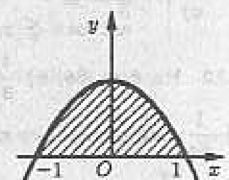
Фиг. 57



Зад. 1.13. а

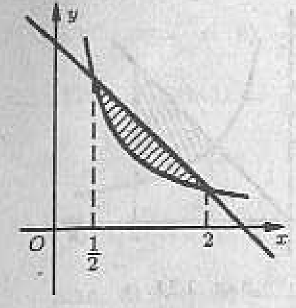


Зад. 1.13. б

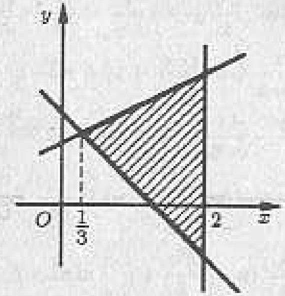


Зад. 1.13. в

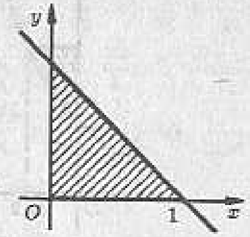
Фиг. 58



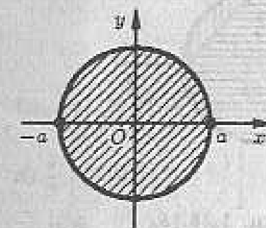
Зад. 1.13. г



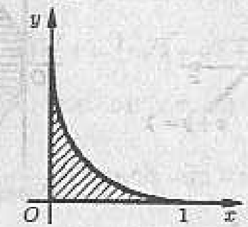
Зад. 1.13. д



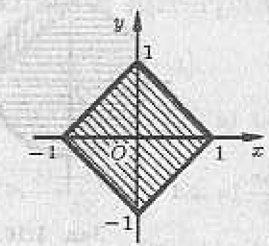
Зад. 1.13. е



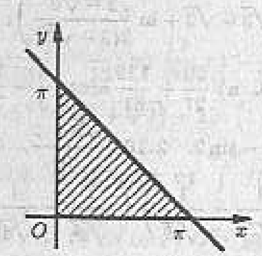
Зад. 1.13. ж



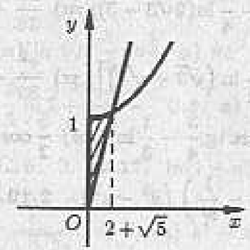
Зад. 1.13. з



Зад. 1.13. и

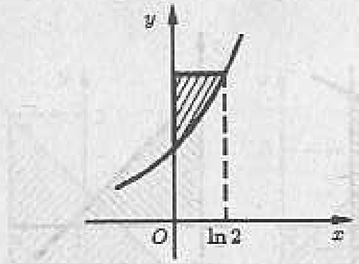


Зад. 1.13. к

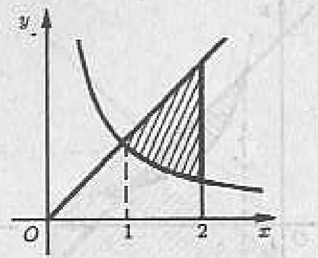


Зад. 1.13. л

Фиг. 58

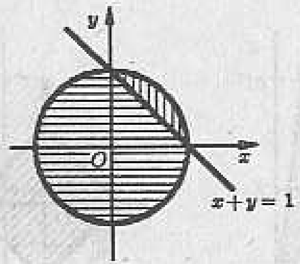


Зад. 1.13. м

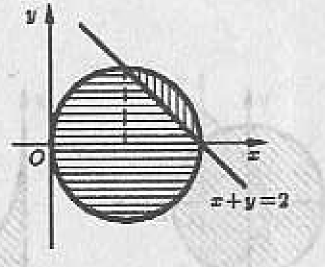


Зад. 1.13. н

Фиг. 58



Зад. 1.16. а



Зад. 1.16. б

Фиг. 59

в) $\frac{\sqrt{6}}{100}-\frac{1}{1000}\ln\frac{5+\sqrt{24}}{2}-\frac{21}{3200}$; г) $\pi\frac{3\sqrt{3}-4}{144}$; д) $\frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{3}}{32}$;
е) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{3}{4}\ln(2\sqrt{3}-3)$; ж) $\frac{5\pi}{36}+\frac{1}{48}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{3})}\right)$;
з) $\frac{\sqrt{2}\pi}{16}\left[\sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]$; и) $\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{4}$. **2.9.** а) $\frac{20}{27}+\frac{125}{81}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\ln 9$;
б) $\frac{5}{16}+\frac{125}{192}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\ln 4$; в) $\frac{3}{2}\cos 1-\cos 2-\sin 2$. **2.16.** $\frac{\sqrt{8}-1}{9}$. **2.17.** $\frac{4}{21}$.
2.18. $\frac{1}{28}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left(d^2-c^2\right)$. **2.19.** $\frac{5}{48}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{a^6}}-\frac{1}{\sqrt[5]{b^6}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt[5]{c^8}}-\frac{1}{\sqrt[5]{d^8}}\right)$.

3.10. $\frac{5\pi}{8}$. **3.11.** $\frac{1}{4}\pi ab(a^2+b^2)$. **3.12.** $\frac{a^3b^3}{3}+\frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}}(a^4+b^4)$. **3.13.** $\frac{ab}{70}$.
3.14. $\frac{ab}{12}$. **3.15.** $\frac{8\pi}{3}+\frac{6\sqrt{3}}{5}$, $\frac{16\pi}{3}-\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

4.17. а) $\frac{19}{24}\pi$; б) $\frac{\pi}{2\sqrt{5}}-\frac{\pi}{12}-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{32}-\frac{\pi}{96}$; г) $\frac{\pi}{36}+\frac{\sqrt{3}}{24}$;
д) $\frac{1}{7}(27\ln 2-17\ln 3)$; е) $\frac{1}{90}\left[2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})\right]$; ж) $\frac{\pi^2}{64\sqrt{2}}$. **4.18.** $\frac{19}{6}\pi a^3$, $\frac{29}{6}\pi a^3$.
4.19. $\frac{3\pi a^3}{32}$. **4.20.** $\frac{\pi R^5}{5}(2-\sqrt{2})$; б) $\left(\frac{11}{324}-\frac{\pi\sqrt{3}}{54}+\frac{1}{16}\ln 3\right)$; в) $\frac{5a^6}{1536}$;
г) $\left(-\frac{83}{1120}\sqrt{3}+\frac{64}{630}\sqrt{2}\right)\pi$; д) $\frac{\pi}{216}\left[16\pi-6\sqrt{3}-3\ln(2+\sqrt{3})\right]$.

6.14. б) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$; в) $\frac{6\pi}{25\sqrt{5}}$; г) $2\pi\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; д) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; е) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$;
ж) $\frac{p+q}{(p^2+1)(q^2+1)}$; з) $\frac{pq-1}{(p^2+1)(q^2+1)}$; и) $\frac{\pi}{2\sqrt{(a^2+b^2+1)^3}}$; к) $\frac{\pi}{2}$; л) $\frac{\pi}{4}$; м) $\frac{\pi}{4}$.

Глава 7. Криволинейни и повърхнинни интеграли

1.3. а) $6a$. **1.4.** б) $\pi\sqrt{2+4\pi^2}+\ln\left(\pi\sqrt{2}+\sqrt{1+2\pi^2}\right)$; г) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.
1.5. а) $2\pi\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}+b\right)$; б) $2\pi a$. **1.6.** 24. **1.7.** а) $2\pi r^{2n+1}$; б) $2\pi r\sqrt{2r}$; в) $4a^{\frac{7}{3}}$;
д) $\frac{1}{3}\left[\left(2+t_0^2\right)^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{3}{2}}\right]$; ж) $\frac{1}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38}-72-17\ln\frac{25+4\sqrt{38}}{17}\right)$. **1.9.** а) $\frac{\pi a^2}{2}$;
б) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; в) $\frac{1}{3}\left[\left(R^2+1\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$. **1.10.** а) $4a^2$; б) 0,0; в) $4a^4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}\right)$, $\frac{4a^4}{3}$.
1.11. а) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-e^{-t_0}\right)$. **1.12.** а) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\ln\left(1+\frac{4\pi^2b^2}{a^2}\right)$;
б) $\frac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$.

2.3. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{17}{30}$; г) $-\frac{1}{20}$. **2.5.** а) 0; б) $\frac{3}{16}\pi a^{\frac{4}{3}}$; в) πa^2; д) $-\frac{1}{2}$; е) 2.
2.7. а) $\frac{2}{3}$; б) $\ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)-2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\frac{2}{3}\ln 2+\frac{\pi+4}{3}$. **2.9.** а) πab; б) $\frac{3\pi a^2}{8}$;
в) $\frac{3a^2}{2}$; **2.12.** б) 0; в) 0; г) $\int\limits_0^{a+b} f(u)du$. **2.16.** 0. **2.17.** $\ln(1+a)$. **2.19.** б) 0.
2.22. а) e^3; б) 0; в) 0; г) $\sqrt{6}$; д) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{1+2e}}$; е) 0; ж) $e^4+e+e^{-1}-e^{-2}$.
2.23. $\sqrt{\frac{3c}{2}}$.

3.6. б) π; в) πab. **3.7.** а) 0; д) 2π. **3.8.** а) 0; б) 2π; в) 0; г) 2π; д) 2π.

4.4. а) $\pi\left(a\sqrt{1+a^2}+\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)\right)$; б) $\dfrac{64\sqrt{2}}{15}a^4$.

4.5. а) $\dfrac{2}{3}\pi ab\left[\left(1+c^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$; б) $\dfrac{2}{3}a^2\left(\dfrac{10}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)$; в) $4R^2\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$; г) $4R^2$; е) $4\pi^2 ab$; ж) $2\sqrt{2\pi}$; з) $\sqrt{2\pi a^2}$; и) $\dfrac{20}{9}-\dfrac{\pi}{3}$. **4.9.** а) $\dfrac{4\pi}{3}$; б) 4π; в) $\dfrac{104}{3}$; г) $2\pi\sqrt{2}$; д) $\dfrac{\pi}{12}\left(8-5\sqrt{2}\right)$; е) $\dfrac{5}{12}$; ж) $2\pi a^2$; з) $3\pi a^2$; и) $\dfrac{3}{2}$; к) $\dfrac{5\pi}{4}$.

5.1. а) 0; б) 0; в) 4π; г) $-\dfrac{13}{6}\sqrt{3}$; д) $\dfrac{\pi a^2}{2}$. **5.2.** б) 0; в) 0; г) 16; д) 24π; е) 48π; ж) $\dfrac{243\pi}{2}$; з) 135π. **5.7.** а) $\dfrac{12}{5}a^5$; б) π; в) 1.

Глава 8. Редове на Фурие. Трансформация на Фурие

1.1. б) $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ за $x\in(-\pi,\pi)$, $x\neq 0$. **1.2.** б) $|\cos x| =\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}\cos 2nx}{4n^2-1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$. **1.4.** б) $\sin ax=\dfrac{2\sin a\pi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin nx}{a^2-n^2}$.

1.6. а) $x^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}+\dfrac{4}{\pi n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin nx$, $x\in[0,\pi)$; в) $x^2=\dfrac{\pi^2}{6} +2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos nx}{n^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{\pi}{n}(-1)^{n+1}+\dfrac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n-1\right]\right\}\sin nx$, $x\in[0,\pi)$; г) $x^2=\dfrac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n}$, $x\in(0,2\pi)$. **1.7.** $\operatorname{sign}(\sin x)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$. **1.8.** $\dfrac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$, $x\in(0,2\pi)$. **1.10.** в) $\dfrac{\pi-x}{2}$, $x\in(0,2\pi)$;

г) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4} & \text{за } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\dfrac{\pi}{4} & \text{за } x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right];\end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}(\cos x\ln 2\cos x+x\sin x) & \text{за } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\\ -\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}[\cos x\ln 2|\cos x|+(x-\pi)\sin x] & \text{за } x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$

Литература

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1977.
2. Гребенча, М. К., С. И. Новоселов. Курс математического анализа. М., 1961.
3. Давыдов, Н. А., П. П. Коровкин, В. А. Никольский. Сборник задач по математическому анализу. М., 1964.
4. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., 1963.
5. Запорожец, Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М., 1964.
6. Задачи по анализ (циклостилни записки, издадени от колектив при сектор Реален и функционален анализ). 1972.
7. Илин, В. А., В. А. Садовничи, Б. Х. Сендов. Математически анализ. Ч. 1 и 2, С., 1979.
8. Кудрявцев, Л. Д., А. Д. Кутасов, В. И. Чехлов, М. И. Шабунин. Сборник задач по математическому анализу. Ч. 1, М., 1984; Ч. 2, М., 1986.
9. Ляшко, И. И., А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, Г. П. Головач. Справочное пособие по математическому анализу. Ч. 1 и 2, Киев, 1979.
10. Ляшко, И. И., А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. Математический анализ. Киев, Ч. 1, 1983; Ч. 2, 1985.
11. Марон, И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах, функции одной переменной. М., 1973.
12. Проданов, И. Р., Н. Г. Хаджииванов, И. Г. Чобанов. Сборник от задачи по диференциално и интегрално смятане. С., 1992.
13. Тагамлицки, Я. А. Диференциално смятане. Интегрално смятане. С., 1971.
14. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I, II и III. М., 1969.
15. Marsden, J., A. Weinstein. Calculus. New York — Berlin — London, 1980.